ISSN 2541-7746



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ казанского университета

СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ



Tom 166

Книга 4

Ученые записки Казанского университета. 2024 Серия Физико-математические науки

Т. 166. кн. 4

рецензируемый научный журнал

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Релакционная коллегия

Главный редактор

- Д.А. Таюрский д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия Члены редколлегии
- А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- И.С. Александрова (секретарь) Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- М.М. Арсланов д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

- Р.З. Даутов д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- А.Г. Егоров д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- Э. Лайтинен д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

- А.Г. Мельников доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия
- С.Р. Насыров д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- В.Н. Паймушин д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- М.Х. Салахов д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- Ю.Г. Смирнов д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
- В.Ф. Тишкин д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия
- О.Н. Шерстюков д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- Ю.В. Шестопалов д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА Российский технологический университет, г. Москва, Россия
- М. Шнейдер д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США
- Ю.И. Шокин д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста А.О. Кармазина

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18 Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: http://kpfu.ru/uz-rus/phm

Дата выхода в свет 2.12.2024. Формат 70×108/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 17,19. Уч.-изд. л. 13,07. Тираж 300 экз. Заказ 2/12

Отпечатано в типографии Издательства Казанского университета 420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

© Казанский федеральный университет, 2024

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

Vol. 166

2024

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

no. 4

Peer-Reviewed Scientific Journal

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

- Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia
- Irina S. Aleksandrova (Secretary) Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova - Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Andrey G. Egorov - Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen - Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider - Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: A.O. Karmazina

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Kazan (Volga Region) Federal University" The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technologies and Mass Media Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

Registration certificate PI No. FS//-418/5 dated August 2/, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: http://kpfu.ru/uz-eng/phm

Date of publication: December 2, 2024. Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional printing sheet: 17.19. Publisher's signature: 13.07. Circulation: 300 copies. Order: 2/12 Printed in KFU Publishing House ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia

© Kazan Federal University, 2024

2024, Т. 166, кн. 4 С. 455–659

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

СОДЕРЖАНИЕ

Агапкин Е.В., Печников А.А., Сухов А.М. Об одном подходе к определению индекса качества публикационной активности авторов	
и организаций	455
Гайнутдинова А.Ф. Квантовые и классические недетерминированные OBDD	470
<i>Елизаров А.М., Писляков В.В.</i> Журнальный импакт-фактор: математические и статистические свойства	485
Каленова В.И., Морозов В.М., Тихонов А.А. Задача стабилизации углового лвижения спутника в геомагнитном поле	499
Карпов А.В., Сарычев Д.В. Компьютерная модель двухступенчатой системы лиагностики ЛЭП с древовидной топологией	518
Кугуракова В.В. Формальный подход к пространственно-временному	
моделированию игровых систем	532
Кузнецова Е.Л., Орехов А.А., Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных теплозащитных композиционных материалах	
в условиях аэродинамического нагрева Лямина Е.А., Каленова Н.В. Анализ напряжений в упругопластическом	555
диске гиперболического профиля под действием термомеханической нагрузки	566
Прокопьев Н.А. Автоматизированная оценка ответов при контроле знаний для вопросов типа «Определение» и «Описание»	580
<i>Тушавина О.В.</i> Экспериментально-теоретическое определение каталитических и излучающих характеристик	
антиокислительных и антиэрозионных покрытии высокоскоростных летательных аппаратов	594
Усманов Д.И., Поташев К.А., Салимьянова Д.Р. Идентификация граничных условий фильтрационной модели нефтяного пласта но заморам дардония в скражицах. Часть 1: Однородний	
пласт	603
Халиуллин Р.Ф., Сулимов А.И. Оценка вклада многократно рассеянных радиоволн в импульсную характеристику канала беспроводной	
СВЯЗИ	624
Шалагин С.В. Решение задачи коммивояжёра методом статистических испытаний при использовании сложных цепей Маркова	639
Эшкабилов Ю.Х., Истамов Ж.З. О свойствах стохастических операторов порядка ν в конечномерном симплексе	651

2024, vol. 166, no. 4 pp. 455–659

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

CONTENTS

Agapkin E.V., Pechnikov A.A., Sukhov A.M. A new approach to measuring	
the quality index of publishing activity for authors	
and institutions	455
Gainutdinova A.F. Quantum and classical nondeterministic OBDDs	470
Elizarov A.M., Pislyakov V.V. Journal impact factor: Mathematical	
and statistical properties	485
Kalenova V.I., Morozov V.M., Tikhonov A.A. The problem of satellite attitude stabilization in the geomagnetic field	499
Karpov A.V., Sarychev D.V. Computer model of a two-stage diagnostic system for power transmission lines with tree topology	518
Kugurakova V.V. A formal approach to spatio-temporal modeling of game	532
Kuznetsova E.L., Orekhov A.A., Formalev V.F. Heat and mass transfer in anisotropic heat-protective composite materials under aerodynamic	001
heating	555
Lyamina E.A., Kalenova N.V. Stress analysis of a hyperbolic elastic-plastic disk under thermomechanical loading	566
Prokopyev N.A. Automatic grading of answers in knowledge control for "Definition" and "Description" question types	580
Tushavina O.V. Experimental and theoretical study of catalytic and radiative characteristics of anti-oxidation and anti-erosion coatings	504
for high-speed aircraft	594
Usmanov D.I., Potashev K.A., Salimyanova D.R. Identifying boundary conditions of an oil reservoir flow model from well pressure manual post 1. Homogeneous recencion	602
Interstitements. Fait 1. Homogeneous reservoir	005
<i>Khaliullin R.F., Sulimov A.I.</i> Assessing the contribution of multiply scattered radio waves to the impulse response of a wireless channel	624
Shalagin S.V. Solving the traveling salesman problem by statistical testing using complex Markov chains	639
Eshkabilov Yu.Kh., Istamov J.Z. Properties of stochastic operators of order ν on a finite-dimensional simplex	651

2024, Т. 166, кн. 4 С. 455–469 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.9: 005.513

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.455-469

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИНДЕКСА КАЧЕСТВА ПУБЛИКАЦИОННОЙ АКТИВНОСТИ АВТОРОВ И ОРГАНИЗАЦИЙ

Е.В. Агапкин¹, А.А. Печников², А.М. Сухов¹

¹Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, 443086, Россия

²Карельский научный центр Российской академии наук, г. Петрозаводск, 185035, Россия

Аннотация

Современные библиографические базы данных содержат гигантское количество информации, поэтому иногда выделяют так называемое ядро, используемое для оценки наиболее качественной составляющей массива публикаций. В таких случаях наукометрический показатель продуктивности автора, известный как индекс Хирша, можно вычислять как по всей базе, так и по ее ядру. В настоящей работе введен показатель индекса качества публикационной активности авторов и организаций как отношение индекса Хирша по всей базе к индексу Хирша по ее ядру. В этом случае объектами для сравнения могут быть как отдельные авторы, так и подразделения и вузы в целом, а также фиксация роли авторов в организации с точки зрения их публикационной активности. На примере Самарского национального университета проиллюстрировано применение такого подхода и предложен ряд управленческих решений с целью повышения качества публикационной активности вуза.

Ключевые слова: библиометрия, наукометрия, индекс Хирша, библиографическая база, eLIBRARY

Введение

Повышение качества университетского образования в России – это задача, которая требует постоянного внимания. Качественное образование предполагает, что занятия ведутся преподавателями-исследователями, которые специализируются в соответствующей области знаний [1]. Во всем мире первоклассные научные труды являются отличительной чертой хорошего преподавателя, поэтому научноисследовательская работа является важной и неотъемлемой частью преподавательского труда.

Если для учебной нагрузки есть единые подходы как для оценки ее объёма, так и качества, то для научно-исследовательской компоненты критерии оценки достаточно размыты [2]. Хотя в индивидуальных планах преподавателей и есть соответствующий раздел, он рассматривается скорее формально и никак не влияет на уровень оплаты труда. Вместе с тем в российских вузах действует положение об эффективном контракте, в котором оценивается вклад во все области университетской жизни, включая и научно-исследовательскую работу [3]. Рекомендательное письмо Минобрнауки РФ дает большой простор для разработки эффективных контрактов в вузах, «... исходя из тактических и стратегических задач, а также текущей ситуации в образовательной организации» [4].

За последние десятилетия подходы к оценке научно-исследовательской работы преподавателей вузов изменялись неоднократно [5]. Сначала учитывалось общее количества цитат на публикации автора, потом основными показателями стали индекс Хирша и импакт-фактор журнала, где напечатана статья. Изменялись перечни журналов и наукометрические базы данных, по которым определяются показатели, во многом использовались данные зарубежных баз Web of Science и Scopus, однако с началом специальной военной операции зарубежные системы цитирования отказались от сотрудничества с Россией и закрыли доступ к своим данным [6]. В настоящее время произошел переход на российские аналоги, к которым относятся РИНЦ и ядро РИНЦ [7].

В попытках разработать единый подход для оценки научных достижений в выигрыше попеременно оказывались различные научные направления. При опоре на иностранные библиографические системы преимущество было у естественнонаучных специальностей и частично технических [8]. При переходе на РИНЦ, как представляется авторам статьи, такое преимущество получают юристы, экономисты и гуманитарии. Данные, приводимые в настоящей статье, подтверждают этот тезис.

В то же время хотелось бы иметь сбалансированный подход, который позволял бы оценивать и сравнивать не только различные научные отрасли, но и междисциплинарные исследования, причем объектами для сравнения должны стать как отдельные научно-педагогические работники, так и вузы в целом и их подразделения.

В представленном исследовании сделана попытка разработки такого подхода с использованием широко известного индекса Хирша [9], связывающего продуктивность и цитируемость публикаций автора. В части сравнительного анализа публикаций по РИНЦ и его ядру предложенный метод уже применялся в работах [10, 11].

Особенность подхода заключается в определении в рамках одной библиографической базы так называемого индекса качества публикационной активности авторов и организаций как отношения индекса Хирша по всей базе к индексу Хирша по ядру, представляющему собой наиболее качественную составляющую всего массива изданий.

Непосредственным поводом для написания статьи послужил эффективный контракт Самарского национального исследовательского университета (СНИУ), где наукометрические показатели измеряются по РИНЦ [12], поэтому апробация предлагаемого подхода проведена по данным eLIBRARY для СНИУ.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе описан подход к определению качества публикационной активности авторов и организаций. Третий раздел содержит некоторые сведения о Научной электронной библиотеке [7] и вычислении индекса качества публикаций для авторов и организаций по данным eLibrary. В четвертом разделе приведены результаты апробации предлагаемого подхода на примере СНИУ. Далее обсуждены полученные результаты, сформулированы основные выводы и предложены управленческие решения с целью повышения качества оценки публикационной активности вуза.

1. Описание подхода к определению качества публикационной активности авторов и организаций

Цитируемость [13] и индекс Хирша [9] представляют собой давно известные и часто используемые наукометрические показатели с очевидной связью между ними. Индекс Хирша представляет собой максимальное число публикаций автора H, каждая из которых цитируется H или более раз. Формально он определяется следующим образом: $H = \max(i : C_i \ge i)$. В оригинальной работе Хирша обоснована квадратичная зависимость между общим количеством цитирований K автора и индексом Хирша H [9]. Работа [14] содержит описание трех моделей, интерпретирующих индекс Хирша через параметры распределений цитирования.

Пусть публикации автора (или организации в целом, как все публикации ее сотрудников) упорядочены в порядке убывания общего количества их цитируемости C_i . Индекс *i* в данном случае совпадает с порядковым номером публикации в ранжированном списке. Полученную зависимость $C_i(i)$, как правило, описывают обобщенным распределением Ципфа [15]. Точка Хирша *H* представляет собой пересечение кривой распределения Ципфа и прямой, описывающей число публикаций (см. рис. 1).



Рис. 1. Нахождение индекса Хирша

Запишем математическое выражение, описывающее обобщенное распределение Ципфа как

$$C_i = A_1 / i^a, \tag{1}$$

где A_1 – количество цитирований наиболее популярной публикации (i = 1), i – номер публикации в ранжированном списке, α – показатель степенной зависимости. Взяв десятичный логарифм от обеих частей уравнения (1), получим

$$\log C_i = \log A_1 - \alpha \log i, \tag{2}$$

что позволяет вычислить значение α .

Выберем публикацию, которая цитируется один раз и имеет наибольшее значение V в ранжированном списке. Заметим, что для $C_i = 1$ выражение в левой части уравнения равно 0, тогда $\alpha = \frac{\log A_1}{\log V}$.

Применив (1) к точке Хирша Н, получим

$$H = \frac{A_1}{H^{\alpha}},\tag{3}$$

откуда следует

$$H^{1+\alpha} = A_1. \tag{4}$$

Для случаев, когда $\alpha \approx 1$, имеем

$$H \approx \sqrt{A_1}.\tag{5}$$

Пусть L – число уникальных статей автора, тогда, просуммировав (1) по i от 1 до L, получим соотношение

$$K = A_1 \sum_{1}^{L} i^{-\alpha}.$$
 (6)

Таким образом, переменные K и A_1 пропорциональны $(A_1 = \gamma K)$, что соответствует результату, приведенному в [14].

На практике при больших значениях L для приближенного вычисления K можно использовать формулу

$$K = \int_{1}^{L} \frac{A_1}{x^{\alpha}} \, dx. \tag{7}$$

Коэффициент пропорциональности γ для больших значений L можно найти из уравнения (7) как $\gamma = \frac{1}{\ln L}$.

В [14] приведено значение подобного коэффициента, найденное эмпирическим путем. Величина ln L изменяется от 3 до 5, что соответствует количеству публикаций соответствующего автора в интервале от 20 до 150. Тогда для $\alpha \approx 1$ имеем из (5)

$$H \approx \sqrt{\frac{K}{\ln L}}.$$
(8)

Крупные библиографические базы, содержащие информацию о миллионах научных публикаций, выделяют в своем составе так называемое «ядро», представляющее собой сформированное тем или иным способом множество авторитетных журналов и других изданий. Например, в Web of Science это Web of Science Core Collection [16], а в eLIBRARY.RU – так называемое «ядро РИНЦ» [7]. Очевидно, что индекс Хирша по ядру всегда будет иметь меньшее значение, чем по всему множеству изданий.

Для оценки качества публикационной активности авторов и организаций в рамках одной библиографической базы мы предлагаем ввести индекс качества в виде соотношения $\frac{H_{core}}{H_{all}}$, где H_{all} – индекс Хирша, вычисляемый по всем изданиям, а H_{core} – индекс Хирша, вычисляемый по ядру, для авторов и организаций соответственно. Обозначим индекс качества отдельного автора d, а индекс качества организации D. Под организацией могут пониматься как вузы, институты и другие субъекты научной деятельности, так и их подразделения, в которых работает определенное количество авторов.

Поскольку индексы Хирша H_{all} и H_{core} вычисляются на основе ссылок, сделанных из публикаций, входящих во все издания библиографической базы и только из её ядра, содержательно индекс качества публикационной активности показывает качество публикаций как их оценку в виде цитирования: чем ближе к единице значение индекса качества, тем выше эта оценка.

Заметим, что применимость индекса качества ограничивается рядом условий. Первое из них относится к количеству публикаций, и, как сказано ранее, их должно быть не менее 20. В этом случае для вычисления авторского индекса качества *d* может быть использована формула

$$d = \frac{H_{core}}{H_{all}},\tag{9}$$

где значения H_{all} и H_{core} берутся из базы или вычисляются по данным о цитировании публикаций автора.

Второе условие, а именно, 150 публикаций в качестве верхней границы, вызывает определенные сомнения в корректности подхода, используемого для вычисления индекса Хирша для организаций. Например, в eLIBRARY.RU, кроме индекса Хирша, введен *i*-index (индекс Хирша для организаций): научная организация имеет индекс *i*, если не менее *i* ученых из этой организации имеют индекс Хирша не менее *i* [7]. Для сохранения единого подхода к сравнению оценок автора и организации, в которой он работает, мы применим формулу для организаций

$$D = \frac{H_{core}}{H_{all}},\tag{10}$$

где H_{all} и H_{core} вычисляются по формуле (8), а значения K и L берутся из соответствующей библиографической базы. Очевидно, что в этом случае мы принимаем допущение о том, что для организаций показатель $\alpha \approx 1$.

Такой подход позволяет сравнивать по индексу качества публикационной активности как авторов-исследователей, так и организации между собой, а также определять «местоположение» автора в его организации.

Отметим также, что наш подход оценивает долю ссылок из ядра РИНЦ в общем количестве цитирований. Подставив в уравнение (9) выражение для индекса Хирша из (8) и возведя обе части полученного уравнения в квадрат, получим

$$d^2 = \frac{K_{core}}{K_{all}},\tag{11}$$

т. е. квадрат индекса качества показывает отношение числа ссылок из ядра РИНЦ к их общему количеству.

Значения каждого из индексов, приведенных выше, можно найти двумя способами. Первый способ использует количество ссылок из профиля автора или организации, а второй способ опирается на значения индекса Хирша. Можно использовать и комбинированный подход, когда индекс качества для организации *D* рассчитывается по количеству цитирований, а индивидуальный индекс – на основе индекса Хирша.

2. Некоторые сведения о eLIBRARY.RU и вычислении индекса качества публикаций для авторов и организаций

Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU представляет собой крупнейшую в России электронную библиотеку научных публикаций, содержащую рефераты и полные тексты более 38 миллионов научных публикаций и патентов [7].

В свою очередь, eLIBRARY.RU интегрирована с Российским индексом научного цитирования (РИНЦ), аккумулирующим более 12 миллионов публикаций российских ученых и обладающим общедоступным инструментом измерения публикационной активности. В РИНЦ включаются любые публикации, которые были представлены российскими издателями. Отбор публикаций по качеству содержания при пополнении данной системы цитирования не проводится.

Также на базе eLIBRARY.RU поддерживается проект Russian Science Citation Index (RSCI), первоначально ставивший своей целью «... размещение 1000 лучших российских журналов из РИНЦ на платформе Web of Science в виде отдельной базы данных Russian Science Citation Index» [17].

Ядро РИНЦ включает все статьи авторов с российскими аффилиациями, опубликованные в журналах, индексируемых в базах данных Web of Science Core Collection, Scopus или RSCI. Определим переменные, необходимые для дальнейшего изложения, значения которых могут быть получены с помощью сервисов eLIBRARY.RU [7].

На рис. 2 в качестве примера показан фрагмент изображения экрана в системе eLibrary с данными по анализу публикационной активности для СНИУ. Введем следующие обозначения для используемых далее переменных (на рис. 2 отмечены подчеркиваниями):

- $L_{\rm PИHII}^{\rm opr}$ число публикаций организации в РИНЦ;
- $L_{\rm ядро}^{\rm opr}$ число публикаций организации, входящих в ядро РИНЦ;
- К^{орг} число цитирований публикаций организации в РИНЦ;
- $K_{\rm ядро}^{\rm opr}$ число цитирований публикаций организации, входящих в ядро РИНЦ;
- $H_{\rm PИHII}^{\rm opr}$ индекс Хирша для организации по публикациям РИНЦ в целом;
- Н^{орг}_{ядро} индекс Хирша для организации по ядру РИНЦ.

По данным о числе публикаций и цитирований из eLibrary по формуле (8) вычислим значения $H_{\rm PИHII}^{\rm opr}$ и $H_{\rm ядро}^{\rm opr}$, а затем по формуле (10) найдем индекс D для организации.

_	Анализ публикационной активности ор	ГАНИЗАЦИИ
	самарский национальный исследовательский университ королева Самара	ТЕТ ИМ. АКАД. С.П.
	ОБЩИЕ ПОКАЗАТЕЛИ	
	ПОКАЗАТЕЛИ ЗА 5 ЛЕТ (2019-2023)	
	ПУБЛИКАЦИИ ЗА 2023 ГОД ПО ОБЛАСТЯМ ЗНАНИЙ	
	ЦИТИРОВАНИЯ ПУБЛИКАЦИЙ ЗА 5 ЛЕТ ПО ОБЛАСТЯМ ЗНАНИЙ	
	ПОКАЗАТЕЛИ ПО ГОДАМ	
	КЕПР ПО ГОДАМ	
	ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ	
	CTAT/ICT/INECKI/E OTVETЫ	
	ОБЩИЕ ПОКАЗАТЕЛИ	
_	Название показателя	Значени
0	Число публикаций на elbrary.ru	89153
0	Число публикаций в РИНЦ	72884
0	Число публикаций, входящих в ядро РИНЦ	17906
6	Число цитирований публикаций на elbrary.ru	340660
0	Число цитирований публикаций в РИНЦ	297708
0	Число цитирований из публикаций, входящих в ядро РИНЦ	129823
0	Индекс Хирша по всем публикациям на elibrary.ru	137
0	Индекс Хирша по публикациям в РИНЦ	133
0	Индекс Хирша по ядру РИНЦ	91
	д-индекс	216
ø		
0	ниндекс	27
0	ниндекс Число авторов	27 4527

Рис. 2. Анализ публикационной активности СНИУ (на 23.07.2024)

На рис. 3 показан фрагмент изображения экрана в системе eLibrary с данными по анализу публикационной активности автора (на примере одного из соавторов статьи).

Следующая группа переменных характеризует публикационную активность отдельного автора:

- G_{РИНЦ} число публикаций в РИНЦ;
- $K_{\rm PИHII}^{\rm abt}$ число цитирований из публикаций в РИНЦ;
- $K_{\rm ядро}^{\rm ast}$ число цитирований из публикаций, входящих в ядро РИНЦ;
- Навт индекс Хирша по публикациям в РИНЦ;
- $H_{\rm ядро}^{\rm abt}$ индекс Хирша по ядру РИНЦ.

	Федеральный исспедовательский центр Карельский научный центо	PAH", Инстит	TVT
	прикладных математических исследований Карельского НЦ РАН (SPIN-код: 2496-1682, AuthorID: 98603	Петрозаводск)	
	МЕСТО РАБОТЫ		
_	Название организации 🔘	Период	Публ
	Федеральный исследовательский центр "Карельский научный центр РАН" (Петрозаводск)	2007-2023	95
*	Петрозаводский государственный университет (Петрозаводск)	2013-2022	9
	ОБЩИЕ ПОКАЗАТЕЛИ		
_	Название показателя	Зн	нение
0	Число публикаций на elbrary.ru		130
0	Число публикаций в РИНЦ		116
0	Число публикаций, входящих в ядро РИНЦ		25
0	Число цитирований из публикаций на elbrary.ru		428
0	Число цитирований из публикаций, входящих в РИНЦ		409
0	Число цитирований из публикаций, входящих в ядро РИНЦ		108
0	Индекс Хирша по всем публикациям на elibrary.ru		11
0	Индекс Хирша по публикациям в РИНЦ		11
Θ	Индекс Хирша по ядру РИНЦ		4
0	Число публикаций, процитировавших работы автора		228
0	Число ссылок на самую цитируемую публикацию		21
0	Число публикаций автора, процитированных хотя бы один раз	62 (53,4%)
9	그렇게 가장 수에서 걸려 가지 않는 것 같아요. 것 이 동안에 있는 것이 없는 것 같아. 것은 것 같아. 것 같아. 이 것이 같아. 것 같아. 이 것이 같아. 것 같아. ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?		

Рис. 3. Анализ публикационной активности автора (на 23.07.2024)

Отметим, что показатели цитирования приведены в eLibrary с учетом самоцитирования авторов.

Для автора индекс d вычислим по приведенной ранее формуле (10) с соответствующей заменой индексов Хирша, т. е.

$$D = \frac{H_{\mathrm{A}\mathrm{B}\mathrm{T}}^{\mathrm{B}\mathrm{B}\mathrm{T}}}{H_{\mathrm{P}\mathrm{H}\mathrm{H}\mathrm{H}\mathrm{I}}^{\mathrm{A}\mathrm{B}\mathrm{T}}}.$$
 (12)

3. Анализ публикационной активности на примере Самарского национального исследовательского университета

В качестве организации, представляющей собой объект для анализа, был выбран Самарский национальный исследовательский университет (СНИУ). Согласно данным eLIBRARY.RU, публикационная активность СНИУ может быть охарактеризована следующими параметрами (на конец июля 2024 года):

- $L_{\rm PMHII}^{\rm opr} = 72884;$
- $L_{\text{ядро}}^{\text{орг}} = 17906;$
- $K_{\text{PUHII}}^{\text{opr}} = 297708;$
- $K_{\text{ядро}}^{\text{орг}} = 129823;$
- $H_{\rm PИHII}^{\rm opr} = 133;$
- $H_{\rm sgpo}^{\rm opr} = 91$.

Отсюда по формулам (8) и (10) вычислим индекс качества публикационной активности СНИУ $D \approx 0.684$. Альтернативный способ подсчета на основании количества ссылок дает значение D = 0.660. Разница в значениях достаточно небольшая и не превышает 7%. Объясняется такая разница областями применения уравнения (8). С ростом размера исследуемого университета и количества его публикаций и цитирования разница между значениями индекса качества публикационной активности, рассчитанного разными способами, будет возрастать. Если принять, что квадрат индекса качества публикационной активности показывает отношение общего количества ссылок в РИНЦ к количеству ссылок из его ядра, то этот способ определения индекса предпочтительнее и для индивидуального исследователя, и для университета в целом. Тем не менее в настоящее время принят способ оценки достижений исследователя на основе индекса Хирша. Наша модель позволяет объединить эти два подхода и дополнительно оценить качественную сторону публикационной активности.

Далее сравним с показателем D, рассчитанным первым способом, индивидуальные показатели преподавателей и научных сотрудников СНИУ, собранные из их профилей в eLibrary. Для этого были отобраны данные для 150 авторов, работающих в каждом из семи институтов СНИУ, имеющих наивысший индекс Хирша $H_{\rm PИHII}^{\rm abr}$. В качестве наглядного примера в табл. 1 приведены данные о первых 20 из 150 авторов сводной таблицы.

В колонке «AuthorID» приведены уникальные персональные идентификаторы авторов в РИНЦ, в колонке «Институт» – институт СНИУ, в котором работает автор, а наименования остальных колонок были определены в предыдущем разделе. Строки в таблице упорядочены по убыванию значений $H_{\rm PИHL}^{\rm abt}$. Если значение $H_{\rm appo}^{\rm abt}$ равно нулю, то индексу d для удобства присваивается значение 1000.

Индекс качества публикаций d позволяет разделить всех преподавателей в табл. 1 на две группы в сравнении с референсным значением D для СНИУ. К первой можно отнести тех, у кого показатель качества d близок к D для СНИУ (в таблице текст соответствующих строк написан обычным шрифтом). Ко второй группе принадлежат те, у кого этот показатель значительно ниже (строки выделены полужирным шрифтом). Обращает внимание то, что значения d у этих двух групп различаются очень сильно, а к промежуточным значениям можно отнести лишь два случая (строки № 8 и № 13 выделены курсивом). № AuthorID Институт

показатели преподавателей Спиту						
^G РИНЦ	^{Кавт} РИНЦ	^{Навт} РИНЦ	Кавт ядро	Навт ядро	d	
497	3482	38	59	3	0,079	
293	5738	37	137	1	0,027	
260	3581	33	3144	31	0,939	
276	3200	33	184	4	0,121	
289	2640	30	58	2	0,133	
178	1878	30	24	0	0	

Индивидуальные показатели преподавателей СН	ИУ
---	----

1	231299	Институт экономики и управления	497	3482	38	59	3	0,079
2	250933	Юридический институт	293	5738	37	137	1	0,027
3	622695	Институт информатики и кибернетики	260	3581	33	3144	31	0,939
4	647784	Социально-гумани- тарный институт	276	3200	33	184	4	0,121
5	456275	Институт экономики и управления	289	2640	30	58	2	0,133
6	528748	Институт экономики и управления	178	1878	30	24	0	0
7	44776	Естественнонаучный институт	620	6415	28	6105	27	0,964
8	683888	Институт экономики и управления	128	1998	27	88	5	0,185
9	252634	Естественнонаучный институт	634	4921	26	3064	19	0,731
10	27638	Естественнонаучный институт	232	2368	25	2135	24	0,96
11	271296	Юридический институт	235	2651	24	94	1	0,042
12	2921	Естественнонаучный институт	189	2192	24	1770	20	0,833
13	100073	Институт авиационной и ракетно- космической техники	294	1966	24	166	5	0,208
14	158894	Институт двигателей и энергетических установок	176	1677	23	1223	19	0,825
15	45596	Естественнонаучный институт	468	3007	22	2880	21	0,955
16	4346	Институт авиационной и ракетно-космической техники	193	1973	22	1568	19	0,864
17	7773	Институт информатики и кибернетики	162	1950	22	1702	21	0,955
18	20225	Естественнонаучный институт	183	1533	22	1465	22	1,00
19	73518	Социально-гумани- тарный институт	223	1889	21	149	2	0,095
20	343615	Юридический институт	150	1856	21	61	2	0,095

При этом в первую группу входят авторы, работающие в институтах естественно-научной и прикладной технической направленности, а во вторую группу (за одним исключением) – авторы из институтов гуманитарного и экономического профилей. В табл. 1 приведены данные только первых 20 научно-педагогических работников, но они наглядно демонстрируют применение предложенного подхода.

Однако приведенных данных недостаточно для сравнения подразделений университета. Чтобы провести сравнение образовательных подразделений СНИУ, были проанализированы данные первых 150 преподавателей с учетом их принадлежности к подразделениям по основному месту работы. В результате были собраны данные с индивидуальными показателями преподавателей-лидеров для всех институтов, входящих в состав СНИУ, на основе которых был составлен рейтинг институтов.

Пользователю eLIBRARY не обязательно указывать институт, где он работает, поэтому в нашем случае принадлежность преподавателя к институту определялась по персональной страничке на сайте СНИУ.

Так как число преподавателей институтов достаточно сильно варьируется, усреднение показателей было выполнено по следующей схеме: из 150 преподавателей-лидеров для всех институтов нами были выбраны по 10 лучших представителей каждого института. Эти представители были ранжированы в порядке убывания индекса Хирша по ядру РИНЦ $H^{\rm i}_{\rm ядро},$ здесьi– порядковый номер

Табл. 1

преподавателя в списке 10 лучших по институту. В качестве численных характеристик были выбраны индекс Хирша для пятого преподавателя в ранжированном списке института $H_{\rm ядро}^5$ и межквартильная широта $\Delta H = H_{\rm ядро}^3 - H_{\rm ядро}^8$ для этого списка. Результаты проделанной работы приведены в табл. 2.

Табл. 2

Характеристики публикационной активности институтов СНИУ

№		Усредненные значения		
	подразделение (институт)	$H_{\mathbf{ядро}}^5$	ΔH	
1	Юридический институт	1	0	
2	Институт экономики и управления	3	2	
3	Социально-гуманитарный институт	4	0	
4	Институт двигателей и энергетических установок	10	4	
5	Институт авиационной и ракетно-космической техники	12	4	
6	Институт информатики и кибернетики	14	2	
7	Естественнонаучный институт	21	6	

Как и в случае индивидуальных авторов, разрыв по $H_{\rm ядро}^5$ между группами естественно-научной и прикладной технической направленности и институтов гуманитарного и экономического профилей совершенно очевиден.

Приведенные оценки по публикационной активности индивидуальных авторов и институтов СНИУ показывают два важных момента:

– индекс качества публикационной активности *d* никак не коррелирует со значениями индекса Хирша по РИНЦ;

 – оценки качества публикационной активности как индивидуальных авторов, так и институтов существенно зависят от сферы научных исследований.

Поэтому оценки результативности научной деятельности, основанные только на индексе Хирша по РИНЦ, существенно искажают реальную картину. Например, результаты расчета индивидуальных показателей преподавателей СНИУ, рассчитанных не по РИНЦ в целом, а по ядру РИНЦ, в отличие от табл. 1, дают следующие результаты (не приводя *dc*, таблицу назовем «новый список»):

1) только 7 авторов из табл. 1 вошли в «новый список»,

2) все 20 авторов «нового списка» имеют значение ниже референсного значения D, т.е. новый метод оценки приводит к радикальной смене лидеров.

4. Выводы и заключение

В статье рассмотрен вопрос о новом подходе к оценке публикационной активности российских ученых из числа научно-педагогического персонала вузов России. В российских вузах действует положение об эффективном контракте, нацеленном на стимулирование работников, что позволяет вузу и преподавателям совместно стремиться к решению задач, стоящих перед вузом, и научно-исследовательская работа является одной из важных областей университетской жизни. Поэтому должна быть выстроена четкая система, подтверждающая объективность, точность и качество этой работы.

В настоящее время нет единого подхода к ее оценке, за последние десятилетия способы оценки изменялись неоднократно. Ситуация усложнилась и в связи с тем, что зарубежные библиографические базы данных стали во многом недоступны. Поэтому предложен подход, основанный на данных российской системы РИНЦ, для чего введен специальный показатель, названный индексом качества публикационной активности, который для индивидуального исследователя равен отношению индекса Хирша по РИНЦ в целом к индексу Хирша, рассчитанному по ядру РИНЦ. Для организации, каковыми могут являться кафедра, факультет, институт или вуз в целом, предложен метод для вычисления аналога такого показателя, как и для индивидуального автора. Такой подход позволяет сравнивать как авторов-исследователей, так и организации между собой, а также определять «местоположение» автора в его организации.

Апробация предложенного подхода, выполненная на примере СНИУ, показала несколько важных результатов, которые, по-видимому, носят более общий характер:

 оценка достижений преподавателей с использованием индекса Хирша по РИНЦ в целом существенно отличается от оценки по индексу качества публикационной активности;

2) оценки качества публикационной активности как индивидуальных авторов, так и организаций существенно зависят от сферы научных исследований.

В конкретном случае для СНИУ оценки естественно-научного и прикладного технического направлений существенно выше, чем оценки для гуманитарного и экономического профилей. Вполне возможно, что это связано со спецификой формирования научных направлений в вузе в целом, и для вуза, имеющего в основном гуманитарную направленность, эта картина будет ровно обратной.

При этом возможен аргумент о том, что доля журналов гуманитарного профиля, входящих в ядро РИНЦ, гораздо ниже, чем доля журналов технического профиля, и он заслуживает дополнительного изучения. Это не совсем так: достаточно общий анализ по тематикам РИНЦ показал, что из 4481 журнала по экономике 1572 (35%) входят в ядро РИНЦ, в то время как для автоматики и вычислительной техники эти числа равны 1503/716/48%. Проще говоря, журналов по экономике в ядре РИНЦ достаточно.

Более общий вывод заключается в том, что такой результат следует учитывать при заключении эффективных контрактов с преподавателями. Использование в качестве индикатора индекса Хирша по РИНЦ в целом, по-видимому, нацеливает на увеличение общего количества публикаций вуза, в то время как предложенный в работе индекс качества публикационной активности ведет именно к росту их качества. И здесь приоритеты должен определять и устанавливать вуз.

Что касается в эффективного контракта СНИУ, в котором оценка публикационной активности производится по наукометрическим показателям РИНЦ в целом, то такой подход представляется ошибочным. Апробация предложенного авторами подхода для СНИУ очевидным образом показывает, что в эффективных контрактах необходим учет данных по ядру РИНЦ. Проведённый анализ показал отсутствие у многих преподавателей высококачественных публикаций, что не может не сказаться в дальнейшем на показателях вуза. По-видимому, в вузе следует обсудить введение порогового значения Хирша по ядру РИНЦ в качестве квалификационного критерия при прохождении конкурсных процедур, присвоении ученых званий, участия в диссертационных советах и оппонирования диссертаций.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. *Гурье Л.И.* Моделирование системы педагогических компетенций научнопедагогических кадров высшей профессиональной школы. Казань: Школа, 2009. 186 с.
- Кропачев Н.М., Еремеев В.В., Попов А.В. Разработка системы показателей эффективности образовательной и научной деятельности профессорскопреподавательского состава: опыт Санкт-Петербургского государственного университета // Вестн. СПбГУ. Менеджмент. 2023. Т. 22. № 2. С. 133–150. https://doi.org/10.21638/11701/spbu08.2023.201.
- Свечкарёв В.Г., Иващенко Т.А., Белоус Л.К., Галюнко Т.Э. Эффективный контракт как инновационный механизм стимулирования труда научно-педагогического работника // Вестн. МГТУ. 2024. Т. 16. № 1. С. 73–81. https://doi.org/10.47370/2078-1024-2024-16-1-73-81.
- Письмо Министерства науки и высшего образования РФ от 23 сентября 2021 г. N MH-10/3153-ПК «О методических рекомендациях». URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/402744422.
- 5. Гринёв А.В. Использование наукометрических показателей при оценке публикационной активности в современной России // Вестн. РАН. 2019. Т. 89, № 10. С. 993–1002. https://doi.org/10.31857/S0869-58738910993-1002.
- Мохначева Ю.В., Цветкова В.А. Возможные пути получения научной информации в новых условиях // Упр. наук.: теор. практ. 2023. Т. 5, № 3. С. 117–158. https://doi.org/10.19181/smtp.2023.5.3.9.
- 7. Научная электронная библиотека. URL: https://www.elibrary.ru.
- Фролова И.В. Российская гуманитарная наука в «кривом зеркале» наукометрии // Экон. и упр.: науч.-практ. журн. 2017. Т. 2. С. 101–105.
- Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2005. V. 102, No 46. P. 16569–16572. https://doi.org/10.1073/pnas.0507655102.
- Akoev M., Moskaleva O., Pislyakov V. Confidence and RISC: How Russian papers indexed in the national citation database Russian Index of Science Citation (RISC) characterize universities and research institutes // Proc. 23rd Int. Conf. on Science and Technology Indicators (STI 2018). Leiden: CWTS, 2018. P. 1328–1338. URL: https://hdl.handle.net/1887/65344.
- Pislyakov V., Moskaleva O., Akoev M. Cui Prodest? Reciprocity of collaboration measured by Russian Index of Science Citation // Proc. 17th Int. Conf. on Scientometrics and Informetrics ISSI2019. V. 1. Edizioni Efesto, 2019. P. 185–195.
- 12. Порядок ежегодной оценки достижений научно-педагогических работников Самарского университета. URL: https://ssau.ru/files/info/stimulationpps/poryadoknpr27042024.pdf.
- Garfield E. Citation indexes for science: A new dimension in documentation through association of ideas // Science. 1955. V. 122, No 3159. P. 108–111. https://doi.org/10.1126/science.122.3159.108.
- 14. Бредихин С.В., Щербакова Н.Г. Формализация индекса Хирша // Пробл. информ. 2014. № 2 (23). С. 17–27.
- Redner S. How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution // Eur. Phys. J. B. 1998. V. 4, No 2. P. 131–134. https://doi.org/10.1007/s100510050359.
- Clarivate Analytics. Web of Science Databases. 2019. https://clarivate.com/products/web-of-science/databases/.

17. Презентация проекта Russian Science Citation Index. URL: https://www.elibrary.ru/projects/rsci/2015-12-17.pdf.

> Поступила в редакцию 15.05.2024 Принята к публикации 31.10.2024

Агапкин Евгений Владимирович, магистрант Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева Московское ш., д. 34, г. Самара, 443086, Россия E-mail: agapkinz@mail.ru Печников Андрей Анатольевич, доктор технических наук, кандидат физикоматематических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории математической кибернетики Института прикладных математических исследований Карельский научный центр Российской академии наук ул. Пушкинская, д. 11, г. Петрозаводск, 185035, Россия

E-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

Сухов Андрей Михайлович, доктор технических наук, кандидат физикоматематических наук, профессор кафедры программных систем

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева Московское ш., д. 34, г. Самара, 443086, Россия

E-mail: *sukhov@ssau.ru*

ISSN 2541-7746 (Print) ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 455-469

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.455-469

A New Approach to Measuring the Quality Index of Publishing Activity for Authors and Institutions

E.V. Agapkin^{a*}, A.A. Pechnikov^{b**}, A.M. Sukhov^{a***}

 ^aSamara National Research University, Samara, 443086 Russia
 ^bKarelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185035 Russia E-mail: *agapkinz@mail.ru, **pechnikov@krc.karelia.ru, ***sukhov@ssau.ru

Received May 15, 2024; Accepted October 31, 2024

Abstract

Current bibliographic databases incorporate vast volumes of information, thus necessitating the identification of a "core" subset to evaluate the highest-quality research outputs. The Hirsch index, an objective bibliometric indicator utilized in gauging an author's performance and impact, can be calculated for both the entire database or its core content. This study introduces a novel quality index for measuring the publishing activity of individual authors and institutions, which is defined as the ratio between the Hirsch index values for the entire database and its core. The approach enables multiple comparisons: between authors, departments, universities, and even the roles of specific authors within institutions in terms of their publishing activity. Its application was demonstrated through a case study of Samara National Research University. Based on the results obtained, strategic recommendations to improve the quality of the university's publishing activity were outlined.

Keywords: bibliometrics, scientometrics, Hirsch index, bibliographic database, eLIB-RARY

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Calculation of the Hirsch index.

Fig. 2. Analysis of the publishing activity of Samara National Research University (as of July 23, 2024).

Fig. 3. Analysis of the author's publishing activity (as of July 23, 2024).

References

- Gurye L.I. Modelirovanie sistemy pedagogicheskikh kompetentsii nauchno-pedagogicheskikh kadrov vysshei professional'noi shkoly [Modeling the System of Pedagogical Competencies for Academic and Research Staff in Higher Education Institutions]. Kazan, Shkola, 2009. 186 p. (In Russian)
- Kropachev N.M., Eremeev V.V., Popov A.V. Developing a system of performance indicators for educational and research activities of academic staff: A case study of St. Petersburg State University. Vestn. SPbGU. Menedzhment, 2023, vol. 22, no. 2, pp. 133–150. http://doi.org/10.21638/11701/spbu08.2023.201. (In Russian)
- Svechkarev V.G., Ivashchenko T.A., Belous L.K., Galyunko T.E. A performance-based contract of employment as an innovative mechanism for stimulating the work of academic and research staff. *Vestn. MGTU*, 2024, vol. 16, no. 1, pp. 73–81. https://doi.org/10.47370/2078-1024-2024-16-1-73-81. (In Russian)
- 4. Letter of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation dated September 23, 2021, no. MN-10/3153-PK "On methodological recommendations". URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/402744422. (In Russian)
- Grinev A.V. Using scientometrics to estimate publication activity in modern Russia. Vestn. Ross. Akad. Nauk, 2019, vol. 8, no. 10, pp. 993–1002. https://doi.org/10.31857/S0869-58738910993-1002. (In Russian)
- Mokhnacheva Yu.V., Tsvetkova V.A. Possible ways to search for scientific information in new realities. Upr. Naukoi: Teor. Prakt., 2023, vol. 5, no. 3, pp. 117–158. https://doi.org/10.19181/smtp.2023.5.3.9. (In Russian)
- 7. Scientific Electronic Library. URL: https://www.elibrary.ru. (In Russian)
- Frolova I.V. Russian humanities in the "distorted mirror" of scientometrics. *Ekon. Upr.*, 2017, vol. 2, pp. 101–105. (In Russian)
- Hirsch J.E. An index to quantify an individual's scientific research output. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 2005, vol. 102, no. 46, pp. 16569–16572. https://doi.org/10.1073/pnas.0507655102.
- Akoev M., Moskaleva O., Pislyakov V. Confidence and RISC: How Russian papers indexed in the national citation database Russian Index of Science Citation (RISC) characterize universities and research institutes. Proc. 23rd Int. Conf. on Science and Technology Indicators (STI 2018). Leiden, CWTS, 2018, pp. 1328–1338. URL: https://hdl.handle.net/1887/65344.

- Pislyakov V., Moskaleva O., Akoev M. Cui Prodest? Reciprocity of collaboration measured by Russian Index of Science Citation. Proc. 17th Int. Conf. on Scientometrics and Informetrics ISSI2019. Vol. 1. Edizioni Efesto, 2019, pp. 185–195.
- 12. Guidelines for the annual evaluation of academic staff achievements at Samara University. URL: https://ssau.ru/files/info/stimulationpps/poryadoknpr27042024.pdf. (In Russian)
- Garfield E. Citation indexes for science: A new dimension in documentation through association of ideas. *Science*, 1955, vol. 122, no. 3159, pp. 108–111. https://doi.org/10.1126/science.122.3159.108.
- Bredikhin S.V., Shcherbakova N.G. Formalization of the Hirsch index. Probl. Inf., 2014, no. 2 (23), pp. 17–27. (In Russian)
- Redner S. How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution. Eur. Phys. J. B, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 131–134. https://doi.org/10.1007/s100510050359.
- 16. Clarivate Analytics. Web of Science Databases. 2019. https://clarivate.com/newline/products/web-of-science/databases/.
- 17. Presentation of the Russian Science Citation Index project. URL: https://www.elibrary.ru/projects/rsci/2015-12-17.pdf. (In Russian)

, Для цитирования: Агапкин Е.В., Печников А.А., Сухов А.М. Об одном подходе к определению индекса качества публикационной активности авторов и организаций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 455–469. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.455-469.

For citation: Agapkin E.V., Pechnikov A.A., Sukhov A.M. A new approach to measuring the quality index of publishing activity for authors and institutions. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 455–469. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.455-469. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 470–484 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.71

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.470-484

КВАНТОВЫЕ И КЛАССИЧЕСКИЕ НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ОВDD

А.Ф. Гайнутдинова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Исследована модель недетерминированных упорядоченных ветвящихся диаграмм решений (NOBDD). Дан метод доказательства нижней оценки сложности квантовой NOBDD. Представлены функция, имеющая линейную сложность в квантовой NOBDD и константную сложность в классической NOBDD, а также функция, имеющая одинаковую сложность в квантовой и классической моделях. Описано соотношение сложностных классов, определенных для модели OBDD.

Ключевые слова: ветвящаяся программа, упорядоченная ветвящаяся диаграмма решений, OBDD, сложность, квантовый алгоритм, недетерминизм, иерархия классов сложности

Введение

Изучение вычислительных возможностей квантовых моделей в сравнении с их классическими аналогами является актуальным направлением современных исследований. Ветвящиеся программы (BP – Branching Programs) – это известная модель для вычисления булевых функций, имеющая множество приложений в различных областях: в верификации моделей и программ, в базах данных и т. д. [1, с. 5–11]. Упорядоченные ветвящиеся диаграммы решений (OBDD – Ordered Binary Decision Diagrams) – это частный случай модели ВР, когда переменные считываются не более одного раза в одном и том же порядке. Естественной мерой сложности для этой модели является ширина. OBDD фиксированной ширины с одинаковыми преобразованиями на каждом шаге (стабильные OBDD) можно рассматривать как конечные автоматы, обрабатывающие слова фиксированной длины. Различные варианты OBDD (детерминированные, недетерминированные, вероятностные, квантовые) исследованы в ряде работ [2-6]: показано, что вероятностные OBDD могут быть экспоненциально более эффективными, чем детерминированные и недетерминированные [4], а квантовые OBDD – экспоненциально более эффективными, чем детерминированные и стабильные вероятностные, и что данная оценка точна [5]. Квантовый и классический недетерминизмы для моделей OBDD рассмотрены в работе [6], где показано превосходство квантового недетерминизма над классическим. В частности, представлена функция, вычислимая недетерминированными квантовыми OBDD (NQOBDD) константной ширины, в то время как классические недетерминированные OBDD (NOBDD) для этой функции имеют неконстантную ширину.

В настоящей работе исследованы NQOBDD линейной и сублинейной ширины. Представлен метод доказательства нижней оценки ширины NQOBDD для произвольной булевой функции. Рассмотрена булева функция EXACT^k, зависящая от параметра k и принимающая значение 1 на наборах, в которых число единиц равно k. Показано, что такая функция требует ширины не менее $\max(k+1, n-k+1)$ при вычислении на недетерминированных квантовых OBDD и ширины не менее $\min(k+1, n-k+1) + 1$ при вычислении на классических недетерминированных OBDD. Доказано, что обе нижние оценки точны. При значении параметра k=n ширина NQOBDD для этой функции линейна, в то время как классическая NOBDD имеет ширину 2. Отрицание функции EXACT^k_n, напротив, вычислимо квантовой NOBDD ширины 2 для любого значения k, в то время как классическая NOBDD, вычисляющая эту функцию, имеет неконстантную ширину. Рассмотрена также булева функция MODⁿ, принимающая значение 1 на наборах с числом единиц, кратным р, для которой недетерминированная и квантовая недетерминированная OBDD имеют одинаковую сложность. На основе доказанных утверждений найдено соотношение классов сложности, определённых для моделей недетерминированных и квантовых недетерминированных OBDD.

Предварительная версия части результатов, изложенных в настоящей работе, была представлена в материалах конференции [7]. Здесь мы уточняем некоторые результаты, в частности, доказательство верхней и нижней оценок сложности классической NOBDD для функции **EXACT**^k.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 представлены определения моделей. Раздел 2 содержит вспомогательные сведения, используемые в доказательствах. Раздел 3 посвящен методу доказательства нижней оценки сложности NQOBDD для произвольной булевой функции. В разделе 4 исследована сложность вычисления функции EXACT^k_n, а также её отрицания в квантовых и классических недетерминированных OBDD. Доказаны верхние и нижние оценки сложности для обеих моделей. В разделе 5 рассмотрены функция MOD^p_n и сложность её вычисления в недетерминированных и квантовых недетерминированных OBDD. В разделе 6 приведен результат о соотношении классов сложности, основанных на квантовых и классических недетерминированных OBDD.

1. Определения моделей

Приведем краткие определения моделей ветвящихся программ и OBDD (для более полной информации см., например, [8]). Мы используем верхний индекс для нумерации векторов и наборов, а нижний индекс – для нумерации элементов векторов и наборов.

Детерминированная ветвящаяся программа (ВР – Branching Program) над множеством переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – это ориентированный ациклический граф с финальными вершинами, помеченными 0 и 1 (назовём их отвергающими и принимающими вершинами соответственно). Внутренние вершины помечены переменными из множества X и имеют по два исходящих ребра, помеченных 0 и 1 соответственно. Входной набор $\sigma \in \{0,1\}^n$ индуцирует вычислительный путь из выделенной начальной вершины в финальную. ВР представляет булеву функцию $f: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, если для любого $\sigma \in \{0,1\}^n$ значение достигнутой финальной вершины совпадает со значением $f(\sigma)$.

Сложность Size(P) ветвящейся программы P – это количество её внутренних вершин. Длина Length(P) ветвящейся программы P – это максимальная длина пути из начальной вершины в конечную. Длина ВР очевидным образом оценивает время, требуемое для вычисления функции f в худшем случае. Сложность ВР оценивает память, затрачиваемую в процессе вычисления.

Ветвящаяся программа называется один раз читающей, если на любом пути из начальной вершины в финальную каждая переменная считывается не более одного раза. Ветвящаяся программа называется уровневой, если её вершины могут быть разбиты на уровни 0,1,... таким образом, что для каждого *i* рёбра, исходящие из вершин уровня *i*, ведут только в вершины уровня (i + 1). Уровневая ВР *P* называется забывающей, если во всех вершинах одного уровня *P* тестируется одна и та же переменная. Ширина Width(P) уровневой ВР *P* – это максимальное число вершин на уровне. Очевидно, что $Size(P) \leq Length(P) Width(P)$.

OBDD (Ordered Binary Decision Diagram) – это уровневая забывающая и один раз читающая ветвящаяся программа.

Так как длина OBDD не превосходит n, естественной мерой сложности для неё является ширина. Модель OBDD константной ширины с естественным порядком считывания переменных и одинаковыми преобразованиями на каждом уровне эквивалентна модели конечных автоматов [9].

Недетерминированная OBDD (NOBDD) допускает переходы из вершины текущего уровня в более чем одну вершину последующего уровня при считывании одной и той же переменной. В этом случае для входного набора σ может существовать несколько вычислительных путей. NOBDD P принимает входной набор σ , если существует вычислительный путь, соответствующий данному набору, который завершается в принимающей вершине. В противном случае P отвергает набор σ .

Для определения квантовой OBDD нам понадобятся некоторые сведения из теории квантовых вычислений (для большей информации см., например, [10]).

Квантовая система (QS) с d устойчивыми состояниями (использующая $\log d$ квантовых битов) может быть описана при помощи d-мерного комплекснозначного гильбертова пространства \mathcal{H}^d . Чистое состояние QS – это элемент пространства \mathcal{H}^d , вектор-столбец $|\psi\rangle = (z_0, \ldots, z_{d-1})$ с единичной нормой (унитарный вектор): $|||\psi\rangle|| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} = 1$ ($\langle \psi |$ – сопряженная к $|\psi\rangle$ вектор-строка).

Комплексное число z_i (i = 0, ..., d - 1) называется амплитудой устойчивого состояния $|i\rangle$, где $|i\rangle$ обозначает унитарный вектор со значением 1 в позиции i (нумерация элементов вектора осуществляется с 0).

Унитарная эволюция – это изменение состояния квантовой системы за определённый период времени, она описывается d-мерной унитарной матрицей U.

Матрица U называется унитарной, если выполняется $UU^{\dagger} = I$, где U^{\dagger} – транспонированная комплексносопряжённая к U матрица, I – единичная матрица.

Квантовое измерение – это процедура извлечения классической информации из квантового состояния. Ортогональное измерение QS описывается системой операторов $\mathcal{O} = \{P_1, \ldots, P_t\}$, действующих в \mathcal{H}^d и таких, что $P_i = P_i^{\dagger}$, $P_i^2 = P_i$, $P_i P_j = \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^t P_i = I$ $(i, j = 1, \ldots, t, i \neq j, t \leq d)$. Если $|\psi\rangle$ – состояние QSдо измерения, то результатом измерения является одно из значений из множества $\{1, \ldots, t\}$. При этом

- а) $p_k = ||P_k|\psi\rangle||^2$ вероятность того, что исходом измерения является значение k;
- b) $|\psi'\rangle = \frac{P_k |\psi\rangle}{||P_k |\psi\rangle||}$ состояние квантовой системы после измерения, результатом которого является значение k.

Квантовая OBDD Q ширины d и длины l ((d, l)–QOBDD) определяется как

$$Q = (|\psi^0\rangle, R, \mathcal{O}_{final}),$$

где $|\psi^0\rangle$ – начальная суперпозиция; R – последовательность (длины l) инструкций, содержащих d-мерные унитарные преобразования квантовой системы QS

с *d* устойчивыми состояниями, определенная следующим образом:

$$R = \{ \langle j_i, U_i(0), U_i(1) \rangle \}_{i=1}^l,$$

где $U_i(0)$ и $U_i(1)$ – унитарные $(d \times d)$ -матрицы, описывающие преобразования, применяемые на *i*-ом шаге; $\mathcal{O}_{final} = \{P_{accept}, P_{reject}\}$ – система операторов, задающих финальное измерение с исходами *accept* и *reject* соответственно.

QOBDD Q обрабатывает вход $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \{0,1\}^n$, начиная работу в суперпозиции $|\psi^0\rangle$. Пусть после текущего шага Q находится в состоянии $|\psi\rangle$. Тогда на следующем, i-ом шаге работы $(i = 1, \dots, n)$ Q считывает очередной символ σ_{j_i} входного слова $\sigma \in \Sigma^n$, определяемый последовательностью R инструкций программы, и преобразует текущую суперпозицию $|\psi\rangle$ в суперпозицию $|\psi'\rangle = U_i(\sigma_{j_i})|\psi\rangle$. После считывания входного набора производится измерение финальной суперпозиции $|\psi_{final}\rangle = U_n(\sigma_{i_n})\cdots U_1(\sigma_{i_1})|\psi^0\rangle$. Если исход измерения *accept*, вход принимается, в противном случае – отвергается. Вероятность принятия слова σ определяется как

$$Pr^{Q}_{accept}(\sigma) = ||P_{accept}|\psi_{final}\rangle||^{2}.$$

Q недетерминированно вычисляет функцию f, если Q принимает вход σ с вероятностью больше 0 тогда и только тогда, когда $f(\sigma) = 1$. Такую OBDD будем называть недетерминированной квантовой OBDD (NQOBDD).

Q вычисляет функцию f без ошибки, если Q принимает с вероятностью 1 входы σ , для которых $f(\sigma) = 1$, и принимает с вероятностью 0 входы σ , для которых $f(\sigma) = 0$.

2. Сведения из линейной алгебры

Ниже приведены необходимые сведения из линейной алгебры (см., например, [11]).

Пусть V – векторное пространство над полем комплексных чисел с нормой $||\cdot||_2$. Через **0** обозначим нулевой элемент V. Система векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d \in V$ называется линейно зависимой, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_d\psi_d = \mathbf{0}$. Если это равенство выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_d = 0$, то система векторов называется линейно независимой.

Два вектора ψ_1 и ψ_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\psi_1 = \alpha \psi_2$ или $\psi_2 = \beta \psi_1$ при некоторых α , β , т. е. когда векторы ψ_1 и ψ_2 коллинеарны.

Лемма 1. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d \in V$ – линейно независимая система векторов, U – унитарное преобразование в пространстве V. Тогда векторы $U\psi_1, U\psi_2, \ldots, U\psi_d$ линейно независимы.

Доказательство. Унитарное преобразование является взаимнооднозначным, его можно рассматривать как переход к другому базису. Взаимнооднозначное линейное преобразование сохраняет свойство линейной независимости преобразуемых векторов.

Свойства нормы:

- a) $||\psi|| = 0 \Rightarrow \psi = \mathbf{0};$
- b) $\forall \psi, \phi \in V ||\psi + \phi|| \le ||\psi|| + ||\phi||$ (неравенство треугольника);
- c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \forall \psi \in V \ ||\alpha \psi|| = |\alpha| \cdot ||\psi||.$

Лемма 2. Пусть векторы $\psi_1, \ldots, \psi_m, \psi \in V, \psi_1, \ldots, \psi_m$ – линейно независимы. Пусть U – такое линейное преобразование пространства V, что

$$||U\psi_i|| = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad ||U\psi|| \neq 0.$$

Тогда система векторов $\{\psi_1, \ldots, \psi_m, \psi\}$ линейно независима.

Доказательство. Докажем утверждение от противного. Предположим, что вектор ψ линейно зависим с системой ψ_1, \ldots, ψ_m . Тогда существуют $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$, одновременно не равные нулю и такие, что $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \cdots + \alpha_m \psi_m$.

В силу линейности имеем $U\psi = U(\alpha_1\psi_1 + \dots + \alpha_m\psi_m) = \alpha_1U\psi_1 + \dots + \alpha_mU\psi_m$. По свойству нормы $||U\psi|| \le |\alpha_1|||U\psi_1|| + \dots + |\alpha_m|||U\psi_m||$. По условию леммы $||U\psi_1|| = \dots = ||U\psi_m|| = 0$. Значит, $||U\psi|| = 0$. Получили противоречие.

3. Нижняя оценка ширины недетерминированной QOBDD

Пусть $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – произвольная булева функция, $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ – произвольная перестановка индексов $\{1, \ldots, n\}$. Для $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и целого k (0 < k < n) обозначим $X_k^{\pi} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$. Набор значений $\sigma \in \{0,1\}^k$, сопоставленный переменным из множества X_k^{π} , определяет подфункцию $f_{\pi,k}^{\sigma} : \{0,1\}^{n-k} \to \{0,1\}$.

Множество пар $S_k^{\pi} = \{(\sigma, \gamma) : \sigma \in \{0, 1\}^k, \gamma \in \{0, 1\}^{n-k}\}$ назовем строгим 1полным множеством (strong 1-fooling set) для функции f, если выполняются следующие условия:

а) $f_{\pi,k}^{\sigma}(\gamma) = 1$ для любой пары $(\sigma, \gamma) \in S_k^{\pi}$,

b) для любых пар $(\sigma, \gamma), (\sigma', \gamma') \in S_k^{\pi}$ выполняется $f_{\pi,k}^{\sigma}(\gamma') = 0$ и $f_{\pi,k}^{\sigma'}(\gamma) = 0$.

Для двух наборов $\sigma, \sigma' \in \{0,1\}^k$ будем говорить, что набор $\gamma \in \{0,1\}^{n-k}$ отличает набор σ от набора σ' , если выполняются $f_{\pi,k}^{\sigma}(\gamma) > 0$ и $f_{\pi,k}^{\sigma'}(\gamma) = 0$. Отметим, что данное свойство не является симметричным.

Теорема 1. Для любой QOBDD Q, недетерминированно вычисляющей функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ и использующей порядок $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ считывания переменных,

$$Width(Q) \ge \max_{k} |S_k^{\pi}|.$$

Доказательство. Пусть $d = \max_k |S_k^{\pi}|$, где $S_k^{\pi} = \{(\sigma^1, \gamma^1), \dots, (\sigma^d, \gamma^d)\}$ – строгое 1-полное множество для функции f. Предположим, что существует NQOBDD Q, вычисляющая функцию f с использованием порядка π считывания переменных, ширина которой меньше d. Рассмотрим уровень k. Пусть $\Psi = \{|\psi(\sigma^j)\rangle | j = 1, \dots, d\}$ – множество квантовых состояний, в которых находится программа после обработки входов $\sigma^1, \dots, \sigma^d$, т.е. $|\psi(\sigma^j)\rangle = U(\sigma^j)|\psi^0\rangle$.

Лемма 3. Множество Ψ линейно независимо.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Предположим, что множество векторов Ψ является линейно зависимым. Тогда существует состояние $|\psi\rangle = |\psi(\sigma^i)\rangle \in \Psi$, которое может быть представлено в виде линейной комбинации остальных векторов из множества Ψ :

$$|\psi(\sigma^i)\rangle = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^a \alpha_j |\psi(\sigma^j)\rangle,$$

при этом неверно, что $\alpha_j = 0$ для всех *j*.

Пусть γ^i такое, что $(\sigma^i, \gamma^i) \in S_k^{\pi}$. Согласно определению строгого 1-полного множества, для всех входов σ^j $(j \neq i)$ выполняется $f_{\pi,k}^{\sigma^j}(\gamma^i) = 0$, следовательно, программа Q принимает входы $\sigma^j \gamma^i$ с нулевой вероятностью:

$$Pr^Q_{accept}(\sigma^j\gamma^i) = ||P_{accept}U(\gamma^i)|\psi(\sigma^j)\rangle||^2 = 0.$$

После обработки входа $\sigma^i \gamma^i$ финальное состояние программы

$$|\psi(\sigma^{i}\gamma^{i})\rangle = U(\gamma^{i})|\psi(\sigma^{i})\rangle = U(\gamma^{i})\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d} \alpha_{j}|\psi(\sigma^{j})\rangle,$$

и по свойству линейности преобразований

$$|\psi(\sigma^{i}\gamma^{i})\rangle = \sum_{j=1\atop j\neq i}^{d} \alpha_{j} U(\gamma^{i}) |\psi(\sigma^{j})\rangle = \sum_{j=1\atop j\neq i}^{d} \alpha_{j} |\psi(\sigma^{j}\gamma^{i})\rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Pr^{Q}_{accept}(\sigma^{i}\gamma^{i}) &= ||P_{accept}|\psi(\sigma^{i}\gamma^{i})\rangle||^{2} = ||\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d} \alpha_{j}P_{accept}|\psi(\sigma^{j}\gamma^{i})\rangle||^{2} \leq \\ &\leq (\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{d} |\alpha_{j}| \, ||P_{accept}\psi(\sigma^{j}\gamma^{i})||)^{2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, программа Q неверно вычисляет функцию f, поскольку принимает набор $\sigma^i \gamma^i$, для которого $f_{\pi,k}^{\sigma^i}(\gamma^i) > 0$, с нулевой вероятностью. Получили противоречие. Следовательно, наше предположение о том, что множество Ψ линейно зависимо, неверно.

Так как множество Ψ состояний программы, достижимых на уровне k, линейно независимо, размерность пространства состояний программы Q не может быть меньше d. Следовательно, $Width(Q) \ge d$.

4. Функция Exact

Определим функцию $EXACT_n^k : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}:$

EXACT_n^k(
$$\sigma$$
) =
$$\begin{cases} 1, & \text{если } \#_1(\sigma) = k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\#_1(\sigma)$ обозначает число единиц в наборе σ . При k = n имеем $\texttt{EXACT}_n^k \equiv \texttt{AND}_n$, где функция $\texttt{AND}_n : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ принимает значение 1 на единственном наборе, где все переменные равны 1.

Теорема 2. Ширина любой QOBDD, недетерминированно вычисляющей функцию EXACT_n^k , не менее чем $\max\{k+1, n-k+1\}$.

Доказательство. Пусть Q – NQOBDD, вычисляющая функцию EXACT_{n}^{k} и считывающая переменные в порядке $\pi = (i_{1}, \ldots, i_{n})$. Покажем, что ширина Q не может быть меньше $\max\{k+1, n-k+1\}$.

Вычисление на входе $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ начинается из начальной суперпозиции $|\psi^0\rangle$. На шаге l программа считывает переменную $x_{i_l} = \sigma_{i_l}$ и преобразует суперпозицию $|\psi(\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_{l-1}})\rangle$ в суперпозицию $|\psi(\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_l})\rangle$ (положим $|\psi^0\rangle = |\psi(\epsilon)\rangle$, где ϵ – пустое слово). После считывания входного слова Q производит измерение финальной суперпозиции $|\psi(\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_n})\rangle$ и принимает входной набор с вероятностью $Pr^Q_{accept}(\sigma) = ||P_{accept}|\psi(\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_n})\rangle||^2$.

Оценим размерность пространства состояний программы Q. Для этого для каждого уровня l (l = 0, ..., n) рассмотрим множество квантовых состояний, достижимых программой на этом уровне, и оценим количество линейно независимых векторов из этого множества.

Обозначим $\Psi_l = \{ |\psi(\sigma)\rangle | \sigma \in \{0,1\}^l \}$ множество состояний, достижимых программой Q после шага l, т.е. $|\psi(\sigma)\rangle = U_l(\sigma_{i_l}) \cdots U_1(\sigma_{i_1}) |\psi^0\rangle$.

Лемма 4. Пусть $|\psi^1\rangle, \ldots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle \in \Psi_l \quad (m \ge 1) \quad u \quad |\psi^1\rangle, \ldots, |\psi^m\rangle - линейно$ $независимы, где <math>|\psi^i\rangle = |\psi(\sigma^i)\rangle$ для $i = 1, \ldots, m \quad u \quad |\psi\rangle = |\psi(\sigma)\rangle$. Если существует строка $\gamma \in \{0, 1\}^{n-l}$, отличающая строку σ от каждой из строк $\sigma^1, \ldots, \sigma^m$, то множество $\{|\psi^1\rangle, \ldots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle\}$ линейно независимо.

Доказательство. По условию леммы строка $\gamma \in \{0,1\}^{n-l}$ отличает строку σ от каждой из строк $\sigma^1, \ldots, \sigma^m$. Это означает, что на наборе, где переменные принимают значения $x_{\pi(1)} = \sigma_1, \ldots, x_{\pi(l)} = \sigma_l, x_{\pi(l+1)} = \gamma_1, \ldots, x_{\pi(n)} = \gamma_{n-l}$, функция EXACT^k равна 1, а на наборах, в которых переменные принимают значения $x_{\pi(1)} = \sigma_1^i, \ldots, x_{\pi(l)} = \sigma_l^i, x_{\pi(l+1)} = \gamma_1, \ldots, x_{\pi(n)} = \gamma_{n-l}$ ($i = 1, \ldots, m$), функция EXACT^k равна 0. Пусть $U = U_n(\gamma_{n-l}) \cdots U_{l+1}(\gamma_1)$. Так как программа Q недетерминированно вычисляет EXACT^k, то выполняется $||P_{accept}U|\psi^i\rangle|| = 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$, и $||P_{accept}U|\psi^i\rangle|| > 0$. Согласно лемме 2 множество $\{|\psi^1\rangle, \ldots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle\}$ является линейно независимым.

Пусть $\Phi_l \ (\Phi_l \subseteq \Psi_l)$ – максимальное число линейно независимых векторов. Обозначим $d = \max\{k, n-k\}$. По индукции покажем, что $|\Phi_l| \ge l+1$ для $l = 0, \ldots d$. Рассмотрим отдельно два случая: $k \ge n/2$ и k < n/2.

Случай 1. Пусть $k \ge n/2$, т.е. d = k.

База индукции: на уровне l = 0 множество Ψ_0 состоит из единственного вектора $|\psi^0\rangle$, т.е. $|\Phi_0| = 1$. На уровне l = 1 множество Ψ_1 состоит из двух векторов $|\psi(0)\rangle, |\psi(1)\rangle$. Векторы $|\psi(0)\rangle$ и $|\psi(1)\rangle$ линейно независимы, так как набор $\gamma = 1^{k-1}0^{n-k}$ отличает строку 1 от строки 0, то есть $|\Phi_1| = 2$.

Индукционный шаг (для l = 2, ..., d): по предположению индукции, на уровне (l-1) множество $\Phi_{l-1} \subseteq \Psi_{l-1}$ содержит не менее l векторов. Обозначим их $|\psi^{j_0}\rangle, ..., |\psi^{j_{l-1}}\rangle$, а соответствующие им входы – $\sigma^{j_0}, ..., \sigma^{j_{l-1}} \in \{0, 1\}^{l-1}$.

На шаге l программа Q считывает значение переменной $x_{i_l} = \sigma_{i_l}$. Согласно лемме 1 множество $\Phi_l^0 = \{U_l(0)|\psi^{j_0}\rangle, \ldots, U_l(0)|\psi^{j_{l-1}}\rangle\}$ является линейно независимым. Очевидно, что вектор $|\psi(1^l)\rangle = U_l(1)U_{l-1}(1)\cdots U_1(1)|\psi^0\rangle$ не входит в множество Φ_l^0 . При этом строка $1^{k-l}0^{n-k}$ отличает строку 1^l от каждой из строк $\sigma^{j_0}0, \ldots, \sigma^{j_{l-1}}0$. Согласно лемме 4 множество $\Phi_l^0 \cup \{|\psi(1^l)\rangle\}$ линейно независимо. Получили, что множество Φ_l содержит по крайней мере (l+1) векторов $U_l(0)|\psi^{j_0}\rangle, \ldots, U_l(0)|\psi^{j_{l-1}}\rangle$ и $|\psi(1^l)\rangle$.

Поскольку множество Φ_d содержит не менее d+1 элементов, размерность пространства состояний программы Q не менее d+1.

Случай 2. Пусть k < n/2 и, следовательно, d = n - k. Очевидно, что ЕХАСТ^k_n(σ) = 1 тогда и только тогда, когда $\#_0(\sigma) = n - k$, где $\#_0(\sigma)$ обозначает число нулей в наборе σ , при этом n - k > n/2. Доказательство проведем по той же схеме, что и для случая 1. Для l = 0, ..., d множество Φ_l содержит векторы $|\psi^{j_0}\rangle, ..., |\psi^{j_l}\rangle$ такие, что для соответствующих им входов выполняется $\sharp_0(\sigma^{j_i}) = i$ (i = 0, ..., l). Опишем индукционный шаг для l = 1, ..., d.

Пусть $\Phi_{l-1} = \{|\psi^{j_0}\rangle, \ldots, |\psi^{j_{l-1}}\rangle\}$, где $|\psi^{j_i}\rangle = |\psi(\sigma^{j_i}\rangle, \sigma^{j_i} \in \{0, 1\}^{l-1}$. Тогда множество $\Phi_l^1 = \{U_l(1)|\psi^{j_0}\rangle, \ldots, U_l(1)|\psi^{j_{l-1}}\rangle\}$ линейно независимо по лемме 1. Строка $\gamma = 0^{n-k-l}1^k$ отличает строку 0^l от каждой их строк $\sigma^{j_0}1, \ldots, \sigma^{j_{l-1}}1$, при этом $|\psi(0^l)\rangle \notin \Phi_l^1$. Согласно лемме 4 множество $\Phi_l = \Phi_l^1 \cup \{|\psi(0^l)\rangle\}$ является линейно независимым и при этом содержит l+1 вектор. На уровне l = d имеем $|\Phi_d| \ge d+1$.

Поскольку в обоих случаях $|\Phi_d| \ge d+1$, получим, что размерность пространства состояний программы Q не менее d+1, где $d = \max\{k, n-k\}$. \Box

Следующая теорема показывает, что доказанная нижняя оценка точна.

Теорема 3. Существует QOBDD Q ширины $d = \max\{k+1, n-k+1\}$, вычисляющая функцию EXACT_n^k без ошибки.

Доказательство. Рассмотрим случай $k \ge n/2$. QOBDD Q считывает переменные в естественном порядке. Состояние программы хранится в регистре из k+1 состояния $q_0, \ldots, q_{k-1}, q_k$, где q_0 – начальное состояние, а q_k – принимающее состояние. При считывании значения 0 программа Q применяет тождественное преобразование, при считывании единицы Q – преобразование $|q_j\rangle \rightarrow |q_{j+1 \mod (k+1)}\rangle$ для $0 \le j \le k$. Очевидно, что при обработке входного набора, содержащего ровно k единиц, программа закончит работу в состоянии $|q_k\rangle$ и примет такой набор с вероятностью 1. Если входной набор содержит число единиц, не равное k, то свойство $k \ge n/2$ гарантирует, что программа завершит обработку такого набора в состоянии, отличном от k, следовательно, примет такой набор с вероятностью 0.

В случае k < n/2 программа устроена аналогичным образом, только производит подсчет нулей, а не единиц.

Теорема 4. Существует NOBDD N, вычисляющая функцию EXACT^{k}_{n} и такая, что

$$Width(N) = \min(k+1, n-k+1) + 1, ecnu \ k \neq n/2, \ n \ нечётно, Width(N) = k+1, ecnu \ k = n/2, \ n \ чётно.$$

Доказательство. Пусть k < n/2, n нечётно. Программа N считывает переменные в естественном порядке $\pi = (1, \ldots, n)$ и использует состояния $q_0, \ldots, q_k, q_{k+1}$. Начальное состояние программы q_0 , принимающее состояние q_k . Программа N детерминированно считает количество единиц во входном наборе, выполняя преобразование $q_i \to q_{i+1}$ ($i = 0, \ldots, k$) при считывании единицы и тождественное преобразование при считывании нуля. При достижении состояния q_{k+1} программа остаётся в этом состоянии до конца обработки входа. Таким образом, программа закончит работу в состоянии q_k тогда и только тогда, когда в наборе ровно k единиц.

Пусть k > n/2, *n* нечётно (n - k < n/2). В этом случае программа устроена аналогичным образом, за исключением того, что она считает количество нулей, а не количество единиц.

Рассмотрим случай k = n/2, n чётно. В этом случае программа N использует состояния q_0, \ldots, q_k , где состояние q_0 – начальное, а состояние q_k – принимающее. При считывании единицы программа применяет преобразование $q_i \rightarrow q_{i+1 \pmod{k+1}}$ ($i = 0, \ldots, k$), при считывании нуля выполняет тождественное преобразование. Условие k = n/2 гарантирует, что если число единиц в наборе больше k, программа не успеет достигнуть состояния q_k до конца обработки входа.

Теорема 5. Для любой NOBDD, вычисляющей функцию EXACT^k_n,

 $Width(N) \ge \min(k+1, n-k+1) + 1, ecnu \ k \ne n/2, \ n \ нечётно,$ $Width(N) > k+1, eсли \ k = n/2, \ n \ чётно.$

Доказательство. Рассмотрим случай k < n/2, *n* нечётно. Предположим, что существует NOBDD N, которая вычисляет EXACT_n^k и имеет ширину меньше k+2. Рассмотрим множество вершин V_{k+1} уровня k+1 программы N и подмножество строк длины k+1, содержащих разное количество единиц: $S^{k+1} = \{\sigma^j \in$ $\{0,1\}^{k+1}: \sigma^j = \underbrace{0\cdots 0}_{1\cdots 1}, j = 0, \dots, k\}$. Принимающие пути, соответствующие k+1-j

частичным наборам из множества S^{k+1}, должны проходить через разные вершины множества V_{k+1} . Предположим, что это не так, и два принимающих пути, соответствующих разным частичным наборам $\sigma, \sigma' \in S^{k+1}$, проходят через одну и ту же вершину $v \in V^{k+1}$, и пусть $\sigma \gamma$ и $\sigma' \gamma'$ – наборы, соответствующие этим принимающим путям. Обозначим $a = \sharp_1(\sigma), a' = \sharp_1(\sigma')$ $(a \neq a', a, a' \leq k).$ Поскольку путь, соответствующий набору $\sigma\gamma$, ведет в принимающую вершину, значит, $\sharp_1(\gamma) = k - a$. Так как пути, соответствующие наборам $\sigma \gamma$ и $\sigma' \gamma'$, пересекаются в вершине v, то путь, соответствующий $\sigma'\gamma$, также ведет в принимающую вершину. Но поскольку $\sharp_1(\sigma') \neq a$, следовательно, $\sharp_1(\sigma'\gamma) \neq k$, и функция на данном наборе равна нулю. Значит, программа неверно вычисляет функцию EXACT^k_n.

Теперь рассмотрим частичный набор $\sigma \in \{0,1\}^{k+1}, \ \sharp_1(\sigma) = k+1$. Очевидно, этот набор не принадлежит S^{k+1} . Вычислительный путь, соответствующий σ , не может проходить ни через одну из вершин уровня V_{k+1} , через которые проходят принимающие пути, соответствующие наборам из множества S^{k+1} . В противном случае программа будет принимать вход, содержащий более k единиц. Следовательно, уровень k+1 содержит по крайней мере k+2 вершины и $Width(N) \ge k+2$.

Если k > n/2 (*n* нечётно), то n - k < n/2. В этом случае мы применим те же аргументы, что и для случая, рассмотренного выше, с заменой нулей на единицы и единиц на нули.

Рассмотрим случай k = n/2, n чётно. Уровень k не может содержать менее k+1 вершины, через которые проходят принимающие пути, соответствующие частичным входам из множества $S^k = \{\sigma^j \in \{0,1\}^k : \sigma^j = \underbrace{0 \cdots 0}_{k-j} \underbrace{1 \cdots 1}_j, j = 0, \dots, k\}.$ Следовательно, в этом случае ширина программы $\geq k+1.$

Следствие 1. Функция ANDn вычислима NOBDD N ширины 2. Функция ANDn вычислима NQOBDD Q ширины n+1. При этом не существует QOBDD, недетерминированно вычисляющей функцию AND_n и имеющей ширину, меньшую n+1.

Определим функцию $notEXACT_n^k : \{0,1\}^n \to \{0,1\}:$

потЕХАСТ_n^k
$$(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \#_1(\sigma) = k, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 6. Для любого $k \ (k \le n)$ функция notEXACT^k вычислима недетерминированной QOBDD ширины 2.

Доказательство. QOBDD Q, недетерминированно вычисляющая функцию notEXACT^k, имеет два состояния q_1, q_2 , состояние q_2 является принимающим, а начальное состояние программы $|\psi^0\rangle = \cos(-k\alpha)|q_1\rangle + \sin(-k\alpha_1)|q_2\rangle$, где $\alpha = \frac{\pi}{2n}$. При обработке входа программа Q применяет преобразование, осуществляющее поворот вектора состояния на угол α против хода часовой стрелки, если считанное значение равно 1, и тождественное преобразование, если считанное значение равно 0. Очевидно, что если входной набор σ содержит ровно k единиц, финальное состояние программы $|\psi_{final}\rangle = |q_1\rangle$, и программа примет такой набор с вероятностью 0. Если число единиц во входном наборе не равно k, амплитуда у состояния q_2 в состоянии $|\psi_{final}\rangle$ не равна нулю, и такой набор принимается программой с ненулевой вероятностью.

Теорема 7. Для любого k $(k \le n)$ для любой детерминированной OBDD P, вычисляющей функцию notEXACT^k_n,

 $Width(P) \ge \min(k+1, n-k+1) + 1$, если $k \ne n/2$, n нечётно; $Width(P) \ge k+1$, если k = n/2, n чётно.

Доказательство. Идея доказательства аналогична доказательству теоремы 5 с той разницей, что в детерминированной OBDD каждому $\sigma \in \{0,1\}^n$ соответствует единственный вычислительный путь и вместо принимающих путей мы анализируем отвергающие пути.

Пусть k < n/2. Предположим, что существует детерминированная OBDD, имеющая ширину d < k+2 и вычисляющая функцию notEXACT^k_n. Рассмотрим множество частичных входов $S^{k+1} = \{\sigma^j \in \{0,1\}^{k+1} : \sigma^j = \underbrace{0 \cdots 0}_{k+1-j} \underbrace{1 \cdots 1}_{j}, j = 0, \dots, k\}.$

Покажем, что вычислительные пути, соответствующие частичным входам из множества S^{k+1} , проходят через разные вершины уровня k+1.

Предположим, что это не так, и существуют такие $\sigma^i, \sigma^j \in S^{k+1}$ ($\sigma^i \neq \sigma^j$), что вычислительные пути, соответствующие этим частичным входам, проходят через одну и ту же вершину v. Рассмотрим такой набор $\gamma \in \{0,1\}^{n-k-1}$, что $\sharp_1(\gamma) = k-j$. Поскольку $\sharp_1(\sigma^j) + \sharp_1(\gamma) = k$, вычислительный путь, соответствующий набору $\sigma^j \gamma$, ведет в отвергающую вершину. Но тогда и путь, соответствующий $\sigma^i \gamma$, также ведёт в отвергающую вершину, что противоречит тому, что программа верно вычисляет функцию. Кроме того, частичный набор $\sigma \in \{0,1\}^{k+1}$ такой, что $\sharp_1(\sigma) = k+1$, не может проходить ни через одну из k+1 вершин, соответствующих наборам из множества S^{k+1} , так как все пути, соответствующие σ , должны вести в принимающую финальную вершину.

Случа
иk>n/2,а такжеk=n/2 при чётном nмогут быть обоснованы аналогично те
ореме 5. $\hfill \Box$

Теорема 8. Для любого k $(k \le n)$ ширина NOBDD, вычисляющей функцию потЕХАСТ^k_n, имеет ширину не менее $\log(m+1)$, где $m = \min(k+1, n-k+1)$, если $k \ne n/2$, n нечётно, $u \ m = k$, если k = n/2 $u \ n$ чётно.

Доказательство. Доказательство основано на хорошо известном соотношении между детерминированной и недетерминированной сложностями. Если функция f вычислима детерминированной OBDD ширины d, то ширина любой недетерминированной OBDD, вычисляющей f и использующей тот же порядок считывания переменных, не может быть меньше $\log d$. В предыдущей теореме показано, что для любого порядка считывания переменных ширина детерминированной OBDD, вычисляющей функцию notEXACT^k_n, не может быть меньше m + 1, где $m = \min(k + 1, n - k + 1)$, если $k \neq n/2$, n нечётно, и m = k, если k = n/2 и nчётно. Следовательно, ширина NOBDD, вычисляющей notEXACT^k_n, не может быть меньше $\log(m + 1)$.

5. Функция MOD

Представим функцию, для которой квантовая и классическая недетерминированные OBDD имеют одинаковую сложность.

Функция $MOD_n^p: \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ определена следующим образом:

$$\mathrm{MOD}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}}(\sigma) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \mathrm{если} \ \#_{1}(\sigma) \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \mathrm{иначe}, \end{array} \right.$$

где $\#_1(\sigma)$ – число единиц в наборе σ .

Лемма 5 ([6]). Функция MOD^p вычислима NOBDD ширины p.

Доказательство. NOBDD N, вычисляющая функцию MOD_n^p , имеет p состояний s_0, \ldots, s_{p-1} , где состояние s_0 – начальное и принимающее. При обработке входа N детерминированным образом считает количество единиц по модулю p во входном наборе, применяя преобразование $q_i \rightarrow q_{i+1 \pmod{p}}$ при считывании единицы и тождественное преобразование при считывании нуля. Очевидно, что программа завершит работу в состоянии q_0 тогда и только тогда, когда число единиц во входном наборе кратно p.

Следствие 2. Функция MOD^p вычислима NQOBDD ширины p.

Доказательство. Программа, построенная в доказательстве леммы 5, применяет на каждом шаге обратимые преобразования, которые являются унитарными. Следовательно, эта программа является квантовой.

Далее покажем, что построенные выше недетерминированная и квантовая недетерминированная программы являются оптимальными.

Теорема 9 ([6]). Для любого $p \le n/2$ ширина NOBDD, вычисляющей функцию MOD_n^p , не меньше p.

Теорема 10. Для любого $p \le n$ ширина NQOBDD, вычисляющей функцию MOD_n^p , не меньше p.

Доказательство. Пусть $p \le n/2$. Для любого порядка π считывания переменных можно построить строгое 1-полное множество для функции MOD_n^p :

$$S_{n-p+1}^{\pi} = \{ (\sigma^{i}, \gamma^{i}) : i = 0, \dots, p-1, \sigma^{i} = \underbrace{0 \cdots 0}_{n-p+1-i} \underbrace{1 \cdots 1}_{i}, \gamma^{i} = \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} \underbrace{1 \cdots 1}_{p-i} \}.$$

Согласно теореме 1 ширина программы не может быть меньше, чем $|S_{n-p+1}^{\pi}| = p$.

Рассмотрим случай p > n/2. Использовав те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 2, можно показать, что на (p-1)-м уровне программы множество линейно независимых векторов, являющихся квантовыми состояниями, достижимыми программой на этом уровне, содержит не менее p элементов. Это множество состоит из векторов $|\psi(\sigma^0)\rangle, \ldots, |\psi(\sigma^{p-1})\rangle$, где $\sigma^j = 1^j 0^{p-j-1}, j = 0, \ldots, p-1$.

6. Иерархия для NQOBDD

Обозначим через $NOBDD_n^d$, $NQOBDD_n^d$ классы булевых функций, зависящих от n переменных, вычислимых недетерминированными и квантовыми недетерминированными OBDD ширины не более d соответственно.

В работах [6,12] построена следующая и
ерархия классов для OBDD и NOBDD: для любого целого n>3
и $1< d \leq \frac{n}{2}$

$$OBDD_n^{d-1} \subsetneq OBDD_n^d$$
 и $NOBDD_n^{d-1} \subsetneq NOBDD_n^d$.

Для любых целых *n* и d = d(n), удовлетворяющих условию $16 \le d \le 2^{n/4}$,

 $\mathsf{OBDD}^{\lfloor d/8 \rfloor - 1} \subsetneq \mathsf{OBDD}^d \mathrel{\mathop{\mathrm{i}}} \mathsf{NOBDD}^{\lfloor d/8 \rfloor - 1} \subsetneq \mathsf{NOBDD}^d.$

На основе изложенных результатов представим результат о соотношении классов сложности для недетерминированных и квантовых недетерминированных OBDD линейной и сублинейной ширины.

Теорема 11. Для любых n > 1 и $1 < d \le n$ имеем NQOBDD_n^{d-1} \subseteq NQOBDD_n^d.

Доказательство. Включение NQOBDD^{d-1} \subseteq NQOBDD^d очевидно. При $d \leq n/2$, согласно следствию 2 и теореме 10, функция $MOD_n^d \in NQOBDD^d$ и $MOD_n^d \notin NQOBDD_n^{d-1}$. При d > n/2, согласно теоремам 3 и 2, функция $EXACT_n^{d-1} \in NQOBDD^d$ и $EXACT_n^{d-1} \notin NQOBDD_n^{d-1}$.

Теорема 12. Для любых n > 1 и $2 \le d \le \log n - 2$ NOBDD^d_n и NQOBDD^d_n несравнимы.

Доказательство. На основе функции AND_n для положительного целого $k \leq n$ определим функцию AND_n^k следующим образом: AND_n^k зависит от первых k переменных и $AND_n^k \equiv AND_k$. Согласно следствию 1 $AND_n^d \in \mathsf{NOBDD}_n^d$ и $AND_n^d \notin \mathsf{NQOBDD}_n^d$ для любых d таких, что $2 \leq d \leq n$.

Согласно теоремам 6 и 8 функция $notEXACT_n^{2^d} \notin NOBDD^d$ и $notEXACT_n^{2^d} \in NQOBDD^d$ для любых d таких, что $2 \le d \le \log n - 2$. \Box

Заключение

Исследованы классические и квантовые недетерминированные OBDD линейной и сублинейной ширины, вычисляющие симметрические булевы функции. Значение таких функций зависит от числа единиц во входном наборе и не зависит от порядка их следования. Известно, что квантовые NOBDD для таких функций могут превосходить по эффективности классические недетерминированные программы. С использованием предложенного метода доказательства нижней оценки сложности квантовых NOBDD показано, что классические NOBDD также могут превосходить по эффективности квантовые аналоги. Этот факт является следствием свойства обратимости квантовых преобразований.

В качестве направлений дальнейших работ предполагается исследовать модель квантовых OBDD сверхлинейной ширины, вычисляющих несимметрические булевы функции, для которых порядок считывания переменных может существенным образом влиять на сложность. Также интересным представляется применение разработанных техник доказательства нижних оценок для других вычислительных моделей.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Wegener I. Branching Programs and Binary Decision Diagrams: Theory and Applications. Ser.: Discrete Mathematics and Applications / Hammer P.L. (Ed.). Philadelphia, PA: Soc. Ind. Appl. Math., 2000. 396 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719789.
- Nakanishi M., Hamaguchi K., Kashiwabara T. Ordered quantum branching programs are more powerful than ordered probabilistic branching programs under a bounded-width restriction // Computing and Combinatorics (COCOON 2000): Proc. 6th Annu. Int. Conf. / Du D.-Z., Eades P., Estivill-Castro V., Lin X., Sharma A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 1858. Berlin, Heidelberg: Springer, 2000. P. 467–476. https://doi.org/10.1007/3-540-44968-X 46.
- Sauerhoff M., Sieling D. Quantum branching programs and space-bounded nonuniform quantum complexity // Theor. Comput. Sci. 2005. V. 334, Nos 1–3. P. 177–225. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.12.031.
- Ablayev F.M., Karpinski M. On the power of randomized branching programs // Automata, Languages and Programming (ICALP' 96): Proc. 23rd Int. Colloq. / Meyer F., Monien B. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 1099. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. P. 348–356. https://doi.org/10.1007/3-540-61440-0 141.
- Ablayev F., Gainutdinova A., Karpinski M., Moore C., Pollette C. On the computational power of probabilistic and quantum branching program // Inf. Comput. 2005. V. 203, No 2. P. 145–162. https://doi.org/10.1016/j.ic.2005.04.003.
- Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryılmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs // Lobachevskii J. Math. 2016. V. 37, No 6. P. 670–682. https://doi.org/10.1134/S199508021606007X.
- Gainutdinova A., Yakaryılmaz A. Nondeterministic unitary OBDDs // Computer Science – Theory and Applications (CSR 2017): Proc. 12th Int. Comput. Sci. Symp. in Russia / Weil P. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 10304. Cham: Springer, 2017. P. 126–140. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58747-9 13.
- 8. Гайнутдинова А.Ф. Сравнительная сложность квантовых и классических OBDD для всюду определенных и частичных функций // Изв. вузов. Матем. 2015. № 11. С. 32–43.
- Ablayev F., Gainutdinova A. Complexity of quantum uniform and nonuniform automata // Developments in Language Theory (DLT 2005): Proc. 9th Int. Conf. / De Felice C., Restivo A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 3572. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 78–87. https://doi.org/10.1007/11505877_7.
- Nielsen M.A., Chuang I. Quantum Computation and Quantum Information. Ser.: Cambridge Series on Information and the Natural Sciences. V. 2. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000. 676 p.
- 11. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. В 3-х ч. Ч. 2: Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2020. 368 с.
- Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryılmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs // Descriptional Complexity of Formal Systems (DCFS 2014): Proc. 16th Int. Wokshop / Jürgensen H., Karhumäki J., Okhotin A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 8614. Cham: Springer, 2014. P. 53–64. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09704-6 6.

Поступила в редакцию 5.07.2024 Принята к публикации 10.10.2024

Гайнутдинова Аида Фаритовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической кибернетики Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия E-mail: *aida.ksu@gmail.com*

> ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 470-484

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.470-484

Quantum and Classical Nondeterministic OBDDs

A.F. Gainutdinova

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia E-mail: aida.ksu@gmail.com

Received July 5, 2024; Accepted October 10, 2024

Abstract

A model of nondeterministic ordered binary decision diagrams (NOBDDs) was analyzed. A method for proving a lower bound on the complexity of quantum NOBDDs was developed. Two functions were introduced: one function has linear complexity in the quantum NOBDD but constant complexity in the classical NOBDD, while the other function demonstrates the same complexity in both quantum and classical NOBDD models. The relationships among the complexity classes specific to the OBDD model were described.

Keywords: branching program, ordered binary decision diagram, OBDD, complexity, quantum algorithm, nondeterminism, hierarchy of complexity classes

Acknowledgments. The research has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program («PRIORITY-2030»).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

- Wegener I. Branching Programs and Binary Decision Diagrams: Theory and Applications. Ser.: Discrete Mathematics and Applications. Hammer P.L. (Ed.). Philadelphia, PA, Soc. Ind. Appl. Math., 2000. 396 p. https://doi.org/10.1137/1.9780898719789.
- Nakanishi M., Hamaguchi K., Kashiwabara T. Ordered quantum branching programs are more powerful than ordered probabilistic branching programs under a bounded-width restriction. Computing and Combinatorics (COCOON 2000): Proc. 6th Annu. Int. Conf. Du D.-Z., Eades P., Estivill-Castro V., Lin X., Sharma A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1858. Berlin, Heidelberg, Springer, 2000, pp. 467–476. https://doi.org/10.1007/3-540-44968-X 46.

- Sauerhoff M., Sieling D. Quantum branching programs and space-bounded nonuniform quantum complexity. *Theor. Comput. Sci.*, 2005, vol. 334. nos. 1–3, pp. 177–225. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2004.12.031.
- Ablayev F.M., Karpinski M. On the power of randomized branching programs. Automata, Languages and Programming (ICALP' 96): Proc. 23rd Int. Colloq. Meyer F., Monien B. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1099. Berlin, Heidelberg, Springer, 1996, pp. 348–356. https://doi.org/10.1007/3-540-61440-0 141.
- Ablayev F., Gainutdinova A., Karpinski M., Moore C., Pollette C. On the computational power of probabilistic and quantum branching program. *Inf. Comput.*, 2005, vol. 203, no. 2, pp. 145–162. https://doi.org/10.1016/j.ic.2005.04.003.
- Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryılmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs. *Lobachevskii J. Math.*, 2016, vol. 37, no. 6, pp. 670–682. https://doi.org/10.1134/S199508021606007X.
- Gainutdinova A., Yakaryılmaz A. Nondeterministic unitary OBDDs. Computer Science

 Theory and Applications (CSR 2017): Proc. 12th Int. Comput. Sci. Symp. in Russia.
 Weil P. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10304. Cham, Springer, 2017,
 pp. 126–140. https://doi.org/10.1007/978-3-319-58747-9 13.
- Gainutdinova A.F. Comparative complexity of quantum and classical OBDDs for total and partial functions. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 11, pp. 26–35. https://doi.org/10.3103/S1066369X15110031.
- Ablayev F., Gainutdinova A. Complexity of quantum uniform and nonuniform automata. Developments in Language Theory (DLT 2005): Proc. 9th Int. Conf. De Felice C., Restivo A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3572. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, pp. 78–87. https://doi.org/10.1007/11505877 7.
- Nielsen M.A., Chuang I.L. Quantum Computation and Quantum Information. Ser.: Cambridge Series on Information and the Natural Sciences. Vol. 2. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000. 676 p.
- Kostrikin A.I. Vvedenie v algebru [Introduction to Algebra]. Pt. 2: Linear algebra. Moscow, MtsNMO, 2020. 368 p. (In Russian)
- Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryılmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs. *Descriptional Complexity of Formal Systems* (*DCFS 2014*): Proc. 16th Int. Wokshop. Jürgensen H., Karhumäki J., Okhotin A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8614. Cham, Springer, 2014, pp. 53–64. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09704-6_6.

/ Для цитирования: Гайнутдинова А.Ф. Квантовые и классические недетерминированные OBDD // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 470–484. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.470-484.

For citation: Gainutdinova A.F. Quantum and classical nondeterministic OBDDs. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 470–484. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.470-484. ' (In Russian) УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 4 С. 485–498 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.91: 005.513

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.485-498

ЖУРНАЛЬНЫЙ ИМПАКТ-ФАКТОР: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

А.М. Елизаров¹, В.В. Писляков²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, 109028, Россия

Аннотация

Дано определение журнального импакт-фактора в классической форме и исследованы различные аспекты его применения в области математического моделирования научной деятельности. Изучены свойства импакт-фактора, связанные с особенностями дисциплинарной структуры науки, ограниченным набором источников в существующих базах данных, статистической достоверностью, чувствительностью к типам публикуемых документов, влиянием выбросов. Кроме того, обсуждается вопрос об искажениях, которые может внести самоцитирование журнала.

Ключевые слова: библиометрические индикаторы, импакт-фактор, Web of Science, Journal Citation Reports, журнальное самоцитирование

Введение

Как известно, при математическом моделировании процессов развития науки используют специальные индикаторы для характеристики деятельности различных участников научного процесса – ученых, лабораторий, факультетов, организаций, стран. Те показатели, которые связаны со статистикой опубликованных работ, называются библиометрическими показателями. Они применяются также для оценки отдельных научных изданий, в первую очередь – журналов. Среди журнальных библиометрических характеристик хронологически первым и наиболее известным является импакт-фактор журнала.

Цель настоящей работы – подробно изучить различные математические и статистические свойства импакт-фактора, проявляющиеся в эмпирических условиях, т. е. на множестве реальных мировых научных журналов. Мы будем использовать критический подход. Что имеется в виду? По смыслу создания импакт-фактор должен позволять сравнивать «качество» журналов между собой. Однако в реальности есть ряд «недостатков» данного индикатора в смысле отклонения от выполнения данной функции. Исследуя эти недостатки, отклонения и несовершенства, можно более наглядно и отчетливо пронаблюдать эмпирические свойства импактфактора. Однако прежде всего необходимо кратко охарактеризовать то множество, «поле» журналов, на котором применяется импакт-фактор (как и иные журнальные индикаторы), – библиометрические базы данных.
1. Базы данных

Каждый библиометрический показатель, в том числе импакт-фактор научного журнала, рассчитывается по той или иной базе данных научного цитирования. Поскольку всего в мире имеется не менее 400 тыс. периодических изданий [1], из которых около 50 тыс. – академические журналы [2], невозможно подсчитать ссылки по всей мировой совокупности изданий, полученные журналом/статьей/автором. Поэтому опубликование каждого индикатора, помимо методики, сопровождается указанием инструмента, базы данных, на основании которого он рассчитан. Значения показателя, рассчитанные по идентичной методике, но по разным базам данных, конечно же, будут отличаться. Наиболее часто используемыми и упоминаемыми в литературе являются базы данных Web of Science (WoS) компании Clarivate и Scopus компании Elsevier. Они включают в себя ок. 22000 и ок. 27000 журналов соответственно. Кроме того, эти ресурсы содержат книги (ок. 150 тыс. в WoS и ок. 350 тыс. в Scopus), а также труды конференций. Цитирования из книг и трудов конференций также индексируются и учитываются. В России существует собственная библиометрическая база данных – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) [3], https://elibrary.ru/project risc.asp. Хотя говорить мы будем об импакт-факторе, который рассчитывается по WoS, стоит упомянуть, что в базе данных Scopus также есть методологически очень похожий показатель – CiteScore.

Во всех упомянутых базах данных научного цитирования приводятся сведения о числе ссылок, полученных отдельными статьями. Кроме того, эти данные объединены по авторам («авторские профили») и организациям («профили организаций»), в результате чего можно посмотреть суммарную статистику публикационной активности и цитируемости ученых или организаций. В случае Scopus и РИНЦ в стандартном интерфейсе этих платформ можно также получить индикаторы журналов как целого. В WoS эти индикаторы вынесены в специальную базу данных, агрегирующую журнальные показатели, – Journal Citation Reports (JCR).

2. Импакт-фактор: краткая история и определение¹

Импакт-фактор показывает среднюю цитируемость одной статьи в журнале. Термин впервые был введен Юджином Гарфилдом в 1955 г., но для обозначения цитирования отдельных статей [5] без привязки к журналу. Позже, в 1963 г., Ю. Гарфилд и И. Шер [6] использовали термин в известной сейчас форме – в отношении цитирования статей конкретного журнала.

Отметим малоизвестных предшественников импакт-фактора. В пионерской работе [7] авторы подсчитывали суммарное число ссылок на тот или иной журнал из ведущего журнала в области химии «Journal of the American Chemical Society», однако без нормализации по объему цитируемых изданий. В 1936 г. И. Хак [8] уже использовал нормализацию, но не на число отдельных статей, а на число вышедших томов журнала. В 1960 г. еще один журнальный показатель был предложен Л. Рейзигом [9] под названием «индекс реализованного исследовательского потенциала» – подсчитывалась доля хотя бы один раз процитированных статей в журнале. Здесь отличие от импакт-фактора состоит в том, что не учитывалось, сколько именно ссылок получила статья, – важен только факт цитирования статьи (было/не было)².

¹См. также статью «Импакт-фактор» в Большой российской энциклопедии [4].

²Обратный этому показатель сейчас называют «коэффициент нецитируемости».

Классический импакт-фактор IF_J в году Y для журнала J задаётся выражением

$$IF_J(Y) = \frac{\sum_{i=1}^{2} CIT_J(Y, Y - i)}{\sum_{i=1}^{2} PUB_J(Y - i)} = \frac{CIT_J(Y, Y - 1) + CIT_J(Y, Y - 2)}{PUB_J(Y - 1) + PUB_J(Y - 2)},$$
 (1)

где $CIT_J(Y1,Y2)$ – число цитирований (ссылок), полученных в году Y1 статьями журнала J, вышедшими в году Y2; $PUB_J(Y)$ – число статей, вышедших в журнале J в году Y. Нормировка на число статей позволяет убрать преимущество объемных журналов перед небольшими, а часто выходящих (например, ежемесячных) – перед редко выходящими (например, ежегодниками). Таким образом, классический импакт-фактор журнала – это среднее (в расчете на одну статью) число цитирований, которое получают в отчетном году статьи, вышедшие за два предыдущих года. Поскольку подсчитываются ссылки, полученные в одном (отчетном) году документами, опубликованными в течение двух лет, говорят об однолетнем «окне цитирования» и двухлетнем «публикационном окне».

Отметим, что в импакт-факторе не учитываются ссылки, полученные публикациями в год их выхода. Для этого в системе индикаторов JCR есть отдельный показатель – «индекс оперативности» (immediacy index), который учитывает только такие цитирования. Кроме того, отметим, что среди ссылок, учитываемых в (1), есть ссылки журнала на самого себя, т.н. «журнальное самоцитирование». Пока уточним это как методологический момент, позднее самоцитирование будет исследовано подробнее.

3. Методологические несовершенства и проблемы в использовании импакт-фактора

Перейдем, как было заявлено во введении, к критике импакт-фактора, т. е. к исследованию сложностей при его практическом использовании. Это позволит в деталях рассмотреть различные характеристики этого статистического индикатора.

3.1. Дисциплинарные различия. Серьезной, наиболее значимой проблемой импакт-фактора является принципиальная невозможность прямого сравнения его значений у журналов, относящихся к различным дисциплинам. Диапазоны и медианные журнальные импакт-факторы в разных областях науки отличаются практически на порядок, как показано в табл. 1. Этот эффект наблюдается как в естественных/технических/медицинских, так и общественных науках.

Табл. 1

Дисциплина	Медианный импакт-фактор	
Естественные науки		
Cell Biology	4.7	
Physics, Applied	2.7	
Mathematics	1.0	
Общественные науки		
Management	4.5	
Sociology	2.1	
History	0.6	

Медианные импакт-факторы журналов по различным научным дисциплинам (JCR-2021)

Для примера: математический журнал с таким же импакт-фактором, какой имеет медианный, средний журнал по клеточной биологии (4.7), занимал бы очень высокую позицию в рейтинге из всех 333 математических журналов, представленных в JCR-2021, – он был бы на третьем месте.

Табл. 1 показывает, что разница в уровне цитируемости отдельных научных направлений наблюдается как в естественных (hard sciences), так и в общественных науках (social sciences). Более того, если взять эти конгломераты наук как целое, то и на таком «метауровне», объединяющем тысячи журналов, существует тот же эффект. В [10, с. 187] вычислены показатели из JCR-2018: медиана импакт-факторов журналов по всем естественным наукам (точнее, объединению естественных, технических и медицинских наук) равна 1.91, а по общественным наукам – 1.40.

3.2. Дисциплинарные границы, устанавливаемые на основе журналов. Как следует из предыдущего раздела, напрямую сравнивать журналы по их импакт-факторам имеет смысл только в рамках одной научной области. В базах данных WoS/JCR есть деление статей по научным направлениям, однако дисциплина присваивается документам только на основании журнала, в котором они опубликованы, особенности индивидуальных статей не учитываются. Поэтому к той или иной научной дисциплине приписывается журнал как целое (при этом журнал может быть отнесен сразу к нескольким, как правило, 2–3 дисциплинарным категориям), и опубликованные в нем статьи автоматически получают ту же самую научную классификацию.

Часто это оказывается некорректным, например, статья, посвященная библиометрическому анализу журнала по химии [11] и, по сути, относящаяся в первую очередь к наукометрии/библиометрии, приписана в WoS/JCR к категории «Chemistry, Multidisciplinary», к которой относится опубликовавший ее журнал «Успехи химии». В подобных случаях журналы, публикующие такие мультидисциплинарные статьи, получают преимущество, если они «захватывают» ссылки из областей науки, в которых наблюдается более высокая средняя цитируемость, и наоборот, если затрагивается менее цитируемая дисциплина.

3.3. Зависимость от контента базы данных. Это слабое место импактфактора связано с особенностями дисциплин, которые обсуждались в п. 3.1, однако иногда оно проявляется и на уровне отдельных журналов в рамках одного научного направления. Контент WoS ограничен и не может включать в себя все мировые источники. Среди типов научной литературы наиболее полно представлены журналы, в то время как покрытие других типов (книги, диссертации и т. д.) во многом недостаточно, если оценивать процент проиндексированных в WoS источников от всех существующих в мире качественных научных изданий.

В результате дисциплины или отдельные журналы, которые получают больше ссылок «извне» базы данных WoS, например из книг, препринтов, диссертаций, патентов, официальных документов и др., оказываются в худшем положении, чем те, которые цитируются преимущественно в журнальной литературе. Более того, эта проблема существует и для изданий, которые получают ссылки из журналов, но регионального, локального значения – тех, что в худшей мере охвачены WoS/JCR.

3.4. Произвольный выбор публикационного окна и окна цитирования. В методике расчета импакт-фактора выбор двухлетнего публикационного окна и однолетнего окна цитирования, в принципе, является произвольным и не имеющим специального обоснования. О случайностях и их последствиях при конструировании используемой сейчас формулы импакта см. [12].

В известной мере этот выбор обусловлен тем, что в самом начале указатели цитирования (которые в дальнейшем стали базой данных WoS) были созданы Ю. Гарфилдом для биомедицинских наук, в которых научное знание достаточно быстро устаревает. В таком случае имеет смысл брать небольшие временные интервалы выхода публикаций и их цитирования, иначе не получится оценить текущий, актуальный уровень журнала, который со временем может изменяться.

Однако для других, менее динамичных отраслей естественных наук и в особенности наук общественных двухлетний интервал оценки цитируемости может оказаться недостаточным. Его не хватает, чтобы профессиональное сообщество смогло должным образом оценить выходящие в свет публикации, статьи «не успевают набрать цитирования». Показательно здесь исследование В. Гленцля и Х. Мута [13], которые собрали данные по цитируемости с течением времени однолетнего массива статей из социологического и медицинского журналов. Табл. 2 показывает, что если в год выхода (1980) медицинская статья получила в среднем в три раза больше ссылок, чем статья по социологии, то на интервале, примерно соответствующем импакт-фактору, 1980–1982, показатели двух журналов сравниваются. Если же «отойти» на десять лет от года выхода статей (1980–1989), то окажется, что социологическая статья в сумме получила в полтора раза больше цитирований, чем статья по медицине.

Табл. 2

Окно цитирования	Среднее число ссылок,	
(время наблюдения)	полученное одной статьей,	
	вышедшей в 1980 г.	
	American Sociological Review	Lancet
1980	0.2	0.6
1980–1981	1.8	2.4
1980–1982	4.3	4.5
1980–1985	12.1	9.7
1980–1989	20.9	14.0

Среднее число ссылок на статью в социологическом и медицинском журналах при варьировании окна цитирования (источник: [13])

Эффект долгого «старения знания» и, соответственно, необходимости долгой аккумуляции ссылок для оценки статей и журналов продемонстрирован в табл. 2 на примере общественно-научного журнала. Однако и в сфере естественных и технических наук также существуют медленно устаревающие дисциплины (например, зоология и геология). Более того, наиболее динамичные в этом плане области все равно выходят за рамки двух лет, отмеренных импакт-фактором: минимальная медиана хронологического распределения ссылок, сделанных в журналах, согласно JCR-2018, наблюдается в категориях «Электрохимия» и «Нанонауки и нанотехнологии», при этом она равна 5.7 лет [10, с. 216], т.е. половина литературы, цитируемой даже в этих науках, старше пяти лет, если считать от момента выхода цитирующих публикаций³.

³Интересно, что именно эта оценка наблюдалась самим Гарфилдом еще на заре эпохи указателей научных ссылок: «Наши исследования подтверждают, что учёные часто обращаются к источникам, вышедшим достаточно давно. В индексе 1961 г. более половины ссылок ведут на материалы старше пяти лет» [14].

3.5. Погрешность при вычислении импакт-фактора. Следующая уязвимость относится к статистическим характеристикам импакт-фактора. Значения индикатора исходно публикуются в JCR и в дальнейшем анализируются, как правило, без указания статистической погрешности. Создатель импакт-фактора в соавторстве с А. Пудовкиным отстаивал утверждение, что, поскольку набор журналов в базу данных JCR не является случайной выборкой из всех мировых журналов, статистической погрешности в импакт-факторе не существует в принципе [15]. Тем не менее сам процесс цитирования и получения/неполучения ссылки тем или иным документом считается многими исследователями стохастическим процессом, который они моделируют, в частности, отрицательным биномиальным распределением ссылок [16], распределением Пуассона [17, 18] или нормальным распределением [19]⁴. В итоге при построении значений импакт-факторов в рамках выделенной дисциплины с отметкой доверительного интервала, а также диапазона рангов, которые могли бы занимать журналы с учетом статистической погрешности, получаются графики, подобные рис. 1, взятому из [17]. Обычно определенность присутствует в самых верхних и самых нижних позициях, остальные значения импакта и места журналов в получающемся ранжировании в значительной мере размыты, и доверительные интервалы сильно перекрывают друг друга (рис. 1).

Это также приводит к оспариванию точности, с которой в JCR публикуются значения импакт-фактора. Многие годы этот показатель размещался в базе данных с точностью до третьей цифры после запятой, что рядом специалистов считалось избыточным и вводящим в заблуждение [20–22]. Под влиянием дискуссии компания Clarivate с 2023 г. стала публиковать значения импактов с одним знаком после запятой [23].

3.6. Зависимость от выбросов. Проблема среднего значения. Поскольку импакт-фактор – это среднее значение, среднее число ссылок, полученных одной статьей, то на него, как и на любой средний показатель, сильно влияют выбросы. Неординарно большое число ссылок, полученное всего одной-двумя статьями журнала, могут кардинально повысить журнальный импакт-фактор.

В принципе, как уже упоминалось, распределение цитирований по отдельным статьям журнала далеко от нормального, оно сильно асимметричное. Обычно существуют малый процент статей в журнале, которые получили много ссылок, и большая доля низкоцитируемых или вообще не процитированных статей. Такие закономерности в библиометрии объединяют термином «гиперболические распределения» [24, с. 71 и далее]. Таким образом, по импакт-фактору журнала трудно судить о цитируемости каждой отдельной статьи в нем.

Однако бывают крайне рельефные случаи, как в показанном на рис. 2 примере журнала «Acta Crystallographica A». Благодаря высокой цитируемости однойединственной статьи, вышедшей в 2008 г., этот журнал на короткое время (пока статья попадала в публикационное окно вычисления импакт-фактора) вошел в верхушку рейтинга всей базы JCR.

Рис. 2 наглядно показывает, что высокий импакт-фактор не является следствием какого-то значительного улучшения качества и повышения научного уровня рассматриваемого журнала: когда статья, получившая на данный момент (2024) более 75 тысяч ссылок, перестала попадать в интервал расчета, импакт-фактор издания резко упал до прежнего скромного уровня.

⁴Последний вариант, увидевший свет в журнале по экономике, скорее является ошибочным, поскольку распределение ссылок по статьям существенно негауссовое, асимметричное.



Рис. 1. Журналы тематической категории «Medicine, Research, and Experimental». Вверху: значения импакт-факторов с доверительными интервалами. Внизу: позиции в ранжировании по импакт-фактору с доверительными интервалами. Источник: [17]

3.7. Зависимость от типа публикаций. Если детально рассмотреть методику вычисления импакт-фактора, в реальности используемую компанией Clarivate, то обнаружится различие в учете типов документов в числителе и знаменателе формулы (1). В числителе, количестве полученных ссылок, учитываются цитирования, полученные всеми возможными публикациями оцениваемого журнала, вне зависимости от их типа. Однако в знаменателе подсчитываются только так, как их обозначают в JCR, – «документы, которые могут быть процитированы» (citable items). Это исследовательские статьи (Article) и научные обзоры (Review). Остальные виды публикаций, например редакционные статьи, письма,

обзоры конференций и др., исключены [23]. Такое различие в подходе к типам документа числителя и знаменателя продолжительное время отстаивается владельцем JCR [25], однако иногда продолжает считаться слабым местом методики расчета импакт-фактора.



Рис. 2. Динамика импакт-фактора журнала «Acta Crystallographica A», 1997–2013. Источник: JCR

Вероятно, еще более серьезной проблемой является то, что разные типы документов цитируются по-разному. Многие исследования показали, что в среднем научные обзоры цитируются в несколько раз активнее, чем оригинальные исследовательские статьи (разумеется, при сравнении в рамках одной и той же области науки) [26, 27]. Это означает, что журнал, публикующий много обзоров (или исключительно обзоры, как, например, «Успехи химии» или журналы «Annual Review of ...»), получает только на этом основании преимущество в импакт-факторе перед иными изданиями. Это, вероятно, несправедливо и вводит в заблуждение, поскольку не имеет отношения к научному уровню публикуемых материалов.

3.8. Нечувствительность к научному уровню цитирующих источников. Еще одним недостатком методики расчета импакт-фактора можно считать его «безразличие» к тому, откуда оцениваемый журнал получает ссылки. Все приходящие ссылки одинаковы, импакт-фактор «не замечает», из какого именно источника получено то или иное цитирование. Каждое из них считается как «+1» в числителе индикатора, замена одного цитирующего журнала на другой, который дает столько же ссылок, никак не повлияет на результат. Нередко такой подход подвергается критике: должно ли упоминание журнала в мировых лидерах, например «Nature», «Reviews of Modern Physics», «Acta Numerica» и т. д., быть равнозначным ссылке из ординарного и лишь локально известного издания? В частности, в таком случае сложно отличить лидеров на мировой арене от звезд регионального масштаба, получающих ссылки из узкого круга знающих их авторов (см. также следующий пункт про самоцитирование).

3.9. Зависимость от журнального самоцитирования⁵. Эта сложность при использовании импакт-фактора для оценки уровня журналов связана не с его методологическими дефектами, а с теоретической возможностью достаточно легко

⁵Здесь термином «журнальное самоцитирование» мы обозначаем библиографическую ссылку из публикации в некотором журнале на другую публикацию из того же самого журнала. Речь не идет (как иногда бывает, когда применяют это понятие) о заимствовании текста автором из своих предыдущих публикаций.

манипулировать им. Как уже вкратце упоминалось, в определении формулы (1) в числитель входят все ссылки, полученные статьями журнала, включая цитирования из самого оцениваемого журнала. Любая публикация в журнале, цитирующая его же статью одно- или двухлетней давности, увеличивает импакт-фактор этого журнала. Предполагается, что этим могут манипулировать, например, редакции журналов, чтобы увеличить библиометрические показатели своих изданий. Иногда такие попытки наблюдались [28, 29].

Надо отметить, что общий вывод исследований журнального самоцитирования, как правило, таков: самоцитированием можно ощутимо изменить позицию слабого журнала, находящегося в «хвосте» ранжирования по импакт-фактору в своей дисциплине. Но, за крайне редкими исключениями, невозможно пробиться в топ рейтинга или существенно улучшить свое положение в нем. Тем не менее существует разумная рекомендация обращать внимание на роль самоцитирования в импакт-факторе и при возможности сопоставлять данные по метрикам с учетом и без учета ссылок журнала на самого себя. Подробнее см. обзор исследований журнального самоцитирования и «картелей» журналов, взаимно цитирующих друг друга, а также политики базы данных JCR по отношению к этим явлениям в [30].

Заключение

Как ответ на явные и часто серьезные недостатки импакт-фактора, перечисленные в разделе 3, профессиональное наукометрическое сообщество непрерывно работает над новыми, улучшенными метриками и уже выдвинуло множество интересных решений: пятилетний импакт-фактор, CieScore, взвешенные индикаторы и индикаторы, построенные на методиках постатейного, а не пожурнального классификатора.

К сожалению, в сфере библиометрических журнальных индикаторов недостаточно предложить ту или иную методику, «идеальную формулу». Для полного ее принятия и внедрения в повседневные практики необходимы мощности и структуры, производящие массовые и регулярные расчеты нового индикатора по огромному массиву мировых научных журналов. Необходима «вычислительная фабрика», из года в год производящая результаты согласно вновь созданному алгоритму. Из сотен показателей, предложенных в теории, научных журналах и книгах по библиометрии, лишь часть получила такую поддержку от ведущих наукометрических компаний, которые теперь публикуют их на регулярной основе в тех или иных базах данных научного цитирования. Тем не менее сотрудничество ученыхнаукомеров и производителей баз данных продолжается и становится всё более продуктивным.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. ExLibris. Ulrichsweb: General FAQ. 2018. https://knowledge.exlibrisgroup.com/Ulrich's/Product_Documentation/ Frequently_Asked_Questions_(FAQs)/Ulrichsweb
- 2. Curcic D. Number of Academic Papers Published Per Year. 2023. https://wordsrated.com/number-of-academic-papers-published-per-year/
- Moskaleva O., Pislyakov V., Sterligov I., Akoev M., Shabanova S. Russian Index of Science Citation: Overview and review // Scientometrics. 2018. V. 116, No 1. P. 449–462. https://doi.org/10.1007/s11192-018-2758-y.

- Писляков В.В. Импакт-фактор // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал. URL: https://bigenc.ru/c/impakt-faktor-c87b20/?v=8838250. Дата публикации: 30.10.2023.
- Garfield E. Citation indexes for science. A new dimension in documentation through association of ideas // Science. 1955. V. 122, No 3159. P. 108–111. https://doi.org/10.1126/science.122.3159.108.
- Garfield E., Sher I.H. New factors in the evaluation of scientific literature through citation indexing // Am. Doc. 1963. V. 14, No 3. P. 195–201. https://doi.org/10.1002/asi.5090140304
- Gross P.L.K., Gross E.M. College libraries and chemical education // Science. 1927. V. 66, No 1713. P. 385–389. https://doi.org/10.1126/science.66.1713.385.
- Hackh I. The periodicals useful in the dental library // Bull. Med. Libr. Assoc. 1936, Sept. V. 25, Nos 1–2. P. 109–112.
- Raisig L.M. Mathematical evaluation of the scientific serial // Science. 1960. V. 131, No 3411. P. 1417–1419. https://doi.org/10.1126/science.131.3411.1417.
- Писляков В.В. Библиометрические индикаторы в ресурсах Clarivate. В кн.: Акоев М.А., Маркусова В.А., Москалева О.В., Писляков В.В. «Руководство по наукометрии: индикаторы развития науки и технологии». 2-е изд. Екатеринбург: Изд-во Уральск. ун-та, 2021. С. 177–220. https://doi.org/10.15826/B978-5-7996-3154-3.
- 11. Зибарева И.В., Теплова Т.Н., Нефёдов О.М. Библиометрический анализ журнала «Успехи химии» // Усп. хим. 2007. Т. 76, № 8. С. 747–751.
- Archambault É., Larivière V. History of the journal impact factor: Contingencies and consequences // Scientometrics. 2009. V. 79, No 3. P. 635–649. https://doi.org/10.1007/s11192-007-2036-x.
- Glänzel W., Moed H.F. Journal impact measures in bibliometric research // Scientometrics. 2002. V. 53, No 2. P. 171–193. https://doi.org/10.1023/A:1014848323806.
- Garfield E., Sher I.H. Genetics Citation Index: Experimental Citation Indexes to Genetics with Special Emphasis on Human Genetics. Philadelphia, PA: Inst. Sci. Inf., 1963. xxvii, 864 p.
- Pudovkin A.I., Garfield E. Rank normalization of impact factors will resolve Vanclay's dilemma with TRIF // Scientometrics. 2012. V. 92, No 2. P. 409–412. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0634-8.
- Schubert A., Glänzel W. Statistical reliability of comparisons based on the citation impact of scientific publications // Scientometrics. 1983. V. 5, No 1. P. 59–73. https://doi.org/10.1007/BF02097178.
- Greenwood D.C. Reliability of journal impact factor rankings // BMC Med. Res. Methodol. 2007. V. 7. Art. 48. https://doi.org/10.1186/1471-2288-7-48.
- Bornmann L. Confidence intervals for Journal Impact Factors // Scientometrics. 2017. Vol. 111, No 3. P. 1869–1871. https://doi.org/10.1007/s11192-017-2365-3.
- Stern D.I. Uncertainty measures for economics journal impact factors // J. Econ. Lit. 2013. V. 51, No 1. P. 173–189. https://doi.org/10.1257/jel.51.1.173.
- Vanclay J.K. Impact factor: Outdated artefact or stepping-stone to journal certification? // Scientometrics. 2012. V. 92, No 2. P. 211–238. https://doi.org/10.1007/s11192-011-0561-0.
- Zitt M. The journal impact factor: Angel, devil, or scapegoat? A comment on J.K. Vanclay's article 2011 // Scientometrics. 2012. V. 92, No 2. P. 485–503. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0697-6.
- Bar-Ilan J. Journal report card // Scientometrics. 2012. V. 92, No 2. P. 249–260. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0671-3.

- 23. Clarivate. Journal Citation Reports[™] Reference Guide. 2023. URL: https://clarivate.com/wp-content/uploads/dlm_uploads/2023/08/JCR-Reference-Guide -2023-August-update-1.pdf.
- 24. *Яблонский А.И.* Модели и методы исследования науки. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 398 с.
- McVeigh M.E, Mann S.J. The journal impact factor denominator: Defining citable (counted) items // JAMA. 2009. V. 302, No 10. P. 1107–1109. https://doi.org/10.1001/jama.2009.1301.
- Miranda R., Garcia-Carpintero E. Overcitation and overrepresentation of review papers in the most cited papers // J. Inform. 2018. V. 12, No 4. P. 1015–1030. https://doi.org/10.1016/j.joi.2018.08.006.
- Aksnes D.W. Characteristics of highly cited papers // Res. Eval. 2003. V. 12, No 3. P. 159–170. https://doi.org/10.3152/147154403781776645.
- Smith R. Journal accused of manipulating impact factor // BMJ. 1997. V. 314. Art. 461. https://doi.org/10.1136/bmj.314.7079.461d.
- Macdonald S. The gaming of citation and authorship in academic journals: a warning from medicine // Soc. Sci. Inf. V. 61, No 4. P. 457–480. https://doi.org/10.1177/05390184221142218.
- 30. Писляков В.В. Самоцитирование и его влияние на оценку научной деятельности: обзор литературы. Часть II // Научн. и техн. библ. 2022. № 3. С. 85–104. https://doi.org/10.33186/1027-3689-2022-3-85-104.

Поступила в редакцию 4.08.2024 Принята к публикации 24.09.2024

Елизаров Александр Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой аналитики и технологий искусственного интеллекта Института информационных технологий и искусственного интеллекта

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

 $\mbox{E-mail:} \ amelizarov@gmail.com \\$

Писляков Владимир Владимирович, кандидат физико-математических наук, заместитель директора библиотеки

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Покровский б-р, д. 11, г. Москва, 109028, Россия

E-mail: *pislyakov@hse.ru*

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 485-498

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.485-498

Journal Impact Factor: Mathematical and Statistical Properties

A.M. Elizarov^{a*}, V.V. Pislyakov^{b**}

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
^bHSE University, Moscow, 109028 Russia
E-mail: *amelizarov@gmail.com, **pislyakov@hse.ru
Received August 4, 2024; Accepted September 24, 2024

Abstract

Using a commonly agreed definition of the journal impact factor, its various applications in the mathematical modeling of scientific research were investigated. Special attention was paid to the impact factor's properties related to the disciplinary structure of science, the limitations of source data in existing databases, statistical reliability, the relevance of document types, and the effect of outliers. The potential bias resulting from journal self-citation practices was discussed.

Keywords: bibliometric indicators, impact factor, Web of Science, Journal Citation Reports, journal self-citation

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Journals in the "Medicine, Research and Experimental" category. Above: journal impact factors with confidence intervals. Below: journal rankings based on the journal impact factors with confidence intervals. Source: [17].

Fig. 2. Impact factor trend for "Acta Crystallographica A", 1997–2013. Source: JCR.

References

- 1. ExLibris. Ulrichsweb: General FAQ. 2018. URL: https://knowledge.exlibrisgroup.com/ Ulrich's/Product_Documentation/Frequently_Asked_Questions_(FAQs)/Ulrichsweb.
- 2. Curcic D. Number of Academic Papers Published Per Year. 2023. URL: https://wordsrated.com/number-of-academic-papers-published-per-year/.
- Moskaleva O., Pislyakov V., Sterligov I., Akoev M., Shabanova S. Russian Index of Science Citation: Overview and review. *Scientometrics*, 2018, vol. 116, no. 1, pp. 449–462. https://doi.org/10.1007/s11192-018-2758-y.
- 4. Pislyakov V.V. Impact factor. The Great Russian Encyclopedia: A Science and Education Website. URL: https://bigenc.ru/c/impakt-faktor-c87b20/?v=8838250. (In Russian)
- Garfield E. Citation indexes for science: A new dimension in documentation through association of ideas. *Science*, 1955, vol. 122, no. 3159, pp. 108–111. https://doi.org/10.1126/science.122.3159.108.

- Garfield E., Sher I.H. New factors in the evaluation of scientific literature through citation indexing. Am. Doc., 1963, vol. 14, no. 3, pp. 195–201. https://doi.org/10.1002/asi.5090140304.
- Gross P.L.K., Gross E.M. College libraries and chemical education. *Science*, 1927, vol. 66, no. 1713, pp. 385–389. https://doi.org/10.1126/science.66.1713.385.
- Hackh I. The periodicals useful in the dental library. Bull. Med. Libr. Assoc., 1936, Sept., vol. 25, nos. 1–2, pp. 109–112.
- Raisig L.M. Mathematical evaluation of the scientific serial. *Science*, 1960, vol. 131, no. 3411, pp. 1417–1419. https://doi.org/10.1126/science.131.3411.1417.
- Pislyakov V.V. Bibliometric indicators in the Clarivate databases. In: Akoev M.A., Markusova V.A., Moskaleva O.V., Pislyakov V.V. Rukovodstvo po naukometrii: indikatory razvitiya nauki i tekhnologii [Handbook for Scientometrics: Science and Technology Development Indicators]. 2 ed. Yekaterinburg, Izd. Ural. Univ., 2021, pp. 177–220. https://doi.org/10.15826/B978-5-7996-3154-3. (In Russian)
- Zibareva I.V., Pislyakov V.V., Teplova T.N., Nefedov O.M. Bibliometric analysis of the journal Uspekhi Khimii (Russian Chemical Reviews). Herald Russ. Acad. Sci., 2008, vol. 78, no. 3, pp. 247–256. https://doi.org/10.1134/S101933160803012X. (In Russian)
- Archambault É., Larivière V. History of the journal impact factor: Contingencies and consequences. *Scientometrics*, 2009, vol. 79, no. 3, pp. 635–649. https://doi.org/10.1007/s11192-007-2036-x.
- Glänzel W., Moed H.F. Journal impact measures in bibliometric research. Scientometrics, 2002, vol. 53, no. 2, pp. 171–193. https://doi.org/10.1023/A:1014848323806.
- Garfield E., Sher I.H. Genetics Citation Index: Experimental Citation Indexes to Genetics with Special Emphasis on Human Genetics. Philadelphia, PA, Inst. Sci. Inf., 1963. xxvii, 864 p.
- Pudovkin A.I., Garfield E. Rank normalization of impact factors will resolve Vanclay's dilemma with TRIF. *Scientometrics*, 2012, vol. 92, no. 2, pp. 409–412. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0634-8.
- Schubert A., Glänzel W. Statistical reliability of comparisons based on the citation impact of scientific publications. *Scientometrics*, 1983, vol. 5, no. 1, pp. 59–73. https://doi.org/10.1007/BF02097178.
- Greenwood D.C. Reliability of journal impact factor rankings. BMC Med. Res. Methodol., 2007, vol. 7, art. 48. https://doi.org/10.1186/1471-2288-7-48.
- Bornmann L. Confidence intervals for Journal Impact Factors. Scientometrics, 2017, vol. 111, no. 3, pp. 1869–1871. https://doi.org/10.1007/s11192-017-2365-3.
- Stern D.I. Uncertainty measures for economics journal impact factors. J. Econ. Lit., 2013, vol. 51, no. 1, pp. 173–189. https://doi.org/10.1257/jel.51.1.173.
- Vanclay J.K. Impact factor: Outdated artefact or stepping-stone to journal certification? Scientometrics, 2012, vol. 92, no. 2, pp. 211–238. https://doi.org/10.1007/s11192-011-0561-0.
- Zitt M. The journal impact factor: Angel, devil, or scapegoat? A comment on J.K. Vanclay's article 2011. *Scientometrics*, 2012, vol. 92, no. 2, pp. 485–503. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0697-6.
- Bar-Ilan J. Journal report card. Scientometrics, 2012, vol. 92, no. 2, pp. 249–260. https://doi.org/10.1007/s11192-012-0671-3.
- Clarivate. Journal Citation Reports[™] Reference Guide. 2023. URL: https://clarivate.com/wp-content/uploads/dlm_uploads/2023/08/JCR-Reference-Guide -2023-August-update-1.pdf.
- 24. Yablonsky A.I. *Modeli i metody issledovaniya nauki* [Models and Methods for the Study of Science]. Moscow, Editorial URSS, 2001. 398 p. (In Russian)

- McVeigh M.E., Mann S.J. The journal impact factor denominator: Defining citable (counted) items. JAMA, 2009, vol. 302, no. 10, pp. 1107–1109. https://doi.org/10.1001/jama.2009.1301.
- Miranda R., Garcia-Carpintero E. Overcitation and overrepresentation of review papers in the most cited papers. J. Inform., 2018, vol. 12, no. 4, pp. 1015–1030. https://doi.org/10.1016/j.joi.2018.08.006.
- Aksnes D.W. Characteristics of highly cited papers. *Res. Eval.*, 2003, vol. 12, no. 3, pp. 159–170. https://doi.org/10.3152/147154403781776645.
- Smith R. Journal accused of manipulating impact factor. BMJ, 1997, vol. 314, art. 461. https://doi.org/10.1136/bmj.314.7079.461d.
- Macdonald S. The gaming of citation and authorship in academic journals: A warning from medicine. Soc. Sci. Inf., 2022, vol. 61, no. 4, pp. 457–480. https://doi.org/10.1177/05390184221142218.
- Pislyakov V.V. Self-citation and its impact on research evaluation: Literature review. Part II. Nauchn. Tekh. Bibl., 2022, no. 3, pp. 85–104. https://doi.org/10.33186/1027-3689-2022-3-85-104. (In Russian)

Для цитирования: Елизаров А.М., Писляков В.В. Журнальный импакт-фактор: математические и статистические свойства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 485–498. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.485-498.

For citation: Elizarov A.M., Pislyakov V.V. Journal impact factor: Mathematical and statistical properties. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 485–498. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.485-498. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 499–517 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 629.7.052

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.499-517

ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

B.И. Каленова¹, B.М. Морозов¹, A.А. Тихонов²

¹ Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, 199034, Россия

Аннотация

Рассмотрен спутник на круговой кеплеровской околоземной орбите. Исследована задачи стабилизации положения относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат при помощи собственного магнитного момента и момента Лоренца. Коэффициенты системы динамических уравнений вращательного движения спутника изменяются во времени из-за изменения геомагнитной индукции в процессе орбитального движения спутника. Линеаризованная система дифференциальных уравнений движения также является нестационарной, но допускает, как показано в статье, приведение к стационарной системе более высокого порядка даже при использовании достаточно точных мультипольных моделей геомагнитного поля. На этом основании предложен способ построения закона управления, обеспечивающего стабилизацию спутника. Проведен анализ управляемости системы и построен оптимальный алгоритм стабилизации на основе LQR-метода. Эффективность предложенного подхода подтверждена компьютерным моделированием.

Ключевые слова: спутник, стабилизация ориентации спутника, геомагнитное поле, управляемость, оптимальное управление

Введение

Среди силовых факторов, используемых в динамике управляемого вращательного движения спутников, важную роль играют моменты сил, формируемые за счет взаимодействия спутника с магнитным полем Земли. К числу этих моментов относятся момент, образующийся при взаимодействии с геомагнитным полем собственного момента спутника, создаваемого магнитными катушками, и момент сил Лоренца, возникающий при наличии на спутнике электрического заряда. Оба упомянутых момента могут использоваться в качестве управляющих моментов для решения задач стабилизации стационарных движений спутника. При этом неизбежно возникает вопрос выбора математической модели магнитного поля Земли той или иной степени сложности: «прямой» магнитный диполь, «наклонный» магнитный диполь, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1].

Как правило, в большинстве теоретических исследований проблем стабилизации, как с помощью внутренних магнитных моментов, так и с помощью моментов сил Лоренца (см. обзоры [2–7]), на этапе предварительных исследований используется самая простая модель магнитного поля Земли – «прямой» магнитный диполь. Модель «наклонного» магнитного диполя не является корректной, как показано в [8]. Для дальнейших исследований задач стабилизации следует использовать более точные модели магнитного поля Земли, например, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1].

Математические модели рассматриваемых задач представляют собой системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, так как управляющий момент является функцией геомагнитного поля, которое изменяется во время движения спутника по орбите вокруг Земли. Для простой модели поля авторами были решены различные задачи стабилизации стационарных движений спутника (относительного равновесия и регулярных прецессий), когда центр масс спутника движется по круговой орбите [2–6, 9–13]. Уравнения управляемого вращательного движения спутника являются существенно нестационарными. Для их исследования был предложен способ приведения нестационарных систем к стационарным системам большего порядка. Этот подход оказался весьма успешным и применялся ранее для решения других задач [14,15]. Следует отметить, что в отличие от метода функций Ляпунова, хорошо зарекомендовавшего себя при решении аналогичных задач [16, 17], предлагаемый метод является строгим и достаточно эффективным (при наличии управляемости построение стабилизирующего управления сводится к выбору параметров квадратичного функционала качества). Цель статьи – применить указанный подход к решению задачи стабилизации положения относительного равновесия спутника при использовании сложной модели геомагнитного поля.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника около центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Предположим, что центр масс спутника движется по круговой экваториальной орбите. Спутник снабжен магнитными катушками и экраном, обладающим электрическим зарядом. Используем две правые системы координат: OXYZ – орбитальная система координат с началом в центре масс спутника: ось OZ направлена по радиус-вектору центра масс относительно притягивающего центра (центра Земли), OY – по нормали к плоскости орбиты, OX дополняет систему до правой тройки; Oxyz – связанная система координат (подвижная), оси которой направлены по главным центральным осям инерции спутника. Ориентация системы Oxyz относительно орбитальной задается с помощью углов $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Элементы матрицы $\Theta = ||\Theta_{ij}||$ перехода от системы OXYZ к системе Oxyz имеют вид [18]

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \\ \Theta_{12} &= -\sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \Theta_{13} = \cos \theta_1 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{21} &= \sin \theta_1 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3, \quad \Theta_{22} = \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \Theta_{23} &= \sin \theta_1 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ \Theta_{31} &= -\cos \theta_2 \sin \theta_3, \quad \Theta_{32} = \sin \theta_2, \quad \Theta_{33} = \cos \theta_2 \cos \theta_3. \end{aligned}$$

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника ω в проекциях на оси системы координат Oxyz имеют вид [18]

$$\omega_1 = -\frac{d\theta_1}{dt}\cos\theta_2\sin\theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt}\cos\theta_3 + \omega_0\Theta_{21},$$

$$\omega_2 = \frac{d\theta_3}{dt} + \frac{d\theta_1}{dt}\sin\theta_2 + \omega_0\Theta_{22},$$

$$\omega_3 = \frac{d\theta_1}{dt}\cos\theta_2\cos\theta_3 + \frac{d\theta_2}{dt}\sin\theta_3 + \omega_0\Theta_{23},$$

где ω_0 – величина угловой скорости орбитального движения спутника.

Динамические уравнения движения спутника около центра масс имеют вид [18]

$$\mathbf{J}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2(\boldsymbol{\Theta}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_r) \times \mathbf{J}(\boldsymbol{\Theta}^{\mathsf{T}}\mathbf{e}_r) + \mathbf{M}.$$
 (1)

Здесь $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_2, J_3); J_1, J_2, J_3$ – главные центральные моменты инерции спутника, \mathbf{e}_r – единичный вектор оси OZ, \mathbf{M} – управляющий момент, который создается как за счет взаимодействия собственного дипольного магнитного момента спутника с магнитным полем Земли ($\mathbf{M}^{(1)}$), так и силами Лоренца, действующими на заряженную поверхность спутника ($\mathbf{M}^{(2)}$). В результате имеем $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}$.

При наличии на спутнике магнитных катушек, создающих собственный магнитный момент **u** за счет взаимодействия с геомагнитным полем с индукцией $\mathbf{b}(t)$, можно сформировать механический момент [19]

$$\mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{u} \times (\mathbf{\Theta}^{\top} \mathbf{b}). \tag{2}$$

Другой способ управления основан на использовании электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил, действующих на заряженную часть поверхности спутника. Такой метод впервые был предложен одним из авторов [20]. В этой работе было показано, что путем изменения радиус-вектора центра заряда спутника относительно его центра масс можно создать момент лоренцевых сил и использовать его в качестве управляющего момента. Момент этих сил относительно центра масс спутника определяется по формуле [15, 21–23]

$$\mathbf{M}^{(2)} = q\mathbf{r}_q \times \mathbf{\Theta}^\top (\mathbf{V}_c \times \mathbf{b}). \tag{3}$$

Здесь q – электростатический заряд, $\mathbf{r}_q = [x_q, y_q, z_q]^\top$ – радиус-вектор центра заряда спутника относительно его центра масс; $\mathbf{V}_c = R_0(\omega_0 - \omega_E)\mathbf{e}_{\tau}$ – скорость центра масс спутника, \mathbf{e}_{τ} – орт оси OX, R_0 – радиус орбиты спутника, ω_E – угловая скорость суточного вращения Земли.

Поскольку оба момента (2) и (3) зависят от вектора **b** индукции геомагнитного поля, неизбежным этапом решения задачи является рассмотрение аналитического представления вектора **b**. Существуют многочисленные аппроксимации выражения для вектора **b** различной степени сложности: «прямой» магнитный диполь, «наклонный» магнитный диполь, квадрупольное и октупольное приближения и др. [1,15,23,24]. Как уже указывалось, в большинстве теоретических исследований проблем стабилизации используется самая простая модель – «прямой» магнитный диполь. Здесь рассмотрена наиболее полная из упомянутых – октупольная модель. В октупольном приближении компоненты вектора магнитной индукции **b**(t) в орбитальной системе координат при движении в экваториальной плоскости имеют вид [1]

$$b_{1} = \mu_{0} \bigg[\left(g_{1}^{1} \sin \tau - h_{1}^{1} \cos \tau \right) + \nu \left(g_{2}^{2} \sin 2\tau - h_{2}^{2} \cos 2\tau \right) + \\ + \frac{\sqrt{6}}{12} \nu^{2} \left(\sqrt{15} (g_{3}^{3} \sin 3\tau - h_{3}^{3} \cos 3\tau) - (g_{3}^{1} \sin \tau - h_{3}^{1} \cos \tau) \right) \bigg],$$

$$b_{2} = -\mu_{0} \bigg[g_{1}^{0} + \nu \left(g_{2}^{1} \cos \tau + h_{2}^{1} \sin \tau \right) + \frac{\nu^{2}}{6} \left(\sqrt{15} (g_{3}^{2} \cos 2\tau + h_{3}^{2} \sin 2\tau) - 3g_{3}^{0} \right) \bigg], \quad (4)$$

$$b_{3} = \mu_{0} \bigg[2 (g_{1}^{1} \cos \tau + h_{1}^{1} \sin \tau) + \frac{\sqrt{3}}{2} \nu \left(\sqrt{3} (g_{2}^{2} \cos 2\tau + h_{2}^{2} \sin 2\tau) - g_{2}^{0} \right) + \\ + \frac{\sqrt{2}}{3} \nu^{2} \left(\sqrt{5} (g_{3}^{3} \cos 3\tau + h_{3}^{3} \sin 3\tau) - \sqrt{3} (g_{3}^{1} \cos \tau + h_{3}^{1} \sin \tau) \right) \bigg],$$

где $\mu_0 = (R_E/R_0)^3$, $\nu = \sqrt{3}R_E/R_0$. Здесь g_n^m , h_n^m – гауссовы коэффициенты; $\tau = (1-\varepsilon)t$ – безразмерная независимая переменная, $\varepsilon = \omega_E/\omega_0$; R_E – средний радиус Земли. Значения первых коэффициентов g_n^m , h_n^m (в нТ = 10⁻⁹ T), согласно [24], таковы:

$$\begin{array}{ll} g_1^0 = -29557, & g_1^1 = -1671.8, & h_1^1 = 5080, & g_2^0 = -2340 \\ g_2^1 = 3047, & h_2^1 = -2595, & g_2^2 = 1657, & h_2^2 = -517. \end{array}$$

Выражения для компонент вектора магнитной индукции b_1, b_2, b_3 содержат периодические функции с частотами, равными 1, 2, 3. Для пояснения сути предложенного ранее подхода к исследованию систем, нестационарных по управлению, ограничимся в выражениях (4) квадрупольным приближением, т. е. рассмотрением только частот 1 и 2:

$$\begin{split} b_1 &= \mu_0 \left[\left(g_1^1 \sin \tau - h_1^1 \cos \tau \right) + \nu \left(g_2^2 \sin 2\tau - h_2^2 \cos 2\tau \right) \right], \\ b_2 &= -\mu_0 \left[g_1^0 + \nu \left(g_2^1 \cos \tau + h_2^1 \sin \tau \right) \right], \\ b_3 &= \mu_0 \left[2 (g_1^1 \cos \tau + h_1^1 \sin \tau) + 1.5\nu \left(g_2^2 \cos 2\tau + h_2^2 \sin 2\tau - \tilde{g}_2^0 \right) \right], \text{ где } \tilde{g}_2^0 = g_2^0 / \sqrt{3}. \end{split}$$

Линеаризованные уравнения движения спутника в окрестности положения относительного равновесия на круговой экваториальной орбите имеют вид [25]

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 - \dot{d}_1 \dot{x}_3 - \tilde{\kappa}_1 x_1 &= M_1 / J_1, \\ \ddot{x}_2 - \tilde{\kappa}_2 x_2 &= M_2 / J_2, \\ \ddot{x}_3 + \tilde{d}_3 \dot{x}_1 - \tilde{\kappa}_3 x_3 &= M_3 / J_3. \end{aligned}$$
(5)

Здесь $x_1 = \theta_2, x_2 = \theta_3, x_3 = \theta_1;$ M_1, M_2, M_3 – компоненты управляющего момента; $\tilde{d}_j = d_j/(1-\varepsilon), \tilde{\kappa}_i = \kappa_i/(1-\varepsilon)^2, (j = 1, 2; i = 1, 2, 3), d_1 = d/J_1, d_3 = d/J_3, d = J_2 - J_1 - J_3; \kappa_1 = 4(J_3 - J_2)/J_1, \kappa_2 = 3(J_3 - J_1)/J_2, \kappa_3 = (J_1 - J_2)/J_3.$

В векторно-матричных обозначениях дифференциальная система (5) может быть переписана в виде системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных:

$$\dot{x}^{(1)} = A_1 x^{(1)} + \dot{B}_1, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^{\top},$$

 $\dot{x}^{(2)} = A_2 x^{(2)} + \ddot{B}_2, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^{\top}.$

Здесь

$$A_{1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_{1} & 0 & 0 & \tilde{d}_{1} \\ 0 & \tilde{\kappa}_{3} & -\tilde{d}_{3} & 0 \end{bmatrix}, A_{2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_{2} & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{1}/J_{1} \\ M_{3}/J_{3} \end{bmatrix}, \tilde{B}_{2} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{2}/J_{2} \end{bmatrix}$$

Далее рассмотрим задачу стабилизации относительного равновесия спутника, когда управляющие моменты имеют различную физическую природу, – управление при помощи магнитных катушек и управление моментами сил Лоренца.

2. Управление при помощи магнитных катушек

В этом случае компоненты управляющего момента $\mathbf{M}^{(1)}$ имеют вид

$$M_1^{(1)} = b_3 u_2 - b_2 u_3, \ M_2^{(1)} = b_1 u_3 - b_3 u_1, \ M_3^{(1)} = b_2 u_1 - b_1 u_2$$

Собственные магнитные моменты, создаваемые магнитными катушками u_1, u_2, u_3 , служащие управлениями, формально независимы, однако компоненты

механического момента M_1, M_2, M_3 не являются независимыми (ранг матрицы коэффициентов при управлении равен двум). Матрица управляющих коэффициентов в рассматриваемой задаче не имеет полного ранга. Это является принципиальной трудностью, на что указывалось во многих работах. Поэтому без ограничения общности можно рассматривать только две компоненты собственного магнитного момента. Будем далее полагать, что $u_2 = 0$. Тогда

$$\dot{x}^{(1)} = A_1 x^{(1)} + B_1 u, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^{\top}, \quad u = [u_1, u_3]^{\top}, \quad (6)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A_2 x^{(2)} + B_2 u, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_2, \dot{x}_2 \end{bmatrix}^\top,$$
(7)

$$B_{1} = \mu_{*} \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{11} \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-b_{2}(\tau)}{J_{1}} \\ \frac{b_{2}(\tau)}{J_{3}} & 0 \end{bmatrix}, B_{2} = \mu_{*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-b_{3}(\tau)}{J_{2}} & \frac{b_{1}(\tau)}{J_{2}} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\mu_* = \frac{\mu_0}{\omega_0^2 (1-\varepsilon)^2}$. Матрицы (8) коэффициентов при управлении содержат пять независимых функций $f(\tau) = [1, \cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau]^\top$. Эти функции подчиняются системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{f} = Sf$ пятого порядка (m = 5). Замена переменных $x = (f^\top \otimes E_n) y$ (где \otimes — символ кронекеровского произведения [26]) приводит нестационарную систему (6), (7) к стационарной системе порядка mn = 30 [14, 15].

Замечание. Учет слагаемых с частотой 3 в выражении для индукции геомагнитного поля лишь увеличит порядок приведенных стационарных систем до 42, так как количество независимых функций будет m = 7.

В данном случае блочная структура системы (6), (7) позволяет привести ее к двум, связанным через управление, независимым стационарным системам порядка $N_1 = 12$ и $N_2 = 10$. Согласно [14,25], преобразование

$$x^{(1)} = F_1^{\top} \underbrace{Y_1}_{(12\times1)}, \quad x^{(2)} = F_2^{\top} \underbrace{Y_2}_{(10\times1)}, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^{\top}, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^{\top},$$

$$F_1^{\top} = f_1^{\top} \otimes E_4, \quad F_2^{\top} = f_2^{\top} \otimes E_2; \quad f_1^{\top} = [\cos\tau, \sin\tau, 1], \quad f_2^{\top} = [\cos\tau, \sin\tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, 1]$$

приводит исходную нестационарную систему (6), (7) к стационарной системе

$$Y = GY + B_y u, \quad G = \operatorname{diag} \left(G^{(1)}, G^{(2)} \right), \quad B_y = \begin{bmatrix} B_{(2)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$G^{(1)} = E_3 \otimes A^{(1)} - S_1 \otimes E_4, \quad G^{(2)} = E_5 \otimes A^{(2)} - S_2 \otimes E_2,$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & O_{12} \\ O_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad S_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & O_2 & O_{21} \\ O_2 & 2S_{11} & O_{21} \\ O_{12} & O_{12} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ \cdots \\ B_5^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$B_1^{(1)} = \mu_* \nu g_2^1 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad B_2^{(1)} = \mu_* \nu h_2^1 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad B_3^{(1)} = \mu_* \nu g_2^0 \begin{bmatrix} O_2 \\ I \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{J_1} \\ \frac{1}{J_3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{(2)} = \frac{\mu_0}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2g_1^1 & -h_1^1 \end{bmatrix}, \quad B_2^{(2)} = \frac{\mu_0}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2h_1^1 & g_1^1 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{(2)} = \frac{\mu_0\nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5g_2^2 & -h_2^2 \end{bmatrix}, \quad B_4^{(2)} = \frac{\mu_0\nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.5h_2^2 & g_2^2 \end{bmatrix}, \quad B_5^{(2)} = \frac{\mu_0\nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5g_2^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее через E_m, O_{mn}, O_m обозначены единичные и нулевые матрицы размерности $m \times n$ и $m \times m$ соответственно.

Запишем систему (9) в виде пяти подсистем, связанных только через управления

$$Y^{(i)} = G_i Y^{(i)} + H_i u \quad (i = 1, \dots, 5),$$
(11)

$$Y^{(1)} = [y_1, \dots, y_8]^{\top}, Y^{(2)} = [y_9, \dots, y_{12}]^{\top}, Y^{(3)} = [y_{13}, \dots, y_{16}]^{\top},$$

$$Y^{(4)} = [y_{17}, \dots, y_{20}]^{\top}, Y^{(5)} = [y_{21}, \dots, y_{22}]^{\top},$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} G_{11} & -E_4 \\ E_4 & G_{11} \end{bmatrix}, G_{11} = \begin{bmatrix} O_2 & E_2 \\ K_1 & D \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{d}_{16} \\ -\tilde{d}_3 & 0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \end{bmatrix}, G_2 = G_{11}, H_2 = B_3^{(1)},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} G_{31} & -E_2 \\ E_2 & G_{31} \end{bmatrix}, G_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\kappa}_2 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \end{bmatrix},$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} G_{31} & -2E_2 \\ 2E_2 & G_{31} \end{bmatrix}, H_4 = \begin{bmatrix} B_3^{(2)} \\ B_4^{(2)} \end{bmatrix}, G_5 = G_{31}, H_5 = B_5^{(2)}.$$

Система уравнений (G_5, H_5) относительно переменных y_{21}, y_{22} содержит лишь управление u_1 . Эта система управляема.

Рассмотрим системы уравнений относительно переменных y_9, \ldots, y_{20} при наличии только управления u_1 .

1) Система (G_2, H_2) управляема, если $d_1 \tilde{\kappa}_1 \neq 0$ (при наличии только управления u_3 условие управляемости $d_3 \tilde{\kappa}_3 \neq 0$).

2) Система (G_3, H_3) управляема, если $\tilde{\kappa}_2 + 1 \neq 0$ (при наличии только управления u_3 это условие управляемости сохраняется).

3) Система (G_4, H_4) по каждому из управлений управляема всегда.

Система (G_1, H_1) при d = 0 расщепляется на две подсистемы: для переменных y_1, y_3, y_5, y_7 с управлением u_3 , которая управляема, и для переменных y_2, y_4, y_6, y_8 , которая не является полностью управляемой.

Итак, условиями неуправляемости системы (11) при наличии одного управления являются следующие условия:

$$d_1 \tilde{\kappa}_1 = 0 \ (d_3 \tilde{\kappa}_3 = 0); \quad \tilde{\kappa}_2 + 1 = 0; \quad d = 0.$$

Замечание. В работе [9], где использована дипольная модель геомагнитного поля, показано, что приведенная стационарная система при движении спутника по экваториальной орбите неуправляема.

3. Управление моментами, создаваемыми силами Лоренца

Момент лоренцевых сил относительно центра масс спутника определяется по формуле (3). Величины $v_1 = x_q$, $v_2 = y_q$, $v_3 = z_q$ (координаты центра электрического заряда относительно центра масс) рассматриваются как управляющие параметры. Выражения для линеаризованного момента в уравнениях (5) имеют вид

$$M_1^{(2)} = \mu_{**} \left(b_2 v_2 + b_3 v_3 \right), \quad M_2^{(2)} = -\mu_{**} b_2 v_1, \quad M_3^{(2)} = -\mu_{**} b_3 v_1.$$

Здесь $\mu_{**} = q \cdot \mu_*$; выражения для b_i определены формулами (4).

Линеаризованные уравнения движения в этом случае (считаем, что $v_3 = 0$) имеют вид, аналогичный системе (6), (7):

$$\dot{x}^{(1)} = A_1 x^{(1)} + B_1 v, \quad x^{(1)} = [x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3]^{\top}, \quad v = [v_1, v_2]^{\top},$$
(13)

$$\dot{x}^{(2)} = A_2 x^{(2)} + B_2 v, \quad x^{(2)} = [x_2, \dot{x}_2]^{\top}, \tag{14}$$

$$B_{1} = \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{11} \end{bmatrix}, B_{11} = \mu_{k**}^{0} \begin{bmatrix} 0 & b_{2}/J_{1} \\ b_{3}/J_{3} & 0 \end{bmatrix}, B_{2} = -\mu_{m*} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_{2}/J_{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= F_3^\top \underbrace{Y_1}_{(20\times 1)}, \quad x^{(2)} &= F_4^\top \underbrace{Y_2}_{(6\times 1)}, \quad x^{(1)} &= \begin{bmatrix} x_1 x_3 \dot{x}_1 \dot{x}_3 \end{bmatrix}^\top, \quad x^{(2)} &= \begin{bmatrix} x_2 \dot{x}_2 \end{bmatrix}^\top, \\ F_3^\top &= f_2^\top \otimes E_4, \quad F_4^\top &= f_1^\top \otimes E_2 \end{aligned}$$

приводит систему (13), (14) к стационарной системе 26-го порядка

$$\dot{Y} = GY + B_y v, \quad G = \operatorname{diag}\left(G^{(1)}, G^{(2)}\right), \quad B_y = \begin{bmatrix} B^{(1)} \\ B^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$G^{(1)} = E_5 \otimes A^{(1)} - S_2 \otimes E_4, \ G^{(2)} = E_3 \otimes A^{(2)} - S_1 \otimes E_2, \ i = \overline{1,5},$$

$$B^{(1)} = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ \vdots \\ B_5^{(1)} \end{bmatrix}, B^{(2)} = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_1^{(2)} \\ B_2^{(2)} \\ B_3^{(2)} \end{bmatrix}, B_i^{(1)} = \begin{bmatrix} O_2 \\ B_{i1}^{(1)} \end{bmatrix}, \ I_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_1} \\ -\frac{1}{J_3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$B_{11}^{(1)} = 2g_1^1 I_1, B_{21}^{(1)} = 2h_1^1 I_1, B_{31}^{(1)} = \frac{3}{2}\nu g_2^2 I_1, \ B_{41}^{(1)} = \frac{3}{2}\nu h_2^2 I_1, B_{51}^{(1)} = -\frac{3}{2}\nu \tilde{g}_2^0 I_1,$$

$$B_1^{(2)} = \frac{\nu g_2^1}{J_2} I_2, \quad B_2^{(2)} = \frac{\nu h_2^1}{J_2} I_2, \quad B_3^{(2)} = \frac{g_1^0}{J_2} I_2, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Система (15), как и в случае использования магнитных катушек, состоит из пяти, связанных только через управление, подсистем (G_i, H_i) относительно переменных y_1, \ldots, y_8 ; y_9, \ldots, y_{16} ; y_{17}, \ldots, y_{20} ; y_{25}, y_{26} :

$$G_{1} = \begin{bmatrix} G_{11} & -E_{4} \\ E_{4} & G_{11} \end{bmatrix}, H_{1} = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{11} \\ O_{2} \\ B_{21} \end{bmatrix}, G_{2} = \begin{bmatrix} G_{11} & -2E_{4} \\ 2E_{4} & G_{11} \end{bmatrix}, H_{2} = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{31} \\ O_{2} \\ B_{41} \end{bmatrix}, G_{3} = G_{11}$$
$$H_{3} = \mu_{**} \begin{bmatrix} O_{2} \\ B_{51} \end{bmatrix}, G_{4} = \begin{bmatrix} G_{31} & -E_{2} \\ E_{2} & G_{31} \end{bmatrix}, H_{4} = \mu_{**} \begin{bmatrix} B_{1}^{(2)} \\ B_{2}^{(2)} \end{bmatrix}, G_{5} = G_{31}, H_{5} = \mu_{**} B_{3}^{(2)}.$$

Здесь G_{ij} и B_{ij} и $B_i^{(2)}$ определены формулами (12) и (16) соответственно.

Очевидно, что для управляемости систем (G_i, H_i) (i = 4, 5, 6) необходимо, чтобы $v_1 \neq 0$. В случае $v_1 = 0$ системы относительно переменных y_{21}, \ldots, y_{26} , очевидно, неуправляемы. Системы (G_1, H_1) и (G_2, H_2) неуправляемы, если $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{\kappa}_3$. Системы (G_3, H_3) и (G_4, H_4) неуправляемы, если $\tilde{\kappa}_2 + 1 = 0$.

В [11] показано, что если орбита экваториальная, то при использовании модели геомагнитного поля «прямой магнитный диполь» необходимым условием управляемости является наличие лоренцевых сил. Если используются только моменты, создаваемые магнитными катушками, система (6) стационарна и неуправляема.

В приложении рассмотрено применение предложенной методики в случае комбинированного управления при одновременном использовании двух управляющих моментов: $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{M}^{(2)}$.

4. Алгоритм стабилизации положения относительного равновесия спутника

Алгоритм стабилизации построим на основе приведенных стационарных систем. Предположим, что стационарные системы управляемы. Управление сформируем в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Такое управление обеспечит асимптотическую устойчивость приведенной стационарной системы. Стабилизирующее управление $u(\tau)$ построим в виде обратной связи по состоянию

$$u = -K_y Y(\tau), \tag{17}$$

а матрицу коэффициентов управления $K_y={\rm const}$ выберем так, чтобы замкнутая система

$$\dot{Y} = (G - BK_y)Y$$

была асимптотически устойчивой.

Постоянную матрицу K_y можно выбрать, например, так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы совпал с любым наперед заданным многочленом n-ой степени с действительными коэффициентами. Другой вариант построения управления – выбор коэффициентов обратной связи из условия минимума квадратичного функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[Y^{\top}(t) Q Y(t) + u^{\top}(t) R u(t) \right] dt.$$
 (18)

Здесь Q и R – заданные неотрицательно и положительно определенные постоянные матрицы соответственно. Оптимальное управление имеет вид (17), где

$$K_y = R^{-1} B_y P.$$

Матрица *Р* является положительно определенным решением матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PG + G^{\top}P - PB_yR^{-1}B_y^{\top}P + Q = 0.$$

Синтезированное управляющее воздействие является функцией переменных $Y(\tau)$ стационарной системы более высокого порядка, чем исходная нестационарная система (n = 6). Для введения управления непосредственно в исходную систему следует выразить вектор $Y(\tau)$ через исходный вектор состояния $x(\tau)$ и некоторый дополнительный вектор. Размерность стационарной системы в случае использования моментов магнитных катушек $N_1 = 22$ и $N_2 = 26$ в случае использования моментов сил Лоренца. Введем дополнительные векторы $\xi^{(i)}$ ($\xi^{(1)}(16 \times 1)$ в первом случае и $\xi^{(2)}(20 \times 1)$ во втором). Тогда можно ввести ограниченные невырожденные преобразования

$$X^{(i)} = T^{(i)}Y^{(i)} \ (i = 1, 2), \text{ rge } X^{(i)} = \left[x, \xi^{(i)}\right]^{\top}, \ x = \left[x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3, x_2, \dot{x}_2\right]^{\top}.$$

Выражения для матриц $T^{(i)}$ приведены ниже.

Затем можно построить расширенную нестационарную систему относительно вектора $X^{(i)}$, включающую исходные системы (6), (7) или (13), (14) как подсистемы

$$\dot{X}^{(i)} = A_X X^{(i)} + B_X u, \tag{19}$$

и ввести управление, найденное для соответствующих стационарных систем, в виде

$$u = -K_Y^i T_i^{-1} X^{(i)}. (20)$$

Расширенная нестационарная система (19), замкнутая управлением (20), имеет вид

$$\dot{X} = \left(\dot{T} + T\left(G - B_y K_Y\right)\right) T^{-1} X.$$
(21)

Нестационарная система (21), в силу выбора коэффициентов управления и ограниченности преобразования T, асимптотически устойчива.

4.1. Преобразование уравнений в случае магнитного управления. Построим преобразование *X* = *TY* для управления магнитными катушками (верхний индекс для краткости опускаем). В этом случае вектор расширенной нестационарной системы *X* представим в виде совокупности векторов

$$\begin{split} X &= \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{bmatrix}, \ X^{(1)} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \xi^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(1)}, \xi^{(1)}_{11}, \xi^{(1)}_{12} \end{bmatrix}^{\top}, \ X^{(2)} = \begin{bmatrix} x^{(2)}, \xi^{(1)}_{21}, \xi^{(1)}_{22}, \xi^{(1)}_{23}, \xi^{(1)}_{24} \end{bmatrix}^{\top}, \\ \xi^{(1)}_{11}(4 \times 1), \ \xi^{(1)}_{12}(4 \times 1), \ \xi^{(1)}_{21}(2 \times 1), \ \xi^{(1)}_{22}(2 \times 1), \ \xi^{(1)}_{23}(2 \times 1), \ \xi^{(1)}_{24}(2 \times 1). \end{split}$$

Дополнительные векторы можно построить различными способами, но так, чтобы матрица преобразования T была невырожденной и ограниченной. Матрицу $T = \text{diag}(T_1, T_2)$ можно сформировать, например, в виде

$$X = TY, T_{1}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} F_{1}^{\top} \\ P_{11}^{\top} \\ P_{12}^{\top} \end{bmatrix}, \quad T_{2}_{10 \times 10} = \begin{bmatrix} F_{2}^{\top} \\ P_{21}^{\top} \\ \vdots \\ P_{24}^{\top} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

 $P_{1j}^{\top} = F_1^{\top} H_1^j, \ P_{2k}^{\top} = F_2^{\top} H_2^k \ (j = 1, 2, \ k = 1, ..., 4),$ $F_1^{\top} = f_1^{\top} \otimes E_4, \ F_2^{\top} = f_2^{\top} \otimes E_2; \ f_1^{\top} = [\cos \tau, \sin \tau, 1], \ f_2^{\top} = [\cos \tau, \sin \tau, \cos 2\tau, \sin 2\tau, 1],$ $H_1 = S_1^{\top} \otimes E_4, \ H_2 = S_2^{\top} \otimes E_2.$

В уравнениях (21) матрицы $\dot{T} = \text{diag}(\dot{T}_1, \dot{T}_2)$ представимы в виде

$$\dot{T}_1 = \begin{bmatrix} \dot{F}_1^\top \\ \dot{P}_{11}^\top \\ \dot{P}_{12}^\top \end{bmatrix}, \quad \dot{T}_2 = \begin{bmatrix} \dot{F}_2^\top \\ \dot{P}_{21}^\top \\ \vdots \\ \dot{P}_{24}^\top \\ \dot{P}_{24}^\top \end{bmatrix}.$$
(23)

C учетом того, что $\dot{f}_i^{\top} = f_i^{\top} S_i \; (i=1,2),$ имеем

$$\dot{F}_1^{\top} = f_1^{\top} S_1^{\top} \otimes E_4, \quad \dot{P}_{11}^{\top} = \dot{F}_1^{\top} H_1, \quad \dot{P}_{12}^{\top} = \dot{F}_1^{\top} H_1^2, \dot{F}_2^{\top} = f_2^{\top} S_1^{\top} \otimes E_2, \quad \dot{P}_{21}^{\top} = \dot{F}_2^{\top} H_2, \dots, \ \dot{P}_{24}^{\top} = \dot{F}_2^{\top} H_2^4.$$

Таким образом, все элементы замкнутой расширенной нестационарной системы определены.

4.2. Преобразование уравнений в случае лоренцева управления. Для управления при помощи моментов лоренцевых сил преобразование, приводящее систему (13), (14) к стационарным системам, имеет вид

$$X = TY, \quad T = \operatorname{diag}(T_1, T_2), \quad \begin{array}{c} T_1 \\ 20 \times 20 \end{array} = \begin{bmatrix} F_3^{\top} \\ P_{31}^{\top} \\ \vdots \\ P_{34}^{\top} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{c} T_2 \\ F_2^{\top} \\ 6 \times 6 \end{array} = \begin{bmatrix} F_4^{\top} \\ P_{41}^{\top} \\ P_{42}^{\top} \end{bmatrix}, \quad (24)$$
$$F_3^{\top} = f_2^{\top} \otimes E_4, \quad F_4^{\top} = f_1^{\top} \otimes E_2,$$
$$P_{3j}^{\top} = F_3^{\top} H_2^j, \quad P_{4k}^{\top} = F_4^{\top} H_1^{\top} \quad (j = 1, \dots, 4, \ k = 1, 2).$$

В этом случае блоки матрицы $\dot{T} = \text{diag}\left(\dot{T}_1, \dot{T}_2\right)$ в уравнениях (21) имеют вид

$$T_{1}_{20\times20} = \begin{bmatrix} \dot{F}_{3}^{\top} \\ \dot{P}_{31}^{\top} \\ \vdots \\ \dot{P}_{34}^{\top} \end{bmatrix}, \quad T_{2}_{6\times6} = \begin{bmatrix} \dot{F}_{4}^{\top} \\ \dot{P}_{41}^{\top} \\ \dot{P}_{42}^{\top} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\begin{split} \dot{F}_{3}^{\top} &= f_{2}^{\top} S_{2}^{\top} \otimes E_{4}, \quad \dot{P}_{31}^{\top} &= \dot{F}_{3}^{\top} H_{2}, \quad \dot{P}_{12}^{\top} &= \dot{F}_{3}^{\top} H_{2}^{2}, \\ \dot{F}_{4}^{\top} &= f_{1}^{\top} S_{1}^{\top} \otimes E_{2}, \quad \dot{P}_{41}^{\top} &= \dot{F}_{4}^{\top} H_{1}, \quad \dots, \quad \dot{P}_{44}^{\top} &= \dot{F}_{4}^{\top} H_{1}^{2} \end{split}$$

Все элементы замкнутой расширенной нестационарной системы определены по формулам (21), (24), (25).

5. Компьютерное моделирование

Предложенные алгоритмы стабилизации имеют ряд достоинств:

 – управление строится для приведенных стационарных систем в виде обратной связи с постоянными коэффициентами. Оно обеспечивает асимптотическую устойчивость стационарной системы;

– выбор коэффициентов обратной связи в законе управления стационарной системой осуществляется либо в соответствии со стандартной процедурой LQR (при этом требуется задать лишь параметры функционалов), либо путем назначения корней характеристического уравнения стационарной системы.

При выборе параметров управления следует учитывать ограничения, связанные с требованиями к технической реализации управления.

Здесь при моделировании выберем параметры функционала в оптимальном управлении такими, чтобы управляющие моменты в среднем были по модулю того же порядка, что и гравитационные моменты.

Задача стабилизации относительного равновесия моделировалась для случаев использования собственных магнитных моментов, создаваемых при помощи магнитных катушек, и моментов сил Лоренца.

Моделирование проведено при помощи стандартного пакета Matlab 7.1. Коэффициенты управления выбраны на основе стандартной программы LQR для соответствующих стационарных систем:

1) для управления магнитными катушками – (6), (7) порядка $N_1 = 22$;

2) при управления моментами сил Лоренца – (13), (14) порядка $N_2 = 26$.

Построенные управления введены в нестационарную систему (21) при помощи преобразований (22) и (24).

5.1. Моделирование в случае магнитного управления. Для случая использования магнитных катушек матрицы функционала (18) имеют вид $Q = \text{diag}(\gamma_1 E_{12}, \gamma_2 E_{10}), R = \beta E_2$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_3(0) = 0.15$, $x_2(0) = 0.16$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = 0.1$, $\dot{x}_2(0) = -0.1$.

На рис. 1, 2 представлено поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ для спутника с тензором инерции $J = [5.8 \ 3.6 \ 2.5]$ кг · м² [28].



Рис. 1. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau), \gamma = 1.0$; $\beta = 1.0$



Рис. 2. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau);$ б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau);$ в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau);$ г) $u(\tau), \gamma = 1.0; \beta = 100.0$

На рис. 1 г), 2 г) показано, как величина параметра β влияет на величину управления $u(\tau)$. На рис. 3, 4 показаны результаты моделирования процессов стабилизации для спутника с тензором инерции $J = [1600\ 1000\ 800]$ кг · м² [9, 25, 27].



Рис. 3. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau);$ б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau);$ в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau);$ г) $u(\tau), \gamma = 0.01; \beta = 0.01$

Увеличение параметра β позволило уменьшить величину управления, но время стабилизации при этом увеличилось.

5.2. Моделирование в случае лоренцева управления. В том случае, когда для управления используются моменты, создаваемые за счет сил Лоренца, действующих на заряженный экран спутника, матрицы функционала (18) имеют вид $Q = \text{diag}(\gamma_1 E_{20}, \gamma_2 E_6), R = \beta E_2$. Начальные отклонения по углам $x_1(0) = x_3(0) = 0.15, x_2(0) = 0.16$; по скоростям $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_3(0) = \dot{x}_2(0) = -0.1$.

На рис. 5 представлено поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ для спутника с тензором инерции $J = [5.8 \ 3.6 \ 2.5]$ кг · м² [27].



Рис. 4. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau), \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 1.0$; $\beta = 100.0$



Рис. 5. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau), \gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$

Для спутника с тензором инерции $J = [1600\ 1000\ 800]$ кг · м² [10, 25] поведение координат, скоростей $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и управления $u(\tau)$ представлено на рис. 6.



Рис. 6. Поведение переменных $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$ и $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; б) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; в) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; г) $u(\tau), \gamma = 1.0$; $\beta = 5.0$

Проведенное математическое моделирование подтвердило эффективность предложенных алгоритмов стабилизации.

Заключение

Для достаточно полной модели геомагнитного поля исследована задача стабилизации положения относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат как при использовании собственного магнитного момента спутника, так и момента сил Лоренца.

Предложен строгий аналитический подход к решению указанной задачи стабилизации, который позволяет синтезировать управление, обеспечивающее асимптотическую устойчивость рассматриваемого движения. Преимущество предлагаемого подхода заключается в его конструктивности и возможности алгоритмизации. Приведенные результаты компьютерного моделирования подтвердили эффективность предложенной методики.

Приложение

При комбинированном управлении, использующем одновременно возможности двух управляющих моментов – собственного магнитного момента и лоренцева момента, приведенная стационарная система имеет порядок mn = 30:

$$\begin{split} \dot{Z} &= LZ + HU, \quad Z(30 \times 1), \quad U = [u_1 u_3 v_1 v_2]^{\mathrm{T}}, \\ L &= \operatorname{diag}(\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, G_3, G_4, G_5), \\ (8 \times 8) & (8 \times 8) & (4 \times 4) & (4 \times 4) & (2 \times 2) \\ H &= [H^{(1)^{\mathrm{T}}} H^{(2)^{\mathrm{T}}} H^{(3)^{\mathrm{T}}} H^{(4)^{\mathrm{T}}} H^{(5)^{\mathrm{T}}} H^{(6)^{\mathrm{T}}}]^{\mathrm{T}}, \\ H^{(1)} &= \begin{bmatrix} O_{24} \\ H_1^1 \\ O_{24} \\ H_2^1 \end{bmatrix}, \quad H_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu \frac{\nu g_2^1}{J_1} & 0 & \mu_* \frac{\nu g_2^1}{J_1} \\ -\mu \frac{\nu g_2^1}{J_3} & 0 & -\mu_* \frac{2g_1^1}{J_3} & 0 \end{bmatrix}, \\ H_2^1 &= \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{\nu h_2^1}{J_1} & 0 & -\mu \frac{\nu g_2^1}{J_3} \\ \mu \frac{\nu h_2^1}{J_3} & 0 & -\mu_* \frac{2h_1^1}{J_1} \\ \end{bmatrix}, \quad H_1^{(3)} &= \begin{bmatrix} O_{24} \\ H_1^3 \end{bmatrix}, \quad H_1^3 = \begin{bmatrix} 0 & \mu \frac{g_1^0}{J_1} & 0 & -\mu \frac{3\nu g_2^0}{2J_3} \\ -\mu \frac{g_1^0}{J_3} & 0 & \mu_* \frac{3\nu g_2^0}{2J_3} \\ \end{bmatrix}, \\ H^{(4)} &= \frac{1}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu g_1^1 & -\mu h_1^1 & \mu_* \nu g_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\mu h_1^1 & \mu g_1^1 & \mu_* \nu h_2^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H^{(5)} &= \frac{-\mu \nu}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5g_2^2 & h_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5h_2^2 & -g_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H^{(6)} &= \frac{1}{J_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1, 5\mu \nu g_2^0 & 0 & \mu_* g_1^0 & 0 \\ 1, 5\mu \nu g_2^0 & 0 & \mu_* g_1^0 & 0 \end{bmatrix}. \end{split}$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104, https://rscf.ru/project/24-21-00104/.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. Антипов К.А., Тихонов А.А. Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N-го приближения // Геомагн. аэрон. 2013. Т. 53, № 2. С. 271–281. https://doi.org/10.7868/S0016794013020028.
- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 220. С. 71–85. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-71-85.
- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 221. С. 71–92. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-221-71-92.

- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 222. С. 42–63. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-42-63.
- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 223. С. 84–106. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-223-84-106.
- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. Стабилизация стационарных движений спутника около центра масс в геомагнитном поле // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. 2023. Т. 224. С. 115–124. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-115-124.
- Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С. Современные алгоритмы активной магнитной ориентации спутников // Космич. апп. и технол. 2019. Т. 3, № 2. С. 73–86. https://doi.org/10.26732/2618-7957-2019-2-73-86.
- Тихонов А.А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2002. Т. 40, № 2. С. 171–177.
- 9. Морозов В.М., Каленова В.И. Управление спутником при помощи магнитных моментов: управляемость и алгоритмы стабилизации // Космич. исслед. 2020. Т. 58, № 3. С. 199–207. https://doi.org/10.31857/S0023420620030048.
- Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces // Aerosp. Sci. Technol. 2020. V. 106. Art. 106105. https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106105.
- Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация положения относительного равновесия спутника при помощи магнитных и лоренцевых моментов // Космич. исслед. 2021. Т. 59, № 5. С. 393–407. https://doi.org/10.31857/S0023420621050058.
- Морозов В.М., Каленова В.И., Рак М.Г. О стабилизации регулярных прецессий спутника при помощи магнитных моментов // ПММ. 2021. Т. 85, № 4. С. 436–453. https://doi.org/10.31857/S003282352104010X.
- 13. Морозов В.М., Каленова В.И. Стабилизация относительного равновесия спутника при помощи магнитных моментов с учетом аэродинамических сил // Космич. исслед. 2022. Т. 60, № 3. С. 246–253. https://doi.org/10.31857/S0023420622030074.
- 14. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: Физматлит, 2010. 207 с.
- Kalenova V.I., Morozov V.M., Rak M.G. On methodology for solving control problems of one class of time-varying systems // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 11. P. 4994–5000. https://doi.org/10.1134/S1995080223110197.
- Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system // Adv. Space Res. 2018. V. 62, No 1. P. 142–151. https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006.
- Antipov K.A., Tikhonov A.A. On satellite electrodynamic attitude stabilization // Aerosp. Sci. Technol. 2014. V. 33, No 1. P. 92–99. https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.01.004.
- Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 308 с.
- Wertz J. (Ed.) Spacecraft Attitude Determination and Control. Ser.: Astrophysics and Space Science Library. V. 73. Dordrecht: D. Reidel Publ. Co., 1978. xviii, 858 p. https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7.
- 20. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. 2003. Т. 41, № 1. С. 69–80.

- Петров К.Г., Тихонов А.А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2. Вычисление момента и оценки его составляющих // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 1999. Вып. 3 (№ 15). С. 81–91.
- Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // Aerosp. Sci. Technol. 2020. V. 104. Art. 105963. https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963.
- Nababi M., Barati M. Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application // Appl. Math. Modell. 2017. V. 46. P. 365–381. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.040.
- Alken P., Thébault E., Beggan C.D., Amit H., Aubert J., Baerenzung J., Bondar T.N., Brown W.J., Califf S., Chambodut A., Chulliat A., Cox G.A., Finlay C.C., Fournier A., Gillet N., Grayver A., Hammer M.D., Holschneider M., Huder L., Hulot G., Jager T., Kloss C., Korte M., Kuang W., Kuvshinov A., Langlais B., Léger J.-M., Lesur V., Livermore P.W., Lowes F.J., Macmillan S., Magnes W., Mandea M., Marsal S., Matzka J., Metman M.C., Minami T., Morschhauser A., Mound J.E., Nair M., Nakano S., Olsen N., Pavón-Carrasco F.J., Petrov V.G., Ropp G., Rother M., Sabaka T.J., Sanchez S., Saturnino D., Schnepf N.R., Shen X., Stolle C., Tangborn A., Tøffner-Clausen L., Toh H., Torta J.M., Varner J., Vervelidou F., Vigneron P., Wardinski I., Wicht J., Woods A., Yang Y., Zeren Z., Zhou B. International Geomagnetic Reference Field: The thirteenth generation // Earth, Planets Space. 2021. V. 73. Art. 49. https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x.
- 25. *Морозов В.М., Каленова В.И.* Линейные нестационарные системы и стабилизация движения спутника около центра масс в геомагнитном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2023. 174 с.
- Brewer J. W. Kronecker products and matrix calculus in system theory // IEEE Trans. Circuits Syst. 1978. V. 25, No 9. P. 772–781. https://doi.org/10.1109/TCS.1978.1084534.
- 27. Александров А.Ю., Тихонов А.А. Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизации ИСЗ на экваториальной орбите // Космич. исслед. 2022. Т. 60, № 5. С. 404–412. https://doi.org/10.31857/S002342062204001X.
- Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // Acta Astronaut. 2015. V. 110. P. 279–286. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030.

Поступила в редакцию 15.07.2024 Принята к публикации 4.09.2024

Каленова Вера Ильинична, кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

E-mail: kalen@imec.msu.ru

Морозов Виктор Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной механики и управления механико-математического факультета, главный научный сотрудник лаборатории навигации и управления НИИ механики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

E-mail: moroz@imec.msu.ru

Тихонов Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической и прикладной механики

Санкт-Петербургский государственный университет

Университетская наб., д. 7/9, г. Санкт-Петербург, 199034, Россия E-mail: *a.tikhonov@spbu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 499-517

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.499-517

The Problem of Satellite Attitude Stabilization in the Geomagnetic Field

V.I. Kalenova^{a*}, V.M. Morozov^{a**}, A.A. Tikhonov^{b***}

^aMoscow State University, Moscow, 119991 Russia

^bSt. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia E-mail: *kalen@imec.msu.ru, **moroz@imec.msu.ru, ***a.tikhonov@spbu.ru

Received July 15, 2024; Accepted September 4, 2024

Abstract

A satellite moving along a circular Keplerian orbit in near-Earth space was explored, focusing on its attitude stabilization in the orbital coordinate system using the intrinsic magnetic and Lorentz force moments. Fluctuations in geomagnetic induction that occur as the satellite orbits cause the coefficients in the dynamical equations governing the satellite's attitude motion to vary over time. The results show that, although the linearized system of differential equations of the satellite's motion is non-stationary, it can be reduced to a stationary system of higher order, which holds even for high-precision multipole models of the geomagnetic field. Thus, a control law design was proposed to stabilize the satellite. The controllability of the system was analyzed, and an optimal stabilization algorithm based on the LQR method was developed. The effectiveness of the proposed approach was validated by computer modeling.

Keywords: satellite, satellite attitude stabilization, geomagnetic field, controllability, optimal control

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00104, https://rscf.ru/project/24-21-00104/).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma = 1.0; \beta = 1.0$.

- Fig. 2. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma = 1.0; \beta = 100.0$.
- Fig. 3. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma = 0.01$; $\beta = 0.01$.
- Fig. 4. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 1.0; \beta = 100.0.$
- Fig. 5. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma = 1.0; \beta = 5.0$.
- Fig. 6. Behavior of variables $x_i(\tau), \dot{x}_i(\tau)$, and $u(\tau)$: a) $x_1(\tau), \dot{x}_1(\tau)$; b) $x_3(\tau), \dot{x}_3(\tau)$; c) $x_2(\tau), \dot{x}_2(\tau)$; d) $u(\tau), \gamma = 1.0; \beta = 5.0$.

References

- Antipov K.A., Tikhonov A.A. Multipole models of the geomagnetic field: Construction of the Nth approximation. Geomagn. Aeron., 2013, vol. 53, no. 2, pp. 257–267. https://doi.org/10.1134/S0016793213020023.
- Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 220, pp. 71–85. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-220-71-85. (In Russian)
- Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 221, pp. 71–92. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-221-71-92. (In Russian)
- Morozov V.M., Rak M.G., Kalenova V.I. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 222, pp. 42–63. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-222-42-63. (In Russian)
- Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 223, pp. 84–106. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-223-84-106. (In Russian)
- Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. Stabilization of stationary motions of a satellite near the center of mass in a geomagnetic field. *Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Tematich. Obz.*, 2023, vol. 224, pp. 115–124. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-224-115-124. (In Russian)
- Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S. Current algorithms for active magnetic attitude control of satellites. *Kosm. Appar. Tekhnol.*, 2019, vol. 3, no. 2, pp. 73–86. https://doi.org/10.26732/2618-7957-2019-2-73-86. (In Russian)
- Tikhonov A.A. Refinement of the oblique dipole model in the evolution of rotary motion of a charged body in the geomagnetic field. *Cosmic Res.*, 2002, vol. 40, no. 2, pp. 157–162. https://doi.org/10.1023/A:1015149420500.
- Morozov V.M., Kalenova V.I. Satellite control using magnetic moments: Controllability and stabilization algorithms. *Cosmic Res.*, vol. 58, no. 3, pp. 158–166. https://doi.org/10.1134/S0010952520030041.
- Kalenova V.I., Morozov V.M. Novel approach to attitude stabilization of satellite using geomagnetic Lorentz forces. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2020, vol. 106, art. 106105. https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.106105.
- Kalenova V.I., Morozov V.M. Stabilization of satellite relative equilibrium using magnetic and Lorentzian moments. *Cosmic Res.*, 2021, vol. 59, no. 5, pp. 343–356. https://doi.org/10.1134/S0010952521050051.
- Morozov V.M., Kalenova V.I., Rak M.G. On the stabilization of the regular precessions of satellites by means of magnetic moments. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 8, pp. 1486–1499. https://doi.org/10.3103/S0025654421080136.
- Morozov V.M., Kalenova V.I. Stabilization of satellite relative equilibrium using magnetic moments and aerodynamic forces. *Cosmic Res.*, 2022, vol. 60, no. 3, pp. 213–219. https://doi.org/10.1134/S0010952522030066.
- 14. Kalenova V.I., Morozov V.M. Lineinye nestatsionarnye sistemy i ikh prilozheniya k zadacham mekhaniki [Linear Time-Varying Systems and Their Application to the Problems of Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 207 p. (In Russian)
- Kalenova V.I., Morozov V.M., Rak M.G. On methodology for solving control problems of one class of time-varying systems. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 11, pp. 4994–5000. https://doi.org/10.1134/S1995080223110197.

- Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Stabilization of a programmed rotation mode for a satellite with electrodynamic attitude control system. *Adv. Space Res.*, 2018, vol. 62, no. 1, pp. 142–151. https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.04.006.
- Antipov K.A., Tikhonov A.A. On satellite electrodynamic attitude stabilization. Aerosp. Sci. Technol., 2014, vol. 33, no. 1, pp. 92–99. https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.01.004.
- Beletskii V.V. Dvizhenie sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole [Motion of an Artificial Satellite about its Center of Mass in the Gravitational Field]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1975. 308 p. (In Russian)
- Wertz J. (Ed.) Spacecraft Attitude Determination and Control. Ser.: Astrophysics and Space Science Library. Vol. 73. Dordrecht, D. Reidel Publ. Co., 1978. xviii, 858 p. https://doi.org/10.1007/978-94-009-9907-7.
- Tikhonov A.A. A method of semipassive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field. *Cosmic Res.*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 63–73. https://doi.org/10.1023/A:1022355730291.
- Petrov K.G., Tikhonov A.A. The moment of Lorentz forces acting on a charged satellite in the Earth's magnetic field. Part 2. the determination of the moment and estimations of its components. Vestn. S.-Peterb. Univ. Ser. 1, 1999, vol. 3, no. 15, pp. 81–91. (In Russian)
- Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite. *Aerosp. Sci. Technol.*, 2020, vol. 104, art. 105963. https://doi.org/10.1016/j.ast.2020.105963.
- Nababi M., Barati M. Mathematical modeling and simulation of the Earth's magnetic field: A comparative study of the models on the spacecraft of attitude control application. *Appl. Math. Modell.*, 2017, vol. 46, pp. 365–381. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.040.
- Alken P., Thébault E., Beggan C.D., Amit H., Aubert J., Baerenzung J., Bondar T.N., Brown W.J., Califf S., Chambodut A., Chulliat A., Cox G.A., Finlay C.C., Fournier A., Gillet N., Grayver A., Hammer M.D., Holschneider M., Huder L., Hulot G., Jager T., Kloss C., Korte M., Kuang W., Kuvshinov A., Langlais B., Léger J.-M., Lesur V., Livermore P.W., Lowes F.J., Macmillan S., Magnes W., Mandea M., Marsal S., Matzka J., Metman M.C., Minami T., Morschhauser A., Mound J.E., Nair M., Nakano S., Olsen N., Pavón-Carrasco F.J., Petrov V.G., Ropp G., Rother M., Sabaka T.J., Sanchez S., Saturnino D., Schnepf N.R., Shen X., Stolle C., Tangborn A., Tøffner-Clausen L., Toh H., Torta J.M., Varner J., Vervelidou F., Vigneron P., Wardinski I., Wicht J., Woods A., Yang Y., Zeren Z., Zhou B. International Geomagnetic Reference Field: The thirteenth generation. *Earth, Planets Space*, 2021, vol. 73, art. 49. https://doi.org/10.1186/s40623-020-01288-x.
- Morozov V.M., Kalenova V.I. Lineinye nestatsionarnye sistemy i stabilizatsiya dvizheniya sputnika okolo tsentra mass v geomagnitnom pole [Linear Time-Varying Systems and Stabilization of a Satellite near the Center of Mass in the Geomagnetic Field]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 2023. 174 p. (In Russian)
- Brewer J.W. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 1978, vol. 25, no. 9, pp. 772–781. https://doi.org/10.1109/TCS.1978.1084534.
- Alexandrov A.Y., Tikhonov A.A. Electrodynamic control with distributed delay for AES stabilization in an equatorial orbit. *Cosmic Res.*, 2022, vol. 60, no. 5, pp. 366–374. https://doi.org/10.1134/S0010952522040013.

 Ovchinnikov M.Yu., Roldugin D.S., Penkov V.I. Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study. Acta Astronaut., 2015, vol. 110, pp. 279–286. https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030.

, Для цитирования: Каленова В.И., Морозов В.М., Тихонов А.А. Задача стабилизации углового движения спутника в геомагнитном поле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 499–517. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.499-517.

For citation: Kalenova V.I., Morozov V.M., Tikhonov A.A. The problem of satellite attitude stabilization in the geomagnetic field. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 499–517. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4499-517. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 518–531 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 621.315.1: 519.876.5

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.518-531

КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСТУПЕНЧАТОЙ СИСТЕМЫ ДИАГНОСТИКИ ЛЭП С ДРЕВОВИДНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

А.В. Карпов, Д.В. Сарычев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе представлена компьютерная модель, реализующая двухступенчатую систему определения мест возникновения повреждений на основе анализа отражённых сигналов. Приведены результаты моделирования для линии электропередачи с различным количеством ответвлений от магистрали. Проведен анализ зависимости эффективности локализации мест повреждений от величины коэффициента битовых ошибок в сети. Выполнен анализ зависимости показателя надёжности диагностики от количества ответвлений и вида повреждений.

Ключевые слова: двухступенчатая система диагностики, линия электропередачи с древовидной топологией, битовая ошибка, компьютерное моделирование, FSK-модуляция

Введение

Развитие современных технологий приводит к быстрому росту потребления электроэнергии. Это подчеркивает важность модернизации электрических сетей для обеспечения надежного и качественного энергоснабжения потребителей. Одним из многообещающих направлений является реализация концепции «Smart grid», подразумевающая комплексную автоматизацию и информатизацию процессов производства, передачи и потребления электроэнергии. Внедрение интеллектуальных технологий особенно эффективно в распределительных электрических сетях, отличающихся сложной топологией с многочисленными ответвлениями от магистралей. Использование автоматизированных систем мониторинга позволяет существенно повысить надежность таких сетей за счет быстрого обнаружения и локализации неисправностей сети [1–3].

Рассматриваемая в данной работе линия электропередачи (ЛЭП) с древовидной топологией представляет собой наиболее сложный объект для исследования локационным методом, так как ввиду большого числа переотражений регистрация сигнала происходит при низком отношении сигнал/шум. Примером такой ЛЭП является ЛЭП 6–10 кВ. Древовидная топология представляет собой схему построения распределительных электросетей, в которой линии электропередач расходятся радиально, без замкнутых контуров, от одной центральной подстанции или источника питания к периферийным потребителям. Такая схема напоминает структуру дерева с расходящимися от одного ствола ветвями, питающими рассредоточенных абонентов на местности. Основное её отличие от других топологий – наличие единственного централизованного узла выдачи мощности в сеть и отсутствие резервных замкнутых контуров.

Статья построена следующим образом. Во введении подчеркивается актуальность задачи диагностики повреждений в распределительных электрических сетях со сложной топологией. Обосновывается целесообразность применения двухэтапной системы диагностики методов, основанных на анализе отраженных сигналов. В первом разделе описывается предложенная в работах [4,5] концепция построения «Smart grid» для такого типа энергосистем. Приводятся особенности реализации двухэтапного алгоритма диагностики повреждений с использованием информации о битовых ошибках в каналах связи. Затем описывается структура разработанной авторами компьютерной модели, приводятся результаты серии вычислительных экспериментов для сетей с количеством ответвлений от 0 до 3. Анализируется зависимость показателей эффективности локализации повреждений от таких факторов, как тип повреждения и количество ответвлений. В заключении формулируются основные выводы о работоспособности двухэтапного алгоритма для сетей с заданной конфигурацией.

1. Концепция двухступенчатой системы диагностики

В качестве примера рассмотрим электрическую сеть с тремя отпайками (рис. 1). Сеть состоит из одного центрального и четырех оконечных пунктов: RX1, RX2, RX3, RX4, RX5. Диагностическая система представляет собой информационную сеть, состоящую из трех основных элементов.



Рис. 1. Топология ЛЭП с тремя отпайками

1. Локатор. Центральный пункт RX1 оснащен локатором, который подключен к электрической сети 6–10 кВ через устройство присоединения. Импульсное зондирование позволяет определить только расстояние до места повреждения, но не решает проблему определения сегмента, на котором произошло повреждение, так как для некоторых расстояний от RX1 это может произойти на любой отпайке (сегменте ЛЭП, связанным с любым оконечным пунктом).

2. Диагностическая информационная сеть, с помощью которой снимается неоднозначность определения места повреждения. Каждый оконечный пункт оснащен модемами, которые подключены к обмоткам понижающего трансформатора, для определенности считаем, что они подключены к фазе А. Каждый оконечный пункт напрямую связан с двумя другими оконечными пунктами. По определенному протоколу осуществляется мониторинг уровня битовых ошибок на каждом из пунктов. Данные об уровне ошибок передаются по управляющей информационной сети на центральный пункт, где по возрастанию уровня ошибок в двух каналах связи, связанных с конкретным оконечным устройством, определяется наличие повреждения и нужный сегмент.

3. Управляющая информационная сеть реализована в виде дополнительных каналов связи, по которым вся информация передается в центр управлениям RX1, где и принимается решение о наличии повреждения, расстоянии и месте повреждения.

Целью данной работы является разработка модели двухступенчатой системы диагностики линий электропередачи на базе зондирующего локационного метода. Работа посвящена разработке алгоритма второй ступени диагностики древовидных сетей электропередач, основанной на статистической оценке изменения уровня битовых ошибок в диагностической информационной сети и проведения исследования эффективности и достоверности разработанной двухступенчатой системы диагностики.

2. Описание компьютерной модели

Структура модели на первом этапе рассмотрена в работе [6]. На рис. 2 представлена блок-схема второй ступени диагностики.



Рис. 2. Блок-схема модели второй ступени диагностики

Вторая ступень диагностики включает три основных функциональных блока: 1) блок генерации зондирующего сигнала; 2) блок моделирования среды распространения; 3) блок обработки данных. Блок генерации сигнала выполняет формирование зондирующих диагностических радиоимпульсов. Выполнен данный блок в программной среде MATLAB. Входные данные, задаваемые в этом блоке:

- *U* амплитуда сигнала, 1 В;
- вид модуляции: в данном имитационном эксперименте была выбрана FSKмодуляция.

Входные данные для M-FSK модуляции (библиотека, задаваемая в MATLAB fskmod):

- NT тестовая битовая последовательность (при моделировании длина последовательности выбиралась равной 1000 символов);
- M общее количество возможных передаваемых символов (в данном случае M = 2 для двоичной FSK);
- f_c центральная несущая частота передатчика, 50 кГц;
- *Т* длительность радиоимпульса, соответствующая времени передачи одного символа, 0.1 мс;
- f_s частота дискретизации, 1 МГц.

Математическая модель частотно-манипулированного радиоимпульса записывается следующим образом [7,8]:

$$s_m(t) = \operatorname{Re}[s_{ml}(t)\exp(j2\pi f_c t)] = U\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_m t), \quad 1 \le m \le M, \quad 0 \le t \le T,$$

где

$$_{ml}(t) = U \exp(j2\pi\Delta f t), \quad 1 \le m \le M, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

 f_m – частота, соответствующая m-му символу. Для логического 0: $f_1=f_c-\Delta f$, а для логической 1: $f_2=f_c+\Delta f$.

Величина частотного сдвига между двумя уровнями FSK-сигнала определяется как

$$\Delta f = f_1 - f_2$$

Минимальное значение Δf , при котором сигналы остаются ортогональными:

$$\Delta f = \frac{1}{2T}.$$

На выходе мы получаем сигнал с двоичной FSK-модуляцией, который поступает в блок среды распространения (этот блок также используется на первом этапе диагностики). Блок среды распространения состоит из блока линии электропередач и блока регистрации и записи результатов моделирования.

Моделирование блока линии электропередач с разветвленной топологией реализован в программной среде PSCAD/EMTDC с использованием специального компонента «T-Line» [9]. В работе используется фазовая частотно-зависимая модель ЛЭП [10,11], учитывающая взаимные влияния между линиями постоянного и переменного токов. Реализованная модель позволяет проводить исследования электролиний с произвольной топологией (от линейных до сколь угодно разветвленных).

Входные данные, задаваемые в этом блоке:

- топология линии;
- вид повреждения (короткие замыкания, междуфазные замыкания, обрывы фаз);
- L_0 расстояние до места повреждения, км;
- *l* длина линии, км;
- l_{OTB} длина ответвления, км.

Также задаются такие специфические характеристики ЛЭП, как марка провода – AC120/19; количество фаз – 3; геометрический параметр расположения каждого проводника – треугольный; характеристическое сопротивление линейного тракта для присоединения фаза–земля $Z_{\rm JTT}$, 450 Ом; удельное сопротивление земли $\rho_{\rm g}$, 100 Ом·м; тип опоры – ПС10П14AM.

Ослабление сигнала при передаче по воздушным линиям определяется по формуле

$$A = \alpha_1 l + \alpha_{\text{доп}},$$

где α_1 – коэффициент ослабления в трехпроводных несимметричных линиях:

$$\alpha_1 = (K_{11}K_3\sqrt{f} + K_{21}K_4f) \times 10^{-3},$$

 K_{11} , K_{21} , K_3 и K_4 – коэффициенты ослабления, учитывающие потери в проводах; определяемые маркой провода K_{11} , расположением проводов и типом опоры K_{21} , и числом проводов в расщепленной фазе (K_3 и K_4), которые приведены в табличных данных [12, 13].

Дополнительное ослабление

$$\alpha_{\rm доп} = \alpha_{\rm доп1} + \alpha_{\rm отв},$$

где $\alpha_{\text{доп1}}$ определяется для воздушных линий без учета ответвления согласно формуле

$$\alpha_{\rm gon1} = 20 \log \left(\frac{1}{C_1}\right),$$

в которой значение коэффициента C_1 , характеризующего расположение проводников, приведено в табличных данных [12,13].

 $\alpha_{\text{отв}}$ – дополнительное затухание, обусловленное ответвлением

$$\alpha_{\rm otb} = 20 \log \left| \frac{1}{T_{\rm otb}} \right|,$$

 $T_{\rm отв}$ – коэффициент передачи через место ответвления напряжения падающей волны основной для данного тракта модальной составляющей. Значение $T_{\rm отв}$ зависит от схемы обработки ответвления, параметров линии, нагрузки на конце ответвления и места включения ответвления:

$$\frac{1}{T_{\text{отв}}} = \left(1 + \frac{j}{2}\tan(\psi)\right),$$

$$\psi = \beta l_{\text{OTB}} - \arctan\left(\frac{K_4 Z_{\pi\text{T}}}{380}\right) + \frac{\pi}{2},$$

где

$$\beta = \frac{2\pi f}{300} + K_4 K_{51}'$$

коэффициенты K_4 , K'_{51} определяются согласно табличным значениям в [12, 13], которые характеризуются типом опоры, расположением проводов и номиналом напряжения в линии. Таким образом, на выходе мы получаем выражение для сигнала на приемном конце с учетом ослабления:

$$r(t) = s_m(t) \times 10^{-A/20},$$

после чего мы записываем r(t) в файл и передаем записанный сигнал в блок обработки данных.

Блок обработки данных состоит из блока демодуляции сигнала и блока вычисления вероятности битовой ошибки. На входе блока демодуляции сигнала мы получаем принятый сигнал r(t). Входные параметры для демодулятора, задаваемые в MATLAB библиотеке fskdemod:

- r(t) принятый сигнал;
- M общее количество возможных передаваемых символов (в данном случае M = 2 для двоичной FSK);
- f_c центральная несущая частота передатчика, 50 кГц;
- *Т* длительность радиоимпульса, соответствующая времени передачи одного символа, 0.1 мс;
- f_s частота дискретизации, 1 МГц.

Демодуляция реализуется в соответствии с работой [14]. Для каждой частоты вычисляется величина

$$R_m = \arg \max_{1 \le m \le M} \left(\sum_{t=0}^T r(t) \cos(2\pi f_m t) \right), \tag{2}$$

где t принимает значения 0, Δt , $2\Delta t$, ..., T; Δt – шаг дискретизации времени, обычно задается как

$$\Delta t = \frac{1}{f_s}.\tag{3}$$

Решение о том, какой символ был принят, принимается на основе сравнения суммарных произведений на двух различных частотах f_m . Если $R_1 > R_2$, то считается, что принят символ 0, в противном случае – символ 1.

На выходе мы получаем выходную битовую последовательность NR, которая после поступает в блок для вычисления вероятности битовой ошибки P_b . В блоке вычисление вероятности битовой ошибки P_b осуществляется путём сравнения выходной битовой последовательности NR с тестовой NT.

В ходе имитационного эксперимента оценивается значение P_{bf} при заданном повреждении, после чего сравнивается с эталонным значением P_{bnf} , вычисленным в отсутствии повреждений. По увеличению P_{bf} выявляется поврежденный участок сети. По сути, отношением P_{bf} к P_{bnf} характеризуется показатель надёжности диагностики: $h = P_{bf}/P_{bnf}$.

В данной статье представлены результаты моделирования ЛЭП в древовидных сетях с прямолинейной структурой без отпаек, ЛЭП с одной отпайкой, с двумя отпайками и тремя отпайками. В каждом случае моделируются различные типы повреждений такие, как обрыв фазы, короткое замыкание на землю и межфазные короткие замыкания.

На первом этапе моделирования определяется расстояние L до места повреждения и точность определения этого расстояния $\Delta L : \Delta L = |L - L_0|$. Величина L получается путем усреднения по 100 модельным рефлектограммам.

На втором этапе моделирования производится уточнение, на каком сегменте сети произошло повреждение.

3. Результаты моделирования

В данной статье сделан упор на второй этап системы диагностики. Но для полного представления работы системы диагностики приведены результаты моделирования на первом этапе, которые представляют собой значения средней ошибки измерения расстояния до повреждения ΔL при заданных характеристиках приемо-передающей аппаратуры. Параметры сигнала: амплитуда – 1 В, длительность импульса – 5 мкс. Расстояние от RX1 до места повреждения во всех случаях $L_0 = 30$ км. Таким образом, затухание во всех случаях одинаково, а уровень шума будет отличаться из-за различного числа отпаек.

Прямолинейная ЛЭП без ответвлений представляет собой объект с наименьшим уровнем помех, в которой нет явления переотражений. Результаты моделирования на первом этапе для различных видов повреждений: ΔL – от 0.001 до 0.003 км. Так как ответвлений нет, то второй этап диагностики не проводился.

Топология ЛЭП и результаты моделирования системы с одной отпайкой представлены на рис. 3.



Рис. 3. Топология ЛЭП с одной отпайкой

Результаты моделирования на первом этапе для различных видов повреждений: ΔL – от 0.13 до 0.16 км.

На гистограммах рис. 4 приведен уровень битовой ошибки. Пунктирной линией представлен уровень ошибок P_{bnf} в диагностической сети, зарегистрированный в ЛЭП без повреждения. Реализована следующая информационная сеть: RX1 \leftrightarrow RX2, RX2 \leftrightarrow RX3, RX3 \leftrightarrow RX1. При обрыве фазы A, к которой подключен модем, в каналах связи, связанных с RX3, уровень ошибок значительно выше, чем в канале RX1 \leftrightarrow RX2, где показатель надёжности h = 24.3. При обрыве фаз B и C это превышение не так выражено (h = 1.8), но повреждение хорошо локализуется. То же самое можно сказать о результатах, полученных при двухфазных и трехфазных обрывах, у которых h = 26.9 для двух фаз (A и B, A и C), а для трёх фаз (A и B и C) h = 47.9. Аналогичная картина наблюдается при коротком замыкании на землю и межфазных замыканиях.



Информационная сеть: RX1 <--> RX2, RX2 <--> RX3, RX3 <--> RX1

Рис. 4. Результаты моделирования ЛЭП с одной отпайкой

Топология ЛЭП и результаты моделирования системы с двумя отпайками представлены на рис. 5. Повреждение имитируется на сегменте RX4 на расстоянии 30 км от RX1. Результаты моделирования ошибки измерения расстояния до повреждения на первом этапе для различных видов повреждений: ΔL – от 0.29 до 0.36 км.

На гистограммах рис. 6 приведен уровень битовой ошибки. Реализована следующая информационная сеть: RX1↔RX2, RX2↔RX3, RX3↔RX4, RX1↔RX4. При обрыве фазы A, к которой подключен модем, в каналах связи, связанных с RX4, уровень ошибок значительно выше, чем в каналах, не связанных с RX4, и показатель h = 6.3. При обрыве фаз В и С это превышение не так выражено (показатель h = 3.4), но повреждение хорошо локализуется. То же самое можно сказать о результатах, полученных при двухфазных и трехфазных обрывах. Здесь показатель надежности при двухфазных повреждениях (А и В, А и С) h = 12.5, а для трех фаз (А и В и С) составляет 26.2. Аналогичная картина наблюдается при коротком замыкании на землю и межфазных замыканиях.



Рис. 5. Топология ЛЭП с одной отпайкой

Топология ЛЭП и результаты моделирования системы с тремя отпайками представлены на рис. 1. Повреждение моделируется на сегменте RX4. Ошибки измерения расстояния до повреждения на первом этапе для различных видов повреждений меняются от 1.02 до 1.04 км.

На рис. 7 представлены шесть групп результатов: обрыв фазы A, обрыв фазы B, обрыв фазы C, обрыв пары фаз A и B, A и C, B и C и обрыв трех фаз ABC. В каждой группе приведены измерения битовой ошибки по шести каналам связи: RX1 \leftrightarrow RX2, RX2 \leftrightarrow RX3, RX3 \leftrightarrow RX4, RX4 \leftrightarrow RX5, RX5 \leftrightarrow RX1. Как мы видим, каждый сегмент дает напрямую вклад в два канала связи (но есть влияние и других каналов).

Для однофазных обрывов однозначно правильно определяется сегмент RX4, который дает основной вклад в третий и четвертый столбцы. При этом показатель надёжности h = 6.5. В случае обрыва фаз В и С сегмент с повреждением определяется однозначно, но уровень ошибок и, соответственно, надежность выводов ниже, показатель надёжности h = 2.1. При коротком замыкании на землю представленные тенденции сохраняются, но выражены несколько слабее (h = 1.4). При межфазных замыканиях фаз В и С определить нужный сегмент не удается и h = 0.8.



Информационная сеть: RX1 <--> RX2, RX2 <--> RX3, RX3 <--> RX4, RX4 <--> RX1

Рис. 6. Результаты моделирования ЛЭП с двумя отпайками

Заключение

Разработана имитационная компьютерная модель двухступенчатой системы диагностики ЛЭП с древовидной структурой. В модели реализована работа локатора, с помощью которого определяется расстояние до места повреждения, и модель диагностической информационной системы, на основе которой реализуется определение сегмента, где произошло повреждение.

Результаты моделирования позволяют надеяться, что предлагаемая двухступенчатая модель позволит использовать радиолокационный метод для диагностики не только ЛЭП без ответвлений, но и ЛЭП с древовидной структурой.



Информационная сеть: RX1 <--> RX2, RX2 <--> RX3, RX3 <--> RX4, RX4 <--> RX5, RX5 <--> RX1

Рис. 7. Результаты моделирования ЛЭП с тремя отпайками

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Bani Ahmad A.Y.A., William P., Uike D., Murgai A., Bajaj K.K., Deepak A., Shrivastava A. Framework for sustainable energy management using smart grid panels integrated with machine learning and IOT based approach // Int. J. Intell. Syst. Appl. Eng. 2024. V. 12, No 2s. P. 581–590.
- Bishnoi D., Chaturvedi H. A review on emerging trends in smart grid energy management systems // Int. J. Renewable Energy Res. 2021. V. 11, No 3. P. 952–966. https://doi.org/10.20508/ijrer.v11i3.11832.g8228.

- Gungor V.C., Sahin D., Kocak T., Ergut S., Buccella C., Cecati C. Smart grid technologies: Communication technologies and standards // IEEE Trans. Ind. Inf. 2011. V. 7, No 4. P. 529–539. https://doi.org/10.1109/TII.2011.2166794.
- Shagiev R.I., Karpov A.V., Kalabanov S.A. The model of the power line's fault location method using time domain reflectometry // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 803. Art. 012137. https://doi.org/10.1088/1742-6596/803/1/012137.
- Shagiev R.I., Karpov A.V., Kalabanov S.A. A method of fault location detection on branched power transmission lines // J. Electr. Eng. 2019. V. 90, No 2. P. 135–139. https://doi.org/10.3103/S106837121902010X.
- Karpov A., Sarychev A., Kalabanov S. Computer model of "smart grid" for power transmission lines with tree-like topology // Proc. 2023 Int. Russ. Smart Ind. Conf. (SmartIndustryCon). Sochi: IEEE Xplore, 2023. P. 600–605. https://doi.org/10.1109/SmartIndustryCon57312.2023.10110719.
- Proakis J.G., Salehi M. Digital Communications. 5th ed. New York, NY: McGraw-Hill, 2001. 1150 p.
- Watson B. FSK: Signals and demodulation // Watkins–Johnson Tech-Notes. 1980. V. 7, No 5. P. 1–15.
- 9. Manitoba HVDC Research Centre. User's Guide on the Use of PSCAD. Winnipeg, 2010. 492 p. URL:

 $https://hvdc.ca/uploads/ck/files/reference_material/PSCAD_User_Guide_v4_3_1.pdf.$

- Gustavsen B., Irwin G., Mangelrød R., Brandt D., Kent K. Transmission line models for the simulation of interaction phenomena between parallel AC and DC overhead lines // Proc. IPST'99 — Int. Conf. on Power Systems Transients. Budapest, 1999. Art. 99IPST002-1.5. P. 61–67.
- Morched A., Gustavsen B., Tartibi M. A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables // IEEE Trans. Power Delivery. 1999. V. 14, No 3. P. 1032–1038. https://doi.org/10.1109/61.772350.
- Стандарт организации ОАО «РОССЕТИ» СТО 56947007-33.060.40.322-2022. Руководящие указания по расчету параметров и выбору схем высокочастотных каналов связи по линиям электропередачи переменного тока 35–750 кВ [Текст]. М.: Отраслевой стандарт ОАО «РОССЕТИ», 2022. 87 с.
- Стандарт организации ОАО «РОССЕТИ» СТО 56947007-33.060.40.052-2010. Методические указания по расчету параметров и выбору схем высокочастотных трактов по линиям электропередачи 35–750 кВ переменного тока [Текст]. М.: Отраслевой стандарт ОАО «РОССЕТИ», 2010. 49 с.
- 14. Simon M.K., Alouini M.S. Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. 1st ed. New York, NY: Wiley, 2000. xix, 544 p.

Поступила в редакцию 30.05.2024 Принята к публикации 12.09.2024

Карпов Аркадий Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры радиофизики

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия E-mail: arkadi.karpov@kpfu.ru

Сарычев Дмитрий Валерьевич, аспирант кафедры радиофизики

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: sarychev1607.@gmail.com

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 518-531

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.518-531

> Computer Model of a Two-Stage Diagnostic System for Power Transmission Lines with Tree Topology

> > A.V. Karpov^{*}, D.V. Sarychev^{**}

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia E-mail: *arkadi.karpov@kpfu.ru, **sarychev1607.@gmail.com

Received May 30, 2024; Accepted September 12, 2024

Abstract

A computer model of a two-stage system for locating faults by analyzing reflected signals was developed. The simulation results for power transmission lines with varying numbers of branches extending from the main line were discussed. The relationship between fault location efficiency and the network bit error rate was analyzed. The dependence of diagnostic reliability on the number of branches and fault types was examined.

Keywords: two-stage diagnostic system, power transmission line with tree topology, bit error, computer simulation, FSK modulation

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

- Fig. 1. Topology of a power transmission line with three branches.
- Fig. 2. Block diagram of the second diagnostic stage model.
- Fig. 3. Topology of a power transmission line with a single branch.
- Fig. 4. Simulation results for a power transmission line with a single branch.
- Fig. 5. Topology of a power transmission line with a single branch.
- Fig. 6. Simulation results for a power transmission line with two branches.

Fig. 7. Simulation results for a power transmission line with three branches.

References

- Bani Ahmad A.Y.A., William P., Uike D., Murgai A., Bajaj K.K., Deepak A., Shrivastava A. Framework for sustainable energy management using smart grid panels integrated with machine learning and IOT based approach. *Int. J. Intell. Syst. Appl. Eng.*, 2024, vol. 12, no. 2s, pp. 581–590.
- Bishnoi D., Chaturvedi H. A review on emerging trends in smart grid energy management systems. Int. J. Renewable Energy Res., 2021, vol. 11, no. 3, pp. 952–966. https://doi.org/10.20508/ijrer.v11i3.11832.g8228.
- Gungor V.C., Sahin D., Kocak T., Ergut S., Buccella C., Cecati C. Smart grid technologies: Communication technologies and standards. *IEEE Trans. Ind. Inf.*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 529–539. https://doi.org/10.1109/TII.2011.2166794.

- Shagiev R.I., Karpov A.V., Kalabanov S.A. The model of the power line's fault location method using time domain reflectometry. J. Phys.: Conf. Ser., 2017, vol. 803, art. 012137. https://doi.org/10.1088/1742-6596/803/1/012137.
- Shagiev R.I., Karpov A.V., Kalabanov S.A. A method of fault location detection on branched power transmission lines. J. Electr. Eng., 2019, vol. 90, no. 2, pp. 135–139. https://doi.org/10.3103/S106837121902010X.
- Karpov A., Sarychev A., Kalabanov S. Computer model of "Smart Grid" for power transmission lines with tree-like topology. Proc. 2023 Int. Russ. Smart Ind. Conf. (SmartIndustryCon). Sochi, IEEE Xplore, 2023, pp. 600–605. https://doi.org/10.1109/SmartIndustryCon57312.2023.10110719.
- Proakis J.G., Salehi M. Digital Communications. 5th ed. New York, NY, McGraw-Hill, 2001. 1150 p.
- Watson B. FSK: Signals and demodulation. Watkins-Johnson Tech-Notes, 1980, vol. 7, no. 5, pp. 1–15.
- Manitoba HVDC Research Centre. User's Guide on the Use of PSCAD. Winnipeg, 2010. 492 p. URL: https://hvdc.ca/uploads/ck/files/reference material/PSCAD User Guide v4 3 1.pdf.
- Gustavsen B., Irwin G., Mangelrød R., Brandt D., Kent K. Transmission line models for the simulation of interaction phenomena between parallel AC and DC overhead lines. *Proc. IPST'99 - Int. Conf. on Power Systems Transients.* Budapest, 1999, art. 99IPST002-1.5, pp. 61–68.
- Morched A., Gustavsen B., Tartibi M. A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables. *IEEE Trans. Power Delivery*, 1999, vol. 14, no. 3, pp. 1032–1038. https://doi.org/10.1109/61.772350.
- 12. Corporate Standard of OAO ROSSETI. STO 56947007-33.060.40.322-2022. Guidelines for calculating parameters and selecting high-frequency channels on 35–750 kV AC transmission lines. Moscow, Otrasl. Stand. OAO "ROSSETI", 2022. 87 p. (In Russian)
- Corporate Standard of OAO ROSSETI. STO 56947007-33.060.40.052-2010. Methodical Guidelines for calculating parameters and selecting schemes of high-frequency paths on 35–750 kV AC transmission lines. Moscow, Otrasl. Stand. OAO "ROSSETI", 2010. 49 p. (In Russian)
- 14. Simon M.K., Alouini M.S. Digital Communication over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. 1st ed. New York, NY, Wiley, 2000. xix, 544 p.

Для цитирования: Карпов А.В., Сарычев Д.В. Компьютерная модель двухступенчатой системы диагностики ЛЭП с древовидной топологией // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 518–531. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.518-531.

For citation: Karpov A.V., Sarychev D.V. Computer model of a two-stage diagnostic system for power transmission lines with tree topology. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 518–531. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.518-531. (In Russian)

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 4 С. 532–554 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 531.551.1: 681.5

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.532-554

ФОРМАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ИГРОВЫХ СИСТЕМ

В.В. Кугуракова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Представлен инновационный унифицированный подход к формальному моделированию игровых сущностей и их взаимодействий – FAST-GM (Formal Approach to Spatio-Temporal Game Modeling). Предложенная модель интегрирует темпоральные и вероятностные аспекты, обеспечивая комплексное описание динамики игровых систем. Подход FAST-GM основан на расширенной темпоральной логике и теории вероятностей, что позволяет точно описать сложные игровые механики и их эволюцию во времени. Рассмотрено формальное определение игровых сущностей, их состояний и взаимодействий, а также методы интеграции темпоральных и вероятностных элементов. Особое внимание уделено применению модели для анализа игрового баланса, формальной верификации игровых сценариев и автоматизированной генерации тестовых случаев. Обсуждены масштабируемость и адаптивность модели для различных игровых жанров. Ожидается, что предложенный подход FAST-GM станет значительным шагом вперед в формальном моделировании игровых систем, предоставляя разработчикам мощный инструмент для анализа, верификации и оптимизации игровых механик на различных этапах разработки.

Ключевые слова: формальное моделирование, игровая сущность, взаимодействие в играх, темпоральная логика, вероятностная модель, анализ игрового баланса, верификация игровых сценариев, FAST-GM, game studies, геймдизайн

Введение

В современной индустрии разработки компьютерных игр наблюдается постоянное усложнение игровых систем и механик. Это приводит к возрастающей потребности в более формализованных и структурированных подходах к проектированию, анализу и балансировке игр. Традиционные методы, основанные преимущественно на интуиции и опыте разработчиков, становятся недостаточными для обеспечения качества и сбалансированности сложных игровых систем.

Формальное моделирование игровых сущностей и их взаимодействий представляет собой перспективный подход к решению названных проблем. Однако существующие формальные модели часто ограничены в своей способности охватить всю сложность современных игр, особенно в аспектах, связанных с временной динамикой и вероятностными элементами.

Цель данного исследования – разработка унифицированного подхода к формальному моделированию игровых сущностей и их взаимодействий, который интегрирует темпоральные и вероятностные аспекты. Предлагаемая модель, названная FAST-GM (Formal Approach to Spatio-Temporal Game Modeling), призвана обеспечить комплексное описание динамики игровых систем, позволяющее более точно анализировать и прогнозировать поведение игровых механик.

Работа развивает наши предыдущие исследования в области формализации и анализа игровых механик [1,2], а также опирается на разработанный нами подход к созданию универсальной структуры корпуса текстов видеоигр [3].

Основные задачи исследования включают:

- разработку формального аппарата для описания игровых сущностей, учитывающего их атрибуты, состояния и поведение во времени;
- интеграцию вероятностных элементов в модель для отражения неопределенности и случайности, присущих многим игровым механикам;
- создание методологии применения разработанной модели для анализа игрового баланса и формальной верификации игровых сценариев;
- исследование масштабируемости и адаптивности модели для различных жанров игр.

Предлагаемый подход основан на расширенной темпоральной логике и теории вероятностей, что позволяет точно описывать сложные игровые механики и их эволюцию во времени. Особое внимание уделено обеспечению практической применимости модели в реальном процессе разработки игр.

Мы опираемся на принципы системной инженерии, в частности на концепции, представленные в [4]. Это позволяет рассматривать игровые системы как сложные иерархические структуры с четко определенными уровнями абстракции. В основе модели FAST-GM лежит трехуровневая структура абстракции, характерная для системной инженерии.

- Концептуальный уровень: описывает общие понятия и взаимосвязи игровых сущностей.
- Логический уровень: предоставляет формальное представление сущностей и их взаимодействий.
- Физический уровень: описывает конкретную реализацию в игровых движках или системах.

Эта структура позволяет последовательно переходить от общих концепций к конкретным реализациям, обеспечивая целостность и согласованность модели на всех уровнях.

Структура статьи такова: сначала представлен обзор существующих подходов к формальному моделированию в game studies¹ [5], затем подробно описана предлагаемая модель FAST-GM, включая её математический аппарат и методологию применения. Далее рассмотрены примеры использования модели для анализа игрового баланса и верификации сценариев. В заключительной части проведено сравнение FAST-GM с существующими подходами и обсуждены перспективы дальнейших исследований в этой области.

Ожидается, что разработанный подход внесет значительный вклад в развитие методов формального анализа и проектирования игровых систем, способствуя повышению качества и сбалансированности современных компьютерных игр.

¹Game studies (исследования игр) – это междисциплинарная область академических исследований, фокусирующаяся на играх, в частности видеоиграх, их дизайне, игроках и их роли в обществе и культуре. Эта область объединяет подходы из различных дисциплин, включая компьютерные науки, культурологию, психологию, социологию, антропологию и медиаисследования.

1. Связанные работы

В области формального моделирования игровых систем существует ряд значимых исследований, которые служат основой для представленной работы.

1.1. Модель реальных и фиктивных элементов. В монографии [6] предложена общая модель игр – её можно назвать моделью реальных и фиктивных элементов. Она менее детализирована, чем наша модель, но представляет собой важный шаг в формализации игровых систем. Эта модель фокусируется на взаимосвязи между правилами игры и фиктивным миром, что частично отражено в нашем подходе к моделированию игровых сущностей:

Game = (Rules, Fiction, PlayerInteraction),

где *Rules* – правила игры, *Fiction* – фиктивный мир игры, *PlayerInteraction* – взаимодействие игрока с игрой.

1.2. Архитектура интерактивной драмы. В статье [7] разработаны формальные модели для интерактивных драматических сценариев в рамках построения своей системы Facade. Такие сценарии можно рассматривать как специфический случай игрового моделирования:

Scene = (Beats, Characters, DramaticArc),

где *Beats* – ключевые моменты сцены, *Characters* – персонажи, участвующие в сцене, *DramaticArc* – драматическая структура сцены.

1.3. Формальная игровая грамматика. В [8] предложена формальная грамматика для описания игровых механик, что близко к нашему подходу. Этот подход больше похож на язык программирования для игр:

Mechanic ::= Action |Rule| Resource,

где Action – действие в игре, Rule – правило игры, Resource – ресурс в игре.

1.4. Онтология игровых механик. В работе [9] в рамках Game Ontology Project разработана общая онтология для описания элементов игрового дизайна, что можно рассматривать как попытку обобщения игровых элементов:

 $Interface \leftarrow Presentation \leftarrow Rules \leftarrow Goals \leftarrow Entities,$

где Interface – интерфейс игры, Presentation – представление игровых элементов, Rules – правила игры, Goals – цели игры, Entities – сущности в игре.

1.5. Химия игрового дизайна. В [10] предложена система атомарных элементов геймплея, которая хотя и менее формальна, но стремится к обобщению игровых механик:

 $Game = Atom_1 + Atom_2 + ... + Atom_N$, где $Atom_i = (Action, Simulation, Feedback),$

где $Atom_i$ – атомарный элемент геймплея, Action – действие игрока, Simulation – симуляция результата действия, Feedback – обратная связь игроку.

535

1.6. Паттерны игрового дизайна. В книге [11] предложена система паттернов игрового дизайна, которая может рассматриваться как попытка формализации и обобщения игровых элементов. Эта работа послужила источником вдохновения для разработки нами подхода к моделированию повторяющихся элементов в различных жанрах игр:

Pattern = (Name, Description, Consequences, Using),

где Name – название паттерна, Description – описание паттерна, Consequences – последствия применения паттерна, Using – примеры использования паттерна.

1.7. Генеративный анализ Петри-сетей. В статье [12] использованы формальные методы для генерации игрового контента посредством интегрирования логических и вероятностных элементов и применения подходов, близких к нашему:

$Content = GenerateStructure(Logic) \times ApplyProbabilities(Structure),$

где Content – сгенерированный игровой контент, GenerateStructure – функция генерации структуры контента, Logic – логические правила генерации, ApplyProbabilities – функция применения вероятностных элементов, Structure – структура контента, × – оператор композиции или последовательного применения функций. Сначала применяется функция GenerateStructure для создания базовой структуры контента на основе логических правил, а затем к полученной структуре применяется функция ApplyProbabilities для добавления вероятностных элементов. Таким образом, × здесь обозначает последовательность операций в процессе генерации игрового контента.

1.8. Формальные модели в гейм-дизайне. С.М. Грюнфогелем в [13] была рассмотрена роль формальных моделей в дизайне компьютерных игр. Эта работа важна для нашего исследования, так как она закладывает основу для применения формальных методов в game studies и разработке игр. С.М. Грюнфогель предложил использовать различные математические подходы, включая теорию игр, теорию автоматов и теорию динамических систем, для моделирования игровых механик. Его подход подчеркивает необходимость гибкости формальных моделей для охвата разнообразия игровых жанров и механик:

Game = FormalModel(Mechanics, Dynamics, Aesthetics),

где *Mechanics* – правила и системы игры, *Dynamics* – поведение игры во время выполнения, *Aesthetics* – эмоциональные реакции, вызываемые у игрока.

1.9. Предлагаемый формальный подход к пространственновременному игровому моделированию. Наше исследование развивает и дополняет существующие подходы, предлагая более детализированную и универсальную модель. Мы представляем унифицированный подход к формальному моделированию игровых сущностей и их взаимодействий, который интегрирует темпоральные и вероятностные элементы, а также учитывает специфику различных игровых жанров. Этот подход, названный нами Formal Approach to Spatio-Temporal Game Modeling (FAST-GM), или «Формальный подход к пространственно-временному игровому моделированию», представляет собой комплексное решение для анализа и разработки современных игровых систем. FAST-GM стремится преодолеть ограничения существующих подходов, предоставляя более полный и гибкий инструментарий для моделирования игровых систем. Детальное описание структуры и компонентов модели представлено в следующем разделе.

FAST-GM отличается (см. табл. 1) от других рассмотренных методологий по нескольким ключевым особенностям:

- высокий уровень абстракции, позволяющий моделировать сложные игровые системы;
- интеграция темпоральных и вероятностных аспектов в единую модель;
- адаптивность к различным игровым жанрам;
- ориентация на практическое применение в анализе и разработке игр.

Таким образом, FAST-GM – это комплексный подход к моделированию игровых систем, объединяющий сильные стороны существующих методологий и расширяющий их возможности для решения современных задач игровой разработки.

2. Формальная модель игровых сущностей

При разработке формальной модели игровых сущностей мы опирались на опыт создания онлайн-инструмента для балансировки видеоигр [14], что позволило учесть практические аспекты применения формальных методов в игровом дизайне (в свою очередь, подход FAST-GM, предложенный в настоящей работе, послужит основой для усовершенствования этого онлайн-инструмента, что позволит более точно и эффективно анализировать и балансировать игровые механики).

2.1. Определение базовых игровых сущностей. Базовые игровые сущности можно классифицировать следующим образом [9]:

А. Активные сущности:

- а) игровые персонажи (управляемые игроком и NPC),
- b) интерактивные объекты (двери, рычаги, транспортные средства),
- с) искусственный интеллект (боты, системы управления).
- В. Пассивные сущности:
 - а) статические объекты окружения (здания, ландшафт),
 - b) ресурсы (здоровье, энергия, валюта),
 - с) информационные элементы (задания, журналы, карты).
- С. Системные сущности:
 - а) игровые правила и механики,
 - b) системы физики и коллизий,
 - с) системы загрузки и сохранения.
- D. Мета-сущности:
 - а) игровые сессии,
 - b) профили игроков,
 - с) достижения и статистика.

Табл.	1	-
100011	-	

Под-	Уровень	Темпоральные	Вероятност-	Вычисли-	Практическая
ход	абстракции	аспекты	ные	тельная	применимость
			элементы	сложность	
2.1	Концеп-	Не представлены	Не включены	Низкая	Высокая
	туальный				для теоретичес-
					кого анализа
2.2	Логический	Представлены	Частично	Средняя	Средняя,
		в контексте	в диалоговых		специфична
		нарратива	системах		для нарративных
					игр
2.3	Логический	Не представлены	Не включены	Средняя	Высокая
		явно			для формального
					описания
					механик
2.4	Концеп-	Не представлены	Не включены	Низкая	Высокая
	туальный	явно			для классифи-
					кации
					элементов
					игрового
					дизайна
2.5	Концеп-	Частично	Частично	Низкая	Средняя, фокус
	туальный	в механике	в механике		на творческом
		обратной связи	обратной		аспекте дизайна
			связи		
2.6	Логический	Частично	Не включены	Низкая	Высокая
		в некоторых	явно		для анализа
		паттернах			и дизайна
					игровых
					механик
2.7	Логический	Частично	Интегриро-	Высокая	Средняя, фокус
		в анализе	ваны		на генерации
		Петри-сетей			контента
2.8	Концеп-	Рассматриваются	Частично	Средняя	Средняя,
	туальный,	в контексте	рассматри-		теоретический
	Логический	динамических	ваются		фокус
		систем			
2.9	Концеп-	Интегрированы	Являются	Высокая	Высокая,
	туальный,	с использованием	неотъемле-	(PSPACE-	с ограничениями
	Логический,	темпоральной	мой частью	полная	для крупномас-
	Физический	логики	модели	для LTL)	штабных систем

Сравнение подходов к моделированию игровых систем

2.1.1. Уровни абстракции игровых сущностей. На концептуальном уровне игровая сущность определяется как абстрактный объект, обладающий определенными характеристиками и способный взаимодействовать с другими сущностями.

На логическом уровне мы формализуем сущность E (сокр. от англ. Entity) как фундаментальный элемент игровой системы, обладающий уникальными характеристиками, состоянием и поведением, который формально можно определить как

 $E = \langle I, A, S, T, B \rangle,$

где I (*Identifier*) – уникальный идентификатор, A (*Attributes*) – множество атрибутов, S (*State*) – текущее состояние, T (*TemporalProperties*) – темпоральные свойства, B (*Behavior*) – общее вероятностное поведение, причём каждый атрибут $a \in A$ представляет собой характеристику сущности, т. е. $A = a_1, a_2, ..., a_n$, где n – количество атрибутов сущности.

На физическом уровне сущность представляется как конкретная структура данных или объект в игровом движке.

Выбор абстракций для представления сущностей в FAST-GM обусловлен следующими факторами:

- универсальность модель должна быть применима к широкому спектру игровых жанров и стилей;
- гранулярность уровень детализации должен быть достаточным для точного моделирования, но не избыточным для эффективного анализа;
- расширяемость возможность легко добавлять новые типы сущностей и атрибуты без изменения базовой структуры модели;
- совместимость способность интегрироваться с существующими игровыми движками и инструментами разработки.

Листинг 1

Пример формального определения игрового персонажа в FAST-GM

```
Character = (I: ''player_001'', A: {health_max, strength, speed},
S: [будет детально определено позже],
T: {health_regen: 1/s, ability_cooldown: {fireball: 30s}},
P: {carit_character 0.1_dedge_probability: 0.05}
```

B: {crit_chance: 0.1, dodge_probability: 0.05})

2.2. Формальное представление состояний сущностей. Формально определим состояние игровой сущности как кортеж

$$S = \langle V, C, \tau, P \rangle,$$

где V – функция, сопоставляющая атрибутам из множества A их текущие значения (Values), C – множество ограничений на значения атрибутов (Constraint), τ – временная метка (time), P – вероятностные характеристики текущего состояния (Probability).

2.2.1. Значения атрибутов. *V* определяется как функция, отображающая атрибуты в их текущие значения:

$$V: A \to W,$$

где A – множество атрибутов, W – объединение всех множеств допустимых значений для всех атрибутов.

Для каждого атрибута $a \in A$, V(a) = w, где $w \in Da$ и Da – множество допустимых значений для атрибута a.

Da представляет собой все возможные значения, которые может принимать конкретный атрибут a, например:

- для числового атрибута 'здоровье' Da может быть определено как $Da = x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 100$, что означает, что здоровье может принимать любое целое значение от 0 до 100;
- для атрибута 'имя персонажа' Da может быть множеством всех допустимых строк определенной длины, например, Da = s | s -строка, $1 \leq$ длина $(s) \leq 20$;
- для атрибута 'класс персонажа' в ролевой игре *Da* может быть конечным множеством предопределенных значений, например, *Da* = 'воин', 'маг', 'лучник', 'целитель';
- для атрибута 'координаты' в двумерном пространстве Da может быть определено как $Da = (x, y) | x, y \in \mathbb{R}, 0 \le x \le 1000, 0 \le y \le 1000,$ где x и y – действительные числа в пределах игрового поля размером 1000 × 1000.

2.2.2. Ограничения. Множество C содержит ограничения на значения атрибутов $C = c_1, c_2, ..., c_m$, где каждое c_i представляет собой предикат над значениями атрибутов.

2.2.3. Временная метка. Величина τ представляет момент времени, к которому относится данное состояние. Это позволяет отслеживать эволюцию состояния сущности во времени.

Рассмотрим сущность «игрок» (player) в ролевой игре, определив её компоненты как $E_{player} = < I, A, S, T, B >,$ где

- I = "player _001",
- $A = \{$ здоровье, сила, опыт $\},$
- $T = \{ \text{скорость _ регенерации} : 1 \, \text{ед/мин, длительность _ баффов} : 5 \, \text{минут} \},$
- $B = \{$ вероятность _ крит _ удара : 0.1, шанс _ уклонения : 0.05 $\}$.
- Состояние игрока S в конкретный момент времени может быть описано как $S = \langle V, C, \tau, P \rangle$, где $V = \{$ здоровье $\rightarrow 100$, сила $\rightarrow 15$, опыт $\rightarrow 200\}$,
- $C = \{$ здоровье ≥ 0 , сила > 0, опыт $\geq 0\},$

$$au = au_0,$$

 $P = \{\text{вероятность _след _уровня} : 0.7\}.$

Это состояние можно интерпретировать следующим образом: в момент времени t_0 игрок имеет 100 единиц здоровья, 15 единиц силы и 200 единиц опыта. Существуют ограничения на значения атрибутов: здоровье и опыт не могут быть отрицательными, а сила должна быть строго положительной. Вероятность достижения следующего уровня в текущем состоянии составляет 0.75.

Такое представление позволяет точно описать как общие характеристики сущности «игрок», так и ее конкретное состояние в определенный момент времени, включая вероятностные аспекты.

2.2.4. Темпоральные аспекты. Для моделирования изменения состояний во времени введём оператор Next(S), который определяет следующее состояние сущности Next(S) = S', где S' – новое состояние после некоторого игрового события или действия (оператор Next(S) соответствует темпоральному оператору Next(X), описанному в разделе 3.3.1. Таким образом, Next(S) = S' эквивалентно XS в нотации темпоральной логики).

2.2.5. Вероятностные аспекты. Для учета вероятностных элементов введём функцию $P(S \to S')$, которая определяет вероятность перехода из состояния *S* в состояние *S'*.

2.2.6. Формальная верификация. Использовав это представление, мы можем сформулировать и проверить свойства игровых сущностей. Например:

 \forall (здоровье(t) > 0) – игрок всегда имеет положительное здоровье,

G(опыт $(t+1) \ge$ опыт(t)) – опыт игрока не уменьшается со временем.

2.2.7. Пример комплексного определения игровой сущности. Character = $\langle I:$ "player_001", A: {health_max, strength, speed}, $S: \langle V:$ {health_max \rightarrow 100, strength \rightarrow 20, speed \rightarrow 5, current_health \rightarrow 75, position \rightarrow (10, 0, 5)}, C: {health_max > 0, strength > 0, speed > 0, current_health \leq health_max}, $\tau:$ t_current, P: {poison_active: true}}, T: {health_regen: 1/s, ability_cooldown: {fireball: 30s}}, B: {crit_chance: 0.1, dodge_probability: 0.05}}

Такое представление позволяет точно описать сущность, ее текущее состояние, включая возможное поведение, временные характеристики и вероятностные аспекты поведения – всё, что является основой для дальнейшего анализа и моделирования игровой системы в рамках FAST-GM.

2.3. Темпоральные операторы для описания эволюции сущностей. Для описания изменения состояний сущностей во времени в модели FAST-GM использован набор темпоральных операторов, основанных на линейной темпоральной логике (LTL) [15]. Эти операторы позволяют формально описывать и анализировать динамику игровых сущностей.

2.3.1. Определение базового набора темпоральных операторов.

- Next(X): X_{φ} означает, что свойство φ будет истинным в следующем состоянии.
- Always(G): G_{φ} означает, что свойство φ будет истинным во всех будущих состояниях.
- Eventually(F): F_{φ} означает, что свойство φ станет истинным в некотором будущем состоянии.
- Until(U): $\varphi U\psi$ означает, что свойство φ будет истинным до тех пор, пока не станет истинным свойство ψ .

2.3.2. Формальное описание изменения состояний сущностей во времени. Пусть S(t) обозначает состояние сущности в момент времени t, тогда можно привести следующие примеры для описания различных переходов от одного времени к другому:

- XS(t) = S(t+1): следующее состояние сущности,
- G(S(t).health > 0): здоровье сущности всегда положительно,
- F(S(t).level = 10): в какой-то момент в будущем сущность достигнет 10 уровня,
- (S(t).status = "poisoned")U(S(t).status = "normal"): сущность будет отравлена, пока не вернется в нормальное состояние.

2.3.3. Темпоральные операторы для типичных игровых сценариев. Приведём примеры использования темпоральных операторов для типичных игровых сценариев.

• Регенерация здоровья:

 $G(S(t).health < S(t).max_health \rightarrow XS(t).health > S(t).health)$ – "всегда, если текущее здоровье меньше максимального, в следующий момент времени оно увеличится".

- Откат способности: $G(S(t).ability_used \rightarrow FS(t).ability_available)$ – "всегда после использования способности, в конечном итоге она снова станет доступной".
- Прогресс квеста: (S(t).quest_status = "in_progress")U(S(t).quest_status = "completed")
 – "квест будет в процессе выполнения, пока не будет завершен".
- Временный бафф:

 $G(S(t).buff_applied \rightarrow F(S(t).buff_duration = 0))$

 - "всегда, если применен бафф, в конечном итоге его длительность станет равной нулю".

- Периодическое событие:
 - $G(F(S(t).event \ trigger = true))$

- "всегда верно, что в конечном итоге произойдет событие (и это будет повторяться)".

Использование этих темпоральных операторов позволяет формально описать сложные временные зависимости и поведение игровых сущностей. Это дает возможность не только смоделировать игровые механики, но и провести формальную верификацию игровых сценариев, обеспечив корректность и предсказуемость поведения игровой системы во времени.

2.4. Вероятностные элементы в модели сущностей. Вероятностные элементы играют ключевую роль в моделировании многих аспектов игровых систем – от случайных событий до неопределенностей в поведении сущностей. В модели FAST-GM мы интегрируем вероятностные элементы, использовав концепции из теории вероятностей и стохастических процессов [16].

2.4.1. Введение вероятностных функций и распределений. Вероятностные элементы (дискретные вероятности / непрерывные распределения / условные вероятности) представлены следующим образом:

• дискретные вероятности: P(X = x), где X – случайная величина, x – конкретное значение.

Пример: P(критический _ удар = true) = 0.1;

- непрерывные распределения: f(x), где f функция плотности вероятности. Пример: урон может быть распределен нормально с параметрами μ (среднее) и σ (стандартное отклонение);
- условные вероятности: P(A|B), вероятность события A при условии B. Пример: $P(\text{победа} \mid \text{уровень}_игрока > 10) = 0.7$.

2.4.2. Моделирование случайных событий и неопределенностей в поведении сущностей. Приведём примеры, как могут быть представлены случайные события и неопределенности в поведении сущностей.

• Генерация случайных событий:

 $Event(e) = \{true, ecли rand() < P(e); false, иначе\}.$

Например, генерация случайного события «критический удар»:

Critical $Hit() = \{true, ecли rand() < character.crit chance; false, иначе\}.$

• Стохастические изменения состояния:

 $S(t+1) = f(S(t), \varepsilon)$, где ε – случайная величина.

Например, изменение в следующий тик времени уровня здоровья с учетом заложенного уровня регенерации:

character.health(t+1) = character.health(t) + regeneration rate + Normal(0,5).

• Марковские цепи для моделирования поведения NPC:

$$P(S(t+1) = s_j | S(t) = s_i) = p_{ij}.$$

Например, вероятность изменения поведения NPC в следующий тик времени:

$$P(NPC_state(t+1) =$$
"атака" $|NPC_state(t) =$ "патруль") = 0.3.

2.4.3. Интеграция вероятностных элементов с темпоральными аспектами. Для объединения вероятностных и темпоральных аспектов мы используем концепции из вероятностной темпоральной логики [17]:

- $P_{=r}[\varphi]$: вероятность того, что формула φ истинна, равна r. Пример: $P_{=0.8}[F(character.level \ge 10)]$ – "вероятность того, что в конечном итоге персонаж достигнет 10 уровня, равна 0.8";
- $P_{\geq r}[\varphi]$: вероятность того, что формула φ истинна, не менее r. Пример: $P_{\geq 0.95}[G(item.durability > 0)]$ – "с вероятностью не менее 0.95 предмет никогда не сломается";
- *E*[*reward*]: ожидаемое значение награды. Пример: *E*[*G*(*quest.completion_reward*)] ≥ 100 – "ожидаемая награда за выполнение квеста всегда не менее 100".

Использование этих конструкций позволяет формально описать и проанализировать сложные игровые механики, включающие как временные, так и вероятностные аспекты.

Пример комплексного описания игровой механики:

 $P_{\geq 0.7}[G(character.health > 0)U(boss.health = 0)]$

- "с вероятностью не менее 0.7 персонаж останется жив до победы над боссом".

Интеграция вероятностных элементов в модель FAST-GM позволяет более точно описывать реалистичное поведение игровых сущностей, учитывая элементы случайности и неопределенности, присущие многим игровым системам. **2.5.** Взаимодействие между сущностями. Взаимодействие между игровыми сущностями является ключевым аспектом любой игровой системы. В модели FAST-GM мы формализуем различные типы взаимодействий, учитывая их временные и вероятностные характеристики.

2.5.1. Формальное определение типов взаимодействий. В нашей модели мы выделяем следующие типы взаимодействий:

- прямые взаимодействия: $I_d(E_1, E_2)$ непосредственное влияние сущности E_1 на E_2 ;
- косвенные взаимодействия: $I_i(E_1, E_2, E_3)$ влияние E_1 на E_2 через посредника E_3 ;
- синхронные взаимодействия: I_s(E₁, E₂, t) взаимодействие, происходящее в конкретный момент времени t;
- асинхронные взаимодействия: $I_a(E_1, E_2, \Delta t)$ взаимодействие, растянутое во времени на интервал Δt .

2.5.2. Моделирование влияния взаимодействий на состояния сущностей. Влияние взаимодействия на состояние сущности можно описать как функцию перехода $S'(E) = f(S(E), I(E_1, E_2), t)$, где S(E) – текущее состояние сущности E, S'(E) – новое состояние после взаимодействия, $I(E_1, E_2)$ – взаимодействие между сущностями E_1 и E_2 , а t – момент времени.

 $Player.health' = f(Player.health, I_d(Enemy, Player), t) = \\ = \max(0, Player.health - Enemy.damage * (1 - Player.defense/100))$

2.5.3. Описание сложных взаимодействий с использованием темпоральных и вероятностных элементов. Для описания сложных взаимодействий мы комбинируем темпоральные операторы и вероятностные элементы:

- отложенное воздействие: $X[\Delta t]I_d(Potion, Player.health)$ – "через Δt единиц времени зелье повлияет на здоровье игрока";
- вероятностное взаимодействие:
 P_{0.3}[I_d(Player.attack, Enemy.health)] "атака игрока с вероятностью 0.3 повлияет на здоровье врага";
- периодическое взаимодействие: *G*[*F*[*I*_*d*(*Environment.radiation*, *Player.health*)]] – "всегда в будущем будет момент, когда радиация окружения повлияет на здоровье игрока";
- условное взаимодействие: (*Player.level* ≥ 10) → *I_d*(*Player, Environment.special_zone*) – "если уровень игрока не менее 10, то он может взаимодействовать со специальной зоной".

2.5.4. Пример комплексного взаимодействия. Рассмотрим сценарий «Отравленный клинок» в ролевой игре:

 $I_poison_blade = \{trigger : I_d(Player.weapon, Enemy), effect : P_{0,2}[G[0, 30](XEnemy.health' = Enemy.health - 5)], duration : 30 seconds \}$

Листинг 2

Пример использования навыка «Отравленный клинок»

```
I_poison_blade = {
    trigger: I_d(Player.weapon, Enemy),
    effect: P_0.2[G[0,30] (X Enemy.health'
        = Enemy.health - 5)],
        duration: 30 seconds
}
```

Это взаимодействие означает:

- триггер: прямое взаимодействие оружия игрока с врагом,
- эффект: с вероятностью 0.2 в течение следующих 30 секунд каждую секунду враг будет терять 5 единиц здоровья,
- длительность эффекта: 30 секунд.

Такое формальное описание позволяет точно моделировать сложные игровые механики, учитывая их временные, вероятностные и условные аспекты. Это обеспечивает основу для анализа баланса, выявления потенциальных проблем и оптимизации игрового процесса. Интеграция взаимодействий в модель FAST-GM позволяет создавать детальные и точные представления игровых систем, что особенно важно для сложных многопользовательских игр и игр с открытым миром, где взаимодействия между сущностями могут быть чрезвычайно разнообразными и комплексными.

2.6. Масштабируемость и адаптивность модели. Модель FAST-GM разработана с учетом необходимости ее применения к различным масштабам игровых систем и адаптации к специфическим требованиям различных игровых жанров [18]. В этом разделе мы рассмотрим, как модель обеспечивает масштабируемость и адаптивность.

2.6.1. Применимость модели к различным масштабам игровых систем. FAST-GM может быть применена к игровым системам различного масштаба:

А. Микроуровень. Моделирование отдельных игровых механик или взаимодействий.

Пример: детальное описание системы крафтинга в игре.

- В. Мезоуровень. Описание подсистем или групп взаимодействующих сущностей. Пример: моделирование экономики виртуального города.
- С. Макроуровень. Моделирование целых игровых миров или глобальных игровых систем.

Пример: описание эволюции фракций в масштабной стратегической игре.

Для обеспечения масштабируемости используется иерархический подход:

$$E_macro = \{E_meso_1, E_meso_2, ..., E_meso_n\}E_meso = \{E_micro_1, E_micro_2, ..., E_micro_m\}\},\$$

где *E_macro* – макросущность, *E_meso* – мезосущности, *E_micro* – микросущности.

2.6.2. Адаптация модели к различным игровым жанрам. Адаптивность FAST-GM к различным игровым жанрам [18] является ключевым фактором её универсальности и практической применимости. Для обеспечения масштабируемости и гибкости модели мы предлагаем следующие стратегии и механизмы.

А. Оптимизация обработки событий:

- a) иерархическое представление событий группировка микрособытий в макрособытия для снижения вычислительной нагрузки;
- b) приоритизация событий обработка наиболее критичных событий в реальном времени, остальные в фоновом режиме;
- с) использование приближенных методов для жанров, где точность менее критична (например, казуальные игры), применение упрощенных моделей.
- В. Жанрово-специфическая адаптация:
 - а) жанровые шаблоны использование предопределенных наборов сущностей, атрибутов и взаимодействий, характерных для конкретных жанров.

 $RPG_Template = \{Entities : \{Character, NPC, Item, Quest\}, \\Attributes : \{level, experience, inventory\}, \\Interactions : \{combat, dialog, trade\}\}$

 $RTS_Template = \{Entities : \{Unit, Building, Resource\}, \\Attributes : \{health, attack_power, build_time\}, \\Interactions : \{gather, construct, attack\}\}$

b) расширяемые множества операторов – возможность определения новых темпоральных и вероятностных операторов для специфических игровых механик.

Combo $Operator(moves) = X[t_1]move_1 \land X[t_2]move_2 \land ... \land X[t_n]move_n$

 $\begin{aligned} Respawn_Operator(player) &= G(player.health = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow F[respawn\ time]player.health > 0) \end{aligned}$

С. Параметризация модели – для отражения особенностей конкретного жанра.

Simulation $Precision = time \ step: 0.01, physics \ iterations: 10$

 $Card_Game_Parameters =$

 $= deck_size: 60, max_hand_size: 7, turn_per_round: 1$

Эти механизмы адаптации позволяют FAST-GM эффективно моделировать пирокий спектр игровых жанров от быстрых аркадных игр до сложных стратегий и ролевых игр с открытым миром. Гибкость модели обеспечивает её применимость как к существующим, так и к новым, формирующимся игровым жанрам, делая FAST-GM мощным инструментом для анализа и разработки разнообразных игровых систем.

2.6.3. Примеры расширения модели для сложных игровых сценариев.

$$\begin{split} OpenWorld &= \{World_State: \{time, weather, global_events\}, \\ & Dynamic_Quests: f(Player_Actions, World_State) \rightarrow Quest, \\ & Emergent_Behavior: P[G(\forall e \in Entities: Unexpected_Interaction(e))] > 0\} \end{split}$$

 $MMORPG = \{Server_Shards : S_1, S_2, ..., S_k, \\ Cross_Shard_Interaction : I(E_1 \in S_i, E_2 \in S_j), \\ Latency Model : delay(Action) = Normal(\mu, \sigma)\}$

$$\begin{aligned} Procedural_Generation = \{Seed : s, \\ Generation_Rules : R = r_1, r_2, ..., r_n, Content : C = f(s, R, t), \\ Consistency_Constraint : G(\forall c \in C : Consistent(c, World_Logic))) \end{aligned}$$

2.6.4. Обеспечение согласованности при масштабировании. Для обеспечения согласованности модели при масштабировании и адаптации используются следующие принципы:

- инвариантность базовых определений основные концепции (сущности, состояния, взаимодействия) остаются неизменными на всех уровнях масштаба;
- композиционность сложные системы могут быть построены из более простых компонентов с сохранением свойств и ограничений;
- абстракция и детализация возможность представления систем на разных уровнях абстракции с сохранением ключевых свойств.

Пример:

Abstract
$$Combat(E_1, E_2) = P[Win(E_1)] = f(E_1.power, E_2.power)$$

Detailed_Combat $(E_1, E_2) =$

= Sequence $\langle Attack(E_1, E_2), Defence(E_2), Counter(E_2, E_1), ... \rangle$

Здесь Abstract _ Combat представляет высокоуровневую абстракцию боевого взаимодействия, где результат определяется вероятностной функцией от силы участников, a Detailed _ Combat показывает более детальную последовательность действий в бою.

Масштабируемость и адаптивность FAST-GM позволяют применять модель к широкому спектру игровых проектов, от простых мобильных игр до сложных многопользовательских миров, сохраняя при этом формальную строгость и аналитическую мощь подхода.

547

2.7. Интеграция компонентов FAST-GM. Модель FAST-GM представляет собой комплексный подход к формальному описанию игровых систем, интегрируя различные аспекты игрового дизайна и механик. Ниже рассмотрим, как основные компоненты модели взаимодействуют между собой.

2.7.1. Сущности и их состояния. Каждая игровая сущность E определяется как $E = \langle I, A, S, T, B \rangle$, где $S = \langle V, C, \tau, P \rangle$. Это позволяет описать как статические характеристики сущностей (через атрибуты A), так и их динамическое поведение (через состояние S).

2.7.2. Темпоральные аспекты. Временная эволюция сущностей описывается с помощью темпоральных операторов (X, G, F, U). Эти операторы связывают текущее состояние сущности с её будущими состояниями, позволяя моделировать изменения во времени.

2.7.3. Вероятностные элементы. Вероятностное поведение сущностей интегрируется через компонент P в определении состояния. Это позволяет моделировать неопределенность и случайность в игровых механиках.

2.7.4. Взаимодействия. Взаимодействия между сущностями описываются функцией $I : E \times E \times T \to S'$, которая учитывает как сами сущности, так и временной аспект их взаимодействия.

2.7.5. Масштабируемость. Иерархическая структура модели (микро-, мезо- и макроуровни) позволяет применять FAST-GM к игровым системам различной сложности и масштаба.

Интеграция этих компонентов позволяет создавать целостные модели игровых систем, учитывающие статические свойства, динамическое поведение, временную эволюцию и вероятностные аспекты игровых сущностей и их взаимодействий. Это обеспечивает мощный инструментарий для анализа, верификации и оптимизации игровых механик на различных этапах разработки игры.

2.8. Формальное описание логик и анализ сложности. В основе FAST-GM лежат линейная темпоральная логика (LTL) и вероятностная логика, которые обеспечивают мощный инструментарий для моделирования динамических аспектов игровых систем. LTL, впервые предложенная Пнуэли [15], позволяет формально описывать и анализировать поведение систем во времени, используя операторы X (Next), G (Globally), F (Future) и U (Until). Вероятностная логика, развитая в работах [19], [20], предоставляет формальный аппарат для работы с неопределенностью и случайностью в игровых механиках. Детальное формальное описание этих логик, включая аксиомы, правила вывода и доказательства ключевых теорем, выходит за рамки данной статьи и будет представлено в отдельной работе.

Интеграция темпоральной и вероятностной логик в FAST-GM существенно повышает выразительность модели, но также увеличивает её вычислительную сложность. Как показано в работе [21], проверка модели для LTL является PSPACE²полной задачей, что накладывает определенные ограничения на применение модели к крупномасштабным игровым системам. Анализ сложности вероятностных вы-

²PSPACE-полная задача (или задача PSPACE-полноты) является одной из наиболее трудных задач в классе сложности PSPACE, включающем все задачи, которые могут быть решены с использованием полиномиального объема памяти (или Polynomial Space).

числений, основанный на результатах Пападимитриу [22], указывает на необходимость применения приближенных методов для практической реализации модели.

Для практического применения FAST-GM будут предложены очевидные оптимизации такие, как применение техник символьной верификации [23], ограничение глубины темпорального анализа [24] и использование приближенных методов для вероятностных вычислений [25].

Детальное исследование вычислительной сложности FAST-GM и разработка эффективных алгоритмов для её практического применения являются предметом наших текущих исследований и будут представлены в последующих публикациях.

3. Моделирование взаимодействий между сущностями

3.1. Формальное определение взаимодействий. Взаимодействие между сущностями в FAST-GM определяется как функция (19):

$$I: E \times E \times T \to S',$$

где E – множество сущностей, T – временной домен, S' – новое состояние сущности после взаимодействия.

Формально взаимодействие $I(e_1, e_2, t)$ описывает, как сущность e_1 влияет на сущность e_2 в момент времени t, изменяя ее состояние.

3.2. Графовое представление взаимодействий. Взаимодействия между сущностями можно представить в виде направленного графа (20):

$$G = (V, E),$$

где V – множество вершин, представляющих сущности, а E – множество ребер, представляющих взаимодействия. Каждое ребро $e \in E$ имеет метку (21):

$$l(e) = (I, t, p),$$

где *I* – тип взаимодействия (*Interaction*), *t* – временная характеристика, *p* – вероятность (для стохастических взаимодействий).

3.3. Темпоральные аспекты взаимодействий. Для описания временных аспектов (немедленное / отложенное / периодическое) взаимодействий используются следующие темпоральные операторы:

- I immediate (e_1, e_2) : немедленное взаимодействие,
- *I* delayed $(e_1, e_2, \Delta t)$: отложенное взаимодействие с задержкой Δt ,
- I periodic (e_1, e_2, T) : периодическое взаимодействие с периодом T.

 $I_periodic(Sun, Plants, 24h) =$ = effect : Plants.energy + = f(Sun.intensity), period : 24h

3.4. Вероятностные характеристики взаимодействий. Вероятностные взаимодействия описываются с использованием функции вероятности $P(I|e_1, e_2, t)$ – вероятность взаимодействия I между e_1 и e_2 в момент t.

 $P(Critical_Hit|Player, Enemy, t) =$

= Player.critical chance + f(Player.luck, Enemy.vulnerability)

Заключение

Представлен унифицированный формальный подход к моделированию игровых сущностей и их взаимодействий – FAST-GM. Этот подход объединяет темпоральные и вероятностные аспекты игровых систем, обеспечивая комплексное описание динамики игровых механик. Основные достижения проведенного исследования включают разработку формальной модели FAST-GM, способной описывать широкий спектр игровых сущностей и их взаимодействий, метод интеграции темпоральных и вероятностных элементов в единую модель, а также демонстрацию универсальности и масштабируемости модели для различных игровых жанров и систем разной сложности.

По сравнению с существующими подходами, FAST-GM отличается высокой степенью формальной строгости и интеграцией темпоральных и вероятностных аспектов в единую модель. Это открывает новые возможности для автоматизированного анализа и верификации игровых механик, включая количественную оценку игрового баланса, формальную верификацию игровых сценариев и автоматизированную генерацию тестовых случаев. Такой подход позволяет более эффективно выявлять потенциальные дисбалансы, ошибки и несоответствия в игровой логике, что особенно важно в контексте растущей сложности современных игровых систем.

Практическая реализация FAST-GM сопряжена с рядом технических вызовов, требующих инновационных решений. Для управления большими объемами данных предлагается использование распределенных систем хранения и применение техник анализа больших данных. Оптимизация вычислений может быть достигнута путем параллельной обработки и использования GPU для ускорения вероятностных вычислений. Интеграция FAST-GM с существующими игровыми движками потребует разработки специализированных интерфейсов и адаптеров. Решение этих задач откроет путь к широкому применению FAST-GM в реальных проектах разработки игр.

Несмотря на свои преимущества, модель FAST-GM имеет ряд ограничений, в частности, высокую вычислительную сложность для больших игровых миров и потенциальные трудности в реализации для некоторых игровых жанров. Будущие исследования будут направлены на разработку более эффективных алгоритмов для темпорального и вероятностного анализа, создание специализированных инструментов для работы с FAST-GM, а также расширение модели для более полного охвата эмерджентных явлений в играх. Планируется провести обширное эмпирическое тестирование модели на реальных игровых проектах разных масштабов и жанров, а также исследовать возможности применения машинного обучения для автоматизации анализа и оптимизации игровых систем на основе данной модели.

Практическое применение модели может быть дополнительно усилено использованием структурированного корпуса текстов видеоигр [3], что позволит более эффективно извлекать и анализировать игровые элементы и механики.

В заключение отметим, что предложенный подход представляет собой мощный инструмент для анализа, верификации и оптимизации игровых механик, способный значительно повысить качество и эффективность разработки игр, открывая новые горизонты в game studies и индустрии разработки игр.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Сахибгареева Г.Ф., Кугуракова В.В., Большаков Э.С. Генерация и балансирование игровых механик видеоигр // Науч. сервис в сети Интернет: тр. XXIV Всерос. науч. конф. (19–22 сент. 2022 г., онлайн). М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. С. 455–485. https://doi.org/10.20948/abrau-2022-6.
- Сахибгареева Г.Ф., Кугуракова В.В. Практики балансирования компьютерных игр // Прогр. сист.: теор. и прил. 2022. Т. 13, № 3. С. 255–273. https://doi.org/10.25209/2079-3316-2022-13-3-255-273.
- 3. *Нурлыгаянов Н.Р., Кугуракова В.В.* Подход к созданию корпуса текстов видеоигр на основе универсальной структуры // Электр. библ. 2024. Т. 27, № 4. С. 578–597. https://doi.org/10.26907/1562-5419-2024-27-4-578-597.
- 4. Левенчук А. Системное мышление. В 2-х т. Т. 1. Екатеринбург: Ridero, 2024. 412 с.
- 5. Aarseth E. Computer game studies, year one // Game Stud. 2001. V. 1, No 1.
- Juul J. Half-Real: Video Games between Real Rules and Fictional Worlds. Cambridge, MA: MIT Press. 2005. 248 p.
- Mateas M., Stern A. Structuring content in the façade interactive drama architecture // Proc. Artif. Intell. Interact. Digital Entertainment Conf. 2005. V. 1, No 1. P. 93–98. https://doi.org/10.1609/aiide.v1i1.18722.
- Nelson M.J., Mateas M. Towards a formal game grammar // Proc. 6th Int. Conf. on Cognitive Modeling. 2008. P. 137–143.
- Zagal J.P., Mateas M., Fernández-Vara C., Hochhalter B., Lichti N. Towards an ontological language for game analysis // Proc. DiGRA 2005 Conf.: Changing Views – Worlds in Play. Tampere: DiGRA, 2005. P. 1–13.
- Cook D. The chemistry of game design // Game Developer. 2007. URL: https://www.gamedeveloper.com/design/the-chemistry-of-game-design.
- Björk S., Holopainen J. Patterns in Game Design. Ser.: Game Development Series. Hingham, MA: Charles River Media, 2005. xvii, 423 p.
- Brogi A., Canciani A., Soldani J., Wang P. A Petri net-nased approach to model and analyze the management of cloud applications // Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency XI / Koutny M., Desel J., Kleijn J. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016, pp. 28–48. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53401-4 2.
- 13. Grünvogel S.M. Formal models and game design // Game Stud. 2005. V. 5, No 1.
- Rakhmankulova V., Kugurakova V. Developing an online tool for balancing video games // Proc. Int. Conf. on Simplicity and Complexity in SMART Automatics and Energy Systems (SMART-SYSTEMS). 2024. P. 1–6.
- Pnueli A. The temporal logic of programs // Proc. 18th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (sfcs 1977). Providence, RI: IEEE, 1977. P. 46–57. https://doi.org/10.1109/SFCS.1977.32.
- 16. Ross S.M. Introduction to Probability Models. 12th ed. Acad. Press, 2019. 842 p. https://doi.org/10.1016/C2017-0-01324-1.
- Hansson H., Jonsson B. A logic for reasoning about time and reliability // Formal Aspects Comput. 1994. V. 6, No 5. P. 512–535. https://doi.org/10.1007/BF01211866.
- Apperley T.H. Genre and game studies: Toward a critical approach to video game genres // Simul. Gaming. 2006. V. 37, No 1. P. 6–23. https://doi.org/10.1177/1046878105282278.
- Nilsson N.J. Probabilistic logic // Artif. Intell. 1986. V. 28, No 1. P. 71–87. https://doi.org/10.1016/0004-3702(86)90031-7.

- Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N. A logic for reasoning about probabilities // Inf. Comput. 1990. V. 87, Nos 1–2. P. 78–128. https://doi.org/10.1016/0890-5401(90)90060-U.
- Sistla A.P., Clarke E.M. The complexity of propositional linear temporal logics // J. ACM. 1985. V. 32, No 3. P. 733–749. https://doi.org/10.1145/3828.3837.
- Papadimitriou C.H. Games against nature // J. Comput. Syst. Sci. 1985. V. 31, No 2. P. 288–301. https://doi.org/10.1016/0022-0000(85)90045-5.
- Biere A., Cimatti A., Clarke E., Zhu Y. Symbolic model checking without BDDs // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99): Proc. 5th Int. Conf. / Cleaveland W.R. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 1579. Berlin, Heidelberg: Springer, 1999. P. 193–207. https://doi.org/10.1007/3-540-49059-0 14.
- Biere A., Heljanko K., Junttila T., Latvala T., Schuppan V. Linear encodings of bounded LTL model checking // Logical Methods Comput. Sci. 2006. V. 2, No 5. P. 1–64. https://doi.org/10.2168/LMCS-2(5:5)2006.
- Henriques D., Martins J.G., Zuliani P., Platzer A., Clarke E.M. Statistical model checking for Markov decision processes // Proc. 2012 9th Int. Conf. on Quantitative Evaluation of Systems. London: IEEE, 2012. P. 84–93. https://doi.org/10.1109/QEST.2012.19.

Поступила в редакцию 31.07.2024 Принята к публикации 5.09.2024

551

Кугуракова Влада Владимировна, кандидат технических наук, и.о. заведующего кафедрой индустрии разработки видеоигр Института информационных технологий и интеллектуальных систем, руководитель научно-исследовательской лаборатории «Digital Media Lab»

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

 $\hbox{E-mail: } vlada.kugurakova@gmail.com \\$

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 532-554

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.532-554

A Formal Approach to Spatio-Temporal Modeling of Game Systems

V.V. Kugurakova

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia E-mail: vlada.kugurakova@gmail.com

Received July 31, 2024; Accepted September 5, 2024

Abstract

This article introduces FAST-GM (Formal Approach to Spatio-Temporal Game Modeling), a new unified approach to formal modeling of game entities and their interactions that integrates temporal and probabilistic dimensions, thus offering a comprehensive framework for capturing the dynamics of game systems. Built upon the principles of extended temporal logic and probability theory, FAST-GM accurately describes complex game mechanics and how they evolve. A formal definition of game entities was considered. Their states and interactions were explored. The methods for integrating temporal and probabilistic elements into gameplay were discussed. The applicability of FAST-GM for game balancing, formal verification of game scenarios, and automated generation of test cases was analyzed. Its scalability and adaptability in various game genres were assessed. The results obtained show that FAST-GM should advance the formal modeling of game systems, equipping developers with a powerful toolset for analysis, verification, and optimization of game mechanics throughout the process of creating a video game.

Keywords: formal modeling, game entity, game interaction, temporal logic, probabilistic model, game balance analysis, game scenario verification, FAST-GM, game studies, game design

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

- Sahibgareeva G.F., Kugurakova V.V., Bolshakov E.S. Video game's mechanics generation and balancing. Nauch. servis v seti Internet: tr. XXIV Vseros. nauch. konf. (19–22 sent. 2022 g., onlain) [Scientific Service & Internet: Proc. XXIV All-Russ. Sci. Conf. (September 19–22, 2022, Online)]. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha, 2022, pp. 455–485. https://doi.org/10.20948/abrau-2022-6. (In Russian)
- Sahibgareeva G.F., Kugurakova V.V. Game balance practices. Program. Sist.: Teor. Prilozh., 2022, vol. 13, no. 3, pp. 255–273. https://doi.org/10.25209/2079-3316-2022-13-3-255-273. (In Russian)

- Nurlygaianov N.R., Kugurakova V.V. A new approach to creating a corpus of video game texts. *Elektron. Bibl.*, 2024, vol. 27, no. 4, pp. 587–597. https://doi.org/10.26907/1562-5419-2024-27-4-578-597. (In Russian)
- 4. Levenchuk A. *Sistemnoe myshlenie* [Systems Thinking]. Vol. 1. Yekaterinburg, Ridero, 2024. 412 p. (In Russian)
- 5. Aarseth E. Computer game studies, year one. *Game Stud.*, 2001, vol. 1, no. 1.
- Juul J. Half-Real: Video Games between Real Rules and Fictional Worlds. Cambridge, MA, MIT Press, 2005. 248 p.
- Mateas M., Stern A. Structuring content in the *façade* interactive drama architecture. *Proc. Artif. Intell. Interact. Digital Entertainment Conf.*, 2005, vol. 1, no. 1, pp. 93–98. https://doi.org/10.1609/aiide.v1i1.18722.
- Nelson M.J., Mateas M. Towards a formal game grammar. Proc. 6th Int. Conf. on Cognitive Modeling, 2008, pp. 137–143.
- Zagal J.P., Mateas M., Fernández-Vara C., Hochhalter B., Lichti N. Towards an ontological language for game analysis. Proc. DiGRA 2005 Conf.: Changing Views – Worlds in Play. Tampere, DiGRA, 2005, pp. 1–13.
- 10. Cook D. The chemistry of game design. *Game Developer*. 2007. URL: https://www.gamedeveloper.com/design/the-chemistry-of-game-design.
- 11. Björk S., Holopainen J. *Patterns in Game Design*. Ser.: Game Development Series. Hingham, MA, Charles River Media, 2005. xvii, 423 p.
- Brogi A., Canciani A., Soldani J., Wang P. A Petri net-nased approach to model and analyze the management of cloud applications. In: Koutny M., Desel J., Kleijn J. (Eds.) *Transactions on Petri Nets and Other Models of Concurrency XI*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Berlin, Heidelberg, Springer, 2016, pp. 28–48. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53401-4 2.
- 13. Grünvogel S.M. Formal models and game design. Game Stud., 2005, vol. 5, no. 1.
- Rakhmankulova V., Kugurakova V. Developing an online tool for balancing video games. Proc. Int. Conf. on Simplicity and Complexity in SMART Automatics and Energy Systems (SMART-SYSTEMS), 2024, pp. 1–6.
- Pnueli A. The temporal logic of programs. Proc. 18th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science (sfcs 1977). Providence, RI, IEEE, 1977, pp. 46–57. https://doi.org/10.1109/SFCS.1977.32.
- Ross S.M. Introduction to Probability Models. 12th ed. Acad. Press, 2019. 842 p. https://doi.org/10.1016/C2017-0-01324-1.
- Hansson H., Jonsson B. A logic for reasoning about time and reliability. Formal Aspects Comput., 1994, vol. 6, no. 5, pp. 512–535. https://doi.org/10.1007/BF01211866.
- Apperley T.H. Genre and game studies: Toward a critical approach to video game genres. Simul. Gaming, 2006, vol. 37, no. 1, pp. 6–23. https://doi.org/10.1177/1046878105282278.
- Nilsson N.J. Probabilistic logic. Artif. Intell., 1986, vol. 28, no. 1, pp. 71–87. https://doi.org/10.1016/0004-3702(86)90031-7.
- Fagin R., Halpern J.Y., Megiddo N. A logic for reasoning about probabilities. *Inf. Comput.*, 1990, vol. 87, nos. 1–2, pp. 78–128. https://doi.org/10.1016/0890-5401(90)90060-U.
- Sistla A.P., Clarke E.M. The complexity of propositional linear temporal logics. J. ACM, 1985, vol. 32, no. 3, pp. 733–749. https://doi.org/10.1145/3828.3837.
- Papadimitriou C.H. Games against nature. J. Comput. Syst. Sci., 1985, vol. 31, no. 2, pp. 288–301. https://doi.org/10.1016/0022-0000(85)90045-5.

- Biere A., Cimatti A., Clarke E., Zhu Y. Symbolic model checking without BDDs. Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'99): Proc. 5th Int. Conf. Cleaveland W.R. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1579. Berlin, Heidelberg, Springer, 1999, pp. 193–207. https://doi.org/10.1007/3-540-49059-0 14.
- Biere A., Heljanko K., Junttila T., Latvala T., Schuppan V. Linear encodings of bounded LTL model checking. *Logical Methods Comput. Sci.*, 2006, vol. 2, no. 5, pp. 1–64. https://doi.org/10.2168/LMCS-2(5:5)2006.
- Henriques D., Martins J.G., Zuliani P., Platzer A., Clarke E.M. Statistical model checking for Markov decision processes. Proc. 2012 9th Int. Conf. on Quantitative Evaluation of Systems. London, IEEE, 2012, pp. 84–93. https://doi.org/10.1109/QEST.2012.19.

Для цитирования: Кугуракова В.В. Формальный подход к пространственновременному моделированию игровых систем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 532–554. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.532-554.

For citation: Kugurakova V.V. A formal approach to spatio-temporal modeling of game systems. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 532–554. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.532-554. (In Russian)

554

2024, Т. 166, кн. 4 С. 555–565 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 536.21

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.555-565

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В АНИЗОТРОПНЫХ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО НАГРЕВА

Е.Л. Кузнецова, А.А. Орехов, В.Ф. Формалев

Московский авиационный институт, г. Москва, 125993, Россия

Аннотация

Проведено математическое моделирование тепломассопереноса в анизотропных теплозащитных композиционных материалах (ТКМ) в условиях фазовых превращений связующих ТКМ с образованием пористого коксового остатка и пиролизных газов, фильтрующихся к наружной границе сквозь пористый остаток. В математической модели использованы идентифицированные ранее законы разложения связующих и нелинейной фильтрации, выведенные для произвольных ТКМ. Определены скорость движения и координаты двумерной зоны разложения связующих ТКМ и двумерных областей пористо-газового остатка и первоначальной фазы, разделенных нестационарно подвижной зоной разложения связующих. Во вновь образованной пористо-газовой области решена двумерная нестационарная задача анизотропной теплопроводности с учетом нелинейной анизотропной фильтрации газовой компоненты, а в первоначальной области, не затронутой разложением связующих, – двумерная нестационарная задача анизотропной теплопроводности. Массовая и линейная скорости движения зоны разложения (пиролиза) связующего определены из условий Стефана непрерывности тепловых потоков и температур. Для решения всей комплексной модели использован разработанный ранее экономичный абсолютно устойчивый метод переменных направлений с экстраполяцией. Получены и обсуждены новые результаты.

Ключевые слова: анизотропия, нелинейная фильтрация, тепловой поток, температура, тензор теплопроводности, тензор проницаемости, подвижная зона пиролиза, уравнение анизотропной теплопроводности и фильтрации, численный метод

Введение

Теплозащитные композиционные материалы (ТКМ) состоят из тонковолокнистых нитей наполнителей (асбестовых, стеклянных, углеродных и др.), пропитанных низкотемпературными органическими смолами, разлагающихся (подвергающихся пиролизу) при температурах ~ 600–900 К с образованием пористого коксового остатка и пиролизных газов, фильтрующихся через коксовый остаток под действием давления торможения газов в зоне пиролиза. В результате теплота при аэродинамическом нагреве высокоскоростных летательных аппаратов (ЛА) отводится за счет следующих факторов: теплопроводности внутрь конструкции, поглощения теплоемкостью, эндотермических реакций разложения связующих с образованием пиролизных газов и пористого остатка, фильтрации, вдува пиролизных газов в высокотемпературный пограничный слой, излучения от наружной стенки.

Математическое моделирование всех перечисленных физико-химических процессов в ТКМ при аэродинамическом нагреве частично было рассмотрено в [1]. Закон разложения связующих ТКМ, обходящий трудно формализуемую химическую кинетику разложения связующих, а потому пригодный для большинства ТКМ, разработан в [2], закон нелинейной анизотропной фильтрации пиролизных газов через пористый остаток идентифицирован в [3]. Теплопроводность в изотропных телах была исследована также в работах [4–10], а в анизотропных телах в различных постановках – в работах авторов [11–15]. Экономичные абсолютно устойчивые методы численного решения задач анизотропной теплопроводности предложены в [16,17]. Такие задачи особенно важны при создании перспективных теплозащитных композиционных материалов для ракетно-космической техники [18,19].

В настоящей работе рассмотрены математическое моделирование и численные решения задач тепломассопереноса в анизотропных теплозащитных композиционных материалах в условиях фазовых превращений связующих ТКМ с образованием пиролизных газов и пористого остатка, через который газы фильтруются к внешней границе тела, вдуваются в пограничный слой, чем уменьшаются конвективные тепловые потоки к телу.

1. Постановка задачи

В прямоугольной области $l_1 \times l_2$ рассмотрим следующую задачу анизотропного тепломассопереноса в декартовой системе координат xOy.

1. Граничное условие на внешней границе w тела в виде баланса конвективнокондуктивных, лучистых тепловых потоков и тепловых потоков, поглощаемых за счет возможного уноса массы с наружной границы с тепловым эндотермическим эффектом (эффективной энтальпией материала при уносе массы) Q^* :

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w \left(I_e - I_w\right) - \operatorname{Agrad} T|_w - \varepsilon_w \sigma T_w^4 - \left(\Pi c_p \rho V\right)_g T_w = = \dot{m} Q^* \left(I_e\right) \eta \left(T_w - T^*\right), \quad (x, y) \in w, \quad t > 0,$$
(1)

где $(\alpha/c_p)_w$ определяется формулой [20]

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_{w0} - \beta(\rho_g V_g)_w, \quad \beta = 0.56 \left(\frac{M_e}{\bar{M}}\right)^{0.29} \left(\frac{I_w}{I_e}\right), \tag{2}$$

здесь $(\alpha/c_p)_{w0}$ – относительный коэффициент теплоотдачи при отсутствии вдува пиролизных газов на наружной границе тела w.

2. Граничное условие на внутренней свободной границе тела w2 в виде баланса конвективно-кондуктивных и лучистых тепловых потоков

$$\alpha_{w2} \left(T_{e2} - T_{w2} \right) + \Lambda_0 \operatorname{grad} T |_{w2} - \varepsilon_{w2} \sigma T_{w2}^4 = 0,$$

$$(x, y) \in w2, \quad t > 0.$$
(3)

3. Уравнение анизотропной теплопроводности в пористом коксовом остатке $(x,y)\in\Omega_{kc}$ с учетом фильтрации

$$c_{eff}(T) \cdot \rho_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\Lambda_{eff} \operatorname{grad} T \right) - \Pi (c_p \rho V)_g \operatorname{grad} T, \quad (x, y) \in \Omega_{kc}, \quad t > t_{fn}^{**}, \quad (4)$$

где индекс kc относится к области коксового остатка, а g – к пиролизным газам.

4. Уравнение энергии в зоне разложения связующего $(x,y)\in\Omega_n$ со средней линие
й f_{w1}

$$c_{eff}(T) \ \rho_{eff}(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\Lambda_{eff} \operatorname{grad} T \right) - \dot{\rho} \left(x, y, t \right) \cdot Q^{**} - \Pi^{**} \left(x, y \right) \left(c_p \rho V \right)_g \operatorname{grad} T, \quad (x, y) \in \Omega_n, \quad t > t_{st}^{**}.$$
(5)

5. Закон изменения плотности в зоне разложения связующего $y \in \left[f_{st}^{**}, f_{fn}^{**}\right]$ идентифицирован в [2]:

$$\rho\left(|r|,t\right) = \rho_{st} \frac{t_k}{|r|/|\dot{r}_{cp}| - t} \exp\left\{ \left(\frac{|r|}{|r_{st}^{**}|} \ln\left(|\bar{r}_{st}^{**}|\right)\right) \left[\frac{|r_{st}^{**}|}{|r_{fn}^{**}|} \frac{\ln\left(\frac{\rho_{fn}}{\rho_{st}} |\bar{r}_{st}^{**}|\right)}{\ln\left(|\bar{r}_{st}^{**}|\right)}\right]^T \right\}.$$
 (6)

6. Условия непрерывности тепловых потоков и температур на средней границе $y = f^{**}(x) = (f^{**}_{st}(x) + f^{**}_{fn}(x))/2$ зоны пиролиза (условия Стефана):

$$\Lambda \left(T_{st}^{**} \right) \operatorname{grad} T|_{f_{st}^{**}+0} - \Lambda \left(T_{st}^{**} \right) \operatorname{grad} T|_{f_{st}^{**}-0} = \dot{m}_{st}^{**}Q^{**};$$

$$T|_{f_{st}^{**}+0} = T|_{f_{st}^{**}-0} = T^{**}, \quad (x,y) \in f_{st}^{**} \left(x, y, t \right), \quad t > t_{st}^{**}.$$

$$(7)$$

7. Уравнение неразрывности пиролизных газов в пористом коксо-газовом остатке:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_g V_g\right) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > t_{fn}^{**}.$$
(8)

8. Уравнение состояния пиролизных газов

$$\rho_g = \frac{p_g M_g}{R_g T}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > t_{fn}^{**}.$$
(9)

9. Закон нелинейной фильтрации [3]

$$\mathbf{V} = -\frac{K}{\mu_g \left(T\right) \left(1 + \Pi \operatorname{Re}_L\right)} \operatorname{grad} p.$$
(10)

10. Давление на наружной свободной границе $F^*(x, y, t)$ и давление и плотность торможения пиролизных газов в зоне пиролиза:

$$p(x,y)|_{F^{*}(x,y,t)} = p_{w}, (x,y) \in F^{*}(x,y,t);$$

$$(p_{0}^{**})_{g} = \frac{(\rho_{0}^{**})_{g} \cdot R_{g} \cdot T_{fn}^{**}}{M_{g}},$$

$$[\rho_{0}^{**}(t)]_{g} = \int_{r_{st}^{**}}^{r_{fn}^{**}} \Gamma \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho - \rho\left(r,t\right)\right] dr.$$
(11)

В соотношениях (1)–(11) введены следующие обозначения: $(\alpha/c_p)_w$ – относительный коэффициент теплоотдачи; I_e, I_w, T, V, Π, Q^* – энтальпии пограничного слоя и стенки, температура, скорость фильтрации, пористость, теплота уноса массы соответственно; $\Lambda, \varepsilon, c_p, \rho, \dot{m}$ – тензор теплопроводности, степень черноты, теплоемкость при постоянном давлении, плотность, массовая скорость уноса массы соответственно; β – коэффициент вдува; V – скорость набегающего потока;
η – функция Хевисайда; **г** – радиус-вектор точки в зоне пиролиза; t – время; \dot{m}^{**}, Q^{**} – массовая скорость и теплота разложения связующего ТКМ; \bar{M}_g, R_g – средняя молярная масса и газовая постоянная; K, μ_g , Re_L и p, Γ – тензор проницаемости, динамическая вязкость, фильтрационное число Рейнольдса, давление и коэффициент газации. Индексы e и w соответствуют пограничному слою и стенке, а eff, st и fn означают эффективный, конец и начало; g, *, **, cp и kc – газ, граница уноса массы, зона пиролиза, средняя и коксовый остаток соответственно; 0 – параметры торможения в зоне пиролиза, связующего ТКМ.

2. Метод решения

Комплексная проблема (1)–(11) решалась численно с использованием метода переменных направлений с экстраполяцией МПНЭ, подробно изложенного и обоснованного в [1].

1. До начала фазовых превращений температурное поле в ТКМ определялось как в едином материале.

2. Если температура наружной границы превысит температуру разложения связующего T^{**} , то интерполяцией находились границы области начала $y = f_{st}^{**}(x)$ и окончания $y = f_{fn}^{**}(x)$ разложения (пиролиза) связующего ТКМ с образованием пористого коксового остатка и пиролизных газов, фильтрующихся к наружной границе $\left(f_{st}^{**} < f_{fn}^{**}\right)$.

3. На средней линии этой зоны $f_{w1} = \left(f_{st}^{**} + f_{fn}^{**}\right)/2$ с температурой $\bar{T}^{**} =$

 $(T_{st}^{**} + T_{fn}^{**})/2$ решалась задача типа Стефана, из решения которой определялись массовая $\dot{m}^{**}(t)$ и линейная $\dot{y}^{**}(t)$ скорости движения границы и всей зоны пиролиза, а по ним – новая граница, разделяющая пористо-газовую область и область, незатронутую разложением.

 В пористой области решалась задача анизотропной фильтрации пиролизных газов со вдувом их в пограничный слой.

5. В пористой области решались задача анизотропной теплопроводности с учетом неизотермической анизотропной фильтрации и подвижной границы $y = f^{**}(x)$, а также задача анизотропной теплопроводности в области, незатронутой разложением связующего.

6. Решалась задача Стефана на подвижной границе w1.

7. Результатом были нестационарные двумерные температурные поля в обеих областях и двумерная подвижная граница $y = f^{**}(x)$.

3. Результаты численного моделирования

На рис. 1 и 2 приведены некоторые результаты расчетов тепломассопереноса по математической модели (1)–(11) в прямоугольной области $l_1 \times l_2$.

Для расчетов были приняты следующие входные данные: $l_1 = 0.15$ м; $l_2 = 0.05$ м; $T_0 = 300$ K=const; $T_{wi} = 300$ K, i = 2, 3, 4; $c^{(1)} = 1$ кДж/кг·К; $\rho^{(1)} = 2500$ кг/м³; $c^{(2)} = 0.5$ кДж/кг·К; $\rho^{(2)} = 2500$ кг/м³; $T^{**} = 800$ K; $Q^{**} = 1000$ Дж/кг; $\lambda_{\xi}^{(1)} = 1$ кВт/м·К; $\lambda_{\eta}^{(1)} = 0.5$ кВт/м·К; $\varphi = \pi/4$; $\lambda_{\xi}^{(2)} = \lambda_{\eta}^{(2)} = 1$ кВт/м·К, где индекс (2) относится к прореагировавшей фазе, а (1) – к исходной фазе.

Коэффициент теплоотдачи α_{w1} и температура пограничного слоя T_{e1} заданы в табл. 1.

Табл. 1





Рис. 1. Динамика движения подвижной границы фазовых превращений анизотропного ТКМ (a) и температурное поле (б)



Рис. 2. Динамика движения подвижной границы фазовых превращений анизотропного TKM (a) и температурное поле (б)

Здесь тензор теплопроводности имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} \end{pmatrix} = \Lambda,$$

 $\lambda_{xx} = \lambda_{\xi} \cos^2 \varphi + \lambda_{\eta} \sin^2 \varphi; \\ \lambda_{yy} = \lambda_{\xi} \sin^2 \varphi + \lambda_{\eta} \cos^2 \varphi; \\ \lambda_{xy} = \lambda_{yx} = (\lambda_{\xi} - \lambda_{\eta}) \sin \varphi \cos \varphi.$

559

На рис. 1 (а) показано температурное поле в конечный момент времени t = 10 с, а на рис. 1 (б) – динамика движения срединной линии y(x) зоны пиролиза связующего ТКМ. Из рисунка видно, что при симметричном относительно $x = l_1/2$ тепловом нагружении наблюдается существенная несимметрия температурного поля и границ фазовых превращений. Максимумы температурных краевых и минимумы подвижной границы фазовых превращений сдвигаются в направлении большего коэффициента тензора теплопроводности.

На рис. 2 приведены результаты решения задачи типа Стефана в анизотропном ТКМ в условиях, когда тепловой поток действует в точке $l_1/2$. При этом $\alpha_w = 5 \text{ kBr/m}^2 \cdot K$, $T_e = 10^4 \text{ K}$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.25\\ 0.25 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Интересно отметить, что не только минимумы температурного поля и максимумы подвижной границы сдвигаются в направлении большего компонента тензора теплопроводности, но и тот факт, что на больших глубинах температура на большей глубине становится выше температуры на меньшей глубине тела.

Заключение

Представлены математическая модель и метод численного решения двумерной нестационарной задачи тепломассопереноса в теплозащитных композиционных материалах (TKM) в условиях фазовых превращений связующих TKM с образованием пористого коксового остатка и газовой компоненты, фильтрующейся через пористый остаток к наружной границе со вдувом ее в пограничный слой. В пористо-газовой области решена задача анизотропной теплопроводности и анизотропной фильтрации. Определены скорости движения и координаты узкой зоны разложения связующего TKM на основе баланса, подводимых к зоне и отводимых от нее. Математическое моделирование проведено на основе разработанных ранее универсального закона разложения связующих TKM произвольных материалов и закона нелинейной анизотропной фильтрации. Получены многочисленные численные результаты относительно координат средней линии зоны пиролиза и нестационарных полей в пористо-газовой анизотропной области и в анизотропной области, незатронутой разложением связующего.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-19-00680, https://rscf.ru/project/23-19-00680.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. *Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л.* Тепломассоперенос в анизотропных телах при аэрогазодинамическом нагреве. М.: МАИ-ПРИНТ. 2010. 308 с.
- Kuznetsova E.L., Makarenko A.V. Nonlinear filtration of pyrolytic gases in thermal decomposition of heat-shielding composite binders // Russ. Eng. Res. 2023. V. 43, No 11. P. 1430–1433. https://doi.org/10.3103/S1068798X23110187.
- Кузнецова Е.Л. Метод определения плотности теплозащитных композиционных материалов в зоне термического разложения их связующих при высоких температурах // МКМК. 2023. Т. 29, № 3. С. 382–389. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.05.

- Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, № 4. С. 404–414. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414.
- Fedotenkov G.V., Rabinskiy L.N., Lurie S.A. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows // Symmetry. 2022. V. 14, No 9. Art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.
- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution // Symmetry. 2022.
 V. 14, No 9. Art. 650. https://doi.org/10.3390/sym14040650.
- Rabinskiy L.N., Tushavina O.V., Starovoitov E.I. Study of thermal effects of electromagnetic radiation on the environment from space rocket activity // INCAS Bull. 2020. V. 12. P. 141–148. https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.13.
- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 8. P. 1912–1919. https://doi.org/10.1134/S1995080221080229.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized unsteady thermal conductivity in a half-space // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 10. P. 4429–4437. https://doi.org/10.1134/S1995080223100086.
- Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The study of the temperature field propagation in a nonlinear anisotropic space with the relaxation time of the heat flux // AIP Conf. Proc. 2023. V. 2910. Art. 020204. https://doi.org/10.1063/5.0167863.
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat and mass transfer in composites with thermal waves due to phase transitions // Russ. Eng. Res. 2024. V. 44, No 5. P. 701–704. https://doi.org/10.3103/S1068798X24700898.
- Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical modeling of heat transfer in anisotropic half-space based on the generalized parabolic wave heat transfer equation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1842–1849. https://doi.org/10.1134/S1995080222100110.
- 14. Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Моделирование тепломассопереноса в теплозащитных композиционных материалах в условиях фазовых превращений при высоких температурах // ИФЖ. 2024. Т. 97, № 2. С. 404–412. Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A.
- Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2019. № 5. С. 35–49. http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49.
- 16. Кузнецова Е.Л. Разработка математического аппарата численно-аналитического решения уравнений со смешанными производными и его применение к математическому моделированию тепломассопереноса: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: МАИ, 2011. 36 с.
- Кузнецова Е.Л. Математическое моделирование тепломассопереноса в композиционных материалах при высокотемпературном нагреве в элементах ракетно-космической техники / под ред. В.Ф. Формалева. М.: МАИ, 2010. 160 с.
- Тушавина О.В., Егорова М.С. Задачи тепломассопереноса в химически реагирующих пограничных слоях на затупленных телах // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.матем. науки. 2023. Т. 165, № 3. С. 294–306. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.294-306.

- Tushavina O.V., Paleshkin A.V., Pronina P.F., Shemetova E.V. Modeling the thermal state of small spacecraft: Errors sue to incorrect assessment of the thermal environment // Russ. Eng. Res. 2023. V. 43, No 11. P. 1452–1456. https://doi.org/10.3103/S1068798X23110291.
- Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение. 1975. 624 с.

Поступила в редакцию 20.07.2024 Принята к публикации 4.10.2024

Кузнецова Екатерина Львовна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Математика»

Московский авиационный институт Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия E-mail: *lareyna@mail.ru* Орехов Александр Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Проектирование сложных технических систем» Московский авиационный институт Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия E-mail: *orekhovaa2@mai.ru* Формалев Владимир Федерович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и программирование» Московский авиационный институт Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия Е-mail: *formalev38@yandex.ru*

> ISSN 2541-7746 (Print) ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 555-565

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.555-565

Heat and Mass Transfer in Anisotropic Heat-Protective Composite Materials under Aerodynamic Heating

E.L. Kuznetsova*, A.A. Orekhov**, V.F. Formalev***

Moscow Aviation Institute, Moscow 125993 Russia

E-mail: *lareyna@mail.ru, **orekhovaa2@mai.ru, ***formalev38@yandex.ru

Received July 20, 2024; Accepted October 4, 2024

Abstract

This article presents a mathematical model of heat and mass transfer in anisotropic heatprotective composite materials (HPCM) during phase transformations of HPCM binders with the formation of a porous coke residue and pyrolysis gases filtering through the residue to the outer boundary. Using known binder decomposition and nonlinear filtration laws for random HPCMs, the model determines the velocity and coordinates of the two-dimensional HPCM binder decomposition zone, as well as the two-dimensional regions of the porous-gas residue and the initial phase, which are unsteadily separated by a moving zone of binder decomposition. In the newly formed porous-gas region, a two-dimensional unsteady problem of anisotropic heat conduction was solved taking into account nonlinear anisotropic gas filtering. In the initial region unaffected by the binder decomposition, a two-dimensional unsteady problem of anisotropic heat conduction was solved. The mass and linear velocities of the binder decomposition (pyrolysis) zone were calculated from Stefan conditions for heat flow and temperature continuity. The complex model was solved by the previously developed effective and absolutely stable method of alternating directions with extrapolation. New results were obtained and discussed.

Keywords: anisotropy, nonlinear filtration, heat flow, temperature, heat conductivity tensor, permeability tensor, moving pyrolysis zone, anisotropic heat conduction and filtration equation, numerical method

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00680, https://rscf.ru/project/23-19-00680).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Dynamics of the moving boundary of phase transformations of the anisotropic HPCM (a) and the associated temperature field (b).

Fig. 2. Dynamics of the moving boundary of phase transformations of the anisotropic HPCM (a) and the associated temperature field (b).

References

- 1. Formalev V.F., Kuznetsova E.L. *Teplomassoperenos v anizotropnykh telakh pri aerogazodinamicheskom nagreve* [Heat and Mass Transfer in Anisotropic Bodies under Aerodynamic Heating]. Moscow, MAI-PRINT, 2010. 308 p. (In Russian)
- Kuznetsova E.L., Makarenko A.V. Nonlinear filtration of pyrolytic gases in thermal decomposition of heat-shielding composite binders. *Russ. Eng. Res.*, 2023, vol. 43, no. 11, pp. 1430–1433. https://doi.org/10.3103/S1068798X23110187.
- Kuznetsova E.L. A method for the determination of the mass density of heat protective composite materials in the domain of thermal destruction of binding agents under high temperatures. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 382–389. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.03.05. (In Russian)
- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental solutions of the equations of classical and generalized heat conduction models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414.
- Fedotenkov G.V., Rabinskiy L.N., Lurie S.A. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows. Symmetry, 2022, vol. 14, no. 9, art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.

- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 4, art. 650. https://doi.org/10.3390/sym14040650.
- Rabinskiy L.N., Tushavina O.V., Starovoitov E.I. Study of thermal effects of electromagnetic radiation on the environment from space rocket activity. *INCAS Bull.*, 2020, vol. 12, pp. 141–148. https://doi.org/10.13111/2066-8201.2020.12.S.13.
- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1912–1919. https://doi.org/10.1134/S1995080221080229.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized unsteady thermal conductivity in a half-space. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4429–4437. https://doi.org/10.1134/S1995080223100086.
- Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The study of the temperature field propagation in a nonlinear anisotropic space with the relaxation time of the heat flux. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2910, art. 020204. https://doi.org/10.1063/5.0167863.
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat and mass transfer in composites with thermal waves due to phase transitions. *Russ. Eng. Res.*, 2024, vol. 44, no. 5, pp. 701–704. https://doi.org/10.3103/S1068798X24700898.
- Formalev V.F., Garibyan B.A., Orekhov A.A. Mathematical modeling of heat transfer in anisotropic half-space based on the generalized parabolic wave heat transfer equation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1842–1849. https://doi.org/10.1134/S1995080222100110.
- Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Modeling of heat and mass transfer in thermoprotective composite materials under conditions of phase transformations at high temperatures. J. Eng. Phys. Thermophys., 2024, vol. 97, no. 2, pp. 397–405. https://doi.org/10.1007/s10891-024-02905-2.
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Est. Nauki*, 2019, no. 5, pp. 35–49. http://dx.doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49. (In Russian)
- 16. Kuznetsova E.L. Developing mathematical methods for numerical and analytical solution of equations with mixed derivatives and using them for heat and mass transfer modeling. *Extended Abstract of Doct. Phys.-Math. Sci. Diss.* Moscow, MAI, 2011. 36 p. (In Russian)
- Kuznetsova E.L. Matematicheskoe modelirovanie teplomassoperenosa v kompozitsionnykh materialakh pri vysokotemperaturnom nagreve v elementakh raketno-kosmicheskoi tekhniki [Mathematical Modeling of Heat and Mass Transfer in Composite Materials at High-Temperature Heating in the Elements of Rocket and Space Technique]. Formalev V.F. (Ed.). Moscow, MAI, 2010. 160 p. (In Russian)
- Tushavina O.V., Egorova M.S. Problems of heat and mass transfer in chemically reacting boundary layers on blunted bodies. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2023, vol. 165, no. 3, pp. 294–306. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.294-306.
- Tushavina O.V., Paleshkin A.V., Pronina P.F., Shemetova E.V. Modeling the thermal state of small spacecraft: Errors sue to incorrect assessment of the thermal environment. *Russ. Eng. Res.*, 2023, vol. 43, no. 11, pp. 1452–1456. https://doi.org/10.3103/S1068798X23110291.

20. Avduevskii V.S., Galitseiskii B.M., Glebov G.A., et al. Osnovy teploperedachi v aviatsionnoi i raketno-kosmicheskoi tekhnike [Fundamentals of Heat Transfer in Aviation and Space Engineering]. Moscow, Mashinostroenie, 1975. 624 p. (In Russian)

Для цитирования: Кузнецова Е.Л., Орехов А.А., Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных теплозащитных композиционных материалах в условиях аэродинамического нагрева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. / Т. 166, кн. 4. С. 555–565. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.555-565.

For citation: Kuznetsova E.L., Orekhov A.A., Formalev V.F. Heat and mass transfer in anisotropic heat-protective composite materials under aerodynamic heating. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 555–565. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.555-565. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 566–579 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.374

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.566-579

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДИСКЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Е.А. Лямина¹, Н.В. Каленова²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, 119526, Россия

² Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия

Аннотация

Построено общее решение для распределения напряжений в тонком диске гиперболического профиля под действием внешнего и внутреннего давлений, находящемся в установившемся температурном поле, в условиях плосконапряженного состояния. Упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука. В пластической области действует условие пластичности Мизеса. Краевая задача является статически определимой. Поэтому для определения поля напряжений не требуется учет пластического течения. Общее решение применено для расчета напряжений в диске, нагруженном внешним давлением и температурным полем. Показано влияние параметра, характеризующего профиль диска, и величины внешнего давления на развитие пластической области и распределение напряжений.

Ключевые слова: диск гиперболического профиля, плосконапряженное состояние, условие Мизеса, термомеханическое нагружение, анализ напряжений

Введение

Расчет тонких дисков, подверженных различным нагрузкам, является одной из классических задач теорий упругости и пластичности [1,2]. При этом упругопластические решения получены в основном с использованием условия пластичности Треска или других условий пластичности, которые представляются линейными функциями главных напряжений [3–7]. Применение таких условий пластичности значительно упрощает исследование. В настоящей работе рассмотрены упругопластические диски, подверженные действию внутреннего и внешнего давлений, а также установившегося температурного поля, материал которых подчиняется условию пластичности Мизеса. Предполагается, что профиль диска образован гиперболами. В случае дисков постоянной толщины, находящихся под действием однородного температурного поля, общее решение такой краевой задачи было получено в [8]. В частности, в этой работе было показано, что построенные решения проявляют качественные особенности, которые зависят от входных данных. Кроме того, численные решения краевых задач в условиях плосконапряженного состояния встречают сложности, которые не проявляются при других условиях деформирования [9]. В связи с этим представляет интерес нахождение аналитических и полуаналитических решений, обобщающих решения, представленные в [8].

Широкий класс тонких дисков составляют диски, профиль которых представляется гиперболами [10–18]. В [10] найдено распределение напряжений во вращающемся полом диске, отверстие которого занято включением. В [11] определено распределение напряжений во вращающемся диске, подверженном действию температурного поля. Параметрический анализ упругого решения для ортотропного вращающегося диска выполнен в [12]. В [13] найдено распределение напряжений в функционально-градиентном диске, подверженном действию температурного поля. Численный метод для оценки величины касательных напряжений, вызванных угловым ускорением во вращающихся дисках, применен в [14]. В [15] выполнен анализ упругих вращающихся дисков переменной толщины, включая диски гиперболического профиля. Распределение напряжений в диске гиперболического профиля в предположении изменяющейся вдоль радиуса плотности получено в [16]. В [17] это решение обобщено на диск, вращающийся на валу. В [18] представлены аналитические аппроксимации для предельной угловой скорости, при которой весь диск находится в упругом состоянии.

В настоящей работе решение [8] обобщено на диски такого профиля. Общее решение построено для произвольных значений внутреннего и внешнего давлений в предположении, что весь диск при этих значениях давлений является упругим. Повышение температуры на внутреннем радиусе диска приводит к возникновению пластической области. Общее решение использовано для расчёта напряжений в диске, подверженном только внешнему давлению и температурному полю. Определена область существования решения с одной пластической зоной, что является качественным отличием от соответствующего решения для диска постоянной толщины.

1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим тонкий полый диск с внешним радиусом b_0 и внутренним радиусом a_0 в условиях плосконапряженного состояния. Толщина диска изменяется вдоль радиуса в соответствие с уравнением

$$h = h_0 \left(\frac{r}{b_0}\right)^{-n},\tag{1}$$

где n – постоянная, h_0 – толщина диска при $r = b_0$. К внешнему и внутреннему радиусам диска приложены давления S_b и S_a соответственно (рис. 1).



Рис. 1. Профиль диска и приложенные усилия

Температуру диска в начальном состоянии обозначим T_0 . Температура на внутренней поверхности диска медленно повышается, вызывая дополнительное нагружение диска. Распределение температуры по радиусу предполагается установившимся (т. е. пренебрегаем производной температуры по времени, что допустимо при медленном повышении температуры). Таким образом,

$$T = T_0 + (T_a - T_0) \frac{\ln(r/b_0)}{\ln(a_0/b_0)},$$
(2)

где T_a – температура внутренней поверхности диска. Величины S_b и S_a выберем так, чтобы весь диск был упругим в начальный момент времени и оставался упругим, пока температура внутреннего радиуса диска находится в интервале $T_0 \leq T_a \leq T_e$. Величина T_e должна быть определена в ходе решения краевой задачи. На этой стадии процесса нагружения действуют уравнения Дюамеля – Неймана. В полярной системе координат (r, θ) , центр которой совпадает с центром диска, решение не зависит от полярного угла, и эти уравнения имеют вид

$$\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T = \frac{\sigma_r - \nu \sigma_\theta}{E} + \gamma \left(T - T_0 \right), \quad \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T = \frac{\sigma_\theta - \nu \sigma_r}{E} + \gamma \left(T - T_0 \right). \tag{3}$$

Здесь σ_r – радиальное напряжение, σ_{θ} – окружное напряжение, ε_r^e – упругая составляющая радиальной деформации, ε_r^T – температурная составляющая радиальной деформации, ε_{θ}^e – упругая составляющая окружной деформации, ε_{θ}^T – температурная составляющая окружной деформации, ε_{θ}^T – температурная составляющая окружной деформации, ε_{θ} – температурная составляющая окружной деформации, ε_{θ} – коэффициент Пуассона, γ – коэффициент линейного термического расширения. При $T_a = T_e$ на некотором радиусе диска, который должен определяться из решения, выполняется условие пластичности Мизеса, в рассматриваемом случае имеющее форму

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_0^2, \tag{4}$$

где σ_0 – предел пластичности при одноосном растяжении. При $T_a > T_e$ диск находится в упругопластическом состоянии. Уравнения (3) выполняются в упругой области. Уравнения для деформаций в пластической области для определения поля напряжений не требуются. На всех стадиях процесса должны выполняться уравнение равновесия [10]

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + (1-n)\,\sigma_r - \sigma_\theta = 0 \tag{5}$$

и уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial \left(r\varepsilon_{\theta}\right)}{\partial r} - \varepsilon_{r} = 0. \tag{6}$$

Здесь ε_r – полная радиальная деформация, ε_{θ} – полная окружная деформация. Краевые условия имеют вид

$$\sigma_r = -S_a \tag{7}$$

при $r = a_0$ и

$$\sigma_r = -S_b \tag{8}$$

при $r = b_0$.

Целесообразно ввести следующие безразмерные величины:

$$\tau = \frac{T}{T_0}, \quad \tau_a = \frac{T_a}{T_0}, \quad a = \frac{a_0}{b_0}, \quad \rho = \frac{r}{b_0},$$

$$s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad s_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad s_b = \frac{S_b}{\sigma_0}, \quad s_a = \frac{S_a}{\sigma_0},$$

$$k = \frac{\sigma_0}{E}, \quad Q = \frac{\gamma T_0 (\tau_a - 1)}{k \ln a}.$$
(9)

Тогда уравнение (3) после исключения Т с помощью (2) примет вид

$$\frac{\varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T}{k} = s_r - \nu s_\theta + Q \ln \rho, \quad \frac{\varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T}{k} = s_\theta - \nu s_r + Q \ln \rho.$$
(10)

Уравнения (5) и (6) примут вид

$$\rho \frac{\partial s_r}{\partial \rho} + (1-n) s_r - s_\theta = 0, \quad \frac{\partial \left(\rho \varepsilon_\theta\right)}{\partial \rho} - \varepsilon_r = 0.$$
(11)

Условие пластичности (4) перепишем как

$$s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta = 1.$$
 (12)

Краевые условия (7) и (8) преобразуются к виду

$$s_r = -s_a \tag{13}$$

при $\rho = a$ и

$$s_r = -s_b \tag{14}$$

при $\rho = 1$.

2. Общее решение

При $T_0 \leq T_a \leq T_e$ весь диск находится в упругом состоянии. Поэтому $\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^T$ и $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^T$. Подставив (10) во второе уравнение в (11), получим

$$\rho k \left(\frac{\partial s_{\theta}}{\partial \rho} - \nu \frac{\partial s_r}{\partial \rho} \right) + kQ = (1 + \nu) \left(s_r - s_{\theta} \right).$$
(15)

Первое уравнение в (11) и (15) составляют систему линейных дифференциальных уравнений для определения s_r и s_{θ} . Общее решение этой системы имеет вид

$$s_{r} = C_{1}\rho^{\alpha} + C_{2}\rho^{\beta} + \frac{Q}{n(1+\nu)},$$

$$s_{\theta} = C_{1}(1+\alpha-n)\rho^{\alpha} + C_{2}(1+\beta-n)\rho^{\beta} + \frac{Q(1-n)}{n(1+\nu)}.$$
(16)

Здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, а показатели степени определяются как

$$\alpha = \frac{n - 2 + \sqrt{(2 - n)^2 + 4n(1 + \nu)}}{2}, \quad \beta = \frac{n - 2 - \sqrt{(2 - n)^2 + 4n(1 + \nu)}}{2}.$$
 (17)

Подставив краевые условия (13) и (14) в (16), найдем

$$C_{1} = \frac{(a^{\beta} - 1)Q + n(n+1)(s_{b}a^{\beta} - s_{a})}{n(n+1)(a^{\alpha} - a^{\beta})}, \quad C_{2} = \frac{(1 - a^{\alpha})Q + n(n+1)(s_{a} - s_{b}a^{\alpha})}{n(n+1)(a^{\alpha} - a^{\beta})}.$$
(18)

Уравнения (16) и (18) позволяют найти распределение напряжений по радиусу. Подставив эти напряжения в условие пластичности (12), можно определить величину Q, соответствующую началу пластического течения, и радиус, на котором возникает пластическое течение. Величина T_e определится из (9).

При $T > T_e$ имеются упругая и пластическая области. Решение (16) имеет силу в упругой области. Однако C_1 и C_2 не определяются из (18).

Рассмотрим пластическую область. Условие пластичности (12) удовлетворим подстановкой

$$s_r = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\psi, \quad s_\theta = -\frac{\sin\psi}{\sqrt{3}} - \cos\psi.$$
⁽¹⁹⁾

Здесь ψ – новая искомая функция. Подставив (19) в первое уравнение в (11), получим

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{2\rho}{\sqrt{3} + [1 - 2(1 - n)]\tan\psi}.$$
(20)

Интегрирование этого уравнения дает

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi - \psi_0)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi + (2n - 1)\sin\psi}{\sqrt{3}\cos\psi_0 + (2n - 1)\sin\psi_0}\right]^t,\tag{21}$$

где ho_0 – значение ho при $\psi = \psi_0$ и

$$t = \frac{2n-1}{2\left(1-n+n^2\right)}.$$
(22)

Пусть ρ_c – радиус упругопластической границы,
а ψ_c – соответствующая величина $\psi.$ Тогда из (21) следует

$$\frac{\rho_c}{\rho_0} = \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi - \psi_0)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi_c + (2n - 1)\sin\psi_c}{\sqrt{3}\cos\psi_0 + (2n - 1)\sin\psi_0}\right]^t.$$
(23)

Радиальное и окружное напряжения должны быть непрерывны на упругопластической границе. Использовав (16) и (19), эти условия выразим как

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\psi_{c} = C_{1}\rho_{c}^{\alpha} + C_{2}\rho_{c}^{\beta} + \frac{Q}{n(1+\nu)},$$

$$-\frac{\sin\psi_{c}}{\sqrt{3}} - \cos\psi_{c} = C_{1}(1+\alpha-n)\rho_{c}^{\alpha} + C_{2}(1+\beta-n)\rho_{c}^{\beta} + \frac{Q(1-n)}{n(1+\nu)}.$$
(24)

Решив эту систему относительно C_1 и C_2 , получим

$$C_{1} = \left[\frac{(2n-2\beta-1)}{\sqrt{3}}\sin\psi_{c} + \cos\psi_{c} - \frac{Q\beta}{n(1+\nu)}\right]\frac{\rho_{c}^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)},$$

$$C_{2} = \left[\frac{(2n-2\alpha-1)}{\sqrt{3}}\sin\psi_{c} + \cos\psi_{c} - \frac{Q\alpha}{n(1+\nu)}\right]\frac{\rho_{c}^{-\beta}}{(\alpha-\beta)}.$$
(25)

Заключительная часть общего решения зависит от радиуса, на котором возникает пластическое течение. Если пластическая область примыкает к внутренней поверхности диска, то решение (16) должно удовлетворять краевому условию (14). Тогда

$$C_1 + C_2 + \frac{Q}{n(1+\nu)} = -s_b.$$
 (26)

С другой стороны, краевое условие (13) и (19) показывают, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\psi_a = s_a,\tag{27}$$

где ψ_a – значение ψ при $\rho = a$. Тогда, положив $\psi_0 = \psi_a$, преобразуем уравнения (21) и (23) к форме

$$\rho = a \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi - \psi_a)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi + (2n - 1)\sin\psi}{\sqrt{3}\cos\psi_a + (2n - 1)\sin\psi_a}\right]^t,\tag{28}$$

$$\rho_c = a \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi - \psi_a)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi_c + (2n - 1)\sin\psi_c}{\sqrt{3}\cos\psi_a + (2n - 1)\sin\psi_a}\right]^t.$$
(29)

Исключив C_1 и C_2 в уравнении (26) с помощью (25), найдем

$$\left[\frac{(2n-2\beta-1)}{\sqrt{3}}\sin\psi_c + \cos\psi_c - \frac{Q\beta}{n(1+\nu)}\right]\frac{\rho_c^{-\alpha}}{(\beta-\alpha)} + \left[\frac{(2n-2\alpha-1)}{\sqrt{3}}\sin\psi_c + \cos\psi_c - \frac{Q\alpha}{n(1+\nu)}\right]\frac{\rho_c^{-\beta}}{(\alpha-\beta)} + \frac{Q}{n(1+\nu)} = -s_b.$$
(30)

В этом уравнении Q – параметр нагружения, а величина ρ_c может быть выражена через ψ_c посредством (29). Полученное таким образом уравнение служит для определения зависимости ψ_c от Q. Эта зависимость позволяет вычислить ρ_c , C_1 и C_2 из (29) и (25). Таким образом, уравнения (16) дают распределение напряжений в упругой области, а уравнения (19) и (28) – в пластической. Распределение напряжений в пластической области представлено в параметрическом виде.

Если пластическая область примыкает к внешней поверхности диска, то решение (16) должно удовлетворять краевому условию (13). Тогда

$$C_1 a^{\alpha} + C_2 a^{\beta} + \frac{Q}{n(1+\nu)} = -s_a.$$
(31)

С другой стороны, краевые условия (14) и (19) показывают, что

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\psi_b = s_b,\tag{32}$$

где ψ_b – значение ψ пр
и $\rho=1.$ Тогда, положив $\psi_0=\psi_b,$ преобразуем уравнения (21)
и (23) к форме

$$\rho = \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi - \psi_b)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi + (2n - 1)\sin\psi}{\sqrt{3}\cos\psi_b + (2n - 1)\sin\psi_b}\right]^t,\tag{33}$$

$$\rho_c = \exp\left[\frac{\sqrt{3}\,(\psi_c - \psi_b)}{2\,(1 - n + n^2)}\right] \left[\frac{\sqrt{3}\cos\psi_c + (2n - 1)\sin\psi_c}{\sqrt{3}\cos\psi_b + (2n - 1)\sin\psi_b}\right]^t.$$
(34)

Уравнение (30) имеет силу. Таким образом, дальнейший ход решения, позволяющий определить распределение напряжений вдоль радиуса диска, такой же, как в предыдущем случае.

3. Приложение общего решения

Рассмотрим типичный случай нагружения $s_a=0.$ Из (27) следует, что $\psi_a=0.$ Уравнения (28) и (29) примут вид

$$\rho = a \exp\left[\frac{\sqrt{3}\psi}{2\left(1-n+n^2\right)}\right] \left[\cos\psi + \frac{(2n-1)\sin\psi}{\sqrt{3}}\right]^t,\tag{35}$$

$$\rho_c = a \exp\left[\frac{\sqrt{3}\psi_c}{2\left(1-n+n^2\right)}\right] \left[\cos\psi_c + \frac{(2n-1)\sin\psi_c}{\sqrt{3}}\right]^t.$$
(36)

Уравнение (30) после исключения ρ_c с помощью (36) решим численно. Численное решение для напряжений в упругой области подставим в (12) для проверки условия

$$s_r^2 + s_\theta^2 - s_r s_\theta \le 1.$$
(37)

Табл. 1

В отличие от диска постоянной толщины, это условие может нарушаться вблизи внешней поверхности диска при определенных значениях параметров. Величина Q, при которой неравенство в (37) обращается в равенство при $\rho = 1$, определяет интервал температуры $T_e \leq T_a \leq T_m$, внутри которого имеет место решение с одной пластической областью. Эта величина Q обозначена Q_m . Зависимость Q_m от n и s_b представлена в табл. 1 для a = 1/2 и $\nu = 0.3$. Соответствующая величина T_m определена из (9).

Зависимость Q_m от n и s_b

$s_b \setminus n$	1/2	1/3	1/4
0	-3.68	-3.7	-3.72
0.1	-4.12	-4.25	-4.33
0.2	-4.79	-5.03	-5.17
0.3	-5.77	-6.22	-6.48
0.4	-7.41	-8.39	-8.98

На рисунках 2–4 показана зависимость радиуса упругопластической границы от Q для нескольких значений s_b (n = 1/4 на рис. 2, n = 1/3 на рис. 3, n = 1/2 на рис. 4).



Рис. 2. Зависимость радиуса упругопластической границы от Q при n = 1/4



Рис. 3. Зависимость радиуса упругопластической границы от $\,Q\,$ при $\,n=1/3\,$

Левые концы линий соответствуют $Q = Q_m$. Из рисунков 2–4 видно, что величина s_b существенно влияет на положение упругопластической границы и величину Q_m . Распределение радиального и окружного напряжений по радиусу для нескольких значений n показано на рис. 5 и 6 соответственно.



Рис. 4. Зависимость радиуса упругопластической границы от Q при n=1/2

При этом были приняты следующие значения существенных параметров: a = 1/2, $\nu = 0.3$, Q = -5, $s_b = 0.3$. Из рис. 5 видно, что влияние величины nна радиальное напряжение пренебрежимо мало. Это объясняется тем, что значение этого напряжения на внутреннем и внешнем радиусах диска зафиксировано граничными условиями. Влияние величины n на окружное напряжение также не велико (рис. 6). Таким образом, при выбранных краевых условиях основное влияние величина n оказывает на положение упругопластической границы. Если выбранное значение Q меньше Q_m для всех значений n, представляющих интерес, то влияние профиля диска на распределение напряжений незначительно.



Рис. 5. Распределение радиального напряжения по радиусу пр
и $s_b=0.3,\;Q=-5$ и нескольких значенияхn



Рис. 6. Распределение окружного напряжения по радиусу при $s_b=0.3\,,\,Q=-5$ и нескольких значениях $\,n$

4. Диски другого профиля и вращающиеся диски

Преимуществом полученного решения является то, что оно является полуаналитическим. Возможность получения полуаналитического решения возникает благодаря выбранному профилю диска. В общем случае такое решение невозможно. В частности, уравнение равновесия для диска произвольного профиля принимает форму [19]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \sigma_r \frac{\partial \ln h}{\partial r} = 0.$$
(38)

Если зависимость толщины диска от радиуса представлена уравнением (1), то

$$\frac{\partial \ln h}{\partial r} = -\frac{n}{r},\tag{39}$$

и уравнение (38) совпадает с (5). В этом случае возможность получения полуаналитического решения возникает благодаря тому, что (5) сводится к уравнению с разделяющимися переменными (20). В общем случае правая сторона уравнения (39) является функцией r, которая не позволяет свести (38) к уравнению с разделяющимися переменными, и интегрирование этого уравнения может быть выполнено численно.

Аналогичная трудность с получением полуаналитического решения возникает и при расчете вращающихся дисков, включая диски постоянной толщины. В частности, для дисков постоянной толщины уравнение (5) должно быть заменено уравнением

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\vartheta \omega^2 r, \tag{40}$$

где ϑ – плотность, ω – угловая скорость диска. Правая часть этого уравнения является функцией r, которая не позволяет свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

Заключение

Построено общее полуаналитическое решение для определения поля напряжений в полом идеально упругопластическом диске, подверженном действию внешнего давления, внутреннего давления и установившегося температурного поля. Профиль диска представлен гиперболами. Пластические свойства материала диска характеризуются условием пластичности Мизеса. Общее решение применено для анализа диска, нагруженного внешним давлением и установившимся температурным полем. Пластическая область начинает формироваться вблизи внутренней поверхности диска. Однако, когда температура на внутренней поверхности диска достигает определенной величины, найденной из решения, возникает вторая пластическая область вблизи внешней поверхности диска. Выполнен параметрический анализ решения. Показано влияние параметров, входящих в формулировку краевой задачи, на положение упругопластической границы и распределение напряжений по радиусу диска.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00335).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
- Демьянушко И.В., Биргер И.А. Расчет на прочность вращающихся дисков. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
- Gamer U. The elastic-plastic shrink fit with supercritical interference // Acta Mech. 1986.
 V. 61, No 1. P. 1–14. https://doi.org/10.1007/BF01176358.

- 4. Gamer U., Kollmann F.G. A theory of rotating elasto-plastic shrink fits // Ing.-Arch. 1986. V. 56, No 4. P. 254–264. https://doi.org/10.1007/BF00542477.
- Parmaksizog`lu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient // Mech. Struct. Mach. 1998. V. 26, No 1. P. 9–20. https://doi.org/10.1080/08905459808945417.
- Eraslan A.N. Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions // Int. J. Mech. Sci. 2003. V. 45, No 4. P. 643–667. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00112-7.
- Prokudin A. Schmidt-Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion // J. Appl. Comput. Mech. 2021. V. 7, No 2. P. 858–869. https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704.
- Alexandrov S. Elastic/Plastic Discs under Plane Stress Conditions. Ser.: SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham: Springer, 2015. xi, 113 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14580-8.
- Kleiber M., Kowalczyk P. Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elastoviscoplasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 1996. V. 137, Nos 3–4. P. 395–409. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01072-9.
- Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion // Int. J. Mech. Sci. 1990. V. 40, No 1. P. 97–109. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00036-2.
- Calderale P.M., Vivio F., Vullo V. Thermal stresses of rotating hyperbolic disks as particular case of non-linearly variable thickness disks // J. Therm. Stresses. 2012. V. 35, No 10. P. 877–891. https://doi.org/10.1080/01495739.2012.720164.
- Motameni A. A parametric study on the elastic limit stresses of rotating variable thickness orthotropic disk // Arch. Appl. Mech. 2024. V. 94, No 3. P. 737–752. https://doi.org/10.1007/s00419-024-02548-y.
- Demir E., Callioglu H., Sayer M. Elasto-plastic thermal stress analysis of functionally graded hyperbolic discs // Struct. Eng. Mech. 2017. V. 62, No 5. P. 587–593. https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.5.587.
- Salehian M., Shahriari B., Yousefi M. Investigating the effect of angular acceleration of the rotating disk having variable thickness and density function on shear stress and tangential displacement // J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2019. V. 41, No 1. Art. 31. https://doi.org/10.1007/s40430-018-1523-8.
- Kutsal S.M., Coşkun S.B. Deformation analysis of variable thickness rotating disks using an improved Adomian decomposition technique // Int. J. Appl. Mech. 2020. V. 12, No 1. Art. 2050002. https://doi.org/10.1142/S1758825120500027.
- Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Analytical solution of hyperbolic deformable disk having variable density // Mech. Solids. 2021. V. 56, No 6. P. 1039–1046. https://doi.org/10.3103/S0025654421060194.
- Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Stress analysis in an isotropic hyperbolic rotating disk fitted with rigid shaft // Z. Angew. Math. Phys. 2022. V. 73, No 1. Art. 23. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01663-y.
- Kutsal S.M., Coşkun S.B. Analytical approximations for elastic limit angular velocities of rotating annular disks with hyperbolic thickness // J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 2023. V. 45, No 1. Art. 339. https://doi.org/10.1007/s40430-023-04132-x.
- Yella Reddy T., Srinath H. Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density // Int. J. Mech. Sci. 1974. V. 16, No 2. P. 85–89. https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90078-2.

Поступила в редакцию 18.09.2024 Принята к публикации 11.11.2024 **Лямина Елена Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН пр. Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия E-mail: *lyamina@inbox.ru*

Каленова Наталья Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 566-579

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.566-579

> Stress Analysis of a Hyperbolic Elastic-Plastic Disk under Thermomechanical Loading

> > E.A. Lyamina^{a*}, N.V. Kalenova^b

^aIshlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia

^bMoscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

E-mail: *lyamina@inbox.ru

Received September 18, 2024; Accepted November 11, 2024

Abstract

A general solution is constructed for the distribution of stresses within a thin, hyperbolic elastic-plastic disk subjected to external and internal pressures while in a steady-state temperature field and under plane stress conditions. The pressures applied to the disk are assumed not to induce any plastic flow at the initial, uniformly distributed temperature. The disk is loaded by increasing the temperature of its inner radius. The temperature of the outer radius is kept constant. Elastic and temperature strains are related to stresses by the Duhamel–Neumann law. In the plastic region, the von Mises yield criterion is valid. The tensile yield stress is taken as constant. The boundary value problem is statically determinate. Therefore, the plastic flow rule is not required to determine the stress field. The final part of the general solution depends on the parameters classifying the boundary value problem, including whether the plastic flow initiates at the inner or outer radius of the disk. The solution is presented in dimensionless form. The loading parameter comprises the inner surface temperature of the disk, the coefficient of linear thermal expansion, the initial temperature of the disk, the dimensionless inner radius of the disk, the yield stress under uniaxial tension, and Young's modulus. The general solution is obtained for both cases (for a plastic region appearing at the inner or outer radius of the disk). A specific numerical solution is constructed for a disk subjected to external pressure and a steady-state temperature field. The temperature of the inner radius at which the plastic region first appears is calculated. As it increases, the plastic region extends. At a certain temperature value, another plastic region appears near the outer radius of the disk. This value is determined as part of solving the boundary value problem. The influence of the parameters classifying the boundary value

problem on the development of the plastic region and the stress distribution along the radius of the disk is shown. The qualitative differences between the new and existing solutions for a disk of constant thickness under the action of a uniform temperature field are discussed.

Keywords: hyperbolic elastic-plastic disk, plane stress, von Mises yield criterion, thermomechanical loading, stress analysis

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00335).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Disk profile and applied forces.

Fig. 2. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at n = 1/4.

Fig. 3. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at n = 1/3.

Fig. 4. Dependence of the elastic-plastic boundary radius on Q at n = 1/2.

Fig. 5. Radial stress distribution along the radius at $s_b = 0.3$, Q = -5, and certain n values.

Fig. 6. Circumferential stress distribution along the radius at $s_b = 0.3$, Q = -5, and certain n values.

References

- 1. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka, 1975. 576 p. (In Russian)
- 2. Dem'yanushko I.V., Birger I.A. Raschet na prochnost' vrashchayushchikhsya diskov [Stress Calculations for Rotating Disks]. Moscow, Mashinostroenie, 1978. 247 p. (In Russian)
- Gamer U. The elastic-plastic shrink fit with supercritical interference. Acta Mech., 1986, vol. 61, no. 1, pp. 1–14. https://doi.org/10.1007/BF01176358
- Gamer U., Kollmann F.G. A theory of rotating elasto-plastic shrink fits. Ing.-Arch., 1986, vol. 56, no. 4, pp. 254–264. https://doi.org/10.1007/BF00542477.
- Parmaksizog`lu C., Güven U. Plastic stress distribution in a rotating disk with rigid inclusion under a radial temperature gradient. *Mech. Struct. Mach.*, 1998, vol. 26, no. 1, pp. 9–20. https://doi.org/10.1080/08905459808945417.
- Eraslan A.N. Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.*, 2003, vol. 45, no. 4, pp. 643–667. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(03)00112-7.
- Prokudin A. Schmidt-Ishlinskii yield criterion and a rotating cylinder with a rigid inclusion. J. Appl. Comput. Mech., 2021, vol. 7, no. 2, pp. 858–869. https://doi.org/10.22055/JACM.2020.35648.2704.
- Alexandrov S. *Elastic/Plastic Discs under Plane Stress Conditions*. Ser.: SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Cham, Springer, 2015. xi, 113 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14580-8.
- Kleiber M., Kowalczyk P. Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elastoviscoplasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 1996, vol. 137, nos. 3–4, pp. 395–409. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01072-9.
- Güven U. Elastic-plastic stress distribution in a rotating hyperbolic disk with rigid inclusion. Int. J. Mech. Sci., 1990, vol. 40, no. 1, pp. 97–109. https://doi.org/10.1016/S0020-7403(97)00036-2.
- Calderale P.M., Vivio F., Vullo V. Thermal stresses of rotating hyperbolic disks as particular case of non-linearly variable thickness disks. J. Therm. Stresses, 2012, vol. 35, no. 10, pp. 877–891. https://doi.org/10.1080/01495739.2012.720164.

- Motameni A. A parametric study on the elastic limit stresses of rotating variable thickness orthotropic disk. Arch. Appl. Mech., 2024, vol. 94, no. 3, pp. 737–752. https://doi.org/10.1007/s00419-024-02548-y.
- Demir E., Callioglu H., Sayer M. Elasto-plastic thermal stress analysis of functionally graded hyperbolic discs. *Struct. Eng. Mech.*, 2017, vol. 62, no. 5, pp. 587–593. https://doi.org/10.12989/sem.2017.62.5.587.
- Salehian M., Shahriari B., Yousefi M. Investigating the effect of angular acceleration of the rotating disk having variable thickness and density function on shear stress and tangential displacement. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 2019, vol. 41, no. 1, art. 31. https://doi.org/10.1007/s40430-018-1523-8.
- Kutsal S.M., Coşkun S.B. Deformation analysis of variable thickness rotating disks using an improved Adomian decomposition technique. Int. J. Appl. Mech., 2020, vol. 12, no. 1, art. 2050002. https://doi.org/10.1142/S1758825120500027.
- Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Analytical solution of hyperbolic deformable disk having variable density. *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, no. 6, pp. 1039–1046. https://doi.org/10.3103/S0025654421060194.
- Thakur P., Sethi M., Kumar N., Gupta N., Gupta K., Bhardwaj R.K. Stress analysis in an isotropic hyperbolic rotating disk fitted with rigid shaft. Z. Angew. Math. Phys., 2022, vol. 73, no. 1, art. 23. https://doi.org/10.1007/s00033-021-01663-y.
- Kutsal S.M., Coşkun S.B. Analytical approximations for elastic limit angular velocities of rotating annular disks with hyperbolic thickness. J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng., 2023, vol. 45, no. 6, art. 339. https://doi.org/10.1007/s40430-023-04132-x.
- Yella Reddy T., Srinath H. Elastic stresses in a rotating anisotropic annular disk of variable thickness and variable density. *Int. J. Mech. Sci.*, 1974, vol. 16, no. 2, pp. 85–89. https://doi.org/10.1016/0020-7403(74)90078-2.

/ Для цитирования: Лямина Е.А., Каленова Н.В. Анализ напряжений в упругопластическом диске гиперболического профиля под действием термомеханической нагрузки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. / C. 566–579. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.566-579.

For citation: Lyamina E.A., Kalenova N.V. Stress analysis of a hyperbolic elasticplastic disk under thermomechanical loading. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 566–579. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.566-579. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 580–593 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 378.147: 519.767.6

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.580-593

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ОЦЕНКА ОТВЕТОВ ПРИ КОНТРОЛЕ ЗНАНИЙ ДЛЯ ВОПРОСОВ ТИПА «ОПРЕДЕЛЕНИЕ» И «ОПИСАНИЕ»

Н.А. Прокопьев

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Разработка эффективных систем автоматизированного контроля знаний непосредственно связана с реализацией программного модуля для оценки ответов на вопросы контрольного теста, свободно сформулированных на естественном языке. Ранее автором был разработан экспериментальный прототип такой системы и проведен эксперимент, в котором короткие ответы на вопросы базовых типов, полученные от студентов, были обработаны прагматически-ориентированным алгоритмом обработки вопросно-ответных текстов для оценки результатов работы алгоритма, нахождения и разрешения ситуаций некорректного функционирования. В настоящей статье представлена следующая итерация развития алгоритма для обработки ответов на более сложные вопросы, подразумевающие раскрытие нескольких отношений, такие как «Определение» и «Описание». Представлено описание особенностей алгоритма, в частности, решение проблемы сегментации текста ответа на базовые части, задача обработки которых уже решена. Описаны результаты эксперимента, проведенного с использованием полученного прототипа с получением ответов от студентов и анализом ситуаций некорректного функционирования.

Ключевые слова: обработка естественного языка, автоматизированная оценка ответов, цифровое образование

Введение

В настоящее время наблюдается усиливающаяся тенденция масштабного перехода к дистанционному образованию и удаленному управлению образовательным процессом, что смещает акценты функциональной ответственности в трехагентной образовательной модели «Ученик – Учитель – Технология» [1]. В результате третий агент в этой модели, изначально игравший роль вспомогательного ресурса, получает более высокий статус, частично перенимая функции второго агента – Учителя. Следовательно, существует необходимость разработки и внедрения в системы цифрового образования программного модуля для непрерывного интеллектуального анализа качества обучения Ученика и получения эфективной обратной связи. Решение задачи разработки интеллектуальных программных модулей для анализа и оценки ответов Ученика, данных им в свободной форме и на естественном языке, становится наиболее актуальным, поскольку может значительно улучшить качество оценок уровня знаний и усвоения предмета. Ранее нами был реализован алгоритм обработки естественно-языковых ответов для случаев, когда ответ имеет достаточно простую структуру, раскрывающую одно типовое или составное отношение (в терминах семантического анализа). Были разработаны основные методологические принципы реализации, создан экспериментальный прототип системы автоматизированной оценки знаний, реализующий предложенный алгоритм. Полученные результаты представлены в [2]. Кроме того, была реализована система контроля знаний, с помощью которой были получены ответы студентов на вопросы в рамках аутентичного контроля знаний. Названный выше алгоритм верифицирован на полученных ответах экспериментально, также выявлены ситуации некорректного функционирования этого алгоритма и пути их разрешения. В результате была подтверждена гипотеза о возможности построения эффективного прагматически-ориентированного алгоритма обработки вопросно-ответных текстов. Эти результаты представлены в статье [3].

Однако многие задаваемые вопросы, в частности, такие как «Что такое Х?», «Дайте определение Х» или «Опишите Х», где Х – некоторый концепт учебной дисциплины, требуют более сложного, составного ответа, включающего раскрытие некоторого набора отношений, анализ которых не был реализован в названном выше экспериментальном прототипе системы автоматизированной оценки знаний. В настоящей статье представлено дальнейшее развитие этого прототипа в указанном направлении. В частности, показано, что анализ ответов на вопросы названных типов может быть сведен к рекурсивному анализу отдельных сегментов ответа с использованием уже реализованных методов для типовых и составных отношений при условии решения задачи семантико-синтаксической сегментации текста.

1. Методология исследования

Основой методологических принципов подхода, использованного для построения прототипа системы автоматизированной оценки знаний, является тезис, что заданный вопрос естественным образом ограничивает контекст ответа как в отношении вариативности возможных ответов, так и его структуры. Прагматическиориентированный подход, представленный в [4], основан на следующих принципах:

- 1. Естественная ограниченность пространства значений ответа и соответствующих лексем по заданному вопросу в учебно-тестовой ситуации (принцип детерминированности значений ответа).
- Естественная ограниченность типов структур ответа заданным вопросом, описываемых в терминах специальных глубинных грамматик (принцип детерминированности формы ответа).
- Возможность управления точностью оценки ответа в силу расширяемости и модифицируемости глубинных грамматик как основы прагматическиориентированного алгоритма оценки (принцип открытости грамматик).
- Возможность сужения пространства действия алгоритма оценки за счет сравнения ответа обучаемого с заранее заготовленной моделью ответа (принцип ожидаемости ответа).

Основными понятиями в теоретической модели являются «Концептула» и «Индивидуальная концептуальная грамматика». Концептула выражает конкретную типизированную семантико-грамматическую роль лексем или их частей в ответе, указывая на соответствующие грамматические признаки естественного языка. Индивидуальная концептуальная грамматика (ИКГ) представляет собой схему сочетания концептул, соответствующую правильной передаче ожидаемого смысла ответа в соответствии с его семантическим классом. Каждая ИКГ передает некоторый канонический смысл, а ответ, соотносящийся с этим смыслом, называется канонизированным ответом. Таким образом, необходимость введения ИКГ заключается в сведении семантического анализа текста к синтаксическому анализу его канонизированного представления в условиях, определенных контекстом вопроса.

Алгоритм обработки ответов представлен схематически на рис. 1. Лексический процессор получает на вход ответ, выраженный на естественном языке, и модель ответа для заданного вопроса. Модель ответа представляет собой словарь соответствий вида «Концептула» – «Список лексем, соответствующих концептуле». Лексемы из модели ответа могут содержать символы * (обозначает произвольный одиночный символ) и & (обозначает произвольную последовательность символов). Эти символы позволяют автору вопроса предусмотреть различные словоформы и учесть синтаксические неточности в ответе обучаемого. Пример модели ответа приведен далее в разделе, посвященном реализации прототипа.



Рис. 1. Алгоритм обработки ответов

На выходе лексический процессор формирует канонизированное представление ответа – цепочки концептул, соответствующих естественно-языковой форме ответа. Для представления ответа в виде цепочки концептул лексический процессор производит разбиение ответа на лексемы и выполняет поиск соответствующих концептул в модели ответа. Пример канонизированного представления приведен далее в разделе «Реализация и тестирование прототипа». Кроме того, лексический процессор формирует частичный вектор ситуации, массив запрещенных лексем и массив неопределенных лексем из ответа. Частичный вектор ситуации – это числовой вектор (S1, S2, S3, S4):

- *S*1 отношение количества лексем в ответе к количеству лексем, предусмотренных моделью ответа;
- S2 количество запрещенных лексем в ответе;
- S3 количество неопределенных лексем в ответе;
- S4 код, характеризующий модальность ответа, т.е. либо наличие в ответе лексем, характеризующих неуверенность или категоричность, либо их отсутствие, т.е. нейтральность. Значением S4 являются 0, 1 или 2 для случаев неуверенности, категоричности или нейтральности соответственно.

На вход семантического интерпретатора поступают канонизированное представление ответа и ИКГ, соответствующая заданному вопросу. Интерпретатор проверяет соответствие ответа и ИКГ путем попытки обхода синтаксического графа ИКГ по узлам согласно цепочке концептул канонизированного ответа. Если обход завершается на конечном узле графа, то считается, что ответ соответствует ИКГ. На выходе семантический интерпретатор формирует полный вектор ситуации (S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7), который в дополнение к частичному вектору ситуации содержит:

- S5 код, характеризующий правильность использования интервальных лексем; принимает значение 0, если интервальные лексемы использованы верно, иначе принимает значение 1;
- S6 код, характеризующий правильность смысла ответа, т.е. его соответствие ИКГ вопроса; его значением является 0, если канонизированный ответ соответствует ИКГ; если в ответе пропущено отношение, то принимает значение 1; иначе, если канонизированный ответ не соответствует ИКГ, принимает значение 2;
- S7 код, характеризующий полноту ответа, т.е. соотношение длины канонизированного представления и частично либо полностью соответствующей ей цепочки концептул из ИКГ; принимает значение 0 при полном соответствии; если канонизированный ответ длиннее соответствующей цепочки, то принимает значение 1, иначе принимает значение 2.

Гипотеза о возможности построения эффективного прагматическиориентированного алгоритма для обработки естественно-языковых вопросноответных текстов была подтверждена в [3] в рамках экспериментального исследования для вопросов, подразумевающих раскрытие одиночных типовых и составных отношений. В настоящем исследовании использован тот же подход, который состоит в проведении аутентичного тематического контроля знаний и анализе полученных ответов студентов с использованием разработанного прототипа.

Для обработки более сложных по структуре ответов на вопросы типа «Определение» и «Описание» предложен подход, состоящий в рекурсивном применении уже реализованных программных модулей для семантического анализа, поскольку ответы на такие вопросы подразумевают раскрытие некоторого набора типовых и составных отношений, связанных с главной сущностью вопроса. Основной проблемой в данном случае является сегментация текста, т. е. его разделение на такие фрагменты, которые полностью соответствуют конкретному отношению и к которым применимы соответствующие ИКГ. Такая сегментация текста также может быть произведена согласно прагматически-ориентированному подходу в соответствии с методом, предложенным в [4].

В естественном языке минимальной смысловой конструкцией является предложение, однако оно само может включать отдельные смысловые части, т. е. может являться составной конструкцией. Поэтому необходимы не только синтаксический, но и семантический подходы к сегментации. При реализации семантической сегментации возникают вопросы выделения контекста, в рамках которого текст ответа должен анализироваться на смысловую корректность, а также должны выделяться именно такие сегменты, к которым можно применить простые формулы ИКГ. Принципы ожидаемости ответа и детерминированности контекста (структуры и смысла ответа) позволяют разрешить эту проблему, так как можно заранее задать главное понятие вопроса, вокруг которого строится контекст ответа, а также определить рекурсивную ИКГ, к которой ответ должен относиться. Новый сегмент определяется по следующим признакам:

- 1. Синтаксический, поверхностный признак. Обозначается в тексте явно: знаком (символы пунктуации) или конкретной функциональной лексемой (лексемы типа «который», «что», «такой, что» и т.п.).
- Семантический, глубинный признак. Содержательно определяет сегмент и представляется лексемой, отражающей новое отношение как между главным понятием и другим понятием (линейная структура), так и взаимно между другими понятиями (иерархическая структура).

Процесс выделения сегментов одновременно с канонизацией текста лексическим процессором и анализом его соответствия простым формулам семантическим интерпретатором продолжается рекурсивно до завершения текста ответа.

2. Системы обработки естественно-языковых ответов

Для сравнения с существующими подходами дадим обзор систем, разработанных в области обработки естественно-языковых ответов.

В [5] дан анализ систем автоматизированной оценки коротких ответов на вопросы. Понятие «короткий ответ на вопрос» авторы определяют по следующим пяти критериям:

- 1. Ответ на заданный вопрос невозможно извлечь из самого вопроса, т.е. ответ может быть сформирован только из внешних знаний, не извлекаемых из вопроса.
- 2. Ответ должен выражаться на естественном языке.
- Длина ответа должна быть не более одного абзаца (от одного предложения до одного абзаца).
- Оценивается прежде всего смысл ответа и в меньшей степени его форма критерий приоритета извлечения смысла.
- 5. Вариативность ответа должна ограничиваться за счет контекста вопроса.

Авторы названной статьи провели исторический анализ развития систем оценки коротких ответов за период с 1995 по 2014 год, предложив разделить этот временной промежуток на пять периодов, названных эпохами. Эпохи могут пересекаться, при этом каждая эпоха характеризуется появлением и развитием определенных идей и подходов к оценке коротких ответов и некоторым уровнем прикладных исследований и программных прототипов, реализованных в этом направлении. При сравнительном анализе систем оценки коротких ответов, разработанных за рассматриваемый период времени, авторы использовали шесть характеристик таких систем: набор данных, метод обработки естественного языка, модель данных, модель оценки ответов, оценка качества модели и оценка эффективности.

Наборы данных в большинстве систем формируются из академического и преподавательского опыта, открытых источников либо путем непосредственного проведения тестирования. Основные языки наборов данных – английский, китайский, немецкий и испанский. Часто встречающиеся области знаний для тестирования – информатика, естественные науки, языкознание. Для обработки естественного языка в различной комбинации применяются 17 методик, наиболее частыми при этом являются: проверка орфографии, стеммирование и частеречная разметка. Наименее частыми являются синтаксические шаблоны, разметка именованных сущностей и сегментация текста.

На основе исследованных моделей, в частности, соответствия вопросов, ответов обучаемых и эталонных ответов, авторы сделали вывод, что эталонные ответы играют разную роль в системе оценки ответов: в одних случаях эталонный ответ и есть модель ответа, в других он используется для разметки ответа обучаемого.

Модели оценки ответов разнятся в зависимости от эпохи и используемых подходов и разбиваются на два больших класса: оценки на основе правил (эпоха карт концептов и извлечения информации) и оценки статистическими методами (эпоха использования корпусов и машинного обучения). Согласно названным исследованиям, наиболее широко распространенными являются системы с машинным обучением.

Определение качества моделей в рассмотренных системах зависит от типа модели оценки ответа. Оценка на основе правил лучше всего реализуется в повторяющемся тестировании по одной и той же области знаний, известной заранее. Оценка на основе статистических данных лучше всего показывает себя в неповторяющемся тестировании по области знаний, неизвестной заранее. Авторы также выделили три класса используемых метрик для оценки качества моделей: классифицирующие, ранжирующие и метрики отношений.

Основной вывод авторов о способах оценки эффективности рассмотренных систем заключается в следующем: оценка усложнена отсутствием общих наборов данных и единых способов оценки моделей. Поэтому пока лучше всего показывает себя статистический подход к оценке эффективности по принципам TREC Eval.

В [6] приведены результаты анализа систем проверки ответов обучаемого, а рассматриваемые системы разделены на три класса: системы на основе шаблоновмасок; системы на основе модели «мешок слов»; системы, учитывающие ролевые функции слов.

Системы на основе шаблонов-масок характеризуются тем, что эталонные ответы в них задаются на некотором логическом языке шаблонов и описывают варианты ответа на вопрос. В качестве основного недостатка таких систем авторы выделяют высокую нагрузку на преподавателя, приводящую, в том числе, к стремлению сократить шаблоны, из-за чего снижается точность оценки ответов.

Системы, основанные на модели «мешок слов», используют в основном методы статистического анализа и поиск *n*-грамм в ответе с предварительной обработкой ответа: исключение парафраза, снятие синонимии, расшифровка аббревиатур. К таким системам авторы относят системы, использующие векторные модели представления ответа и методы машинного обучения. Плюсом таких систем является относительная простота подготовки контрольных тестов, однако для случая вопросов, требующих определенную структуру ответа, например, требующих перечислить этапы некоторого процесса в нужном порядке, такие системы не подходят.

Системы, учитывающие ролевые функции слов в предложении и их взаимную связь, комбинируют подходы двух других названных классов систем, так как совмещают структурный подход и гибкость построения модели ответа. Однако на данный момент времени такие системы, согласно цитируемому исследованию, наследуют не только достоинства, но и недостатки других классов систем, например, проблему автоматизации трансформации сложно структурированного вопроса в унифицированную и простую форму. Подход, представленный в настоящей статье, можно отнести к этому типу, а проблема автоматизации трансформации решается нами в рамках задачи сегментации. Автор статьи [7] предложил использовать так называемые метарегулярные выражения для отражения вариантов структуры ответа. В этой статье приведены алгоритм проверки ответов на вопросы типа «Определение» и способ автоматической генерации метарегулярных выражений для правильных ответов. По результатам тестирования разработанного прототипа автор заключает, что представленный им подход достаточно эффективно осуществляет проверку ответов на вопросы типа «Определение» для заданной предметной области. Представленные метарегулярные выражения расширяют язык обычных регулярных выражений путем добавления специальных метасимволов, которые могут быть заменены другими метарегулярными выражениями, реализуя таким образом возможность рекурсивной обработки сегментов текста. Знаки пунктуации и такие лексемы, как «это», «который», «если», выделяются в отдельную категорию, служащую точками опоры для разделения текста ответа на сегменты, соответствующие метасимволам.

В [8] представлена разработка программной системы, способной проходить тест 2015 English Entrance Exams. Системе даются текст и набор связанных с ним вопросов с вариантами ответа, на которые она дает ответ путем обработки текста. Стоящая здесь задача не связана с естественно-языковой обработкой ответа, однако авторами предложен интересный подход к семантической сегментации текста. Сегментация состоит из двух этапов: разделение текста на абзацы и сравнение текста вопроса с каждым абзацем путем использования алгоритма С99 для нахождения параграфа, к которому относится вопрос. Далее для выбора правильного ответа система сравнивает каждый вариант ответа с выбранным абзацем, используя модель, обученную на основе опорных векторов.

Авторы статьи [9] представили систему, использующую специальную метрику GAN-LCS для оценки ответов на основе их близости к эталонному ответу. Эта метрика предполагает использование грамматики связей в качестве основной модели. Описаны подходы к автоматической генерации эталонных ответов при создании контрольных тестов преподавателем на основе метода Maximum Marginal Relevance, что облегчает заполнение модели ответа. При этом система не использует машинное обучение, а представленная метрика, согласно исследованию авторов, достаточно эффективна. Однако в этой системе использован заранее заданный корпус текстов, что затрудняет ее применение в областях, где достаточное количество текстов недоступно. При этом отсутствует проблема сегментации, так как метрика близости ответа к эталонному вычисляется целиком для всего текста ответа.

В [10] представлен подход к разработке автоматизированной системы контроля знаний на основе онтологии предметной области. Разработанный алгоритм производит сегментацию текста, выявление ключевых слов и сравнение полученного набора слов с ключевыми словами эталонных ответов с использованием метода латентно-семантического анализа TF-IDF. В данном случае семантический анализ сведен к статистическому, а использованный авторами алгоритм сегментации основан на языковых особенностях китайского языка, для которого и была разработана система, поэтому нельзя считать данный подход универсальным.

В [11] описана система автоматической проверки ответов на открытые вопросы на русском языке. В качестве лингвистического процессора в системе использован Томита-парсер от компании Яндекс, который поддерживает токенизацию, морфологический анализ и выделение сущностей. Для обработки естественного языка данный инструмент использует заданные пользователем грамматики и словарь сущностей. На основе проведенного обзора нами сделан вывод о высоком потенциале использования подхода к обработке естественно-языковых ответов, основанного на таких правилах, как синтаксические шаблоны, регулярные выражения и «мешок слов». Однако такой подход не был в достаточной степени развит для обработки ответов, формулируемых обучаемым в свободной форме, в частности, из-за трудоемкости задачи настройки правил, трудностей при верификации построенных алгоритмов, нетривиальной реализации сегментации текста ответа. Решение ряда из названных проблем с учетом опыта исследователей, упомянутых в обзоре, получено в настоящей статье.

3. Разработка прототипа

На основе представленной теоретической модели нами был разработан экспериментальный прототип с использованием языка программирования Python и вебфреймворка Django для графического интерфейса. Этот прототип детально описан в [2]. Дальнейшая разработка прототипа в рамках проведенного исследования включала реализацию грамматик ИКГ4-ОПИСАНИЕ и ИКГ4-ОПРЕДЕЛЕНИЕ для соответствующих типов вопросов, а также поддержку рекурсивной сегментации текста ответа.

Структура ИКГ4-ОПИСАНИЕ представлена на рис. 2. Данная грамматика является рекурсивной структурой, состоящей из линейных сегментовпоследовательностей, соответствующих ИКГ2 (для типовых отношений) и ИКГ3 (для составных отношений), поскольку ответ на вопрос типа «Описание» предполагает раскрытие типовых и составных отношений, связанных с главным понятием вопроса. Структура ИКГ4-ОПРЕДЕЛЕНИЕ представлена на рис. 3. Она включает ИКГ4-ОПИСАНИЕ в качестве рекурсивной компоненты и расширяет ожидаемую структуру ответа концептулой SS – главным понятием вопроса и SSOP – обобщенным понятием, которое стоит на более высоком уровне в иерархической структуре предметной области над главным понятием (гипероним главного понятия). Таким образом, ответ на вопрос типа «Определение» предполагает включение не только отношений, связанных с главным концептом, но и показатель его иерархического отношения. В рамках экспериментальной апробации прототипа системы оценки ответов был разработан модуль тестирования вопросов, позволяющий оценить работу алгоритма для введенных ответов. При введении ответа форма отображает: канонизированное представление ответа, вектор ситуации, списки неопределенных лексем и запрещенных лексем, извлеченных из ответа.







Рис. 3. Структура ИКГ4-ОПРЕДЕЛЕНИЕ

4. Результаты эксперимента

Для оценки разработанных моделей в рамках проведенного эксперимента были подготовлены вопросы и модели ответов типа «Определение» и «Описание». Пример модели ответа для одного из вопросов набора представлен в табл. 1. В эксперименте участвовали студенты бакалавриата Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского федерального университета, обучающиеся по направлению «Прикладная информатика». Для аутентичности исследования студенты не были проинформированы об эксперименте и проходили вопросно-ответный контроль знаний в полном соответствии со стандартными правилами ручной проверки ответов преподавателем. В результате были получены и обработаны алгоритмом 20 ответов студентов.

Табл. 1

Пример модели ответа

Вопрос	Что такое компилятор?	
Модель ответа (без запрещенных, необязательных и интервальных лексем)		
SS	компилятор	
SO	лексическ&+анализ&, лексическ&, синтаксическ&+анализ&, синтаксическ&, этап&+генерац&, этап&+генерац&+код&, генерац&+код&, генерац&, этап&+оптимизац&+код&, этап&+оптимизац&, оптимизац&+код&, оптимизац&, этап&+загрузк&, загрузк&, состав+операционн&+систем&, операционн&+систем&, библиотек&+систем&, си- стем&+библиотек&	
S_{OP}	набор+программ&, программ&+систем&, программ&, систем&	
R_{SO}	состоит+из, включает, предшествует, входит+в, находится+в, реализует	
R_{OS}	состоит+из, включает, входит+в, выполняет&+после, реали- зу*тся+в	
SA	текст+на+языке+высокого+уровня, язык*+высокого+уровня, текст+на+яву, яву	
SP	текст+в+машинн&+код&, текст+на+языке+машинн&+код&, язык+машинн&+код&, машинный+код, текст+на+ямк, ямк	
R_A	перевод&	
R_P	получа&	

На первом этапе эксперимента оценка алгоритма была проведена с использованием подготовленных эталонных ответов, которые точно должны были быть полностью разобраны алгоритмом. Результаты полученной оценки представлены в табл. 2. Согласно этим результатам, лексический процессор корректно и полно проанализировал естественно-языковой текст ответов, получив канонизированное представление ответов без нераспознанных лексем. Семантический интерпретатор, в данном случае с учетом значения S6 вектора ситуации, отметил эталонный ответ как полностью соответствующий ИКГ. Таким образом, можно заключить, что прототип работает успешно.

Пример оценки эталонного ответа

Табл. 2

Ответ	Это программа, которая состоит из лексического и синтаксиче-
	ского анализатора, включает также этапы генерации и оптими-
	зации кодов. Переводит ЯВУ в ЯМК и предшествует этапу за-
	грузки. Компилятор входит в состав операционной системы и на-
	ходится в библиотеке системы.
Канон.	LN(Это) – SOP(программа) – LN(которая) – RSO(состоит из) –
ответ	SO(лексического) – LN(и) – SO(синтаксического анализатора) –
	RSO(включает) – LN(также) – SO(этапы генерации) – LN(и) –
	SO(оптимизации кодов) – RA(Переводит) – SA(ЯВУ) – GPP(в) –
	SP(ЯМК) – LN(и) – RSO(предшествует) – SO(этапу загрузки) –
	SS(Компилятор) – RSO(входит в) – SO(состав операционной си-
	стемы) – LN(и) – RSO(находится в) – SO(библиотеке системы)
Вектор	S1 = 1.4; S2 = 0; S3 = 0; S4 = 1; S5 = 0; S6 = 0; S7 = 2
ситуации	

На втором этапе алгоритмом были обработаны ответы, полученные от студентов. В результате в среднем только половина из них была корректно разобрана и оценена. Ответы имели нераспознанные лексемы, не учтенные в модели ответа, что приводило в некорректному разбору. По итогам эксперимента выявлены следующие группы ситуаций некорректного функционирования алгоритма и пути их разрешения:

- 1. Весь ответ, согласно полученному вектору ситуации, отмечен как неправильный в случае, когда его часть не была распознана алгоритмом. В данной группе ситуаций некорректного функционирования выявляется проблема реализации процедуры сегментации, требующей завершения сегментов текста только распознаваемыми лексемами для корректного нахождения данных сегментов. Для решения данной группы ситуации предложено использование контекстно-свободного алгоритма разбора ответа, при котором каноническое представление ответа разбивается на сегменты не только по цепочке слева направо, но и справа налево. В результате такие ответы должны иметь оценку S6=1 в векторе ситуации, которая соответствует частичной правильности ответа.
- 2. Формулировка ответов в виде определения для вопросов типа «Описание». Оба типа вопросов имеют похожие ИКГ, однако ИКГ4 ОПРЕДЕЛЕНИЕ включает в себя также требование использования в ответе гиперонима для главного понятия вопроса. Данная группа ситуаций влечет некорректное распознавание соответствующей концептулы S_{OP} и в соответствии с ситуацией 1 ведет к отметке ответа целиком как неправильного. Разрешение ситуаций этой группы требует реализации процедуры автоматического определения ИКГ ответа для близких между собой грамматик.

Заключение

Дальнейшее совершенствование алгоритма обработки ответов будет направлено на разрешение выявленных ситуаций некорректного функционирования. Ответы студентов, полученные в рамках эксперимента, будут использованы и в следующих экспериментах. Но уже по результатам проведенного исследования можно заключить, что прагматически-ориентированный подход может быть применен для автоматической обработки ответов на сложные вопросы типа «Определение» и «Описание», а предложенный метод семантико-синтаксической рекурсивной сегментации, при всех его недостатках, позволяет свести решаемую задачу к обработке простых сегментов вопроса с использованием уже реализованных грамматик. Другое направление будущих работ – это развитие прототипа путем автоматизации создания модели ответа, поскольку для преподавателя это наиболее трудоемкая задача при создании контрольного теста. Разработки, уже проведенные в данном направлении, включают использование онтологий предметной области для автоматизированной генерации опросов.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Khasianov A., Suleymanov D., Marchenko A. Three agent platform approach for digital education environment // INTED2017 Proc. 2017. P. 8580–8587. https://doi.org/10.21125/inted.2017.2031.
- Suleymanov D., Prokopyev N. Development of prototype of natural language answer processor for e-learning // Artificial Intelligence (RCAI 2020): Proc. 18th Russ. Conf. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 12412. Cham: Springer, 2020. P. 448–459. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59535-7 33.
- Suleymanov Dzh., Prokopyev N. Experimental prototype of the pragmatically oriented e-assessment algorithm for automatic natural language answer grading // EDULEARN20 Proc. 2020. P. 1917–1924. https://doi.org/10.21125/edulearn.2020.0617.
- 4. *Сулейманов Д.Ш.* Система семантического анализа ответных текстов обучаемого на естественном языке // Онтол. проект. 2014. № 1 (11). С. 65–77.
- Burrows S., Gurevych I., Stein B. The eras and trends of automatic short answer grading // Int. J. Artif. Intell. Educ. 2015. V. 25. P. 60–117. https://doi.org/10.1007/s40593-014-0026-8.
- Мишунин О.Б., Савинов А.П., Фирстов Д.И. Состояние и уровень разработок систем автоматической оценки свободных ответов на естественном языке // Соврем. наукоемк. технол. Техн. науки. 2016. № 1. С. 38–44.
- Мерзляков Д.А. Генерация регулярных выражений для автоматизации проверки тестов открытого характера // Студенч. научн. форум – 2013: V Междунар. студенч. науч. конф. 2013.
- Ziai R., Rudzewitz B. CoMiC: Exploring text segmentation and similarity in the English entrance exams task // CLEF2015 Working Notes / Cappellato L., Ferro N., Jones G.J.F., Juan E.S. (Eds.). Ser.: CEUR Workshop Proceedings. 2015. V. 1391.
- Pribadi F.S., Permanasari A.E., Adji T.B. Short answer scoring system using automatic reference answer generation and geometric average normalized-longest common subsequence (GAN-LCS) // Educ. Inf. Technol. 2018. V. 23, No 6. P. 2855–2866. https://doi.org/10.1007/s10639-018-9745-z.
- 10. Xu L.-X., Wang N., Xu L., Li L.-Y. Research of automated assessment of subjective tests based on domain ontology // Multidisciplinary Social Networks Research (MISNC 2014):

Proc. Int. Conf. Ser.: Communications in Computer and Information Science. V. 473. Berlin, Heidelberg: Springer, 2014. P. 445–453. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45071-0_37.

 Кожевников В.А., Сабинин О.Ю. Система автоматической проверки ответов на открытые вопросы на русском языке // Науч.-техн. ведом. СПбГПУ. Информ. Телекомм. Управл. 2018. Т. 11, № 3. С. 57–72. https://doi.org/10.18721/JCSTCS.11306.

> Поступила в редакцию 24.12.2023 Принята к публикации 11.10.2024

Прокопьев Николай Аркадиевич, старший преподаватель Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия E-mail: nikolai.prokopyev@gmail.com

> ISSN 2541-7746 (Print) ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 580-593

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.580-593

> Automatic Grading of Answers in Knowledge Control for "Definition" and "Description" Question Types

> > N.A. Prokopyev

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia E-mail: nikolai.prokopyev@gmail.com

Received December 24, 2023; Accepted October 11, 2024

Abstract

The progress in developing an effective automatic knowledge control system is directly associated with creating and implementing a software module for grading answers to test questions formulated in natural language. Previously, an experimental prototype of such a system was designed, and a study was performed where short answers to basic question types provided by students were examined via a pragmatically oriented question-answer text processing algorithm, considering its outputs and exposing flaws. This article introduces the next iteration of the algorithm tailored to handle more complex question types that requires the identification of relations such as "Definition" and "Description." The key features of the enhanced algorithm were outlined, with a particular focus on the problem of segmenting answers into meaningful chunks, a task for which processing methods have already been found. The results of an experiment based on the developed prototype with obtaining answers from students and a thorough analysis of the instances of the system's incorrect behavior were discussed.

Keywords: natural language processing, automatic answer grading, e-learning

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Answer processing algorithm. Fig. 2. ICG4-DESCRIPTION structure. Fig. 3. ICG4-DEFINITION structure.

References

- Khasianov A., Suleymanov D., Marchenko A. Three agent platform approach for digital education environment. *INTED2017 Proc.*, 2017, pp. 8580–8587. https://doi.org/10.21125/inted.2017.2031.
- Suleymanov D., Prokopyev N. Development of prototype of natural language answer processor for e-learning. Artificial Intelligence (RCAI 2020): Proc. 18th Russ. Conf. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12412. Cham, Springer, 2020, pp. 448–459. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59535-7_33.
- 3. Suleymanov Dzh., Prokopyev N. Experimental prototype of the pragmatically oriented e-assessment algorithm for automatic natural language answer grading. *EDULEARN20 Proc.*, 2020, pp. 1917–1924. https://doi.org/10.21125/edulearn.2020.0617.
- 4. Suleymanov D.Sh. A system for semantic processing of natural language responses. *Ontol. Proekt.*, 2014, no. 1 (11), pp. 65–77. (In Russian)
- Burrows S., Gurevych I., Stein B. The eras and trends of automatic short answer grading. Int. J. Artif. Intell. Educ., 2015, vol. 25, pp. 60–117. https://doi.org/10.1007/s40593-014-0026-8.
- Mishunin O.B., Savinov A.P., Firstov D.I. Current progress and development trends of systems for automatic grading of free answers in natural language. *Sovrem. Naukoemkie Tekhnol. Tekh. Nauki*, 2016, no. 1, pp. 38–44. (In Russian)
- Merzlyakov D.A. Generation of regular expressions for automatic grading of openended tests. Studencheskii nauchnyi forum – 2013: V Mezhdunar. studench. nauch. konf. [Student Research Forum – 2013: Proc. V Int. Student Sci. Conf.], 2013. (In Russian)
- Ziai R., Rudzewitz B. CoMiC: Exploring text segmentation and similarity in the English entrance exams task. *CLEF2015 Working Notes*. Cappellato L., Ferro N., Jones G.J.F., Juan E.S. (Eds.). Ser.: CEUR Workshop Proceedings, 2015, vol. 1391.
- Pribadi F.S., Permanasari A.E., Adji T.B. Short answer scoring system using automatic reference answer generation and geometric average normalized-longest common subsequence (GAN-LCS). *Educ. Inf. Technol.*, 2018, vol. 23, no. 6, pp. 2855–2866. https://doi.org/10.1007/s10639-018-9745-z.
- Xu L.-X., Wang N., Xu L., Li L.-Y. Research of automated assessment of subjective tests based on domain ontology. *Multidisciplinary Social Networks Research (MISNC 2014): Proc. Int. Conf.* Ser.: Communications in Computer and Information Science. Vol. 473. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014, pp. 445–453. https://doi.org/10.1007/978-3-662-45071-0 37.

 Kozhevnikov V.A., Sabinin O.Yu. Automatic system for processing answers to open-ended questions in Russian. *Inf. Telekommun. Upr.*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 57–72. https://doi.org/10.18721/JCSTCS.11306. (In Russian)

Для цитирования: Прокопьев Н.А. Автоматизированная оценка ответов при контроле знаний для вопросов типа «Определение» и «Описание» // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 580–593. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.580-593.

For citation: Prokopyev N.A. Automatic grading of answers in knowledge control for "Definition" and "Description" question types. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 580–593. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.580-593. (In Russian)
2024, Т. 166, кн. 4 С. 594–602 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 536.21: 533.9.07

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.594-602

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАТАЛИТИЧЕСКИХ И ИЗЛУЧАЮЩИХ ХАРАКТЕРИСТИК АНТИОКИСЛИТЕЛЬНЫХ И АНТИЭРОЗИОННЫХ ПОКРЫТИЙ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

О.В. Тушавина

Московский авиационный институт, г. Москва, 125993, Россия

Аннотация

Экспериментально-теоретически определены коэффициент каталитической активности и степень черноты поверхности тонкостенных антиокислительных и антиэрозионных покрытий для высокоскоростных летательных аппаратов. Покрытие в виде аэрозольной смеси наносилось на подложку из углерод-углеродного композиционного материала, и полученный образец обдувался полностью диссоциированным воздухом с целью замера тепловых потоков к поверхности образца и ее энтальпии. С использованием известных зависимостей суммарных конвективно-диффузионных тепловых потоков от энтальпии торможения и коэффициента гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота в молекулы определены этот коэффициент и степень черноты поверхности из закона Стефана – Больцмана при замеренной энтальпии (и температуре) стенки. Экспериментально исследованы пять типов покрытий, имеющих в своем составе кремний, титан, молибден и бор. Результаты сведены в таблицу, демонстрирующую зависимость коэффициента рекомбинации и степени черноты от тепловых потоков и температуры стенки.

Ключевые слова: тепловой поток, диффузия, диссоциация, рекомбинация, катализ, коэффициент каталитической активности, степень черноты, число Прандтля, число Шмидта, число Льюиса, число Маха, число Рейнольдса

Введение

Одной из основных особенностей высокоскоростных летательных аппаратов (ВЛА) являются большие скорости в плотных слоях атмосферы (числа Маха больше $5 \div 6$). При этом в ударных слоях между головной ударной волной и затупленным телом возникают значительные температуры, при которых молекулы кислорода и азота воздуха диссоциируют на атомы, поглощая большое количество тепловой энергии. Молекулы кислорода диссоциируют в промежутке температуру 2000 ÷ 4000 K, а азота – в промежутке 4000 ÷ 6000 K, так что при температуре 6000 K воздух полностью состоит из атомов кислорода и азота [1,2].

На более холодных стенках ВЛА атомы рекомбинируют в молекулы с выделением того же количества теплоты, что было поглощено при диссоциации, причем в отличие от гомогенной рекомбинации внутри пограничного слоя гетерогенная рекомбинация на стенке происходит с выделением значительно большего количества теплоты в зависимости от степени каталитичности стенки, которая зависит от материала теплозащитного покрытия. Уменьшение степени каталитичности (или коэффициента каталитической рекомбинации) существенно снижает диффузионные тепловые потоки к поверхности ВЛА. Поэтому чем ниже коэффициент каталитической рекомбинации, тем меньше аэродинамического тепла поступает на стенку. Таким образом, реакции диссоциации – рекомбинации происходят по схеме

$$O + O \rightleftharpoons O_2 + Q_o, \quad N + N \rightleftharpoons N_2 + Q_N,$$

где $Q_o = 15540 \text{ кДж/кг}, Q_N = 33600 \text{ кДж/кг}$ [1].

Эффективным способом отвода аэродинамического тепла является увеличение отвода от стенки (поверхности, соприкасающейся с газодинамическим потоком) лучистого теплового потока, пропорционального по закону Стефана-Больцмана четвертой степени абсолютной температуры стенки, причем коэффициентом в этой зависимости является степень черноты поверхности. Поэтому чем выше степень черноты (в пределах от нуля до единицы), тем выше отвод тепла от стенки [3]. Таким образом, чем ниже степень k_w каталитичности стенки и выше степень ε_w , тем большее количество теплоты отводится от поверхности ВЛА, и есть уверенность, что тепловая защита будет функционировать без уноса массы (без фазовых превращений). Эта пара характеристик $k_w - \varepsilon_w$ определялась экспериментально путем перебора материалов, синтезированных из порошков, составленных из различных элементов, и продувки их в высокотемпературном (~ 6000 K) потоке полностью диссоциированного воздуха. Такие эксперименты на газодинамических стендах проводились ранее в ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского [4] и МАИ [3], а полученные результаты описаны в работах [5–9]. Расчеты конвективно-диффузионных тепловых потоков и температур стенки проведены в работах [6,7,10–18].

1. Методика проведения эксперимента и полученные результаты

Сравнительные эксперименты на газодинамических стенках по определению пары $k_w - \varepsilon_w$ (коэффициента каталитической рекомбинации – степени черноты) проведены нами для пяти материалов, синтезированных из различных порошков и наносимых тонким слоем (десятые доли миллиметра) на подложку из углеродуглеродного композиционного материала (УУКМ). В качестве таких материалов были использованы следующие смеси порошков или химические соединения:

- SiTiMoCr (кремний, титан, молибден, хром);
- SiTiMoB (кремний, титан, молибден, бор);
- SiTiMoBYAl (кремний, титан, молибден, бор, иттрий, алюминий);
- SiTiMoBYHf (кремний, титан, молибден, бор, иттрий, гафний).

Составы и процентные содержания элементов в этих материалах рекомендованы в работах [8,9]. Газодинамический стенд и условия проведения эксперимента подробно описаны в [6].

Определение каталитических свойств поверхности материалов базируется на калориметрическом методе, в соответствии с которым сопоставляются результаты экспериментальных измерений тепловых потоков к поверхности модели, изготовленной из материалов с неизвестной и известной каталитической активностью. При этом необходимо контролировать отсутствие обменных реакций между атомами кислорода и азота с образованием окиси азота NO (газовая смесь должна состоять только из атомов азота и кислорода). Для этого температуру торможения газодинамического потока необходимо поддерживать на уровне ~ 6000 К. Концепция метода определения каталитических свойств образцов базируется на определении конвективных и диффузионных тепловых потоков от «замороженного» пограничного слоя, т.е. предполагается, что обменные реакции рекомбинации атомов в гомогенной (газовой) фазе не происходят. Тогда для каждого из атомарных потоков (кислорода и азота) выполнится следующее соотношение (аналог закона Фика):

$$\rho_w D_{12} \left(\frac{\partial C_i}{\partial y} \right)_w = \left(K_w \, \rho_w \, C_{i,w} \right)^m,\tag{1}$$

где ρ_w – плотность газа на границе w между наружной поверхностью тела и пограничным слоем; D_{12} – коэффициент бинарной диффузии; C_i , i = 1, 2, - концентрация атомов кислорода (i = 1) и азота (i = 2) соответственно; m – порядок реакции диссоциации (рекомбинации) (в рассматриваемом случае m = 1, так как диффузионный поток пропорционален концентрации); y – направление внешней нормали к поверхности w.

На основе уравнения (1) получено соотношение для конвективнодиффузионного потока в передней и задней критических точках затупленного тела в виде [2,3,8]

$$q_0 = 0,665 [\beta \mu_0 \rho_0]^{1/2} \operatorname{Pr}^{-2/3} (I_w/I_0)^{-0,17} \left[1 + (\operatorname{Le}^{2/3} \varphi - 1) \frac{h_i^{\ 0} C_{i,\infty}}{I_0} \right] (I_0 - I_w), \quad (2)$$

где $\beta = (du/dx)_0$ – градиент скорости в критической точке; μ_0, ρ_0, I_0 – динамическая вязкость, плотность и энтальпия в критической точке; h_i^o – энтальпия образования элемента i = 1, 2; индекс $_w$ относится к границе w; $C_{i,\infty}$ – концентрация атомов в набегающем потоке; $\Pr = \mu c_p / \lambda$ – число Прандтля; $Sc = \mu / (\rho D_{12})$ – число Шмидта; Le = \Pr/Sc – число Льюиса; c_p – теплоемкость при постоянном давлении; λ – теплопроводность.

Параметр φ , содержащий k_w , определяется соотношением

$$\varphi = \left[\frac{0,664(\beta\rho_0\mu_0)^{1/2}(I_0/I_w)^{0,17}S_w^{-2/3}}{\rho_w k_w} + 1\right]^{-1}.$$
(3)

Для определения k_w введем обозначение $S = 0,47 \text{Sc}^{-2/3} [2\beta(\mu\rho)_0]^{1/2}$, тогда выражение (3) примет вид $\varphi = [1 + S/(\rho_w k_w)]^{-1}$, откуда получим

$$k_w = \frac{\varphi S}{\rho_w \left(1 - \varphi\right)}.\tag{4}$$

Из (4) следует, что k_w можно определить, если известны S, ρ_w и φ . В комплекс S входят газодинамические параметры, которые известны из эксперимента (т.е. давление статическое и торможения, энтальпии торможения и стенки, скорость потока, температура поверхности модели). По этим характеристикам из уравнения состояния можно определить ρ_w . Для измерения теплового потока в выражении (2) используем неохлаждаемый калориметр, на поверхность которого наносим тонкий слой исследуемого теплозащитного материала. Изготовленный таким образом образец устанавливаем в расчетном сечении струй набегающего потока и производим измерение теплового потока, температуры поверхности образца и газодинамических характеристик потока. Однако в эксперименте неизвестен комплекс ($\sum_{i=1}^{n} C_{i,\infty} h_i^0$)/ I_0 . Для определения значения этого комплекса проводим аналогичный дополнительный эксперимент с калориметром, теплоприемный элемент

которого изготовлен из материала с абсолютной каталитической активностью, т. е. $k_w \to \infty$. Такими материалами являются металлы, например, электролитическая медь. Известно [3], что при $k_w \to \infty$ параметр $\varphi \to 1$. В этом случае выражение (2) примет вид

$$q_{0,k_w\to\infty} = 0.664 \operatorname{Re}_w^{1/2} \operatorname{Pr}_w^{-2/3} \frac{\mu_w}{x} \left[1 + (\operatorname{Le}^{2/3} - 1)(\sum_{i=1}^n C_{i,\infty} h_i^0) / I_0 \right] (I_0 - I_w), \quad (5)$$

где Re_w – число Рейнольдса.

В небольшой окрестности критической точки на расстоянии x от нее, где $du/dx \approx u/x$, из (5) определим упомянутый комплекс при зафиксированных в эксперименте остальных параметрах, входящих в выражение (5). Из (2) определим параметр φ , а из выражения (4) – коэффициент каталитической активности k_w для исследуемого материала. Степень черноты ε_w найдем из закона Стефана– Больцмана по известным из эксперимента температуре поверхности и лучистому тепловому потоку.

При проведении эксперимента были использованы следующие рекомендации:

– стенд должен генерировать полностью диссоциированный воздушный поток с температурой торможения $T_0 \in [2500 \div 7000 \,\mathrm{K}]$ и давлением торможения $p_0 \in [10^3 \div 5 \cdot 10^3]$;

– размер калориметра не превышает $2 \cdot 10^{-2}$;

 температура поверхности в обоих экспериментах должна выдерживаться одинаковой (в пределах погрешностей эксперимента).

Результаты экспериментально-теоретических исследований пары характеристик $k_w - \varepsilon_w$ исследуемых материалов по подложке из УУКМ приведены в следующей таблице.

№ п/п	Тип покрытия	$q_{t,w}, { m \kappa Bt}/{ m m}^2$	$T_w, \circ C$	ε_w	k_w , м/сек.
1	УГЛЕРОД	1405	2169	0.85	> 100
2	Si Ti Mo Cr	1650	1800	0.89	0.88
3	Si Ti Mo B	1460	1780	0.78	0.18
4	Si Ti Mo B Y Al	1480	2000	0.91	0.38
5	Si Ti Mo B ${\rm Y}$ Hf	1750	2100	$0.92\!-\!0.93$	0.35

Результаты экспериментально-теоретических исследований материалов

Из результатов, приведенных в таблице, следует, что свойствами, наиболее оптимальными с позиций $k_w - \varepsilon_w$, обладают покрытия Si - Ti - Mo - B - Y - Al и Si - Ti - Mo - B - Y - Hf.

Заключение

На основе выведенной ранее формулы суммарного конвективного и диффузионного теплового потока, зависящего от коэффициента каталитической рекомбинации атомов кислорода и азота в передней критической точке затупленного тела высокоскоростного летательного аппарата, спланирован и проведен стендовый эксперимент по определению коэффициента каталитической рекомбинации и степени черноты поверхности затупленного тела. Определение каталитических свойств поверхности исследуемых тонкостенных теплозащитных покрытий построено на

Табл. 1

сопоставлении результатов калориметрических испытаний материалов с неизвестной и известной каталитической способностью. Результаты экспериментов, проведенных для пяти композиционных составов теплозащитных покрытий, сведены в итоговую таблицу, анализ которой показал, что наиболее оптимальными являются покрытия из материалов SiTiMoBYAl и SiTiMoBYHf, для которых степень черноты выше значения 0.91, а коэффициент каталитической рекомбинации ниже значения 0.35.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-19-00684, https://rscf.ru/project/23-19-00684/.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. М.: Машиностроение, 1964. 572 с.
- 2. Дорренс У.Х. Гиперзвуковые течения вязкого газа. Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 440 с.
- Никитин П.В., Сотник Е.В. Катализ и излучение в системах тепловой защиты космических аппаратов. М.: Янус-К, 2013. 435 с.
- Borovoi V. Ya., Skuratov A.S., Surzhikov S.T. Study of convective heating of segment alconical Martian descnt vehicle in shock wind tunnel // Proc. 34th AIAA Fluid Dynamics Conf. Portland, OR, 2004. Art. AIAA 2004–2634. https://doi.org/10.2514/6.2004-2634.
- Пронина П.Ф., Тушавина О.В., Шумская С.А., Егорова М.С. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах ЭВТИ // Тепл. проц. техн. 2022. Т. 14, № 8. С. 348–353. https://doi.org/10.34759/tpt-2022-14-8-348-353.
- Кузнецова Е.Л., Тушавина О.В. Экспериментальная отработка антиокислительного и антиэрозионного покрытия для углерод-углеродных и углеродно-керамических теплозащитных материалов // СТИН. 2023. № 10. С. 11–14.
- Тушавина О.В., Пронина П.Ф., Егорова М.С. Определение тепловых потоков и температур поверхности элементов конструкций высокоскоростных летательных аппаратов при обтекании диссоциирующим потоком газа // СТИН. 2023. № 12. С. 37–40.
- Astapov A.N., Terent'eva V.S. Review of domestic designs in the field of protecting carbonaceous materials against gas corrosion and erosion in high-speed plasma fluxes // Russ. J. Non-Ferrous Met. 2016. V. 57, No 2. P. 157–173. https://doi.org/10.3103/S1067821216020048.
- Astapov A.N., Zhestkov B.E., Pogozhev Yu.S., Zinovyeva M.V., Potanin A.Yu., Levashov E.A. The oxidation resistance of the heterophase ZrS₂-MoSi₂-ZrB₂ powders – derived coatings // Corros. Sci. 2021. V. 189. Art. 109587. https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109587.
- Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Тепломассоперенос на боковых поверхностях затупленных носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов // ТВТ. 2021. Т. 59, № 5. С. 797–800. https://doi.org/10.31857/S0040364421050069.
- Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Теплоперенос с поглощением в анизотропной тепловой защите высокотемпературных изделий // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2019. № 5 (86). С. 35–49. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49.
- Формалев В.Ф., Колесник С.А., Гарибян Б.А. Математическое моделирование тепломассопереноса при аэродинамическом нагреве носовых частей гиперзвуковых летательных аппаратов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. науки. 2022. № 1 (100). С. 107–121. https://doi.org/10.18598/1812-3368-2022-1-107-121.

- 13. Формалев В.Ф., Гарибян Б.А., Колесник С.А. Моделирование тепломассопереноса на затупленных телах в условиях аэродинамического нагрева высокоскоростных летательных аппаратов // ТВТ. 2023. Т. 61, № 3. С. 398–404. https://doi.org/10.31857/S0040364423030092.
- Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 404–414. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414.
- Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The study of the temperature field propagation in a nonlinear anisotropic space with the relaxation time of the heat flux // AIP Conf. Proc. 2023. V. 2910. Art. 020204. https://doi.org/10.1063/5.0167863.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized unsteady thermal conductivity in a half-space // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 10. P. 4429–4437. https://doi.org/10.1134/S1995080223100086.
- Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows // Symmetry. 2022. V. 14, No 9. Art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.

Поступила в редакцию 7.08.2024 Принята к публикации 7.10.2024

Тушавина Ольга Валериановна, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой 610

Московский авиационный институт Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия E-mail: tushavinaov@mai.ru

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 594-602

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.594-602

Experimental and Theoretical Study of Catalytic and Radiative Characteristics of Anti-Oxidation and Anti-Erosion Coatings for High-Speed Aircraft

O.V. Tushavina

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993 Russia E-mail: tushavinaov@mai.ru

Received August 7, 2024; Accepted October 7, 2024

Abstract

The catalytic activity coefficient and emissivity of the surface of thin-walled oxidationand erosion-resistant coatings for high-speed aircraft were determined experimentally and theoretically. The coating was applied as an aerosol mixture to a carbon-carbon composite substrate, and the resulting sample was subjected to fully dissociated air to measure heat fluxes to the sample surface and its enthalpy. Using established relationships between total convective-diffusive heat fluxes, stagnation enthalpy, and the heterogeneous recombination coefficient of oxygen and nitrogen atoms into molecules, the catalytic activity coefficient and surface emissivity were calculated based on the Stefan–Boltzmann law utilizing the measured enthalpy (and temperature) of the wall. The experiments were performed on five coating types containing silicon, titanium, molybdenum, and boron. The findings were summarized in a table showing how the recombination coefficient and emissivity depend on heat fluxes and wall temperature.

Keywords: heat flux, diffusion, dissociation, recombination, catalysis, catalytic activity coefficient, emissivity, Prandtl number, Schmidt number, Lewis number, Mach number, Reynolds number

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00684, https://rscf.ru/project/23-19-00684/).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

- 1. Krasnov N.F. Aerodinamika tel vrashcheniya [Aerodynamics of Bodies of Revolution]. Moscow, Mashinostroenie, 1964. 572 p. (In Russian)
- 2. Dorrance W.H. *Giperzvukovye techeniya vyazkogo gaza* [Viscous Hypersonic Flow]. Moscow, Mir, 1966. 440 p. (In Russian)
- Nikitin P.V., Sotnik E.V. Kataliz i izluchenie v sistemakh teplovoi zashchity kosmicheskikh apparatov [Catalysis and Radiation in Thermal Protection Systems for Spacecraft]. Moscow, Yanus-K, 2013. 435 p. (In Russian)

- Borovoi V.Ya., Skuratov A.S., Surzhikov S.T. Study of convective heating of segmentalconical Martian Descent Vehicle in shock wind tunnel. *Proc. 34th AIAA Fluid Dynamics Conf.* Portland, OR, 2004, art. AIAA 2004–2634. https://doi.org/10.2514/6.2004-2634.
- Pronina P.F., Tushavina O.V., Shumskaya S.A., Egorova M.S. Analytical modeling of heat interchange in the blanket elements. *Tepl. Protsessy Tekh.*, 2022, vol. 14, no. 8, pp. 348–353. https://doi.org/10.34759/tpt-2022-14-8-348-353. (In Russian)
- Kuznetsova E.L., Tushavina O.V. Experimental optimization of anti-oxidation and -erosion coating for carbon-carbon and carbon-ceramic heat shields. *STIN*, 2023, no. 10, pp. 11–14. (In Russian)
- Tushavina O.V., Pronina P.F., Egorova M.S. Estimating heat fluxes and surface temperatures of high-speed aircrafts in a dissociated gas flow. *STIN*, 2023, no. 12, pp. 37–40. (In Russian)
- Astapov A.N., Terent'eva V.S. Review of domestic designs in the field of protecting carbonaceous materials against gas corrosion and erosion in high-speed plasma fluxes. *Russ. J. Non-Ferrous Met.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 157–173. https://doi.org/10.3103/S1067821216020048.
- Astapov A.N., Zhestkov B.E., Pogozhev Yu.S., Zinovyeva M.V., Potanin A.Yu., Levashov E.A. The oxidation resistance of the heterophase ZrS₂-MoSi₂-ZrB₂ powders – derived coatings. *Corros. Sci.*, 2021, vol. 189. Art. 109587. https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109587.
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Heat and mass transfer on the side surfaces of blunt nose parts of hypersonic aircraft. *High Temp.*, 2022, vol. 60, suppl. 2, pp. S288– S291. https://doi.org/10.1134/S0018151X21050060.
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Heat transfer with absorption in anisotropic thermal protection of high-temperature products. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki*, 2019, no. 5(86), pp. 35–49. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2019-5-35-49. (In Russian)
- Formalev V.F., Kolesnik S.A., Garibyan B.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer during aerodynamic heating of the nose parts of hypersonic aircraft. Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki, 2022, no. 1(100), pp. 107–121. https://doi.org/10.18598/1812-3368-2022-1-107-121. (In Russian)
- Formalev V.F., Garibyan B.A., Kolesnik S.A. Simulation of heat and mass transfer on blunt bodies under aerodynamic heating of high-speed aircraft. *High Temp.*, 2023, vol. 61, no. 3, pp. 365–371. https://doi.org/10.1134/S0018151X23030203.
- Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental solutions of the equations of classical and generalized heat conduction models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414. (In Russian)
- Kriven G., Kuznetsova E., Rabinskiy L. The study of the temperature field propagation in a nonlinear anisotropic space with the relaxation time of the heat flux. *AIP Conf. Proc.*, 2023, vol. 2910, art. 020204. https://doi.org/10.1063/5.0167863.
- Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Generalized unsteady thermal conductivity in a half-space. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4429–4437. https://doi.org/10.1134/S1995080223100086.
- Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows. Symmetry, 2022, vol. 14, no. 9, art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.

 Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.

Для цитирования: Тушавина О.В. Экспериментально-теоретическое определе-/ ние каталитических и излучающих характеристик антиокислительных и антиэрозионных покрытий высокоскоростных летательных аппаратов // Учен. зап. Казан. / ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 594–602. // https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.594-602.

For citation: Tushavina O.V. Experimental and theoretical study of catalytic and radiative characteristics of anti-oxidation and anti-erosion coatings for high-speed aircraft. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 594–602. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.594-602. (In Russian)

602

2024, Т. 166, кн. 4 С. 603–623 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.685: 622.276

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.603-623

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ МОДЕЛИ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА ПО ЗАМЕРАМ ДАВЛЕНИЯ В СКВАЖИНАХ. ЧАСТЬ 1: ОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ

Д.И. Усманов¹, К.А. Поташев¹, Д.Р. Салимьянова^{1,2}

 $^1 {\it K}$ азанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, 123182, Россия

Аннотация

Рассмотрен способ отыскания коэффициента в граничных условиях третьего рода в задаче пьезопроводности в нефтяном пласте на его внешнем контуре. Такой контур, как правило, задают из соображений экономии вычислительных ресурсов, и он не обладает особыми гидродинамическими свойствами.

Идентификация коэффициента в граничных условиях выполнена с помощью интегральной балансовой модели взаимодействия залежи с внешней областью пласта. Для этого решена оптимизационная задача приближения среднего пластового давления к значениям, полученным по замерам давления в скважинах. Применимость этого алгоритма оценена при различных геометрии внешнего контура, расположении скважин и режимах их работы в предположении об однородности пласта. Проведена оценка устойчивости алгоритма решения обратной задачи к погрешности замеров давления.

Изложенный подход представляет собой быстрый и относительно простой в реализации алгоритм решения стоящей проблемы – определения граничных условий в фильтрационной модели пласта, обеспечивающий хорошее приближение его гидродинамического взаимодействия с законтурной областью. На практике названная проблема вызывает существенные затруднения при адаптации модели из-за значительной неопределенности исходных данных на удалении от области залежи, разбуренной скважинами.

Ключевые слова: нефтяной пласт, фильтрационная модель, уравнение пьезопроводности, граничное условие, интегральная балансовая модель, замер пластового давления, адаптация, оптимизация, устойчивость

Введение

При построении фильтрационных моделей нефтяного пласта боковую границу расчетной области, как правило, максимально приближают к внешнему контуру нефтеносности для сокращения вычислительных затрат при моделировании. Определение размера законтурной области при моделировании фильтрационного процесса является предметом отдельного исследования, так как обычно неизвестен радиус зоны пониженного давления, который может уточняться при воспроизведении динамики пластового давления [1]. Приближение границы к скважинам, являющимся источниками возмущений в пласте, повышает сложность задания граничных условий в гидродинамической модели. В совокупности с низкой степенью изученности геологии контурной зоны из-за малого числа пробуренных в ней скважин максимальной степенью неопределенности при моделировании состояния нефтяных пластов обладает именно оценка водопритока через границы залежи [2–5].

При построении гидродинамической модели нефтяного резервуара наиболее трудоемким этапом является ее адаптация [6–11], состоящая в уточнении фильтрационно-емкостных свойств пласта, начальных и граничных условий для давления и насыщенности, продуктивности скважин. В условиях неопределенности перечисленных параметров процесс уточнения каждого из них предполагает выполнение многовариантных расчетов с целью минимизации их отклонения от реальных показателей. Очевидно, реализация такого подхода в полной постановке для всех искомых параметров в общем случае оказывается невозможной в силу чрезмерно больших затрат машинного времени. Поэтому большое число проводимых сегодня исследований направлено на разработку специальных упрощенных быстродействующих методик уточнения отдельных параметров гидродинамической модели пласта.

Одним из наиболее экономичных в отношении вычислительных ресурсов и в то же время корректно оценивающих физические параметры системы является метод материального баланса. Методы, основанные на модели материального баланса, развивались в условиях ограниченных вычислительных ресурсов и позволили получить относительно простой, но в то же время полезный аппарат для оценок начальных запасов, выявления вклада различных движущих механизмов в пласте и количественной оценки взаимодействия разрабатываемой залежи с окружающими водоносными горизонтами (так называемыми «аквиферами», от англ. «aquifer») [2,3,12].

Методы материального баланса не потеряли своей значимости с дальнейшим ростом вычислительных ресурсов и развитием методов численного моделирования и стали применяться как дополнение к ним в качестве инструмента первичного анализа гидродинамического поведения залежи, а также получения информации о характеристиках пласта, которую невозможно получить путем численного моделирования [13–17].

Основным назначением методов материального баланса является уточнение величины начальных запасов углеводородов и характера движущих сил в пласте, в том числе при взаимодействии с примыкающими водоносными горизонтами или другими залежами. При этом основное внимание должно быть сосредоточено на корректном учете параметров водопритока, поскольку допущенные при этом опибки могут значительно исказить основные показатели разработки, прогнозируемые моделью [16, 18–21]. Как правило, реализация метода материального баланса сводится к применению метода наименьших квадратов при анализе линейной регрессии между средним пластовым давлением и давлением, накопленным извлечением флюида из залежи. Подбираемые коэффициенты определяют начальные запасы углеводородов и интенсивность водопритока, для которой должна быть заранее задана некоторая приближенная функция, определяющая гидродинамическое поведение водоносного горизонта.

В качестве основных вариантов поведения аквифера используют модели Ван Эвердингена и Херста [22], Фетковича [23], а также Картера–Трейси [24]. Наибольшее распространение получили формулы постоянного, переменного водоносного горизонта и формулы Фетковича или Картера–Трейси [1]. Все названные модели аквифера требуют обработки исторических данных по разработке пласта для оснащения их параметрами. Наиболее достоверной считается модель Ван Эвердингена и Херста, поскольку она опирается на аналитическое решение уравнения пьезопроводности в радиальном водоносном слое, однако требует дополнительных вычислительных затрат для численного интегрирования полученных выражений или использования аппроксимирующих их функций. Рассмотрены случаи неограниченного аквифера и ограниченного с условием изоляции или постоянного давления на внешней границе. Модель Фетковича основана на концепции коэффициента продуктивности – на предположении о пропорциональности между притоком с аквифера и разностью между средним давлением в нем и давлением на границе залежи. При этом среднее давление в аквифере не является постоянным. Поэтому модель состоит из двух уравнений: 1) для скорости притока, аналогичного условиям третьего рода; 2) линейной связи падения давления в аквифере с накопленным оттоком из него жидкости, что эквивалентно изолированному водоносному горизонту фиксированного объема в линейно-упругом режиме. Определению подлежат коэффициент продуктивности и емкость аквифера. Данной моделью можно приблизить неограниченный аквифер [25], что будет эквивалентно заданию граничных условий третьего рода с постоянными коэффициентами. Модель Картера – Трейси вводит в модель Ван Эвердингена и Херста дополнительное предположение о кусочнопостоянном значении притока воды через границу на каждом временном промежутке. Поведение со временем среднего давления в аквифере может быть описано с помощью той или иной аппроксимирующей функции [5,26]. При этом параметры моделей аквифера заранее неизвестны и подбираются в ходе решения задач оптимизации из условий приближения модельных показателей разработки залежи к фактическим.

В настоящей работе изложена методика, позволяющая практически мгновенно идентифицировать коэффициент, определяющий запись граничных условий третьего рода в задаче расчета пластового давления, использовав лишь замеры давления в скважинах и интегральные фильтрационно-емкостные свойства всей залежи [27]. Для этого использована балансовая модель, которая позволяет перейти при моделировании нестационарной фильтрации от трехмерной постановки к задаче нулевой размерности. Алгоритм сводится к решению обратной задачи отыскания коэффициента в граничном условии, обеспечивающем наилучшее воспроизведение динамики среднего пластового давления, оцененной по замерам давления в скважинах. Эквивалентность балансовой модели нулевой размерности пространственной модели достигается интегрированием в задаче для давления в исходной постановке с граничными условиями, содержащими искомые коэффициенты. В качестве постоянной величины давления в записи граничного условия использовано начальное давление в невозмущенном пласте. Переход от среднего давления в залежи к среднему давлению на ее границе выполнен с помощью аналитических оценок, учитывающих расстановку скважин. Вместо задания наименее изученных свойств аквифера и функции поведения его среднего давления изложенный метод опирается лишь на допущение о возможности описания гидродинамической связи залежи с водоносным горизонтом с помощью условия третьего рода с постоянными коэффициентами.

Работоспособность метода проверена при различных вариантах расположения скважин относительно границы залежи, ее формы и произвольной истории режимов работы скважин в предположении об однородности пласта. Все результаты получены в условиях, когда величина пластового давления выше и не достигает давления насыщения (разгазирования).

1. Постановка задачи

Рассмотрим область V нефтяного пласта, в которой выполним гидродинамическое моделирование процесса его разработки. Область V ограничена сверху и снизу кровлей и подошвой пласта, а сбоку – вертикальной цилиндрической поверхностью Г. Направляющая поверхности Г задается экспертным способом так, чтобы она, с одной стороны, была удалена от скважин как источников возмущений в пласте, полностью охватывая область извлекаемых запасов и все пробуренные скважины, а с другой стороны, минимизировала область V для сокращения вычислительных затрат при численном моделировании. Распределение порового давления $p(t, \mathbf{x})$ (Па) в области V описано уравнением пьезопроводности [28]

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, \ \mathbf{x} \in V.$$
(1)

Здесь t – время (c); **х** – вектор пространственных координат (м); $\beta = m \beta_f + \beta_r$ – упругоемкость (1/Па); m – пористость породы коллектора (д.ед.); β_f и β_r – коэффициенты объемного сжатия жидкости и упругости пласта (1/Па). Поверхности пробуренных скважин при записи уравнения (1) считаются внутренними границами области V. При необходимости учета используемой в практике гидродинамического моделирования нефтяных пластов так называемой «песчанистости» η (д. ед.), равной отношению объема породы коллектора, содержащего гидродинамически связанный объем флюида, к общему объему пласта, в уравнении (1) вместо параметра β используем величину $\eta\beta$.

Скорость фильтрации ${\bf u}~({\rm m/c})$ флюида, насыщающего пласт, подчиняется закону Дарси

$$\mathbf{u} = -\sigma \,\nabla p, \quad \sigma = k \,\varphi/\mu, \tag{2}$$

где k – абсолютная проницаемость пласта (м²), который в рамках настоящего исследования считается однородным; μ – динамическая вязкость пластового флюида (Па·с); φ – коэффициент подвижности пластового флюида.

В начальный момент времени давление во всем пласте равно невозмущенному давлению p_0 , которое будем считать постоянной величиной, пренебрегая гидростатической разницей давления на фоне его изменения при эксплуатации месторождения

$$t = 0, \ \mathbf{x} \in V: \quad p = p_0. \tag{3}$$

Верхнюю и нижнюю границы залежи считаем непроницаемыми. На боковой границе Γ разрабатываемого пласта (залежи нефти) поставим граничное условие третьего рода для проекции скорости фильтрации u_n на внешнюю нормаль с использованием давления в невозмущенном пласте:

$$\mathbf{x} \in \Gamma: \quad u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = \alpha \frac{\sigma}{L} (p - p_0), \qquad (4)$$

где L – некоторый характерный размер для области V (м); безразмерный параметр α отражает энергетическое взаимодействие (интенсивность потока) между разрабатываемой залежью V и ее законтурной областью V_a – внешним (водоносным) резервуаром (aquifer, «аквифер»), расположенным за внешним контуром нефтеносности [29].

При решении задачи фильтрации в расширенной области пласта $V_e = V \bigcup V_a$, содержащей законтурную область V_a (рис. 1), вместо граничного условия (4) используем условие первого рода с невозмущенным давлением p_0 на внешней границе Γ_e области V_e :

$$\mathbf{x} \in \Gamma_e: \quad p = p_0. \tag{5}$$

Заметим, что параметры σ , α зависят от величины суммарной подвижности φ флюида, которая определяется локальным фазовым насыщением коллектора. Однако в данной работе эту величину считаем неизменной. Таким образом, область применения излагаемого метода ограничивается начальным периодом разработки залежи, когда поле насыщенности не успевает значительно измениться, либо случаем, когда вязкости фаз имеют небольшие отличия, а их фазовые проницаемости близки к линейным.



Рис. 1. Схема области залежи, разрабатываемой скважинами, и внешней законтурной области

Поскольку контур границы Г задается условно, параметр α граничного условия (4) на этапе построения модели неизвестен. В общем случае для его определения необходимо решить обратную по отношению к (1)–(4) задачу минимизации отклонения модельных значений пластового давления от значений, измеряемых на скважинах в процессе разработки. Такая задача предполагает многократное решение прямой задачи (1)–(4) с подбором α . При этом любое уточнение фильтрационно-емкостных свойств пласта, которое неизбежно происходит на этапе адаптации модели, вообще говоря, требует перестроения решения этой обратной задачи. Поскольку размерность расчетной сетки фильтрационной модели в области V может достигать $10^6, ..., 10^9$ узлов, то такой алгоритм не всегда является приемлемым из-за значительных вычислительных затрат.

Целью настоящей работы является получение быстрого, физически обоснованного способа отыскания единого для всей границы коэффициента α , обеспечивающего хорошее приближение задачи (1)–(3), (5) в расширенной до невозмущенной границы области V_e задачей (1)–(4) в области V, граница которой приближена к области нефтеносности. Полученное значение коэффициента α может использоваться как в качестве окончательного коэффициента в граничных условиях при дальнейшем численном гидродинамическом моделировании процесса разработки залежи, так и в качестве его первичной оценки для последующего локального уточнения.

Для получения быстрого алгоритма решения поставленной задачи использован метод материального баланса, предполагающий переход от исходной трехмерной задачи к задаче нулевой размерности. Все алгоритмы сформулированы в рамках предположений о наличии удаленного от залежи контура («контура питания») с невозмущенным давлением p_0 и об однородности пласта.

Перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \frac{1}{L}, \quad \bar{t} = t \frac{\sigma^0}{\beta L^2}, \quad \bar{p} = \frac{p - p_0}{\Delta p}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \frac{L}{\sigma^0 \Delta p}, \quad (6)$$

где Δp – характерное понижение пластового давления в процессе разработки;

 σ^0 — характерная проводимость пласта, которая в предположении его однородности всюду постоянна.

Опустив в дальнейшем для простоты верхнюю черту над безразмерными переменными, перепишем уравнения (1)–(5)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \ t > 0, \ \mathbf{x} \in V, \tag{1'}$$

$$\mathbf{u} = -\nabla p,\tag{2'}$$

$$t = 0, \ \mathbf{x} \in V : p = 0, \tag{3'}$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma : u_n = -\frac{\partial p}{\partial n} = \alpha p, \tag{4'}$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma_e : p = 0. \tag{5'}$$

2. Балансовая модель, вспомогательные соотношения и метод решения

2.1. Уравнение материального баланса. Переход к балансовой модели, осредненной по всему объему залежи, осуществим интегрированием уравнения (1') по области V:

$$|V| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \int_{\Gamma} u_n \mathrm{d}\gamma = q(t), \qquad (7)$$

$$P(t) = \frac{1}{|V|} \int_{V} p(t, \mathbf{x}) \, \mathrm{d}V.$$
(8)

Здесь |V| – объем области V; P(t) – среднее давление во всей залежи V в момент времени t; q(t) – суммарный мгновенный расход всех скважин в момент времени t.

Положив коэффициент α в условии (4') постоянным вдоль всей границы, перепишем второе слагаемое в левой части (7):

$$Q_{\Gamma}(t) = \int_{\Gamma} u_{n} d\gamma = \alpha \int_{\Gamma} p d\gamma = \alpha |\Gamma| p_{\Gamma}(t),$$
$$p_{\Gamma}(t) \equiv \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} p(t, \mathbf{x}) d\gamma.$$

Здесь $|\Gamma|$ – площадь боковой границы Γ залежи; p_{Γ} – среднее контурное давление, точнее, с учетом нормировки (6), отклонение среднего вдоль границы давления от начального пластового. Тогда уравнение (7) примет вид

$$|V| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \alpha |\Gamma| p_{\Gamma} (t) = q(t) .$$
(9)

Предположим, что отклонения от начального значения p_0 среднего давления в объеме залежи P(t) и среднего давления на ее границе $p_{\Gamma}(t)$ пропорциональны друг другу с коэффициентом θ , определяемым лишь структурой залежи и схемой расстановки скважин:

$$p_{\Gamma}(t) = \theta P(t) . \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в форме, допускающей его разрешимость относительно среднего давления в залежи P(t) с начальным условием согласно (3'):

$$t > 0: \quad |V| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + \mathbf{A}|\Gamma|P(t) = q(t), \quad P(0) = 0, \quad \mathbf{A} = \alpha\theta.$$
 (11)

Следуя традиционному алгоритму метода материального баланса, нужно проинтегрировать уравнение (11) по времени от начального до произвольного момента t:

$$\frac{Q(t)}{P(t)} = |V| + \frac{\mathcal{A}|\Gamma|}{P(t)}S(t), \quad Q(t) = \int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad S(t) = \int_0^t P(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Здесь Q(t) – накопленная за время t разница отбора и закачки жидкости в пласт через скважины; P – среднее давление в залежи, соответствующее с учетом нормировки (6) величине расширения пластового флюида. Далее, совмещая фактическую и модельную прямые, можно подобрать две константы линейной зависимости Q(S), определяющие начальный объем запасов нефти в залежи и константу потока с законтурной области [30]. Однако для этого необходимо заранее задать некоторое аналитическое или табулированное приближение функции P(t) для вычисления интеграла S(t), опираясь на частные представления о поведении законтурной области (аквифера). В алгоритме, излагаемом в настоящей работе, подобные приближения функции P(t) заранее не вводятся. Вместо этого выполняется приближенный пересчет множества фактических замеров пластового давления в скважинах в среднее давление во всей залежи, опираясь на упрощенную схематизацию ее разработки скважинами.

2.2. Связь среднего давления в залежи и на ее внешней границе. Сначала найдем способ вычисления коэффициента θ , устанавливающего соотношение (10). Общий вид связи коэффициента θ с параметрами моделируемой системы пласта и скважин получим в характерном частном случае, допускающем аналитическую запись решения.

Рассмотрим стационарную задачу радиальной фильтрации в области V_e , являющейся круговым цилиндром радиуса R. Внутри V_e расположена подобласть V_w , коаксиального с V_e кругового цилиндра радиуса $r_w \leq R$. Радиус r_w является эффективным радиусом кругового цилиндра, содержащего все пробуренные скважины (рис. 2). Область V_w будем называть «областью скважин». Область V гидродинамического моделирования залежи будем считать круговым цилиндром радиуса R_{Γ} , соосным к V_e и V_w . Граница области V, как правило, устанавливается на некотором расстоянии снаружи от области V_w для возможности задания более стабильных граничных условий за счет снижения возмущений от ближайших к границе действующих скважин и в то же время не достигающей внешней невозмущенной границы области V_e для сокращения вычислительных затрат.

В нормировке (6) в качестве характерного линейного масштаба L будем использовать радиус области V. Тогда $R_{\Gamma} = 1, r_w \leq 1, R > 1.$

На границе пласта выполняется условие (5')

$$r = R : p = 0.$$

На границе области скважин зададим условие первого рода

$$r = r_w : p = p_w,$$

где p_w – давление, среднее в V_w . Решение такой задачи известно [28]:

$$p(r) = p_w \frac{\ln(r/R)}{\ln(r_w/R)}, \ r_w \le r \le R.$$

$$(12)$$



Рис. 2. а) Модельная схема расположения границ области скважин и залежи, б) отношение θ контурного давления к пластовому при R = 2(1), R = e(2), R = 5(3)

Продолжим функцию (12) на отрезке $[0; r_w]$ средним значением p_w :

$$p(r) = \begin{cases} p_w, & 0 \le r \le r_w, \\ p_w \frac{\ln(r/R)}{\ln(r_w/R)}, & r_w \le r \le R. \end{cases}$$
(13)

Найдем из (13) выражения для P и p_{Γ} :

$$P = \frac{p_w \left(1 - r_w^2 + 2\ln R\right)}{2\ln \left(R/r_w\right)}, \quad p_\Gamma = p_w \frac{\ln R}{\ln \left(R/r_w\right)}.$$
 (14)

Тогда множитель θ в (10) равен

$$\theta\left(R, r_w\right) = \frac{p_{\Gamma}}{P} = \frac{2\ln R}{1 - r_w^2 + 2\ln R}.$$
(15)

Зависимость $\theta(R, r_w)$ при фиксированных значениях R показана на рис. 2, б).

При равномерной сетке скважин радиус r_w области скважин V_w можно оценить из условия $\pi\,r_w^2\approx N_w\,\pi\,r_{\min}^2,$ откуда

$$r_w \approx r_{\min} \sqrt{N_w},\tag{16}$$

где N_w – количество скважин, r_{\min} – половина среднего расстояния между ближайшими скважинами.

2.3. Выражение среднего пластового давления через замеры в скважинах. Уравнение балансовой модели (11) решим относительно среднего давления P в залежи V. Для решения обратной к (11) задачи при определении коэффициента A необходимо сравнивать расчетные значения P с «фактическими». Поскольку непосредственно измерить среднее давление во всем пласте невозможно, то необходимо связать эту величину с показателями, допускающими наблюдение. С этой целью будем использовать замеры пластового давления в скважинах γ . Напомним, что под «пластовым давлением» в скважине понимается та величина давления, которая установилась бы в точке замера при условии длительного бездействия данной скважины, и поэтому измеряется после ее остановки [31]. В рамках настоящей работы будем считать, что на каждой скважине γ имеются замеры пластового давления $p_{\gamma}(t_i)$ на каждый интересующий нас момент времени t_i $(i = 1, ..., N_T)$, что может быть достигнуто, например, аппроксимацией по замерам, ближайшим по времени.

Соотнесем с каждой скважиной γ некоторую близкую к ней область пласта V_{γ} так, что $\bigcup_{\gamma=1}^{N_w} V_{\gamma} = V_w$. Полагая, что в области V_{γ} пластовое давление близко к замеру p_{γ} , аналогично выражению (8) получим приближенное выражение среднего давления p_w в области скважин V_w через замеры давления в скважинах в каждый момент времени t_i :

$$p_w(t_i) \approx \frac{1}{|V_w|} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_\gamma(t_i) |V_\gamma|.$$

Положим, что как и при записи (16), сетку скважин можно считать равномерной, $|V_\gamma|\approx |V_w|/N_w$, и тогда

$$p_w(t_i) \approx \frac{1}{N_w} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_\gamma(t_i).$$
(17)

Связь искомой величины P с величиной p_w получим с помощью (14) и (15):

$$P = \frac{\lambda}{\theta} p_w, \quad \lambda(R, r_w) = \frac{\ln R}{\ln \left(\frac{R}{r_w} \right)}.$$
(18)

Подставив (17) в (18), найдем необходимое выражение среднего давления в залежи через замеры пластового давления в скважинах:

$$P(t_i) \approx P_i = \frac{\lambda}{\theta} \frac{1}{N_w} \sum_{\gamma=1}^{N_w} p_{\gamma}(t_i).$$
(19)

Далее величины P_i будем называть «замерами» среднего пластового давления.

2.4. Алгоритм идентификации коэффициента граничных условий.

Параметр A найдем из решения задачи минимизации уклонения расчетных величин от замеров среднего пластового давления в квадратичной метрике:

$$E\left(\tilde{A}\right) = \inf_{A} E^{2}(A), \quad E^{2}(A) = \frac{1}{N_{T}} \sum_{i=1}^{N_{T}} (P(t_{i}; A) - P_{i})^{2},$$
 (20)

где $P(t_i; A)$ – решение задачи (11) при некотором значении A в момент времени t_i .

Поскольку замеры пластового давления на скважинах не являются точными, а выражения, связывающие средние давления в разных областях пласта и замеры давления, являются приближенными, решение задачи (20) представляет собой метод подбора приближенного квазирешения \widetilde{A} [32]. С его помощью вычислим приближенное значение коэффициента в граничном условии (4')

$$\tilde{\alpha} = \mathbf{A}/\theta. \tag{21}$$

Согласно практике гидродинамического моделирования нефтяных пластов предположим, что до решения задачи (20) уже известны все геометрические и фильтрационно-емкостные свойства пласта в области V, расположение и режимы работы скважин, а также замеры в них пластового давления. Итоговый алгоритм определения коэффициента граничных условий (4') выглядит следующим образом:

- 1. По известным данным о характеристиках пласта и его разработки определим нормировочные величины (6) $L = R_{\Gamma}, \beta, \Delta p, \sigma^0$ и коэффициенты уравнения балансовой модели (11) $|V|, |\Gamma|, q(t)$.
- 2. По расстановке скважин с помощью (16) найдем радиус r_w .
- 3. Экспертным образом зададим радиус R контура питания и вычислим θ , λ по (15), (18).
- 4. Замеры давления в скважинах пересчитаем в P_i согласно (19) с подстановкой λ/θ .
- 5. Найдем коэффициент А из решения обратной задачи (20).
- 6. Коэффициент граничных условий $\tilde{\alpha}$ вычислим по формуле (21) с подстановкой θ .

Для решения одномерной задачи минимизации (20) достаточно применения метода золотого сечения – невязка 10⁻⁶ достигается всего за 10,..., 30 итераций. На каждом итерационном шаге данного оптимизационного алгоритма задача Коши (11) решалась численно методом конечных разностей по явной схеме.

2.5. Замечания о радиусе внешнего контура питания. Отметим, что на практике расстояние R от центра области V_w , разбуренной скважинами, до контура невозмущенного давления неизвестно. Однако, принимая во внимание логарифмическое поведение давления вблизи скважин, нормированное расстояние $R \approx 3$, т. е. трехкратный размер залежи, можно считать бесконечно удаленным от разбуренной области, где давление будет близко к невозмущенному значению. Поэтому в дальнейшем будем дополнительно оценивать достоверность следующего приближения данной величины, позволяющего значительно упростить все используемые выражения

$$R \approx R_e = e. \tag{22}$$

В частности, выражения (15) и (18) для величин θ и λ примут вид

$$\theta_e\left(r_w\right) = \theta\left(R_e, r_w\right) = \frac{2}{3 - r_w^2},\tag{23}$$

$$\lambda_e(r_w) = \lambda(R_e, r_w) = \frac{1}{1 - \ln r_w}.$$
(24)

Оценим величины искажения коэффициента α в граничных условиях и полученного с его помощью пластового давления при упрощенном способе (22) задания радиуса R. Величины, найденные при истинном значении R, будем называть «исходными», а вычисленные при приближенном значении R_e – «приближенными», обозначая их нижним индексом «e».

Согласно (19) с подстановкой (15), (18), (23) и (24) степень искажения замеров среднего пластового давления есть

$$\frac{P_{ie}}{P_i} = \frac{\lambda_e/\theta_e}{\lambda/\theta} = \frac{(3 - r_w^2)\ln(R/r_w)}{(1 - r_w^2 + 2\ln R)(1 - \ln r_w)} \equiv \Pi.$$
 (25)

Запишем входящие в (25) отношения исходных и приближенных коэффициентов θ, λ :

$$\Theta \equiv \frac{\theta_e}{\theta} = \frac{1 - r_w^2 + 2\ln R}{(3 - r_w^2)\ln R}, \quad \Lambda \equiv \frac{\lambda_e}{\lambda} = \frac{\ln \left(R/r_w\right)}{\ln R \left(1 - \ln r_w\right)}, \quad \Pi = \frac{\Lambda}{\Theta}.$$
 (26)

Найденный из решения задачи (20) коэффициент A_e будет соответствовать задаче (11) относительно давления, искаженного в П раз, с тем же начальным условием:

$$t > 0: |V| \frac{\mathrm{d}(\Pi P)}{\mathrm{d}t} + \mathcal{A}_{e} |\Gamma| \Pi P(t) = q(t), \ P(0) = 0.$$
(27)

Из отношения уравнений задач (27) и (11) получим

$$\frac{\mathbf{A}_{e}}{\mathbf{A}} \Pi = \frac{q\left(t\right) - |V| \Pi P\left(t\right)}{q\left(t\right) - |V| \dot{P}\left(t\right)}, \quad \dot{P}\left(t\right) \equiv \frac{\mathrm{d}P\left(t\right)}{\mathrm{d}t}.$$

На временах, превышающих характерное время установления давления после изменения дебита скважин, производная давления по времени мала. Поэтому для месторождений, работающих преимущественно в квазистационарном режиме или в условиях медленно изменяющегося суммарного дебита скважин, получим оценку

$$A_e \approx A/\Pi. \tag{28}$$

Подставив (28) и (26) в (21), получим связь значений α_e и α :

$$\alpha_e \approx \alpha \frac{\mathbf{A}_e \theta}{\theta_e \mathbf{A}} = \alpha \frac{1}{\Pi \Theta} = \alpha \frac{1}{\Lambda}.$$

Теперь из анализа уравнения (9) следует оценка искажения расчетного среднего давления на границе, следовательно, и в пласте за счет приближения (22):

$$P_e/P \approx \Lambda$$

На рис. 3 показаны зависимости отношений Π, Θ, Λ от величины R при различных отношениях радиуса r_w области скважин V_w к радиусу моделируемой залежи V. Область близости отношения Λ к единице свидетельствует о допустимости приближения (22) с точки зрения малой погрешности в расчете пластового давления. Согласно рис. 3, в) приближение (22) не приводит к погрешности более 5% в довольно широком интервале значений истинного радиуса контура питания R, причем этот интервал значительно расширяется с приближением границы области скважин V_w к границе моделируемой области V, когда $r_w \to 1$. Ниже эти оценки подтверждены на основе вычислительного эксперимента.



Рис. 3. Зависимость отношений Π , Θ , Λ от истинного радиуса контура питания при фиксированных значениях радиусах области скважин: 1) $r_w = 0.75$, 2) $r_w = 0.9$, 3) $r_w = 0.95$

3. Результаты и обсуждение

3.1. Алгоритм апробации. Первичная оценка достоверности разработанного алгоритма подбора коэффициента в граничных условиях, изложенного в п. 2.4, выполнялась с использованием так называемых «синтетических» (искусственно созданных) моделей пласта по следующему алгоритму:

- 1. Строим численное решение задачи (1')-(3'), (5') в расширенной до внешней невозмущенной границы области V_e в период времени $t \in (0,T)$, по результатам которого вычислим:
 - а) значения пластового давления $p_{\gamma}(t_i)$ в области каждой скважины γ , называемые в дальнейшем «замерами» в моменты t_i ,
 - б) «истинные» величины среднего давления $p_w(t_i)$ в области скважин V_w в моменты t_i .
- 2. По интегральным фильтрационно-емкостным и геометрическим параметрам пласта в области V и «замерам» пластового давления $p_{\gamma}(t_i)$ согласно алгоритму, описанному в разделе 2.5, найдем коэффициент $\tilde{\alpha}$.
- 3. Построим численное решение задачи (1')-(4') в ограниченной области V с коэффициентом $\tilde{\alpha}$ в граничных условиях (4'), по результатам вычислим:
 - а) приближенные значения среднего давления $\widetilde{p_{w}}\left(t_{i}\right)$ в области скважин $V_{w}\,,$
 - б) погрешность модели (1')–(4') в области V_w по величине отклонения ε_p^2 :

$$\varepsilon_p^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\widetilde{p_w} - p_w\right)^2 \mathrm{d}t \approx \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \left(\widetilde{p_w}\left(t_i\right) - p_w\left(t_i\right)\right)^2.$$
(29)

Таким образом, допустимость приближения перетока через границу залежи граничным условием третьего рода (4') с постоянными коэффициентами будет оценена по точности воспроизведения динамики среднего пластового давления в области скважин, которое, как правило, и представляет основной интерес для прогноза энергетического состояния пласта и проектирования системы поддержания пластового давления.

Представленная оценка является первичной в той степени, в которой была выполнена идеализация модели пласта: а) пласт однородный и постоянной толщины; б) скважины вертикальные, совершенные по степени и характеру вскрытия пласта; в) удаленный контур питания Γ_e с фиксированным невозмущенным давлением – круговой радиуса R. При этом варьировались: а) форма контура Γ ограниченной гидродинамической модели пласта, б) расстановка скважин в этой области, в) режимы работы скважин (рис. 4). Кроме того, была исследована чувствительность алгоритма к погрешности замеров давления на скважинах. Таким образом, упрощение модели пласта касалось в основном второстепенных факторов, влияние которых и способы его сокращения на представленный алгоритм рассмотрены ниже.

3.2. Размер ограниченной модели и шаг сетки скважин. Влияние радиуса R_{Γ} ограниченной области V модели пласта на погрешность предложенного алгоритма оценивалось при двух фиксированных расстановках скважин со средним шагом $d = r_w/6$ (109 скважин) и $d = 5r_w/12$ (21 скважина). Во всех расчетах были зафиксированы размерные величины радиусов r_w и $R = 5 r_w$. Поэтому увеличение размерного радиуса R_{Γ} от r_w до R соответствует уменьшению нормированного радиуса $\bar{R} = R/R_{\Gamma}$; от 5 до 1 соответственно.



Рис. 4. Зависимость от времени t (годы) показателей разработки при переменных режимах работы скважин: 1 – среднее давление в залежи (атм); 2 – суммарный дебит скважин (тыс. м³/сут)

На рис. 5, а) показано сравнение погрешности вычисления среднего давления в обозначенных условиях при использовании исходного θ (15) и приближенного θ_e (23) коэффициентов. Применение приближения θ_e вместо коэффициента θ приводит к приросту погрешности вычислений до 6% при удалении радиуса ограниченной модели от величины R/e в сторону R. При $R/R_{\Gamma} = e$ погрешности в обоих случаях, очевидно, совпадают. При уменьшении радиуса модели от R/eк r_w применение приближения θ_e снижает погрешность вычислений в среднем на 3% по сравнению с использованием исходного коэффициента θ . Это демонстрирует возможность использования приближения θ_e , которое в отличие от θ снимает затруднения, связанные с заданием неизвестного на практике расстояния R до удаленного контура питания. При этом разумный выбор удаленности контура ограниченной модели от области скважин позволяет снизить суммарную погрешность вычислений до уровня всего 6–7%. Поэтому во всех последующих оценках будет использоваться приближение θ_e , как имеющее наибольший интерес для практической реализации.



Рис. 5. Погрешность расчета среднего давления при исходном θ (1) и упрощенном θ_e (2) коэффициентах в зависимости от а) радиуса ограниченной модели: тонкая линия – $d = 5r_w/12$; утолщенная линия – $d = r_w/6$; б) среднего расстояния между скважинами

Как и следовало ожидать (рис. 5, а), б)), увеличение среднего расстояния между скважинами, имеющими в общем случае разные забойные давления, приводит к росту погрешности вычислений. Однако даже более чем двукратное увеличение среднего шага сетки скважин увеличивает эту погрешность в среднем лишь на 2-3%. Во всех дальнейших оценках был использован вариант шага сетки скважин $d = r_w/6$, как более характерный в реальных условиях.

3.3. Форма контура ограниченной модели. Отдельный интерес представляет применимость изложенного алгоритма, основанного на предположении о круговой концентрической форме границы Γ модельной области V, в условиях, когда это допущение нарушается. С этой целью были рассмотрены два варианта искажения границы Γ : 1) ее замена на правильный многоугольник с N гранями с сохранением положения центра; 2) ее замена на эллиптический контур, в одном из фокусов которого находится центр области скважин V_w (рис. 6). В обоих вариантах площадь залежи фиксирована и равна $S = \pi (R/e)^2$.



Рис. 6. Зависимость погрешности от формы контура ограниченной модели: а) в виде правильного многоугольника, б) в виде эллипса; в) схема расположения эллиптической границы и области скважин

Уже для квадратной формы области V, когда N = 4, погрешность вычислений приближается к уровню 10 % и снижается до ранее указанного уровня 6–7 %, начиная с числа граней N = 6. Для варианта эллиптической формы контура Г варьировалось расстояние $D = F_1F_2$ между фокусами (рис. 6, в)). Нулевое расстояние D = 0 соответствует окружности, концентрической с областью V_w , когда погрешность не превосходит 7 %, а при удалении фокусов друг от друга на расстояние до двукратного радиуса области V_w не приводит к превышению погрешности до уровня 9 % (рис. 6, б)). Полученные результаты свидетельствуют о применимости предложенного алгоритма при значительной вариации форм границы моделируемой залежи и расположения в ней области скважин.

3.4. Чувствительность алгоритма к погрешности замеров давления. Как было сказано ранее, в настоящей работе метод подбора приближенного квазирешения применялся в том числе из-за наличия некоторой погрешности замеров пластового давления в скважинах. В связи с этим для оценки применимости алгоритма решения оптимизационной задачи (20) необходимо было исследовать его устойчивость и чувствительность по отношению к отклонениям замеров давления от истинных величин. Для этого вместо «точных» значений $p_{\gamma}(t_i)$ в момент замера t_i в (19) были использованы их зашумленные значения

$$\bar{p}_{\gamma}\left(t_{i}\right) = p_{\gamma}\left(t_{i}\right)\left(1 + \varepsilon_{\gamma i}\right), \ i = 1, ..., N_{T},\tag{30}$$

где $\varepsilon_{\gamma i}$ – случайные величины с нормальным законом распределения N $(0, \sigma^2)$; $\sigma \in [0, 1]$ – уровень шума. Согласно правилу трех сигм величина 2σ определяет

интервал, в который попадает генерируемый шум с вероятностью 95.45%. Были рассмотрены варианты $\sigma = 0.01$, 0.1 и наиболее интересные для практических задач периоды τ замеров давления, соответствующие размерным величинам 1, 3 и 6 месяцев. При фиксации параметров σ и τ генерировались по 1000 реализаций наборов независимых случайных величин $\varepsilon_{\gamma i}$. Для каждой реализации строилось решение оптимизационной задачи (20) с подстановкой в (19) зашумленных значений (30) и рассчитывалась погрешность ε_p по (29) с подстановкой в (17) истинных замеров давления без зашумления. Анализировалась функция плотности распределения случайной величины ε_p при фиксированных (σ, τ).

Поскольку зависимость погрешности вычисления среднего давления по предложенному алгоритму от величины ошибки замеров ограничена (рис. 7), то можно утверждать, что предложенный алгоритм устойчив по отношению к данному фактору. Даже при шуме в замерах давления на уровне 10% погрешность расчета динамики среднего давления в пласте не отклоняется более чем на 2% от исходной величины. При уровне шума в 1% такое отклонение становится вообще незначительным. Кроме того, сокращение периода замеров давления и, следовательно, увеличение их общего количества способно кратно понизить дисперсию ошибки вычисления динамики среднего пластового давления.



Рис. 7. Распределение погрешности вычисления среднего пластового давления по реализациям зашумления замеров давления в скважинах: а) $\sigma = 0.1$, б) $\sigma = 0.01$; кривые 1, 2, 3 – период замеров $\tau = 6, 3, 1$ мес. соответственно

Заключение

Предложена методика быстрого подбора коэффициента в граничных условиях задачи расчета давления в фильтрационной модели нефтяного пласта. Методика основана на использовании балансовой модели нулевой размерности и поэтому не требует решения нестационарных задач фильтрации в пространственной постановке. Это на порядки сокращает машинное время решения задачи идентификации коэффициента в граничных условиях. Время работы алгоритма составляет несколько секунд, что в принципе несопоставимо с затрачиваемым машинным временем подбора коэффициента путем многократного численного моделирования нестационарной фильтрации в исходной трехмерной постановке. Рассмотрен вариант граничных условий третьего рода с постоянными коэффициентами. В этом случае в качестве входных данных достаточно задать средние фильтрационноемкостные свойства пласта, шаг сетки скважин, историю их дебитов и замеров пластового давления. Для реализации алгоритма нет необходимости задания геометрии и фильтрационных параметров внешнего контура залежи, который, как правило, выбирается из соображений экономии вычислительных ресурсов и не обладает особыми гидродинамическими свойствами. В рамках допущений об однородности пласта и однородности граничных условий показана достаточно высокая точность предложенного упрощенного подхода при вариации схем расположения скважин, режимов их работы и геометрии границы залежи. В широком диапазоне параметров моделируемой системы погрешность расчета среднего пластового давления по пространственной модели с найденным коэффициентом граничных условий не превосходит 6–9%. Показана устойчивость предложенного алгоритма к погрешности замеров пластового давления в скважинах. Получены оценки степени снижения чувствительности алгоритма к случайным ошибкам измерения давления при увеличении частоты замеров.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при финансовой поддержке НИЦ «Курчатовский институт» в рамках государственного задания FNEF-2024-0016.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. РД 153-39.0-047-00. Регламент по созданию постоянно действующих геологотехнологических моделей нефтяных и газонефтяных месторождений. М.: Минтопэнерго, 2000. 130 с.
- 2. Pirson S.J. Oil Reservoir Engineering. New York, NY: McGraw-Hill, 1958. 735 p.
- 3. Craft B.C., Hawkins M.F. Applied Petroleum Reservoir Engineering / Terry R.E. (Rev.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1991. 431 p.
- 4. *Dake L.P.* The Practice of Reservoir Engineering. Ser.: Developments in Petroleum Science. V. 36. Elsevier Sci., 2001. 572 p.
- Omeke J.E., Nwachukwu A., Awo R.O., Boniface O., Uche I.N. A new approach to aquifer influx calculation for finite aquifer system // Proc. SPE Nigeria Annu. Int. Conf. Exhib. (Abuja, Nigeria, July 2011). Art. SPE-150733-MS. Abuja, 2011. https://doi.org/10.2118/150733-MS.
- 6. Ahmed T.H. Reservoir Engineering Handbook. Houston, TX: Gulf Publ., 2000. xiv, 863 p.
- Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. London: Appl. Sci. Publ., 1979. P. 135–139.
- Gilman J.R., Ozgen C. Reservoir Simulation: History Matching and Forecasting. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2013. 120 p. https://doi.org/10.2118/9781613992920.
- Mohaghegh S.D. Data-Driven Reservoir Modeling. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2017. https://doi.org/10.2118/9781613995600. 166 p.
- Dake L.P. Fundamentals of Reservoir Engineering. Ser.: Developments in Petroleum Science. V. 8. Elsevier, 1983. 462 p.
- Towler B.F. Fundamental Principles of Reservoir Engineering. Ser.: SPE Textbook Series. V. 8. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2002. 232 p.
- 12. *Muskat M.* Physical Principles of Oil Production. Ser.: International Series in Pure and Applied Physics. New York, NY: McGraw-Hill Book Co., 1949. P. 406–411.
- Farough A.S.M., Nielsen R.F. The material balance approach vs reservoir simulation as an aid to understanding reservoir mechanics // Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, October 1970. Soc. Pet. Eng., 1970. Art. SPE-3080-MS. https://doi.org/10.2118/3080-MS.

- Levine J.S., Prats M. The calculated performance of solution-gas-drive reservoirs // SPE J. 1961. V. 1, No 3. Art. SPE-1520-G. P. 142–152. https://doi.org/10.2118/1520-G.
- Pletcher J.L. Improvements to reservoir material-balance methods // SPE Reservoir Eval. Eng. 2002. V. 5, No 1. Art. SPE-75354-PA. P. 49–59. https://doi.org/10.2118/75354-PA.
- Esor E., Dresda S., Monico C. Use of material balance to enhance 3D reservoir simulation: A case study // Proc. SPE Annu. Tech. Conf. Exhib., Houston, Texas, September 2004. SPE, 2004. Art. SPE-90362-MS. https://doi.org/10.2118/90362-MS.
- 17. MBAL: Analytical Reservoir Engineering Toolkit. Petroleum Engineering Software, IPM Suite, Petex, PE Limited, 2024.
- Robinson M.P. Pressure interference correction to the material balance equation for waterdrive reservoirs using a digital computer // Trans. AIME. 1958. V. 213, No 1. Art. SPE-1006-G. P. 418–422. https://doi.org/10.2118/1006-G.
- Irby T.L., Zurawsky L.G., Clapham E.E. Material-balance analysis of a water-drive reservoir with an unusual development history // J. Pet. Technol. 1962. V. 14, No 1. Art. SPE-70-PA. P. 37–42. https://doi.org/10.2118/70-PA.
- Sills S.R. Improved material-balance regression analysis for waterdrive oil and gas reservoirs // SPE Reservoir Eng. 1996. V. 11, No. 2. Art. SPE-28630-PA. P. 127–134. https://doi.org/10.2118/28630-PA.
- Yildiz T., Khosravi A. An analytical bottomwaterdrive aquifer model for material-balance analysis // SPE Reservoir Eval. Eng. 2007. V. 10, No 6. Art. PE-103283-PA. P. 618–628. https://doi.org/10.2118/103283-PA.
- Van Everdingen A.F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs // J. Pet. Technol. 1949. V. 1, No 12. Art. SPE-949305-G. P. 305-324. https://doi.org/10.2118/949305-G.
- Fetkovich M.J. A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems // J. Pet. Technol. 1971. V. 23, No 7. Art. SPE-2603-PA. P. 814–828. https://doi.org/10.2118/2603-PA.
- Carter R.D., Tracy G.W. An improved method for calculating water influx // Trans. AIME. 1960. V. 219, No 1. Art. SPE-1626-G. P. 415–417. https://doi.org/10.2118/1626-G.
- 25. Lee J., Wattenbarger R. Gas Reservoir Engineering. Ser.: SPE Textbook Ser. V. 5. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 1996. 349 p.
- Edwardson M.L., Girner H.M., Parkinson H.R., Williams C.D., Matthews C.S. Calculation of formation temperature disturbances caused by mud circulation // J. Pet. Technol. 1962. V. 14. No 4. Art. SPE-124-PA. P. 416–426. https://doi.org/10.2118/124-PA.
- Usmanov D., Potashev K., Filatov E., Ganiev R. Identification of the boundary conditions of the reservoir hydrodynamic model by reservoir pressure measurements in wells // AIP Conf. Proc. 2024. V. 3119. No 1. Art. 040006. https://doi.org/10.1063/5.0214869.
- Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 212 с.
- Мазо А.Б., Поташев К.А. Моделирование разработки нефтяного пласта методом суперэлементов с локальной детализацией решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. Т. 159, № 3. С. 327–339.
- Havlena D., Odeh A.S. The material balance as an equation of a straight line // J. Pet. Technol. 1963. V. 15, No 8. P. 896–900. https://doi.org/10.2118/559-PA.
- Kamal M.M. Transient Well Testing. SPE Monogr. V. 23. Ser.: Henry L. Doherty Series. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2009. 850 p. https://doi.org/10.2118/9781555631413.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.

Поступила в редакцию 12.08.2024 Принята к публикации 5.11.2024

Усманов Дамир Ильнурович, магистрант, лаборант-исследователь Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: damirusm01@gmail.com

Поташев Константин Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *KPotashev@mail.ru*

Салимьянова Дилара Радиковна, магистрант Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, младший научный сотрудник

Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» ул. Академика Курчатова, д. 1, г. Москва, 123182, Россия E-mail: *DiRSalimyanova@stud.kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print) ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 603-623

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.603-623

> Identifying Boundary Conditions of an Oil Reservoir Flow Model from Well Pressure Measurements. Part 1: Homogeneous Reservoir

> > D.I. Usmanov^{a*}, K.A. Potashev^{a**}, D.R. Salimyanova^{a,b***}

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

^bNational Research Centre "Kurchatov Institute", Moscow, 123182 Russia

E-mail: *damirusm01@gmail.com, **KPotashev@mail.ru, ***DiRSalimyanova@stud.kpfu.ru

Received August 12, 2024; Accepted November 5, 2024

Abstract

A method was outlined for determining the coefficient of third-kind boundary conditions of the piezoconductivity problem in an oil reservoir, particularly on its external contour, which has, as a rule, no specific hydrodynamic properties and is set to reduce computational costs. The coefficient was determined using an integral balance model of an interaction between the oil deposit and the outer region of the reservoir. The optimization problem of approximating the average reservoir pressure to the values obtained from the well pressure measurements was solved. Assuming the homogeneity of the reservoir, the applicability of the algorithm was assessed under various geometries of the external contour, well placements, and operating conditions. The stability of the algorithm for solving the inverse problem was analyzed against pressure measurement errors. The proposed approach offers a relatively simple algorithm for defining the boundary conditions of a reservoir flow model, which enables a good approximation of the hydrodynamic interaction of the reservoir with its outer region. However, due to uncertainties in the initial data for regions distant from the well-drilled area of the reservoir, significant difficulties remain in calibrating the model.

Keywords: oil reservoir, flow model, piezoconductivity equation, boundary condition, integral balance model, reservoir pressure measurement, adaptation, optimization, stability

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030) and performed as part of state assignment no. FNEF-2024-0016 to the National Research Centre "Kurchatov Institute."

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Schematic layout of the well-drilled area and the outer region of the reservoir.

Fig. 2. a) Model layout of the well and deposit boundaries, b) θ ratio of the contour pressure to the reservoir pressure for R = 2(1), R = e(2), R = 5(3).

Fig. 3. Dependence of Π , Θ , Λ on the actual external contour radius for fixed well radius values: 1) $r_w = 0.75$, 2) $r_w = 0.9$, 3) $r_w = 0.95$.

Fig. 4. Dependence of the development parameters on time t (years) under various well operating conditions: 1 – average deposit pressure (atm); 2 – total well flow rate (thousand m³/day).

Fig. 5. Errors in calculating the average pressure from the original θ (1) and simplified θ_e (2) coefficients depending on a) the radius of the limited model: thin line $-d = 5r_w/12$; thick line $-d = r_w/6$; b) the average distance between the wells.

Fig. 6. Dependence of errors on the contour shape of the limited model: a) as a regular polygon; b) as an ellipse; c) schematic representation of the elliptical boundary and well area.

Fig. 7. Distribution of errors in calculating the average reservoir pressure considering the pressure measurement noise in the wells: a) $\sigma = 0.1$, b) $\sigma = 0.01$; curves 1, 2, 3 correspond to the measurement intervals of $\tau = 6, 3, 1$ months, respectively.

References

- Guidance Document 153-39.0-047-00. Guidelines for developing continuous geotechnological models of oil and oil-gas fields. Moscow, Mintopenergo, 2000. 130 p. (In Russian)
- 2. Pirson S.J. Oil Reservoir Engineering. New York, NY, McGraw-Hill, 1958. 735 p.
- 3. Craft B.C., Hawkins M.F. *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. Terry R.E. (Rev.). Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1991. 431 p.
- 4. Dake L.P. *The Practice of Reservoir Engineering*. Ser.: Developments in Petroleum Science. Vol. 36. Elsevier Sci., 2001. 572 p.
- Omeke J.E., Nwachukwu A., Awo R.O., Boniface O., Uche I.N. A new approach to aquifer influx calculation for finite aquifer system. *Proc. SPE Nigeria Annu. Int. Conf. Exhib.* (Abuja, Nigeria, July 2011). Art. SPE-150733-MS. Abuja, 2011. https://doi.org/10.2118/150733-MS.
- 6. Ahmed T.H. Reservoir Engineering Handbook. Houston, TX, Gulf Publ., 2000. xiv, 863 p.
- Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. London, Appl. Sci. Publ., 1979. P. 135–139.
- Gilman J.R., Ozgen C. Reservoir Simulation: History Matching and Forecasting. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2013. 120 p. https://doi.org/10.2118/9781613992920.

- Mohaghegh S.D. Data-Driven Reservoir Modeling. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2017. https://doi.org/10.2118/9781613995600. 166 p.
- Dake L.P. Fundamentals of Reservoir Engineering. Ser.: Developments in Petroleum Science. Vol. 8. Elsevier, 1983. 462 p.
- Towler B.F. Fundamental Principles of Reservoir Engineering. Ser.: SPE Textbook Series. Vol. 8. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2002. 232 p.
- 12. Muskat M. *Physical Principles of Oil Production*. Ser.: International Series in Pure and Applied Physics. New York, NY, McGraw-Hill Book Co., 1949, pp. 406–411.
- Farough A.S.M., Nielsen R.F. The material balance approach vs reservoir simulation as an aid to understanding reservoir mechanics. *Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, October 1970.* Soc. Pet. Eng., 1970, art. SPE-3080-MS. https://doi.org/10.2118/3080-MS.
- Levine J.S., Prats M. The calculated performance of solution-gas-drive reservoirs. SPE J., 1961, vol. 1, no. 3, art. SPE-1520-G, pp. 142–152. https://doi.org/10.2118/1520-G.
- Pletcher J.L. Improvements to reservoir material-balance methods. SPE Reservoir Eval. Eng., 2002, vol. 5, no. 1, art. SPE-75354-PA, pp. 49–59. https://doi.org/10.2118/75354-PA.
- Esor E., Dresda S., Monico C. Use of material balance to enhance 3D reservoir simulation: A case study. Proc. SPE Annu. Tech. Conf. Exhib., Houston, Texas, September 2004. SPE, 2004, art. SPE-90362-MS. https://doi.org/10.2118/90362-MS.
- MBAL: Analytical Reservoir Engineering Toolkit. Petroleum Engineering Software, IPM Suite, Petex, PE Limited, 2024.
- Robinson M.P. Pressure interference correction to the material balance equation for waterdrive reservoirs using a digital computer. *Trans. AIME*, 1958, vol. 213, no. 1, art. SPE-1006-G, pp. 418–422. https://doi.org/10.2118/1006-G.
- Irby T.L., Zurawsky L.G., Clapham E.E. Material-balance analysis of a water-drive reservoir with an unusual development history. J. Pet. Technol., 1962, vol. 14, no. 1, art. SPE-70-PA, pp. 37–42. https://doi.org/10.2118/70-PA.
- Sills S.R. Improved material-balance regression analysis for waterdrive oil and gas reservoirs. SPE Reservoir Eng., 1996, vol. 11, no. 2, art. SPE-28630-PA, pp. 127–134. https://doi.org/10.2118/28630-PA.
- Yildiz T., Khosravi A. An analytical bottomwaterdrive aquifer model for material-balance analysis. SPE Reservoir Eval. Eng., 2007, vol. 10, no. 6, art. PE-103283-PA, pp. 618–628. https://doi.org/10.2118/103283-PA.
- Van Everdingen A.F., Hurst W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs. J. Pet. Technol., 1949, vol. 1, no. 12, art. SPE-949305-G, pp. 305–324. https://doi.org/10.2118/949305-G.
- Fetkovich M.J. A simplified approach to water influx calculations-finite aquifer systems. J. Pet. Technol., 1971, vol. 23, no. 7, art. SPE-2603-PA, pp. 814–828. https://doi.org/10.2118/2603-PA.
- Carter R.D., Tracy G.W. An improved method for calculating water influx. *Trans. AIME*, 1960, vol. 219, no. 1, art. SPE-1626-G, pp. 415–417. https://doi.org/10.2118/1626-G.
- 25. Lee J., Wattenbarger R. *Gas Reservoir Engineering*. Ser.: SPE Textbook Ser. Vol. 5. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 1996. 349 p.
- Edwardson M.L., Girner H.M., Parkinson H.R., Williams C.D., Matthews C.S. Calculation of formation temperature disturbances caused by mud circulation. J. Pet. Technol., 1962, vol. 14, no. 4, art. SPE-124-PA, pp. 416–426. https://doi.org/10.2118/124-PA.
- Usmanov D., Potashev K., Filatov E., Ganiev R. Identification of the boundary conditions of the reservoir hydrodynamic model by reservoir pressure measurements in wells. *AIP Conf. Proc.*, 2024, vol. 3119, no. 1, art. 040006. https://doi.org/10.1063/5.0214869.

- 28. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkostei i gazov v prirodnykh plastakh* [Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks]. Moscow, Nedra, 1984. 212 p. (In Russian)
- Mazo A.B., Potashev K.A. Petroleum reservoir simulation using super-element method with local detalization of the solution. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 327–339. (In Russian)
- Havlena D., Odeh A.S. The material balance as an equation of a straight line. J. Pet. Technol., 1963, vol. 15, no. 8, pp. 896–900. https://doi.org/10.2118/559-PA.
- Kamal M.M. (Ed.) Transient Well Testing. SPE Monogr. Vol. 23. Ser.: Henry L. Doherty Series. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2009. 850 p. https://doi.org/10.2118/9781555631413.
- Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Solutions of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1986. 288 p. (In Russian)

Для цитирования: Усманов Д.И., Поташев К.А., Салимьянова Д.Р. Идентификация граничных условий фильтрационной модели нефтяного пласта по замерам давления в скважинах. Часть 1: Однородный пласт // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 603–623. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.603-623.

For citation: Usmanov D.I., Potashev K.A., Salimyanova D.R. Identifying boundary conditions of an oil reservoir flow model from well pressure measurements. Part 1: Ho-mogeneous reservoir. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matema-ticheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 603–623.

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.603-623. (In Russian)

2024, Т. 166, кн. 4 С. 624–638 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 621.371.3: 519.246

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.624-638

ОЦЕНКА ВКЛАДА МНОГОКРАТНО РАССЕЯННЫХ РАДИОВОЛН В ИМПУЛЬСНУЮ ХАРАКТЕРИСТИКУ КАНАЛА БЕСПРОВОДНОЙ СВЯЗИ

Р.Ф. Халиуллин, А.И. Сулимов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

На основе трехмерного топографического плана типового микрорайона города Казани методом трассировки лучей проводится моделирование многолучевого распространения радиоволн в системах мобильной радиосвязи. Сгенерирован ансамбль 4000 радиолиний заданной протяженности (200 м), случайно локализованных на карте модельного микрорайона, в котором представлены реализации как с наличием, так и с отсутствием прямой видимости между передатчиком и приёмником. Выполнены количественные оценки вклада многократно рассеянных волн в импульсную характеристику канала связи. Показано, что на радиолиниях длиной порядка 200 м в условиях прямой видимости можно ограничиться приближением однократного рассеяния. В условиях экранирования прямой видимости следует дополнительно учитывать двукратно и трехкратно рассеянные волны.

Ключевые слова: беспроводная связь, многолучевое распространение, импульсная характеристика канала, трассировка лучей, многократное рассеяние

Введение

Методы трассировки лучей активно используются в проектировании современных систем телекоммуникаций. Выполненное с их помощью моделирование позволяет учесть детальную геометрию среды распространения, электрические свойства рассеивающих материалов, а также эффекты многократного рассеяния радиоволн, например, вследствие серии переотражений от окружающих зданий [1]. При моделировании создается детальная трехмерная геометрическая модель среды распространения радиосигнала, представляющая собой либо топографический план городской застройки (для уличных условий), либо планировку интерьера внутреннего пространства здания (для локальных беспроводных сетей).

После составления объемного образа среды задаются электрические свойства материалов отражающих поверхностей и учитываемая кратность отражения радиоволн [2]. Указанные данные позволяют выполнить трассировку лучей из заданной точки передачи в заданную точку приема. Результатом расчетов является импульсная характеристика канала $h(\tau)$, представляющая собой отклик среды на короткое импульсное воздействие. Типовая импульсная характеристика среды с многолучевым эффектом изображена на рис. 1. Первый компонент характеристики $h(\tau)$ создается лучом с наименьшей задержкой τ_0 . В отсутствие экранирующих объектов таким компонентом является сигнал прямой видимости. Последующие компоненты $h(\tau)$ создаются лучами, прошедшими большее расстояние до приемника. Как правило, задержка растет с увеличением количества переотражений, испытанных лучом.



Рис. 1. Типовая импульсная характеристика многолучевого радиоканала

С увеличением количества лучей в канале усиливается эффект многолучевых замираний, что влечет снижение качества связи [3]. Таким образом, количество лучей в точке приема является важной характеристикой среды распространения. В большинстве классических работ [4–6] модель многолучевого канала строится в приближении однократного рассеивания радиоволн, что упрощает теоретический анализ и вычисления. Учет эффектов многократного рассеивания, хотя и позволяет получить более реалистичную картину принимаемого сигнала, значительно увеличивает объем вычислительных операций при трассировке лучей. В то же время в [4] отмечается, что многократно рассеянные волны дают существенный вклад в мощность принимаемого сигнала лишь на радиолиниях большой (свыше 1.5 км) протяженности. Соответственно, для типовых условий мобильной радиосвязи в плотной городской застройке достаточно ограничиться однократным рассеянием. К сожалению, более систематизированных исследований по данному вопросу в известной литературе [7–11] не представлено. Таким образом, возникает вопрос о целесообразности усложнения модели системы беспроводной связи учетом явлений многократного рассеяния.

Цель исследования состоит в количественной оценке влияния кратных переотражений радиосигнала в условиях городской застройки на импульсную характеристику канала для повышения точности моделирования систем беспроводной связи. Методом трассировки лучей генерируется ансамбль импульсных характеристик для типового микрорайона застройки г. Казани при случайном размещении приемника и передатчика на радиолиниях длиной 200 м. По сгенерированному ансамблю импульсных характеристик определяется распределение мощности сигнала между лучами различной кратности отражения. Отдельно рассматриваются условия наличия и отсутствия прямой видимости между передатчиком и приемником.

Дальнейшее содержание статьи придерживается следующей структуры. В разделе 1 представлена модель канала связи. Методика и параметры имитационного моделирования изложены в разделе 2. В разделе 3 представлены основные результаты исследования и их интерпретация. В заключительном разделе кратко формулируются основные выводы исследования.

1. Модель канала

В рамках модели линейного четырехполюсника сигнал y(t) на выходе канала связи определяется интегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau) \, d\tau, \tag{1}$$

где x(t) – сигнал на входе канала, h(t) – импульсная характеристика канала, которая в рамках линейной модели исчерпывающе описывает его свойства. Из (1) импульсная характеристика определяется как отклик канала на дельта-функцию Дирака (при $x(t) = \delta(t)$).

В системах беспроводной связи проявляется многолучевой эффект [4], вследствие чего импульсная характеристика канала записывается в виде:

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e^{j\theta_i} \delta(t - \tau_i),$$

где n – количество лучей, регистрируемых приемником, α_i – коэффициент ослабления *i*-го парциального луча, τ_i – задержка *i*-го луча, θ_i – фаза сигнала в *i*-м луче. Коэффициенты ослабления вычисляются с учетом отражения от препятствий, пройденного пути и эффектов крупномасштабных замираний:

$$\alpha_i = R(\varepsilon, \sigma) \cdot \exp\left(-\tau_i \cdot \frac{r_\tau - 1}{2 \cdot \sigma_\tau r_\tau}\right) \cdot 10^{-\frac{Z_i + L_i}{20}},$$

где $R(\varepsilon, \sigma)$ – коэффициент отражения Френеля, Z_i [дБ] – глубина медленного (логнормального) замирания для *i*-го кластера рассеивателей, σ_{τ} – среднеквадратический разброс времени задержки в заданной среде, r_{τ} – коэффициент удлинения пути относительно луча прямой видимости, L_i [дБ] – уровень ослабления сигнала в луче прямой видимости.

Перед осуществлением трассировки лучей создается компьютерный трехмерный образ (3D-образ) тестовой многолучевой среды. В данном исследовании в качестве прообраза использован реальный топографический план застройки одного из микрорайонов г. Казани площадью 0.31 км² (см. рис. 2, а)). План застройки был получен из открытой картографической базы данных *OpenStreetMap* [12]. Для каждого здания указывалась информация о высоте и материалах конструкции. Итоговый 3D-образ модельного микрорайона формировался в свободно распространяемой среде графического объемного моделирования *Blender* [13].

Созданный 3D-образ содержал 43 здания различной высоты: от 6 до 42 м со средней высотой 14 м. Выбранный микрорайон включал в себя как открытые площадки, так и фрагменты плотной застройки, что позволяло учитывать различные сценарии распространения радиосигналов. Для модельного микрорайона было характерно преобладание таких материалов отражающих поверхностей как кирпич, бетон и металл. Типовые значения [2] диэлектрической проницаемости и удельной электропроводности для указанных материалов приведены в табл. 1.

На следующем этапе моделирования файлы с подготовленным 3D-образом загружались в алгоритм трассировки лучей, после чего задавались координаты размещения передатчика и приемника. Существуют две основные разновидности алгоритмов трассировки: с прямой и обратной трассировкой [7,14].

В алгоритмах с прямой трассировкой тестовые лучи испускаются во всех направлениях и отслеживаются, какие из них достигают точки приема. Для выбранных лучей рассчитываются коэффициенты ослабления α_i , задержки τ_i и фазы θ_i .



Рис. 2. Моделируемая городская застройка: а) топографическая карта, б) 3D-образ

']	Ľабл.	1
		-

	Диэлектрическая проницаемость		Удельная электропроводность		Диапазон
Тип материала					частот
	ε		$\sigma [CM/M]$		(ГГц)
	реальная	мнимая	реальная	мнимая	
Кирпич	3.91	0	0.0238	0.16	1-40
Бетон	5.24	0	0.0462	0.7882	1 - 100
Металл	1	0	10^{7}	0	1 - 100

Электрические параметры материалов

При достижении лучом отражающей поверхности на ней устанавливается точка ветвления, из которой во все возможные направления проводятся отраженные лучи. При многократном рассеянии траектория луча содержит более одной точки ветвления. Точность моделирования значительно зависит от количества лучей, генерируемых в точках ветвления.

В силу своей простоты алгоритмы с прямой трассировкой позволяют проводить вычисления одновременно для большого количества точек приема, что полезно для крупномасштабных городских симуляций. Как правило, эффективность вычислений удается повысить за счет распараллеливания операций и использования мощных графических процессоров. Известными примерами алгоритмов с прямой трассировкой являются 3DScat и WirelessInSite [8]. Общими недостатками указанных сред моделирования являются закрытый исполняемый код и невозможность модификации модели под имеющиеся задачи.

С методологической точки зрения, недостатком алгоритмов с прямой трассировкой является избыточность количества отслеживаемых лучей, особенно при небольшом количестве точек приема [7,10]. Неизбежны также и ошибки дискретизации, обусловленные тем, что трассирующие лучи сходятся не строго в точке приема, а в некоторой ее окрестности, что вызывает неточности при синтезе импульсной характеристики канала.

Алгоритмы с обратной трассировкой лишены указанных недостатков, поскольку заранее учитывают только такие лучи, которые удовлетворяют принципу Ферма для заданных точек передачи и приема. Тем не менее селекция лучей требует большого количества предварительных вычислений, что может быть выполнено только при относительно небольшом количестве точек приема. Алгоритмы с обратной трассировкой лежат в основе таких сред моделирования как WiThRay [7] и Sionna [11]. К сожалению, модель WiThRay предоставляется разработчиками в виде законченных исполнимых файлов, поэтому не могла быть адаптирована под цели исследования. Поэтому в качестве основного инструмента моделирования была выбрана среда Sionna, которая имеет открытый исполнимый код на базе библиотеки TensorFlow популярного языка программирования Python. Помимо этого, среда Sionna содержит готовые библиотеки и модули для моделирования систем связи стандартов 5G и 6G, что позволяет легко расширить область исследований.

2. Методика моделирования

В качестве основного сценария рассматривалась радиолиния протяжённостью d = 200 между базовой станцией (БС) и мобильным терминалом абонента системы связи (MT). Антенна БС была размещена на высоте $h_1 = 2$ м над уровнем крыши, а антенна МТ находилась на высоте $h_2 = 1.5$ м над уровнем земли. Для каждого заданного расположения пунктов связи выполнялась трассировка лучей от БС до МТ и расчёт импульсной характеристики канала. При увеличении кратности т учитываемых переотражений увеличивалось количество парциальных компонент в импульсной характеристике. Кратность менялась в диапазоне m = 1, ..., 5. Для получения усреднённых статистических данных по модельной области рассматривались все возможные расположения БС и МТ на созданной трёхмерной карте. Для этого карта разбивалась на квадратные сегменты со стороной 10λ (примерно 1.4 м), где λ – длина волны, и указанный размер служил приблизительной границей перехода к дальней зоне поля радиоволны. Поскольку площадь карты составляла 0.31 км², было сгенерировано в общей сложности 50000 случайных расположений передатчика и приёмника при параметрах радиолинии, указанных в табл. 2.

Табл. 2

Параметр	Значение		
Протяженность радиолинии, d (м)	200		
Мощность передатчика P_T (Вт)	1		
Несущая частота, f_0 (ГГц)	2.14		
Высота подвеса антенн	$h_1 = 16$ м, $h_2 = 1.5$ м		
	h = 14 m,		
Параметры городской застройки	плотность застройки		
	$ u = 139$ зданий на км 2		
	закрытая (отсутствие прямой		
Тип радиолинии	видимости между БС и МТ), открытая		
	(наличие прямой видимости)		

Параметры радиосистемы

При генерации реализаций радиолиний передатчик и приемник соединялись жестким стержнем фиксированной длины *d*, случайно ориентированным в пространстве (см. рис. 3). Из 50000 сгенерированных радиолиний со случайными ориентацией и координатами пунктов связи исключались случаи выхода БС за пределы крыши здания (рис. 3, случай 3) и попадания МТ внутрь здания (рис. 3, случай 4). После описанной селекции ансамбль модельных радиолиний сократился до 4000 реализаций, случайным образом разбросанных по созданной 3D-карте. Дальнейший анализ показал, что из 4000 сгенерированных радиолиний 2182 оказались радиолиниями открытого типа (т. е. имели прямую видимость между передатчиком и приемником) и 1818 – радиолиниями закрытого типа (прямая видимость экранировалась другими зданиями).

Для каждой модельной радиолинии с помощью алгоритма трассировки лучей рассчитывалась импульсная характеристика канала $h_m(t)$ при пяти различных кратностях переотражений радиоволн m = 1, ..., 5. При m = 1 количество парциальных лучей в импульсной характеристике было минимальным, а при m = 5 – максимальным. Путем сравнения импульсных характеристик, соответствовавших разным значениям m, определялось, какое количество переотражений испытал каждый парциальный луч. В результате в самой полной импульсной характеристике $h_5(t)$, полученной при m = 5, выделялись кластеры лучей, соответствовавших равной кратности переотражений, как показано на рис. 4.



Рис. 3. Генерация ансамбля радиолиний (вид сверху на фрагмент модельной области)



Рис. 4. Типовое распределение кластеров парциальных лучей по кратности переотражений

В рамках использованной модели трассировки лучей *Sionna* ослабление сигнала вычисляется по формуле ослабления в свободном пространстве:

$$L = 20 \lg d + 20 \lg f_0 + 20 \lg \left(\frac{4\pi}{c}\right) - G_T - G_R,$$
(2)

где d [м] – длина радиолинии, f_0 [Гц] – несущая частота радиосигнала, c – скорость света в вакууме, G_T – коэффициент усиления передающей антенны, G_R – коэффициент усиления приемной антенны. На детерминированное ослабление L
далее накладывается случайное крупномасштабное нормально распределенное замирание Z_i [дБ]. После этого вычисляется результат интерференции лучей в точке приема, что позволяет учитывать эффект быстрых (мелкомасштабных) замираний сигнала.

Для повышения точности моделирования уровень сигнала вычисляется не только в точке непосредственного размещения приемника, но и в окрестности 10 м² от него, чем формируется локальная карта покрытия в области приема. Результирующее значение ослабления сигнала L_{Σ} в децибелах вычисляется путем усреднения по локальной карте покрытия: $L_{\Sigma} = 10 \log \left\{ E_{\vec{\rho}} \left[10^{\frac{L_R(\vec{r}_R,\vec{\rho})}{10}} \right] \right\}$, где L_R [дБ] – ослабление сигнала в пределах карты покрытия, \vec{r}_R – радиус-вектор приемника, $\vec{\rho}$ – вектор смещения вдоль локальной карты покрытия, $E[\cdot]$ – оператор усреднения по заданной области пространства.

Мощность принимаемого сигнала с учетом эффектов замираний:

$$P_R[BT] = 10^{\frac{P_T[{\rm A}B{\rm M}] - L_{\sum}[{\rm A}B] - 30}{10}},$$
(3)

где P_T [дБм] – мощность передатчика. Соответственно, медианный уровень амплитуды сигнала $U[B] = \sqrt{2 \cdot P_R \cdot R}$, где R = 50 Ом – входное сопротивление приемника. После вычисления амплитуд α_i парциальных лучей определялись вклады явлений $\{C_m\}$ *m*-кратных переотражений в регистрируемый радиосигнал. Вклады определялись как соотношение мощностей интерференции лучей из кластера *m*-кратных переотражений к мощности интерференции всех лучей (включая компонент прямой видимости):

$$C_m = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n_m} \alpha_i \cdot e^{j \cdot 2\pi f_0 \tau_i}\right|^2}{\left|\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cdot e^{j \cdot 2\pi f_0 \tau_i}\right|^2},\tag{4}$$

где n_m – количество лучей в кластере *m*-кратных переотражений, $n = \sum_{m=1}^5 n_m$.

Расчеты по формуле (4) проводились для всех 4000 модельных радиолиний, после чего их результаты усреднялись.

Для радиолиний открытого типа также рассчитывался коэффициент Райса:

$$K_R = \frac{E[\alpha_0^2]}{2\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot \tau_i}\right]},\tag{5}$$

где α_0 – амплитуда сигнала прямой видимости, var [·] – оператор дисперсии. Усреднение проводилось по подвыборке 2182 радиолиний открытого типа.

Результаты статистической обработки модельных данных, отражающих влияние многократного рассеяния на распространение сигналов в системах беспроводной подвижной связи, обсуждаются в следующем разделе.

3. Результаты моделирования

Статистический анализ ансамбля импульсных характеристик в условиях плотной городской застройки продемонстрировал существенное различие в распределениях ослабления сигнала при наличии и отсутствии прямой видимости между передатчиком и приемником. Соответствующие гистограммы распределения величины L_{Σ} представлены на рис. 5.

При наличии прямой видимости (см. рис. 5, а)) в распределении ослабления сигнала наблюдалась одна мода с максимумом около -74 дБ. При её отсутствии

(см. рис. 5, б)) основной максимум сместился примерно на -10 дБ, и возник побочный максимум в окрестности -115 дБ, обусловленный явлениями многократного переотражения. Средний коэффициент отражения радиоволн от стен и крыш зданий для модельного микрорайона города составил 0.68, что близко к среднеквадратическому уровню $\frac{1}{\sqrt{2}}$ при равномерном распределении угла падения на идеальную отражающую поверхность. Последнее свидетельствует о том, что отражение радиоволн достаточно высокой выбранной частоты f_0 от стен зданий можно приближенно рассматривать как отражение от идеальной зеркальной поверхности.

Для радиолиний открытого типа дисперсия распределения ослабления сигнала оказалась относительно небольшой и составила $2.4 \,\mathrm{gB}^2$. Следовательно, случайно рассеянная многолучевая компонента вносила небольшой вклад в принимаемый сигнал, что способствовало стабильности характеристик канала. Для радиолиний закрытого типа дисперсия распределения оказалась значительно выше и составила $116.3 \,\mathrm{gB}^2$, что обусловлено двухмодовым характером распределения на рис. 5, б). Таким образом, в отсутствие прямой видимости характеристики канала и уровень мощности сигнала подвержены значительным вариациям.



Рис. 5. Модельные гистограммы распределения ослаблений сигнала для случаев: а) наличия прямой видимости, б) отсутствия прямой видимости



Рис. 6. Зависимость коэффициента Райса от максимальной кратности переотражений

Для радиолиний открытого типа была определена зависимость коэффициента Райса от кратности учитываемых переотражений m (см. рис. 6). Для обеспечения высокого качества связи желательны большие значения коэффициента Райса [15]. При его снижении роль случайно рассеянной компоненты сигнала усиливается, что ведет к возникновению нежелательных эффектов – глубоких замираний и межсимвольной интерференции.

Зависимость на рис. 6 имеет асимптотически спадающий характер. Это объясняется тем, что с ростом параметра m повышается количество парциальных лучей в импульсной характеристике канала, однако из-за быстрого спада мощности при многократных переотражениях вклад лучей с большой задержкой по времени становится незначительным.

На рис. 7 представлена средняя задержка парциальных лучей в зависимости от количества испытанных переотражений. Из рис. 7 видно, что в отсутствие прямой видимости парциальные лучи проходят до 1.5 раз более длинный путь до приемника, чем в случае преобладания компонента прямой видимости. Данное обстоятельство косвенно подтверждает выводы монографии [4], в которой утверждается, что в приближении теории однократного рассеяния многолучевая компонента сигнала создается ближайшим окружением подвижного приемника. Средняя задержка сигнала для сценария с прямой видимостью оказалась на 0.32 мкс ниже. Следовательно, при наличии экранирующих объектов между передатчиком и приемником средний путь случайно рассеянных лучей увеличился на 96 м, что составляет почти половину номинальной длины радиолинии d.



Рис. 7. Зависимость средней задержки лучей от количества переотражений

Учет многократных переотражений позволяет более обоснованно выбрать скорость передачи информационных символов в канале связи для исключения эффектов частотно-селективных замираний и межсимвольной интерференции [16]. Согласно рис. 7 передача информационных символов с периодом менее 2 мкс может приводить к наложению соседних символов и соответствующему росту количества ошибок при приеме информации.

По формуле (4) был оценен количественный вклад многократно переотраженных лучей в мощность регистрируемого сигнала. Результаты статистического анализа представлены в виде круговых диаграмм на рис. 8 (для радиолиний открытого типа) и рис. 9 (для радиолиний закрытого типа).

Согласно результатам моделирования, проведенного по методу трассировки лучей, при наличии прямой видимости случайно рассеянная многолучевая компонента дает примерно лишь 18%-ный вклад в мощность регистрируемого радиосигнала. При этом вклад двух- и более кратно рассеянных волн в среднем не превосходит 7%. Таким образом, при моделировании радиолиний открытого типа для многих практических задач достаточно ограничиться приближением однократного рассеяния радиоволн на препятствиях.



Рис. 8. Относительный вклад многократно рассеянных волн в мощность принимаемого сигнала (при наличии прямой видимости)



Рис. 9. Относительный вклад многократно рассеянных волн в мощность принимаемого сигнала (в отсутствие прямой видимости)

Иная картина наблюдается на радиолиниях закрытого типа. Согласно диаграмме на рис. 9 при моделировании радиолиний подобного рода необходимо учитывать по меньшей мере двукратно рассеянные волны, а в некоторых случаях может быть целесообразным учет и эффектов трехкратного рассеяния. Вопреки выводам исследования [4], учет эффектов однократного рассеяния не дает удовлетворительного описания процессов многолучевого распространения радиоволн, даже на относительно коротких радиолиниях длиной $d \sim 200$ м.

На рис. 10 показаны зависимости средней амплитуды парциального луча от количества испытанных переотражений.

При каждом акте отражения радиоволны от поверхности здания амплитуда ослаблялась примерно в $\sqrt{2}$ раза. Кроме того, как следует из рис. 7, при каждом переотражении путь луча в среднем увеличивался примерно на 100 м, что, согласно формуле (2), также способствовало ослаблению сигнала. Из рис. 10 можно заключить, что каждый акт переотражения примерно в 2.5-3 раза ослаблял парциальный луч. При этом амплитуда лучей в случае радиолинии открытого типа примерно в 5 раз превосходила амплитуду при наличии экранирующих объектов между передатчиком и приемником. Последнее обстоятельство необходимо учитывать при расчете области покрытия базовых станций систем мобильной радиосвязи.



Рис. 10. Зависимость средней амплитуды парциального луча от количества переотражений: а) открытая радиолиния, б) закрытая радиолиния

Заключение

Методом трассировки лучей 3D-образа типового микрорайона застройки г. Казани выполнена количественная оценка вклада явлений многократного рассеяния радиоволн в импульсную характеристику радиолинии системы мобильной радиосвязи. Выявлено, что при моделировании линий связи с прямой видимостью между передатчиком и приемником для большинства практических задач достаточно ограничиться приближением однократного рассеяния. В случае экранирования прямой видимости необходим учет двух- и трехкратно рассеянных волн, что уточняет выводы теоретического анализа ряда предыдущих исследований.

Для рассмотренного микрорайона г. Казани около 55 % случайно локализованных на карте радиолиний допускали прямую видимость между расположенной на крыше здания базовой станцией системы связи и расположенным на земле мобильным терминалом абонента. Для таких радиолиний коэффициент Райса варьировался в пределах от 5 до 7, что свидетельствовало об относительно малом участии случайно рассеянной многолучевой компоненты в регистрируемом радиосигнале.

Анализ средней задержки случайно рассеянных радиоволн показал, что передача информационных символов с периодом менее 0.8 мкс (в случае радиолинии открытого типа) и менее 1.5 мкс (в случае радиолиний закрытого типа) может привести к возникновению нежелательных эффектов межсимвольной интерференции и повышению количества ошибок при приеме информации. Это ограничивает максимальную скорость безошибочной передачи данных в системах мобильной радиосвязи.

Показано, что для частот радиосигналов выше 2.14 ГГц отражение радиоволн от элементов конструкций, состоящих из кирпича, бетона и металла, может приближенно рассматриваться как отражение от зеркальной поверхности. В результате численного моделирования показано, что каждый акт переотражения радиоволны от препятствий примерно в 2.5–3 раза ослабляет амплитуду сигнала в парциальном луче. При этом амплитуда лучей в случае радиолинии открытого типа примерно в 5 раз превосходила амплитуду при наличии экранирующих объектов между передатчиком и приемником. Данное обстоятельство необходимо учитывать при расчете области покрытия базовых станций систем мобильной радиосвязи.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Yun Z., Iskander M.F. Ray tracing for radio propagation modeling: Principles and applications // IEEE Access. 2015. V. 3, P. 1089–1100. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2015.2453991.
- Recommendation ITU-R P.2040-1. Effects of building materials and structures on radiowave propagation above about 100 MHz. Ser. P: Radiowave Propagation. Geneva: Int. Telecommun. Union., 2015. 30 p.
- Guan M., Wu Z., Cui Y., Cao X., Wang L., Ye J., Peng B. Multi-beam coverage and beamforming technology for high altitude platform station communication system // EURASIP J. Wireless Commun. Networking. 2019. Vol. 2019, No 1. Art 290. https://doi.org/10.1186/s13638-019-1622-y.
- 4. Пономарев Г.А., Куликов А.М., Тельпуховский Е.Д. Распространение УКВ в городе. Томск: Раско, 1991. 223 с.
- 5. Альперт Я.Л., Гинзбург В.Л., Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953. 870 с.
- Greenstein L.J., Erceg V., Yeh Y.S., Clark M.V. A new path-gain/delay-spread propagation model for digital cellular channels // IEEE Trans. Veh. Technol. 1997. V. 46, No 2. P. 477–485. https://doi.org/10.1109/25.580786.
- Choi H., Oh J., Chung J., Alexandropoulos G.C., Choi J. WiThRay: A versatile ray-tracing simulator for smart wireless environments // IEEE Access. 2023. V. 11. P. 56822–56845. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3283610.
- Obeidat H., Ullah A., AlAbdullah A., Manan W., Obeidat O., Shauieb W., Dama Y., Kara-Zaïtri C., Abd-Alhameed R. Channel impulse response at 60 GHz and impact of electrical parameters properties on ray tracing validations // Electronics. 2021. V. 10, No 4. Art. 393. https://doi.org/10.3390/electronics10040393.
- Jung J.-H., Lee J., Lee J.-H., Kim Y.-H., Kim S.-C. Ray-tracing-aided modeling of usershadowing effects in indoor wireless channels // IEEE Trans. Antennas Propag. 2014. V. 62, No 6. P. 3412–3416. https://doi.org/10.1109/TAP.2014.2313637.
- Mededović P., Veletić M., Blagojević Ž. Wireless insite software verification via analysis and comparison of simulation and measurement results // 2012 Proc. 35th Int. Conv. MIPRO. Opatija, 2012. P. 776–781.
- Hoydis J., Aoudia F., Cammerer S., Nimier-David M., Binder N., Marcus G. Sionna RT: Differentiable ray tracing for radio propagation modeling // 2023 IEEE Globecom Workshops. Kuala Lumpur, 2023. P. 317–321. https://doi.org/10.1109/GCWkshps58843.2023.10465179.
- 12. OpenStreetMap: веб-картографический проект. URL: https://www.openstreetmap.org.
- 13. Blender: программное обеспечение. URL: https://www.blender.org/.
- Catedra M.F., Perez J., Saez de Adana F., Gutierrez O. Efficient raytracing techniques for three-dimensional analyses of propagation in mobile communications: Application to picocell and microcell scenarios // IEEE Antennas Propag. Mag. 1998. V. 40, No 2. P. 15–28. https://doi.org/10.1109/74.683539.
- Nooralizadeh H., Shirvani Moghaddam S. Appropriate algorithms for estimating frequency-selective Rician fading MIMO channels and channel Rice factor: Substantial benefits of Rician model and estimator tradeoffs // EURASIP J. Wireless Commun. Networking. 2010. V. 2010, No 1. Art. 753637. https://doi.org/10.1155/2010/753637.
- 16. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.

Поступила в редакцию 30.05.2024 Принята к публикации 12.09.2024 Халиуллин Реваз Фархатович, аспирант кафедры радиофизики
Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: sven456634@gmail.com
Сулимов Амир Ильдарович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры радиофизики
Казанский (Приволжский) федеральный университет ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: asulimo@qmail.com

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 624-638

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.624-638

Assessing the Contribution of Multiply Scattered Radio Waves to the Impulse Response of a Wireless Channel

R.F. Khaliullin^{*}, A.I. Sulimov^{**}

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia E-mail: *sven456634@gmail.com, **asulimo@gmail.com

Received May 30, 2024; Accepted September 12, 2024

Abstract

Using a three-dimensional topographic map of a typical microdistrict in Kazan, multipath radio wave propagation in mobile radio communication systems was modeled by the method of ray tracing. An ensemble of 4000 radio links, each 200 m long, was generated and randomly positioned on the map. The wave propagation scenarios included both line-of-sight and nonline-of-sight conditions of visibility between transmitters and receivers. A quantitative analysis of the contribution made by multiply scattered waves to the channel impulse response was performed. The results show that single-scattering approximation is generally sufficient for 200-m line-of-sight links. However, in the non-line-of-sight scenario, it is necessary to also account for waves scattered two or three times.

Keywords: wireless communication, multipath propagation, channel impulse response, ray tracing, multiple scattering

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Typical impulse response of a multipath radio channel.

Fig. 2. Simulated urban area: a) topographic map, b) 3D model.

Fig. 3. Generation of the ensemble of radio links (top view of a fragment within the simulated area).

Fig. 4. Typical distribution of partial beam clusters by the ratio of re-reflections.

Fig. 5. Model histograms showing the distribution of signal fading in: a) line-of-sight conditions, b) non-line-of-sight conditions.

Fig. 6. Dependence of the Rician factor on the maximum ratio of re-reflections.

Fig. 7. Dependence of average ray delay on the number of re-reflections.

Fig. 8. Relative contribution of multiply scattered waves to the received signal power (in line-of-sight conditions).

Fig. 9. Relative contribution of multiply scattered waves to the received signal power (in non-line-of-sight conditions).

Fig. 10. Dependence of partial beam amplitude on the number of re-reflections: a) open radio link, b) obstructed radio link.

References

- Yun Z., Magdy F.I. Ray tracing for radio propagation modeling: Principles and applications. *IEEE Access*, 2015, vol. 3, pp. 1089–1100. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2015.2453991.
- Recommendation ITU-R P.2040-1. Effects of building materials and structures on radiowave propagation above about 100 MHz. Ser. P: Radiowave Propagation. Geneva, Int. Telecommun. Union., 2015. 30 p.
- Guan M., Wu Z., Cui Y., Cao X., Wang L., Ye J., Peng B. Multi-beam coverage and beamforming technology for high altitude platform station communication system. *EURASIP J. Wireless Commun. Networking*, 2019, vol. 2019, no. 1, art. 290. https://doi.org/10.1186/s13638-019-1622-y.
- Ponomarev G.A., Kulikov A.M., Tel'pukhovskii E.D. Rasprostranenie UKV v gorode [Propagation of Ultra-Short Waves in Urban Environments]. Tomsk, Rasko, 1991. 223 p. (In Russian)
- 5. Alpert Ya.L., Ginzburg V.L., Feinberg E.M. *Rasprostranenie radiovoln* [Propagation of Radio Waves]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1953. 870 p. (In Russian)
- Greenstein L.J., Erceg V., Yeh Y.S., Clark M.V. A new path-gain/delay-spread propagation model for digital cellular channels. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 1997, vol. 46, no. 2, pp. 477–485. https://doi.org/10.1109/25.580786.
- Choi H., Oh J., Chung J., Alexandropoulos G.C., Choi J. WiThRay: A versatile ray-tracing simulator for smart wireless environments. *IEEE Access*, 2023, vol. 11, pp. 56822–56845. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3283610.
- Obeidat H., Ullah A., AlAbdullah A., Manan W., Obeidat O., Shauieb W., Dama Y., Kara-Zaïtri C., Abd-Alhameed R. Channel impulse response at 60 GHz and impact of electrical parameters properties on ray tracing validations. *Electronics*, 2021, vol. 10, no. 4, art. 393. https://doi.org/10.3390/electronics10040393.
- Jung J.-H., Lee J., Lee J.-H., Kim Y.-H., Kim S.-C. Ray-tracing-aided modeling of usershadowing effects in indoor wireless channels. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2014, vol. 62, no. 6, pp. 3412–3416. https://doi.org/10.1109/TAP.2014.2313637.
- Mededović P., Veletić M., Blagojević Ž. Wireless insite software verification via analysis and comparison of simulation and measurement results. 2012 Proc. 35th Int. Conv. MIPRO. Opatija, 2012, pp. 776–781.
- Hoydis J., Aoudia F., Cammerer S., Nimier-David M., Binder N., Marcus G. Sionna RT: Differentiable ray tracing for radio propagation modeling. 2023 IEEE Globecom Workshops. Kuala Lumpur, 2023, pp. 317–321. https://doi.org/10.1109/GCWkshps58843.2023.10465179.
- 12. OpenStreetMap: Online mapping platform. URL: https://www.openstreetmap.org.
- 13. Blender: Software. URL: https://www.blender.org/.
- Catedra M.F., Perez J., Saez de Adana F., Gutierrez O. Efficient raytracing techniques for three-dimensional analyses of propagation in mobile communications: Application to picocell and microcell scenarios. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 1998, vol. 40, no. 2, pp. 15–28. https://doi.org/10.1109/74.683539.

- Nooralizadeh H., Shirvani Moghaddam S. Appropriate algorithms for estimating frequency-selective Rician fading MIMO channels and channel Rice factor: Substantial benefits of Rician model and estimator tradeoffs. *EURASIP J. Wireless Commun. Networking*, 2010, vol. 2010, no. 1, art. 753637. https://doi.org/10.1155/2010/753637.
- Proakis J. Tsifrovaya svyaz' [Digital Communications]. Moscow, Radio Svyaz', 2000. 800 p. (In Russian)

Для цитирования: Халиуллин Р.Ф., Сулимов А.И. Оценка вклада многократно рассеянных радиоволн в импульсную характеристику канала беспроводной связи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 624–638. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.624-638.

For citation: Khaliullin R.F., Sulimov A.I. Assessing the contribution of multiply scattered radio waves to the impulse response of a wireless channel. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, / pp. 624–638. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.624-638. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 639–650 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.854.2: 519.245: 519.217.2

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.639-650

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

С.В. Шалагин

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Предложен метод решения задачи коммивояжёра (ЗК) с применением аппарата N-сложных цепей Маркова (N-ЦМ), последовательность состояний которых имитирует путь через N пунктов, каждый из пунктов посещается только один раз. Для каждого из пунктов задана вероятность перехода в один из l следующих пунктов, l < N. Выполнен анализ сложности реализации каждого из этапов предложенного метода в зависимости от заданных значений N и l. Получены оценки сложности генератора N-ЦМ на основе композиции конечного детерминированного автомата и вероятностного автомата без памяти. Сложность генератора N-ЦМ характеризуется объёмом множеств входов, внутренних состояний и выходов, а также объёмом памяти, требуемой для реализации функций переходов и выходов указанных автоматов. Даны оценки времени задержки функционирования генератора N-ЦМ. Рассчитаны вероятность генерирования допустимых путей, т.е. удовлетворяющих решению ЗК, и объём памяти, требуемой для хранения количества допустимых путей.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, метод решения, сложная цепь Маркова, статистическое испытание, оценка сложности

Введение

Одной из важных задач комбинаторики является задача коммивояжёра или задача о странствующем торговце (англ. «Travelling Salesman Problem», TSP) [1]. Она сводится к поиску пути, который коммивояжёр проходит через промежуточные пункты по одному разу, возвращаясь в исходную точку, и является оптимальным по заданному критерию. Критерием оптимальности маршрута могут выступать различные параметры: минимальные время поездки, расходы на дорогу или длина пути. Возможно применение интегрального критерия, учитывающего все из указанных параметров. Существуют различные методы решения TSP [2]: полного перебора (грубой силы), ветвей и границ, случайного перебора, жадного алгоритма и др. Методы решения TSP делятся на точные [3] и приближённые [4]. Представляют интерес приближённые методы решения TSP [4,5], основанные на статистических испытаниях. Общая идея метода статистических испытаний заключается в том, что вместо аналитического описания некоторого процесса производится его многократное вероятностное моделирование. В итоге получим множество реализаций, которые в совокупности можно обработать методами математической статистики. Мощность множества реализаций позволяет определить точность решения, получаемого на основе метода статистических испытаний. Приемлемую точность решения можно получить только при использовании средств вычислительной техники как общего, так и специального назначения [6,7].

Метод статистических испытаний позволяет применить для решения широкого круга задач аппарат теории цепей Маркова (ЦМ) или марковских последовательностей [8]. Процессы, моделируемые при использовании ЦМ, характеризуются тем, что состояние ЦМ в следующий момент времени определяется только её состоянием в текущий момент времени. Существуют также сложные ЦМ, для которых состояние в следующий момент времени определяется множеством её состоянием в текущий момент времени определяется множеством её состояний, в которых она находилась в последние N моментов времени, N-сложные ЦМ, N > 1 [9]. Известны различные реализации схемы генератора N-сложной ЦМ (далее — N-ЦМ), представленные на абстрактном и структурном уровнях [10–18]. В частности, в [10] показано, что схема генератора N-ЦМ, заданной стохастической матрицей (СМ), может быть представлена в виде определенной композиции двух конечных автоматов — детерминированного автомата Мура (КДА) и вероятностного автомата без памяти (ВА).

Ниже предложен подход к решению задачи TSP с применением *N*-сложной цепи Маркова при использовании метода статистических испытаний как метода, обладающего рядом преимуществ: малой связностью и устойчивостью к случайным сбоям. Это позволяет распараллелить процесс генерирования путей с последующим выбором среди найденных решений приближённого к оптимальному по заданному критерию.

1. Постановка ТЅР на основе *N*-ЦМ

Решим TSP для множества из N пунктов, один из которых выбран в качестве начального. Затем по определённому правилу произведем переход в следующий пункт, и так до тех пор, пока не будут пройдены все пункты, причём каждый из них посещается только один раз. Последовательность пройденных пунктов определим как путь V или, согласно определению из [10], как траекторию N-ЦМ. Последний пункт пути определим как финальный.

В TSP для каждого пункта заданы возможная прибыль коммивояжёра от перемещения в пункт j и затраты (материальные и/или временные) на перемещение из пункта i в пункт j. Первую величину обозначим как d_j , а вторую — как h_{ij} , $i, j = \overline{1, N}$. Абстрагируемся от конкретных параметров, определяющих значения выгоды и затрат. Для каждой пары пунктов введём функционал, характеризующий выгоду коммивояжёра от перемещения в пункт j из пункта i:

$$f_{ij} = d_j - h_{ij}.\tag{1}$$

Для каждого пункта на основании (1) рассчитаем вероятностный закон распределения перехода в следующий пункт. Особенностью этого закона является то, что вероятность перехода в уже пройденный пункт должна быть нулевой. Пусть из начального пункта в текущий пункт ведёт путь длины k, k < N. Тогда количество допустимых переходов для текущего пункта не будет превышать N - k.

Справедлива

Теорема 1. Закон распределения вероятности перехода в следующий пункт j из текущего пункта i при прохождении пути V, включающего k заданных пунктов, определённый на основе (1), имеет вид

$$\left\{\frac{q_{ij}}{Q_i}\right\}, \quad q_{ij} = \begin{cases} 0, & j \in V, \\ f_{ij}, & u \text{ wave,} \end{cases} \quad \textit{ede} \quad Q_i = \sum_{j=1}^N q_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Определим количество всевозможных путей движения коммивояжёра. При условии, что начальный пункт задан, верхняя его оценка равна величине (N-1)! [1,2].

Для каждого пункта *i* переходы в другие пункты, ещё не включенные в путь *V* длины *k*, ранжируем по убыванию значений q_{ij} . Примем следующее ограничение: из заданного пункта может быть выполнен переход только в *l* пунктов, l < N, с максимальными значениями q_{ij} . Согласно этому ограничению некоторые переходы из одного пункта в другой окажутся запрещёнными. Тогда количество всевозможных допустимых путей будет ограничено сверху величиной $l^{N-l-1} l!$. При этом как минимум $(N-1)! - l^{N-l-1} l!$ путей будут недопустимыми ввиду того, что из каждого пункта разрешены переходы только в *l* других пунктов. Кроме того, если пройденный путь *V* включает в себя *l* пунктов, в которые разрешён переход из текущего пункта, то переход ни в один пункт из текущего пункта не разрешён. Следовательно, данный путь также является недопустимым.

Замечание. Для l = 1 алгоритм решения TSP сводится к жадному алгоритму поиска квазиоптимального решения. Тогда у N-ЦМ будет не более одного допустимого пути.

На основе вышеизложенного имеет место

Теорема 2. Верхняя оценка количества всевозможных вариантов закона распределения вида (2) для текущего пункта і при заданном пути V длины k и f_{ij} , k < N, $i, j = \overline{1, N}$, определена как 2^l .

Согласно теореме 2 и [10] закон N-ЦМ будет определён стохастической матрицей, содержащей $2^l N$ строк и N столбцов.

Теорема 3. Путь V длины N является допустимым, если для любого из пунктов, включённых в V, в законе вида (2) существует хотя бы один ненулевой элемент: $\forall k = \overline{1, N} \exists q_{ij} = f_{ij}$.

В соответствии с теоремами 1-3 произведем многократное генерирование N-ЦМ. Допустимый путь, сгенерированный наибольшее количество раз, является решением TSP. Метод статистических испытаний по определению является приближённым, поэтому описанное решение TSP является приближённым к оптимальному.

2. Генератор *N*-сложной цепи Маркова

Пусть генератор *N*-ЦМ состоит из композиции двух блоков согласно [10]: КДА и ВА. Рассмотрим задание КДА и ВА.

КДА определён в виде

$$(Z, S, Y, s(t+1) = \delta(z(t), s(t)), y(t) = \lambda(z(t), s(t))),$$
(3)

где $z \in Z$ — номер пункта, который посещает коммивояжёр в текущий момент времени, обозначим его z(t); в Z включен отдельный элемент, характеризующий финальный пункт пути, |Z| = N + 1; $s \in S$, S — множество пунктов, которые уже включены в путь длины $k, k < N, |S| = 2^N; y \in Y$ — номер варианта закона распределения вида (2) для пункта z(t), согласно которому выбирается новый пункт $z(t+1), z(t), z(t+1) \in Z, |Y| = w \le 2^l N, l < N$. Значения $s(t+1) \in S$ и $y(t) \in Y$ определим на основе детерминированных функций перехода $s(t+1) = \delta(z(t), s(t))$ и выхода $y(t) = \lambda(z(t), s(t))$ соответственно.

ВА задан множеством

$$(Y, X, Z, z(t+1) = \mu(y(t), x(t))), \qquad (4)$$

где $y \in Y$ и $z \in Z$ определены как для КДА (3), $x(t) \in X$ — двоичная α -разрядная (псевдо)случайная величина, равномерно распределённая на интервале $[0, 2^{\alpha} - 1]$. Новый номер пункта — $z(t+1) \in Z$, |Z| = N+1, выберем при использовании стохастической функции μ , которая определена в соответствии с законом распределения вида (2) и значениями y(t) и x(t); функция μ в общем случае задана N двоичными значениями разрядности α , (b_1, \ldots, b_N) в зависимости от значения y(t), $0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_N \leq 2^{\alpha} - 1$; затем, когда определен вектор (b_1, \ldots, b_N) , согласно x(t) выберем пункт $k, k = \overline{1, N}$, или финальный пункт с номером (N + 1), при условии $b_{k-1} < x(t) \leq b_k$, приняв $b_0 = 0$ и $b_{N+1} = 2^{\alpha}$. Формирование z(t+1)как дискретной случайной величины с заданным законом распределения произведем на основе известных методов как параллельно, так и последовательно [17–19]. Согласно [16, 17] детерминированные и стохастические автоматные функции могут быть вычислены на распределённых вычислительных системах как общего, так и специального назначения при использовании нелинейных полиномиальных функций, определённых над конечным полем [16].

В дополнение к системе, включающей КДА и ВА, требуется определить память из (N-1) ячеек разрядности $]\log_2 N[$ каждая. В эти ячейки запишем номера пунктов пути V, $z(2), \ldots, z(N)$, который N-ЦМ проходит из начального пункта z(1)в финальный. Номер z(1) в память не записываем, т. к. он известен. Финальный пункт пути с номером (N+1) в память также не записываем, он служит признаком окончания генерирования пути $z(1), z(2), \ldots, z(t+1), t \leq N$. Определим счётчик по модулю N для подсчёта длины пути t, пройденного от начального пункта до финального. Если длина пути t при выходе на финальный пункт равна N, то такой путь является допустимым. Если же выход в финальный пункт происходит при длине пути t < N, то такой путь считается недопустимым. Признак допустимости пути снимем с выхода счётчика по модулю N.

3. Метод решения ТЅР

Предложим метод определения pemenuя TSP (далее — Метод), который включает подготовительный этап и два следующих этапа.

Подготовительный этап: определение генератора N-ЦМ на основе параметров N, (1) и l.

Этап 1. Формирование $f \leq F$ путей, соответствующих условию их допустимости в соответствии с теоремой 3; сохранение в памяти количества реализаций каждого из допустимых путей $V: z(1), \ldots, z(N)$.

 \Im 2. Определение пути V, реализованного генератором N-ЦМ с максимальной частотой, как решения TSP.

При реализации Метода представляет интерес задача хранения количества различных вариантов (частот) реализации путей, допустимых согласно теореме 3, $V: z(1), \ldots, z(N)$ (далее — ЗХЧ). Варианты V реализуются на этапе 1 Метода при использовании генератора N-ЦМ, определённого на подготовительном этапе Метода. Из полученных вариантов на этапе 2 Метода выбираем тот, который был сгенерирован с наибольшей частотой.

Самое очевидное решение ЗХЧ — применение памяти, имеющей организацию $2^{(N-1)]\log_2 N}[]\log_2 F[$, где F — максимально допустимое количество сгенерированных N-ЦМ. Значение z(1) не участвует в определении адресов ячеек памяти, т. к. задано изначально. Перед генерированием N-ЦМ ячейки обнуляем. При каждом генерировании $V: z(1), \ldots, z(N)$ число в ячейке, которая находится по адресу, определяемому значениями $z(2), \ldots, z(N)$, увеличиваем на единицу. После генерирования $f, f \leq F, N$ -ЦМ, выбираем ячейку (или ячейки) памяти по адресу $r(2), \ldots, r(N)$, где находится максимальное число. Значения одного или нескольких адресов, $r(2), \ldots, r(N)$, при заданном значении z(1) соответствуют номерам пунктов пути $V: z(1), \ldots, z(N)$ — искомого решения TSP.

Второй вариант решения ЗХЧ — применение (N-2)-х блоков памяти (БП). Для начального участка пути в моменты времени 1, 2 и 3 достаточно хранить в первом БП количество пар всевозможных номеров z(2) и z(3), т. к. пункт z(1) задан. Каждый из остальных (N-3)-х БП соответствует участку пути в три момента времени (t-1), t и (t+1), $t = \overline{3}, (N-1)$, и хранит количество троек всевозможных номеров пунктов (t-1), t и (t+1). БП под номерами (t-1) и t хранят одинаковые значения z(t) и z(t+1), $t = \overline{2}, (N-2)$, с целью объединения отдельных участков в один путь V на этапе 2 Метода. БП под номерами $2, \ldots, (N-2)$ имеют организацию $2^{3\log_2 N}$ на $\log_2 F[$, где F — максимально допустимое количество сгенерированных N-ЦМ. Первый БП имеет организацию $2^{2\log_2 N}$ на $\log_2 F[$. Изначально ячейки (N-2)-х БП обнуляем. При каждом генерировании $V : z(1), \ldots, z(N)$ число в ячейке БП 1, которая находится по адресу, определяемому z(2) и z(3), увеличиваем на единицу. Аналогичную процедуру повторим для каждого БП t для ячейки по адресу, определяемому z(t), z(t+1) и z(t+2).

Обозначим через S_t множество пунктов, которые принадлежат начальному участку пути V из t элементов, $t \leq N$. После генерирования f, N-ЦМ, $f \leq F$, выберем ячейку (или ячейки) БП 1 по адресу r(2), r(3), где находится максимальное число. Значениям адресов r(2), r(3) при заданном значении z(1) соответствуют участки искомого пути z(1), z(2), z(3). Затем выберем ячейки БП 2 с адресами r(2), r(3), r(4), где находится максимальное число, $r(4) \in (Z^{\sim}S_3)$. Значению адреса r(2), r(3), r(4) соответствует участок искомого пути $z(1), \ldots, z(4)$. Затем последовательно выберем ячейки БП t, $t = \overline{3}, (N-2)$, с адресами z(t), z(t+1), z(t+2), где находится максимальное число, $r(t+2) \in (Z^{\sim}S_{t+1})$; z(t), z(t+1), определены на основе значения адреса ячейки БП (t-1). Значения адресов z(t), z(t+1), z(t+2) соответствуют участку искомого пути $z(1), \ldots, z(t+1)$ при заданном значении z(1). В итоге для t = (N-2) получим номера пунктов пути $z(1), \ldots, z(N)$ — искомого решения ТSP.

Пример. Пусть задана *N*-ЩМ при *N* = 7. На основе метода статистических испытаний было сформировано 8 траекторий: 1-2-5-4-3-6-7, 1-3-5-2-4-7-6, 1-3-5-2-4-7-6, 1-2-5-4-3-6, 1-2-5-4-3-6-7, 1-2-5-6-7-3-4, 1-3-5-2-4-7-6 и 1-2-5-4-3-6-7.

Требуется один БП с организацией $2^{2]\log_2 7[} = 64$ на три и четыре БП с организацией $2^{3]\log_2 7[} = 512$ на 3. В БП 1 в ячейках, определяемых z(2), z(3) и соответствующих участкам путей (далее — участкам) 2-5, 3-5 и 2-7, запишем значения 4, 3 и 1, в остальных ячейках — нули. В БП 2 в ячейках, определяемых z(2), z(3), z(4) и соответствующих участкам 2-5-4, 3-5-2, 2-7-5, 2-5-6, запишем значения 3, 3, 1 и 1 соответственно, в остальных ячейках — нули. В БП 3 в ячейках, опре-

деляемых z(3), z(4), z(5) и соответствующих участкам путей 5-4-3, 5-2-4, 7-5-4 и 5-6-7, запишем значения 3, 3, 1 и 1 соответственно, в остальных ячейках — нули. В БП 4 в ячейках, определяемых z(4), z(5), z(6) и соответствующих участкам 4-3-6, 2-4-7, 5-4-3 и 6-7-3, запишем значения 3, 3, 1 и 1 соответственно, в остальных ячейках — нули. В БП 5 в ячейках, определяемых z(5), z(6), z(7) и соответствующих участкам иих участкам 3-6-7, 4-7-6, 4-3-6 и 7-3-4, запишем значения 3, 3, 1 и 1 соответственно, в остальных ячейках — нули.

Найдем теперь решение TSP. Для БП 1 наиболее часто встречается начальный участок 1-2-5. Для БП 2 рассмотрим участки, которые начинаются с пунктов 2-5: 2-5-4 и 2-5-6. Частота появления участка 2-5-4 максимальная. Выберем участок пути 1-2-5-4. Для БП 3 рассмотрим участки, которые начинаются с пунктов 5-4: только участок 5-4-3 соответствует данному условию. Выберем участок пути 1-2-5-4. Для БП 4 рассмотрим участки, которые начинаются с пунктов 4-3: только участок 4-3-6 соответствует данному условию. Выберем участок пути 1-2-5-4-3. Для БП 5 рассмотрим участки, которые начинаются с пунктов 4-3: только участок 4-3-6 соответствует данному условию. Выберем участок пути 1-2-5-4-3-6. Для БП 5 рассмотрим участки, которые начинаются с пунктов 3-6: только участок 3-6-7 соответствует данному условию. Выберем в итоге путь 1-2-5-4-3-6-7 как решение TSP, полученное на основе метода статистических испытаний.

Первый вариант решения ЗХЧ требует один блок памяти, общий объём которого равен $2^{(N-1)]\log_2 N[}\log_2 F[$ бит, а второй — множество из (N-2)-х блоков памяти общим объёмом $(2^{3]\log_2 N[(N-3)} + 2^{2]\log_2 N[})]\log_2 F[)$ бит. В итоге общая ёмкость (N-2)-х блоков памяти для реализации второго варианта будет в $\frac{2^{(N-3)]\log_2 N[}}{(2N-5)}$ раз меньше, чем для первого.

4. Анализ сложности предложенного Метода

Оценим сложность реализации этапов Метода: подготовительного и второго — на основе требуемой ёмкости памяти в битах, а первого — по времени задержки вычисления функций КДА вида (3) и ВА вида (4).

Подготовительный этап Метода. Оценим сложность реализации системы, включающей КДА вида (3) и ВА вида (4). Для КДА объёмы множеств входов (Z), внутренних состояний (S) и выходов (Y) будут определены как |Z| = N + 1, $|S| = 2^N$ и $|Y| = w \le 2^l$. Функции переходов $s(t + 1) = \delta(z(t), s(t))$ и выходов $y(t) = \lambda(z(t), s(t))$ в (3) требуют реализации преобразований вида $Z \times S \to S$ и $Z \times S \to Y$. Для ВА вида (4) объёмы множеств для входов S, X и выходов Z определены частично как для КДА вида (3), объём множества $|X| = 2^{\alpha}$, где α разрядность равномерно распределённого (псевдо)случайного числа. Вероятностная функция выходов μ определена как множество из $|Y||X| = w2^{\alpha}$ законов (2) распределения дискретной случайной величины $z(t + 1) \in Z$.

Для реализации функций перехода и выхода КДА вида (3), $\delta(z(t), s(t))$ и $\lambda(z(t), s(t))$ требуется память с организацией $2^{]\log_2(N+1)[+N} \times N$ для первой и $2^{]\log_2(N+1)[+N} \times]\log_2 w[$ для второй функции. Определим организацию памяти для задания стохастической функции μ ВА.

Если требуется извлечь значения (b_1, \ldots, b_N) последовательно, то для задания μ нужна память с организацией $2^{l_1 \log_2(N+1)[+\alpha+] \log_2 N[} \times \alpha$; в случае параллельного извлечения N значений (b_1, \ldots, b_N) память для задания μ должна иметь организацию $2^{l_1 \log_2(N+1)[+\alpha} \times (\alpha N)$, где α — разрядность равномерно распределённого (псевдо)случайного числа $x(t) \in X$. Если требуется извлекать из памяти значения z(t+1) в соответствии с функцией $\mu(y(t), x(t))$, то такая память должна иметь организацию $2^{\log_2 w[+\alpha} \times \log_2(N+1)[$.

Этап 1 Метода. Проведем генерирование N-ЩМ. Время генерирования одного элемента N-ЩМ определено как время вычисления z(t+1) на основе значений z(t) и s(t). Оценка этого времени определена формулой

$$T_{z(t+1)} = \max\left(\max\left(T(x), T(\lambda)\right) + T(\mu), T(\delta)\right),\tag{5}$$

где T(x), $T(\lambda)$, $T(\mu)$ и $T(\delta)$ — времена вычисления равномерно распределённого (псевдо)случайного числа $x(t) \in X$, функции выхода КДА вида (3), функции выхода ВА вида (4) и функции перехода КДА вида (3) соответственно.

Согласно (5) время генерирования N-ЩМ будет определено как $NT_{z(t+1)}$. Перепишем условие, определённое в теореме 3, следующим образом:

$$\forall k = 1, \dots, t, \quad t \le N, \quad \exists q_{ij} = f_{ij}. \tag{6}$$

Элементы N-ЦМ в моменты времени $t = 2, \ldots, (l-1), l < N$, образуют последовательность, удовлетворяющую условию (6), с вероятностью 1, тогда как в моменты времени $l \le t < N$ существует вероятность сгенерировать путь, для которого условие (6) не выполнится (т. е. получим недопустимый путь). Поиск указанной вероятности сводится к решению известной задачи поиска значения вероятности гипергеометрического распределения при заданных параметрах [20], или схеме выбора t шаров, среди которых l являются красными, $l \le t$, из ящика (урны), в которой находится N шаров, из которых l красные, а (N-l) — белые [21]. Искомая вероятность при заданных параметрах N, l и t равна $p(N, l, t) = C_{N-l}^{t-l}/C_N^t$. Справедлива

Теорема 4. Вероятность генерирования N-ЦМ при заданном значении $l \leq N$ и в каждый момент времени t = 1, ..., N - 1, удовлетворяющая условию (6), равна

$$Pr(N,l) = \prod_{t=l}^{N-1} (1 - p(N,l,t)) = \prod_{t=l}^{N-1} (1 - C_{N-l}^{t-l}/C_N^t).$$

Из теоремы 4 вытекает

Следствие. Вероятность того, что в момент времени $t, t \in \{l, ..., N-1\}$, при заданном значении $l \leq N$, N-ЦМ удовлетворяет условию (6), равна

$$\ddot{Pr}(N,l,t) = \prod_{s=l}^{t} (1 - p(N,l,s)) = \prod_{s=l}^{t} (1 - C_{N-l}^{t-l}/C_N^t),$$

а вероятность противоположного события равна $1 - \ddot{Pr}(N,l,t)$.

Теорема 4 определяет вероятность того, что N-ЦМ, удовлетворяющая условию (6), будет сгенерирована за время $NT_{z(t+1)}$ в соответствии с (5). Следствие из теоремы 4 позволяет вычислить вероятность того, что при генерировании N-ЦМ вероятность генерирования недопустимого пути в момент времени $t, t \in l, ..., N$ составляет $1 - \ddot{P}r(N, l, t)$.

Этап 2 Метода. Выполним подсчёт частот реализации каждой из N-ЦМ, удовлетворяющих условию (6) для $t \leq N$. N-ЦМ вида $z(1), \ldots, z(N)$, сгенерированная наибольшее количество раз, является приближённым решением TSP. Для первого варианта решения ЗХЧ требуется $2^{(N-1)]\log_2 N}$ обращений к ячейкам памяти с выбором среди них наибольшего и с сохранением адреса ячейки, содержащей максимальное значение. Для второго варианта получим $2^{2]\log_2 N} + (N-3)2^{3]\log_2 N}$ обращений к ячейкам БП под номерами $1, \ldots, (N-2)$. Для каждого БП сохраняется адрес (адреса) ячейки, содержащей максимальное значение.

Заключение

Представлен подход к решению задачи коммивояжёра на основе предложенного Метода, который основан на генерировании N-сложной цепи Маркова при использовании генератора N-ЦМ в виде композиции КДА (3) и ВА (4). Получение решения сводится к реализации метода статистических испытаний. На подготовительном этапе Метода строится генератор *N*-ЦМ. Объёмы множеств КДА вида (3) и ВА вида (4) зависят от N и l следующим образом: объём Z линейно зависит от N, объём S зависит от N экспоненциально, объём Y экспоненциально зависит от l, объём X зависит от N и l лишь косвенным образом, определяя точность задания закона распределения вида (2). Количество ячеек памяти для хранения значений функций перехода и выхода КДА вида (3) экспоненциально зависит от N, тогда как размер ячеек памяти для значений функции перехода зависит от N линейно, а для значений функции выхода — логарифмически зависит от 1. Количество ячеек памяти для хранения значений, требуемых для реализации стохастической функции μ ВА вида (4), последовательной и параллельной, зависит экспоненциально от величин α и l, а от величины N зависит линейно. Величина ячейки памяти, требуемой для последовательной реализации μ , линейно зависит от α — разрядности $x(t) \in X$, а для параллельной реализации — от произведения αN . Функции КДА и ВА могут быть реализованы также при использовании полиномиальных функций над полем Галуа $GF(2^2)$ на ПЛИС/FPGA, сложность их реализации в базисе ПЛИС представлена в [22].

На этапе 1 Метода производится генерирование N-ЦМ. Согласно (5) на время генерирования каждого из элементов N-ЦМ влияние оказывает задержка вычисления вероятностной функции ВА вида (4), а также максимум от задержек генерирования равномерно распределённой случайной величины и вычисления функций выхода КДА вида (3). Сумма значений $\max(T(x), T(\lambda)) + T(\mu)$ в (5) определяет время генерирования z(t+1), если она больше времени вычисления значения $T(\delta)$.

Для хранения количества реализаций каждого из вариантов N-ЦМ длины N требуется память с организацией $2^{(N-1)]\log_2 N[} \log_2 F[$, для хранения участков N-ЦМ длины три — (N-3) БП с организацией $2^{3]\log_2 N[}$ на $]\log_2 F[$, а для начального участка длины два — один БП с организацией $2^{2]\log_2 N[}$ на $]\log_2 F[$, где F — максимально допустимое количество сгенерированных N-ЦМ. В обоих случаях размер ячейки логарифмически зависит от F, количество ячеек при росте N в первом случае растёт экспоненциально, а во втором — линейно.

Метод позволяет получить приближённое решение задачи коммивояжёра для N пунктов при следующих условиях: переход из текущего пункта возможен не более чем в $l \leq N$ других пунктов, которые ранее не посещались, и начальный пункт пути задан. На этапе 1 Метода реализуемо многократное параллельное генерирование различных допустимых путей при использовании вычислительных систем как общего, так и специального назначения. За счет статистической обработки множества полученных результатов предложенный Метод устойчив к случайным отклонениям в отличие от известных приближённых детерминированных методов. Данное обстоятельство открывает перспективы применения предложенного Метода для решения широкого круга задач в таких областях, как проектирование компьютерных систем на микро- и макроуровне, обработка изображений и видео, секвентирование ДНК, логистика.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору кафедры компьютерных систем, д. т. н. В.М. Захарову за ценные замечания по работе. Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem // Oper. Res. 1965. V. 11, No 6. P. 94–107. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972.
- Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автомат. телемех. 1989. № 9. С. 3–33.
- 3. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Точные методы // Автомат. телемех. 1989. № 10. С. 3–29.
- 4. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. приближённые алгоритмы // Автомат. телемех. 1989. № 11. С. 3–26.
- 5. Luu Q.T., Aibin M. Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms // Baeldung. 2024. URL: https://www.baeldung.com/cs/tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms.
- Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1961. 228 с.
- 7. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
- Kemeny J., Snell J. Finite Markov Chains. Ser.: The University Series in Undergraduate Mathematics / Kelley J.L., Halmos P.R. (Eds.). Princeton, NJ: D. Van Nostrand Co., 1960. 210 p. URL: https://archive.org/details/finitemarkovchai0000unse.
- Doob J.L. Stochastic Processes. Ser.: Wiley Classics Library. V. 24. Hoboken, NJ: Wiley, 1990. 654 p. URL: https://books.google.ru/books?id=0GUGAQAAIAAJ.
- Альпин Ю.А., Захаров В.М. Теоретико-автоматный метод описания и моделирования случайных процессов // Вероятн. мет. кибернет. 1983. Т. 19. С. 10–16.
- Гремальский А.А., Андроник С.М. Генератор случайного марковского процесса. 1987. Номер патента: 1453403. URL: https://patents.su/5-1453403-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html.
- 12. Гремальский А.А., Андроник С.М. Генератор случайного марковского процесса. 1987. Номер патента: 1481755. URL:
 - https://patents.su/5-1481755-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html.
- Гремальский А.А. Генератор случайного марковского процесса. 1988. Номер патента: 1531093. URL: https://patents.su/6-1531093-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html.
- Юминов О.Б., Ирисов М.В., Дзюин С.В. Генератор n-связной марковской последовательности. 1988. Номер патента: 1550501. URL: https://patents.su/2-1550501-generator-n-svyaznojj-markovskojj-posledovatelnosti.html.
- 15. Добрыдень В.А. Устройство для моделирования марковских процессов. 1975. Номер патента: 526909. URL:
- https://patents.su/6-526909-ustrojjstvo-dlya-modelirovaniya-markovskikh-processov.html. 16. Захаров В.М., Нурутдинов Ш.Р., Шалагин С.В. Полиномиальное представление це-
- пей Маркова над полем Галуа // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 2001. № 3. С. 27–31.
- 17. Захаров В.М., Шалагин С.В., Гумиров А.И. Аппаратно-программный модуль генератора марковских последовательностей на основе программируемых логических интегральных схем // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 2022. Т. 78, № 4. С. 164–172.
- Захаров В.М., Шалагин С.В., Эминов Б.Ф. Автоматные марковские модели над конечным полем. Казань: Спец. фонд управл. цел. капит. для разв. Казан. нац. исслед. техн. ун-та им. А.Н. Туполева, 2022. 328 с. URL: https://disk.yandex.ru/i/PxXZClzIRdDnzQ.

- Захаров В.М., Шалагин С.В., Гумиров А.И. Генератор дискретной случайной величины с заданным законом распределения в архитектуре ПЛИС/FPGA // Вестн. ДГУ. Сер. 1: Ест. науки. 2023. Т. 38, № 3. С. 28–33. http://dx.doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33.
- Rice J.A. Mathematical Statistics and Data Analysis. Belmont, CA: Thomson Brooks/ Cole, 2007. 698 p. URL: https://archive.org/details/mathematicalstat0000rice c108 3ed.
- Feller V. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. V. 1. Ser.: Wiley Series in Probability and Statistics. New York, NY: Wiley, 1957. 669 p. URL: https://archive.org/details/introductiontopr0001will/mode/2up.
- 22. Шалагин С.В. Сложность вычисления нелинейных полиномиальных функций над полем GF(2²) на ПЛИС/FPGA // Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-космической промышленности: Междунар. науч.-практ. конф. Т. П. Казань, Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2014. С. 661–664.

Поступила в редакцию 15.08.2024 Принята к публикации 5.10.2024

Шалагин Сергей Викторович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных систем

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева ул. Карла Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: sshalagin@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 639-650

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.639-650

Solving the Traveling Salesman Problem by Statistical Testing Using Complex Markov Chains

S.V. Shalagin

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, 420111 Russia E-mail: sshalaqin@mail.ru

Received August 15, 2024; Accepted October 5, 2024

Abstract

A method was proposed for solving the traveling salesman problem (TSP) using N-complex Markov chains (N-MC), the state sequence of which simulates a path through N points, each visited only once. Transition probabilities from each point to one of the next l points were set, where l < N. The complexity of implementing all stages of the method, depending on the values of N and l, was analyzed. Estimates of the complexity of the N-MC generator were obtained based on the composition of a finite deterministic automaton and a probabilistic memoryless automaton. The complexity of the N-MC generator is characterized by the volume of input sets, internal states, and outputs, as well as the amount of memory required to implement the transition and output functions of the automata. The delay time of the N-MC generator operation was also estimated. The probability of generating valid paths, i.e., those resolving TSP, and the memory requirements for storing valid paths were calculated.

Keywords: traveling salesman problem, method of solving, complex Markov chain, statistical test, complexity estimate

Acknowledgments. V.M. Zakharov (Professor of the Computer Systems Department at Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Doctor of Technical Sciences) is thanked for his helpful comments on this study.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

- Little J.D.C., Murty K.G., Sweeney D.W., Karel C. An algorithm for the traveling salesman problem. *Oper. Res.*, 1965., vol. 11, no. 6, pp. 94–107. https://doi.org/10.1287/opre.11.6.972.
- Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Issues in the theory. Autom. Remote Control, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
- 3. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Exact methods. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
- Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms. Autom. Remote Control, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
- Luu Q.T., Aibin M. Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms. *Baeldung*, 2024. URL: https://www.baeldung.com/cs/ tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms.
- Buslenko N.P., Shreider Ju.A. Metod statisticheskikh ispytanii (Monte-Karlo) i ego realizatsiya na tsifrovykh mashinakh [The Statistical Test Method (Monte Carlo) and Its Use on Digital Computers]. Moscow, Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1961. 228 p. (In Russian)
- Sobol' I.M. Chislennye metody Monte-Karlo [Numerical Monte Carlo Methods]. Moscow, Nauka, 1973. 312 p. (In Russian)
- Kemeny J.G., Snell J.L. *Finite Markov Chains*. Ser.: The University Series in Undergraduate Mathematics. Kelley J.L., Halmos P.R. (Eds.). Princeton, NJ, D. Van Nostrand Co., 1960. 210 p. URL: https://archive.org/details/finitemarkovchai0000unse.
- Doob J.L. Stochastic Processes. Ser.: Wiley Classics Library. Vol. 24. Hoboken, NJ, Wiley, 1990. 654 p. URL: https://books.google.ru/books?id=0GUGAQAAIAAJ.
- Al'pin Yu.A., Zakharov V.M. An automata-theoretic approach to the description and modeling of stochastic processes. *Veroyatn. Metody Kibern.*, 1983, vol. 19, pp. 10–16. (In Russian)
- Gremal'skii A.A., Andronik S.M. Stochastic Markov process generator. Patent USSR no. 1453403, 1987. URL: https://patents.su/5-1453403-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html. (In Russian)
- Gremal'skii A.A., Andronik S.M. Stochastic Markov process generator. Patent USSR no. 1481755, 1987. URL: https://patents.su/5-1481755-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html. (In Russian)
- Gremal'skii A.A. Stochastic Markov process generator. Patent USSR no. 1531093, 1988. URL: https://patents.su/6-1531093-generator-sluchajjnogo-markovskogo-processa.html. (In Russian)

 Yuminov O.B., Irisov M.V., Dzyuin S.V. N-state Markov chain generator. Patent USSR no. 1550501, 1988. URL:

 $\label{eq:https://patents.su/2-1550501-generator-n-svyaznojj-markovskojj-posledovatelnosti.html. (In Russian)$

 Dobryden' V.A. A device for modeling Markov processes. Patent USSR no. 526909, 1975. URL:

https://patents.su/6-526909-ustrojjstvo-dlya-modelirovaniya-markovskikh-processov.html. (In Russian)

- Zakharov V.M., Nurutdinov Sh.R., Shalagin S.V. Polynomial representation of Markov chains over a Galois field. Vestn. KGTU im. A.N. Tupoleva, 2001, no. 3, pp. 27–31. (In Russian)
- Zakharov V.M., Shalagin S.V., Gumirov A.I. Hardware and software module of the Markov sequence generator based on programmable logic integrated circuits. *Vestn. Kazan. Gos. Tekh. Univ. im. A.N. Tupoleva*, 2022, vol. 78, no. 4, pp. 164–172. (In Russian)
- Zakharov V.M., Shalagin S.V., Eminov B.F. Avtomatnye markovskie modeli nad konechnym polem [Automata Markov Models over a Finite Field]. Kazan, Spets. Fond Upr. Tselevym Kap. Razvit. Kazan. Nats. Issled. Tekh. Univ. im. A.N. Tupoleva, 2022. 328 p. URL: https://disk.yandex.ru/i/PxXZClzIRdDnzQ. (In Russian)
- Zakharov V.M., Shalagin S.V., Gumirov A.I. Discrete random variable generator with the given distribution law in FPGA-architecture. Vestn. DGU. Ser. 1: Estestv. Nauki, 2023, vol. 38, no. 3, pp. 28–33. http://dx.doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33. (In Russian)
- Rice J.A. Mathematical Statistics and Data Analysis. Belmont, CA, Thomson Brooks/ Cole, 2007. 698 p. URL:

 $https://archive.org/details/mathematicalstat0000 rice_c1o8_3ed.$

- Feller V. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1. Ser.: Wiley Series in Probability and Statistics. New York, NY, Wiley, 1957. 669 p. URL: https://archive.org/details/introductiontopr0001will/mode/2up.
- 22. Shalagin S.V. The complexity of computing nonlinear polynomial functions over the GF(2²) field on PLD/FPGA. Poisk effektivnykh reshenii v protsesse sozdaniya i realizatsii nauchnykh razrabotok v rossiiskoi aviatsionnoi i raketno-kosmicheskoi promyshlennosti: Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. [Exploring Effective Solutions for the Development and Implementation of Scientific Innovations in Russia's Aviation and Space Industry: Proc. Int. Sci. Pract. Conf.]. Vol. II. Kazan, Izd. Kazan. Gos. Tekh. Univ., 2014, pp. 661–664. (In Russian)

/ Для цитирования: Шалагин С.В. Решение задачи коммивояжёра методом статистических испытаний при использовании сложных цепей Маркова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 639–650. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650.

For citation: Shalagin S.V. Solving the traveling salesman problem by statistical testing using complex Markov chains. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 639–650. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650. (In Russian) 2024, Т. 166, кн. 4 С. 651–659 ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.98

doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.651-659

О СВОЙСТВАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ПОРЯДКА ν В КОНЕЧНОМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Ю.Х. Эшкабилов, Ж.З. Истамов

Каршинский государственный университет, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан

Аннотация

Изучены необходимые и достаточные условия стохастичности и бистохастичности положительных операторов. Доказаны критерии стохастичности для непрерывных положительных операторов в \mathbb{R}^m . Получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности непрерывных положительных операторов.

Ключевые слова: стохастический оператор, бистохастический оператор, конус, положительный оператор, перестановка элемента конуса

Введение

Ряд задач физики, биологии, экономики и других наук сводится к исследованию нелинейных операторов в вещественном конечномерном пространстве \mathbb{R}^m . Пусть $S^{m-1} - (m-1)$ -мерный базисный симплекс в \mathbb{R}^m . Непрерывный положительный оператор **S** на \mathbb{R}^m называется стохастическим, если $\mathbf{S}(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$.

В работах [1–5] исследован ряд свойств квадратичных стохастичесних операторов. В [6] рассмотрен класс квадратичных стохастических операторов, которые названы бистохастическими квадратичными операторами; получено необходимое и достаточное условие для бистохастичности квадратичных операторов в \mathbb{R}^m .

В [7] введено понятие кубических стохастических операторов. Описано применение этих операторов в популяционной генетике и изучены траектории одного кубического стохастического оператора в симплексе S^{m-1} .

В [8] показано, что множество бистохастических квадратичных операторов на \mathbb{R}^m является выпуклым многогранником (см. также [9]). Получено достаточное условие для крайности бистохастичного квадратичного оператора, а также найдено количество крайних точек множества бистохастических квадратичных операторов в двумерном симплексе S^2 .

В [10] введено понятие произвольного бистохастического оператора. Изучены свойства произвольных бистохастических операторов и получено необходимое условие их бистохастичности. Доказана эргодическая теорема для произвольных бистохастических операторов порядка ν в \mathbb{R}^m .

Настоящая работа посвящена изучению необходимых и достаточных условий стохастичности и бистохастичности положительных операторов в \mathbb{R}^m . В разделе 1 изложены необходимые сведения и определения. В разделе 2 доказан один критерий стохастичности порядка ν для непрерывных положительных операторов в \mathbb{R}^m .

В разделе 3 получено необходимое и достаточное условие бистох
астичности порядка ν для непрерывных положительных операторов.

1. Необходимые сведения и определения

Для $q \in \mathbb{N}$ определим подмножество $N_{\leq q} = \{1, 2, 3, ..., q\} \subset \mathbb{N}$. Множество

$$S^{m-1} = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, \ \sum_{j=1}^m x_j = 1, \ x_j \ge 0, \ j \in N_{\le m} \}$$

называется (m-1)-мерным базисным симплексом в \mathbb{R}^m . Обозначим через $S^{m-1}_{>}$ внутренность симплекса S^{m-1} , т.е.

$$S_{>}^{m-1} = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m, \ \sum_{j=1}^m x_j = 1, \ x_j > 0, \ j \in N_{\leq m} \}.$$

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная $m \times m$ -матрица с элементами из множества вещественных чисел. Матрица A называется стохастической, если $a_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j \in N_{\leq m}$, а также

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} = 1, \ j \in N_{\leq m}.$$

Иногда стохастическую матрицу называют линейным стохастическим оператором в \mathbb{R}^m . Очевидно, что для линейного стохастичного оператора A выполняется свойство $A(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$. Обозначим через \mathbb{R}^m_+ обычный конус пространства \mathbb{R}^m , т.е.

$$\mathbb{R}^m_+ = \{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m : x_j \ge 0, \ j \in N_{\le m} \}.$$

Когда речь идет о квадратных $m \times m$ -матрицах A, будем понимать действие матрицы A на элемент $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ как транспонированной матрицы, образованной умножением двух матриц A и x, т.е. $A(x) = x' = (x'_1, x'_2, ..., x'_m) = (A \cdot x)^T$.

Оператор $\mathbf{P} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ называется положительным, если $\mathbf{P} : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$, и обозначим его через $\mathbf{P} \ge \theta$, где θ – нулевой оператор в \mathbb{R}^m . Далее через S_n обозначим группу перестановок порядка $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1 ([9]). Пусть $\nu \in \mathbb{N}$ – произвольный элемент. Непрерывный оператор **S** : $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \to \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ будем называть стохастическим оператором порядка ν , если **S** $\geq \theta$ и

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{\nu} = 1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_{\nu}, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{\nu}}, \ x \in \mathbb{R}^m, \ k \in N_{\leq m},$$

где

 $P_{i_1i_2...i_{\nu},k} \ge 0, \quad i_j = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,\nu}, \quad k = \overline{1,m}, \tag{1}$

$$P_{i_1 i_2 \dots i_{\nu}, k} = P_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \dots i_{\pi(\nu)}, k}, \quad k = \overline{1, m}$$
(2)

для любой перестановки $\pi \in S_m$ и

$$\sum_{k=1}^{m} P_{i_1 i_2 \dots i_{\nu}, k} = 1, \quad i_j = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, \nu}.$$
(3)

Из условий (1)–(3) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{\nu}, \ x \in \mathbb{R}^m.$$

Отсюда следует, что оператор **S** отображает симплекс S^{m-1} в себя. При $\nu = 1$ оператор **S** является линейным стохастическим оператором, при $\nu = 2$ этот оператор является квадратичным стохастическим оператором, при $\nu = 3$ оператор **S** является кубическим стохастическим оператором и т. д. В дальнейшем обозначим через **S**^[ν] стохастический оператор порядка ν .

Для каждого вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m_+$ положим $x \downarrow = (x_{[1]}, x_{[2]}, ..., x_{[m]}), x \downarrow$ называется [6] перестановкой x, где $x_{[1]} \ge x_{[2]} \ge x_{[3]} \ge ... \ge x_{[m]}.$

Определение 2 ([11]). Говорят, что x мажорируется y (или y мажорирует x) и пишут $x \prec y$, если $\sum_{i=1}^{q} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{q} y_{[i]}, q = \overline{1, m-1}$. Квадратная $m \times m$ -матрица $A = (a_{ij})$ называется бистохастической, если $a_{ij} \ge 0$

Квадратная $m \times m$ -матрица $A = (a_{ij})$ называется бистохастической, если $a_{ij} \ge 0$ $\forall i, j \in N_{\leq m}$ и

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1, \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1.$$

Бистохастическую матрицу A иногда называют линейным бистохастическим оператором в \mathbb{R}^m . Известно [11], что для каждого линейного бистохастического оператора A верно свойство $Ax \prec x \ \forall x \in S^{m-1}$.

Определение 3 ([9]). Стохастический оператор $\mathbf{S}^{[\nu]}$ называется бистохастическим оператором порядка ν , если $\mathbf{S}^{[\nu]}x \prec x \ \forall x \in S^{m-1}$.

В дальнейшем для бистохастического оператора В порядка ν будем использовать обозначение $\mathbf{B}^{[\nu]}.$

2. Критерии стохастичности положительных операторов

В этом разделе исследовано необходимое и достаточное условие для стохастичности положительных операторов в \mathbb{R}^m .

Теорема 1. Пусть **S** – стохастический оператор. Тогда существует набор $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, ..., \mathbf{S}_m$ из непрерывных операторов $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ j \in N_{\leq m}$, для которых каждый оператор \mathbf{S}_j является стохастическим, и выполняется равенство

$$\mathbf{S}(x) = x_1 \mathbf{S}_1(x) + x_2 \mathbf{S}_2(x) + \dots + x_m \mathbf{S}_m(x), \quad x \in S^{m-1}.$$
(4)

Доказательство. Пусть $\mathbf{S}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x)), x \in \mathbb{R}^m, -$ стохастический оператор. По определению стохастического оператора имеем

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{\nu}=1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_{\nu}, k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{\nu}}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad k \in N_{\leq m}.$$
(5)

В дальнейшем в (5) используем равенство

$$P_{i_1i_2...i_{\nu},k}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{\nu}} = P_{i_1i_2...i_{\nu},k}x_1^{\tau_1}x_2^{\tau_2}...x_m^{\tau_m},$$

где через $au_j = au_j(i_1, i_2, ..., i_{
u})$ обозначена степень переменной x_j в выражении $P_{i_1i_2...i_{\nu},k}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{\nu}}$. Очевидно, что $\tau_j \in N_{\leq \nu} \cup \{0\}$ и $\sum_{j=1}^m \tau_j = \nu$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{R}^m$ имеем

$$\varphi_k(x) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{\nu} = 1}^m P_{i_1 i_2 \dots i_{\nu}, k} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m}, \ k \in N_{\leq m}.$$

Легко заметить, что частными производными функций $\varphi_k(x), k \in N_{\leq m}$, по каждым аргументам x_j являются непрерывные функции на \mathbb{R}^m . Определим операторы $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \ j \in N_{\leq m}$, равенствами

$$\mathbf{S}_{j}(x) = (\varphi_{1}^{(j)}(x), \varphi_{2}^{(j)}(x), ..., \varphi_{m}^{(j)}(x)), \quad x \in \mathbb{R}^{m},$$
(6)

где

$$\varphi_k^{(j)}(x) = \frac{1}{\nu} \varphi_k^{'}(x)_{x_j}, \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad j, k \in N_{\leq m}.$$

Докажем, что для операторов \mathbf{S}_j выполняется равенство (4). При $x \in \mathbb{R}^m_> = \{x \in \mathbb{R}^m : x_j > 0, \ j \in N_{\leq m}\}$ имеем

$$(\varphi_k(x))'_{x_j} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_\nu = 1}^m \tau_j(i_1, i_2, \dots, i_\nu) P_{i_1 i_2 \dots i_\nu, k} \frac{x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} \dots x_m^{\tau_m}}{x_j}.$$
 (7)

Для каждого фиксированного $k \in N_{\leq m}$ определим на \mathbb{R}^m непрерывную функцию $F_k(x) = \sum_{j=1}^m x_j \varphi_k^{(j)}(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}.$ Следовательно, в силу равенства (7) на $S^{m-1}_>$ получим (1)(2)(m)

$$\begin{aligned} x_{1}\varphi_{k}^{(1)}(x) + x_{2}\varphi_{k}^{(2)}(x) + \ldots + x_{m}\varphi_{k}^{(m)}(x) &= \\ &= \frac{1}{\nu}(x_{1}\varphi_{k}^{'}(x)_{x_{1}} + x_{2}\varphi_{k}^{'}(x)_{x_{2}} + \ldots + x_{m}\varphi_{k}^{'}(x)_{x_{m}}) = \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu}=1}^{m}\tau_{j}(i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu})P_{i_{1}i_{2}\ldots i_{\nu},k}x_{1}^{\tau_{1}}x_{2}^{\tau_{2}}\ldots x_{m}^{\tau_{m}} = \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu}=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\tau_{j}(i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu})P_{i_{1}i_{2}\ldots i_{\nu},k}x_{1}^{\tau_{1}}x_{2}^{\tau_{2}}\ldots x_{m}^{\tau_{m}} = \\ &= \frac{1}{\nu}\sum_{i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu}=1}^{m}\nu P_{i_{1}i_{2}\ldots i_{\nu},k}x_{i_{1}}x_{i_{2}}\ldots x_{i_{\nu}} = \\ &= \sum_{i_{1},i_{2},\ldots,i_{\nu}=1}^{m}P_{i_{1}i_{2}\ldots i_{\nu},k}x_{i_{1}}x_{i_{2}}\ldots x_{i_{\nu}} = \varphi_{k}(x) \quad (x \in S^{m-1}_{>}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$F_k(x) = \varphi_k(x) \quad \forall x \in S^{m-1}_>, \quad k \in N_{\le m}.$$
(8)

В силу непрерывности многопеременных функций $F_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ на компактном множестве S^{m-1} и из равенства (8) вытекает, что

$$F_k(x) = \varphi_k(x) \quad \forall x \in S^{m-1}, \quad k \in N_{\leq m}.$$

Следовательно, для операторов S_{i} (6) имеет место равенство (4).

Теперь покажем, что каждый оператор \mathbf{S}_{j} (6) является стохастическим оператором. Очевидно, что $\mathbf{S}_{j} \geq \theta$, $j \in N_{\leq m}$. На \mathbb{R}^{m} рассмотрим следующие суммы:

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\nu} \varphi_k'(x)_{x_j} = \frac{1}{\nu} \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) \right)_{x_j} =$$
$$= \frac{1}{\nu} ((x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{\nu})_{x_j}' = (x_1 + x_2 + \dots + x_m)^{\nu - 1}, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Из последнего равенства на S^{m-1} получим

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k^{(j)}(x) = 1, \ j \in N_{\leq m}.$$

Это означает, что каждый оператор \mathbf{S}_{j} является стохастическим.

Теорема 2. Если $\mathbf{S}_j: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, j \in N_{\leq m}$, – стохастические операторы, то оператор

$$\mathbf{S}(x) = x_1 \mathbf{S}_1(x) + x_2 \mathbf{S}_2(x) + \dots + x_m \mathbf{S}_m(x), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$
(9)

также является стохастическим.

Доказательство. Пусть каждый оператор $\mathbf{S}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ имеет вид $\mathbf{S}_j(x) = (\psi_1^{(j)}(x), \psi_2^{(j)}(x), ..., \psi_m^{(j)}(x))$, где $\psi_l^{(j)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда из (9) для оператора $\mathbf{S} : x \to (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x))$ получим, что $\varphi_k(x) = x_1 \psi_k^{(1)}(x) + x_2 \psi_k^{(2)}(x) + ... + x_m \psi_k^{(m)}(x)$, $k \in N_{\leq m}$. Из положительности операторов \mathbf{S}_j следует, что $\mathbf{S} \geq \theta$. С другой стороны, в силу стохастичности операторов \mathbf{S}_j для оператора \mathbf{S} (9) при $x \in S^{m-1}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k(x) = x_1 \sum_{k=1}^{m} \psi_k^{(1)}(x) + x_2 \sum_{k=1}^{m} \psi_k^{(2)}(x) + \dots + x_m \sum_{k=1}^{m} \psi_k^{(m)}(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1.$$

Из последнего равенства следует, что S – стохастический оператор.

Очевидно, что если в (9) \mathbf{S}_{j} – линейные операторы, то оператор \mathbf{S} является квадратичным стохастическим оператором; если в (9) \mathbf{S}_{j} – квадратичные операторы, то оператор \mathbf{S} является кубическим стохастическим оператором и т. д. Поэтому в дальнейшем запишем разложение (9) следующим образом:

$$\mathbf{S}^{[\nu]} = \mathbf{S}(\mathbf{S}_1^{[\nu-1]}, \mathbf{S}_2^{[\nu-1]}, ..., \mathbf{S}_m^{[\nu-1]}), \quad \nu \ge 2.$$

3. Необходимое и достаточное условие бистохастичности операторов

Пусть $x \in S^{m-1}$ – произвольная фиксированная точка. Для разложения (4) введем следующие обозначения: $\mathbf{S}(x) = (b_1, b_2, ..., b_m)$, $\mathbf{S}_j(x) = (a_1^{(j)}, a_2^{(j)}, ..., a_m^{(j)})$, $j \in N_{\leq m}$, где $a_k^{(j)} = \psi_k^{(j)}(x)$. Согласно обозначениям имеем $b_i = x_1 a_i^{(1)} + x_2 a_i^{(2)} + ... + x_m a_i^{(m)}$, $i \in N_{\leq m}$.

Теорема 3. Если в разложении (4) каждый оператор S_j бистохастический, то оператор S также является бистохастическим.

Доказательство. Пусть $S_1, S_2, ..., S_m$ – бистохастические операторы на S^{m-1} . Тогда в силу теоремы 2 оператор **S** (4) является стохастическим оператором. Пусть $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ – произвольная фиксированная точка. Нам нужно показать, что $\sum_{i=1}^{q} b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}$.

Для каждого $i \in N_{\leq m}$ существует такое $k_i \in N_{\leq m}$, что $b_{[i]} = \sum_{j=1}^m x_j a_{k_i}^{(j)}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{q} b_{[i]} = x_1 \sum_{i=1}^{q} a_{k_i}^{(1)} + x_2 \sum_{i=1}^{q} a_{k_i}^{(2)} + \dots + x_m \sum_{i=1}^{q} a_{k_i}^{(m)}, \quad x \in S^{m-1}.$$
 (10)

В силу бистохастичности операторов \mathbf{S}_j имеем

$$\sum_{i=1}^{q} a_{[i]}^{(j)} \le \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}, \quad j \in N_{\le m}.$$

Отсюда получим

$$x_j \sum_{i=1}^q a_{[i]}^{(j)} \le x_j \sum_{i=1}^q x_{[i]}, \ j \in N_{\le m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{q} a_{[i]}^{(j)} \le \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}, \quad j \in N_{\le m},$$

т.е.

$$x_1 \sum_{i=1}^{q} a_{[i]}^{(1)} + x_2 \sum_{i=1}^{q} a_{[i]}^{(2)} + \dots + x_m \sum_{i=1}^{q} a_{[i]}^{(m)} \le \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}$$

Таким образом, отсюда и из (10) вытекает, что $\sum_{i=1}^{q} b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}$. Последнее означает, что **S** – бистохастический оператор.

Если существуют бистохастические операторы $\mathbf{S}_j = \mathbf{B}_j^{[\nu-1]}, j \in N_{\leq m}$, и для бистохастического оператора $\mathbf{S} = \mathbf{B}^{[\nu]}$ имеет место равенство (4), то будем писать

$$\mathbf{B}^{[\nu]} = \mathbf{S}(\mathbf{B}_1^{[\nu-1]}, \mathbf{B}_2^{[\nu-1]}, ..., \mathbf{B}_m^{[\nu-1]}), \quad \nu \ge 2.$$

Теорема 4. Чтобы разложение (4) для бистохастического оператора **S** было верно, необходимо, чтобы при любом $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ для каждого оператора **S**_j, $j \in N_{\leq m}$, выполнялось неравенство

$$x_j \sum_{i=1}^{q} \mathbf{S}_j(x)_{[i]} \le \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}.$$

Доказательство. Предположим, что отображение $\mathbf{S} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ является бистохастичным и имеет место разложение (4). Пусть $x \in S^{m-1}$ – произвольная фиксированная точка. Для произвольного фиксированного $q \in N_{\leq m} \setminus \{m\}$ имеем $\sum_{i=1}^{q} b_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}$. Ясно, что $b_i = x_1 a_i^{(1)} + x_2 a_i^{(2)} + \ldots + x_m a_i^{(m)}, i \in N_{\leq m}$. Согласно определению перестановки элемента $x \in \mathbb{R}^m_+$ получим $b_{i_1} + b_{i_2} + \ldots +$

Согласно определению перестановки элемента $x \in \mathbb{R}^m_+$ получим $b_{i_1} + b_{i_2} + ... + b_{i_q} \leq b_{[1]} + b_{[2]} + ... + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, ..., i_q \in N_{\leq m}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} x_j a_{i_1}^{(j)} + \sum_{j=1}^{m} x_j a_{i_2}^{(j)} + \ldots + \sum_{j=1}^{m} x_j a_{i_q}^{(j)} \le b_{[1]} + b_{[2]} + \ldots + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \ldots, i_q \in N_{\le m},$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} x_j (a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \dots + a_{i_q}^{(j)}) \le b_{[1]} + b_{[2]} + \dots + b_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \dots, i_q \in N_{\le m}.$$

Из определения бистохастичности операторов вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{m} x_j (a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \ldots + a_{i_q}^{(j)}) \le x_{[1]} + x_{[2]} + \ldots + x_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \ldots, i_q \in N_{\le m}$$

Отсюда при каждом $j \in N_{\leq m}$ имеем

$$x_j(a_{i_1}^{(j)} + a_{i_2}^{(j)} + \ldots + a_{i_q}^{(j)}) \le x_{[1]} + x_{[2]} + \ldots + x_{[q]} \quad \forall i_1, i_2, \ldots, i_q \in N_{\le m}$$

Следовательно,

$$x_j(a_{[1]}^{(j)} + a_{[2]}^{(j)} + \dots + a_{[q]}^{(j)}) \le x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[q]}, \quad j \in N_{\le m},$$

т. е.

$$x_j \sum_{i=1}^{q} \mathbf{S}_j(x)_{[i]} \le \sum_{i=1}^{q} x_{[i]}, \ j \in N_{\le m}.$$

Замечание. Подчеркнем, что существуют стохастические операторы \mathbf{S}_j , $j \in N_{\leq m}$, не являющиеся бистохастическими, для которых оператор \mathbf{S} (4) являются бистохастическим. Эту ситуацию можно обосновать на примере.

Рассмотрим следующие линейные стохастические операторы в \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{S}_{1}^{[1]}: \left\{ \begin{array}{ll} x_{1}^{'} = x_{1} + 0.5x_{2} + 0.5x_{3}, \\ x_{2}^{'} = 0.5x_{2}, \\ x_{3}^{'} = 0.5x_{3}, \end{array} \right. \qquad \mathbf{S}_{2}^{[1]}: \left\{ \begin{array}{ll} x_{1}^{'} = 0.5x_{1}, \\ x_{2}^{'} = 0.5x_{1} + x_{2} + 0.5x_{3}, \\ x_{3}^{'} = 0.5x_{3}, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{S}_{3}^{[1]}: \left\{ \begin{array}{l} x_{1}^{'}=0.5x_{1}, \\ x_{2}^{'}=0.5x_{2}, \\ x_{3}^{'}=0.5x_{1}+0.5x_{2}+x_{3} \end{array} \right.$$

Тогда для оператора $\mathbf{S}^{[2]}(x)=x_1\mathbf{S}^{[1]}_1(x)+x_2\mathbf{S}^{[1]}_2(x)+x_3\mathbf{S}^{[1]}_3(x),\,x\in\mathbb{R}^3,$ получим

$$\mathbf{S}^{[2]}: \begin{cases} x_1' = x_1(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_2' = x_2(x_1 + x_2 + x_3), \\ x_3' = x_3(x_1 + x_2 + x_3). \end{cases}$$

Очевидно, что $\mathbf{S}^{[2]}(x)_{[i]} = x_{[i]} \quad \forall x \in S^2, i = \overline{1,3}, \text{ т. е. } \mathbf{S}^{[2]}(x) \prec x \quad \forall x \in S^2.$ Следовательно, по определению 3 оператор $\mathbf{S}^{[2]}$ является бистохастическим.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

- 1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Учен. зап. науч.-исслед. каф. Укр. 1924. № 1. С. 83–115.
- 2. Улам С. Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
- 3. Валландер С.С. О предельном поведении последовательности итераций некоторых квадратичных преобразований // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 3. С. 515–517.
- 4. *Любич Ю.И.* Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наук. думка, 1983. 296 с.

- 5. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 119–140.
- Ганиходжаев Р.Н. К определению квадратичных бистохастических операторов // УМН. 1993. Т. 48, № 4. С. 231–232.
- 7. *Розиков У.А., Хамраев А.Ю.* О кубических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Укр. матем. журн. 2004. Т. 56, № 10. С. 1424–1433.
- Шахиди Ф.А. О крайних точках множества бистохастических операторов // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 475–480.
- Ganikhodzhaev R., Shahidi F. Doubly stochastic quadratic operators and Birkhoff's problem // Linear Algebra Appl. 2010. V. 432, No 1. P. 24–35. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.002.
- 10. Шахиди Ф.А. О бистохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 463–468.
- Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983. 574 с.

Поступила в редакцию 28.05.2024 Принята к публикации 4.09.2024

Эшкабилов Юсуп Халбаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Каршинский государственный университет ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан

E-mail: yusup62@mail.ru

Истамов Жахонгир Зиёдиллаевич, старший преподаватель

Каршинский государственный университет

ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан E-mail: jahongir.istamov97@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 4, pp. 651–659

ORIGINAL ARTICLE doi: 10.26907/2541-7746.2024.4.651-659

Properties of Stochastic Operators of Order ν on a Finite-Dimensional Simplex

Yu.Kh. Eshkabilov*, J.Z. Istamov**

Karshi State University, Karshi, 180119 Republic of Uzbekistan E-mail: *yusup62@mail.ru, **jahongir.istamov97@mail.ru

Received May 28, 2024; Accepted September 4, 2024

Abstract

The necessary and sufficient conditions for stochasticity and bistochasticity of positive operators were analyzed. Key criteria for stochasticity of continuous positive operators in \mathbb{R}^m

were proved. The necessary and sufficient condition for these operators to be referred to as bistochastic was established.

Keywords: stochastic operator, bistochastic operator, cone, positive operator, rearrangements of cone element

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

- 1. Bernstein S.N. Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity. *Ann. Math. Stat.*, 1942, vol. 13, no. 1, pp. 53–61.
- Ulam S. Nereshennye matematicheskie zadachi [A Collection of Mathematical Problems]. Moscow, Nauka, 1964. 168 p. (In Russian)
- 3. Vallander S.S. On the limit behavior of iteration sequences of certain quadratic transformations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 202, no. 3, pp. 515–517. (In Russian)
- 4. Lyubich Yu.I. *Matematicheskie struktury v populyatsionnoi genetike* [Mathematical Structures in Population Genetics]. Kyiv, Naukova Dumka, 1983. 296 p. (In Russian)
- Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions, and tournaments. Sb.: Math., 1993, vol. 76, no. 2, pp. 489–506. https://doi.org/10.1070/SM1993v076n02ABEH003423.
- Ganikhodzhaev R.N. On the definition of bistochastic quadratic operators. *Russ. Math. Surv.*, 1993, vol. 48, no. 4, pp. 244–246. https://doi.org/10.1070/RM1993v048n04ABEH001058.
- Rozikov U.A., Khamraev A.Yu. On cubic operators defined on finite-dimensional simplexes. Ukr. Math. J., 2004, vol. 56, no. 10, pp. 1699–1711. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0145-3.
- Shahidi F. On the extreme points of the set of bistochastic operators. Math. Notes, 2008, vol. 84, no. 3, pp. 442–448. https://doi.org/10.1134/S0001434608090150.
- Ganikhodzhaev R., Shahidi F. Doubly stochastic quadratic operators and Birkhoff's problem. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 1, pp. 24–35. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.07.002.
- Shahidi F.A. On bistochastic operators defined on a finite-dimensional simplex. Sib. Math. J., 2009, vol. 50, no. 2, pp. 368–372. https://doi.org/10.1007/s11202-009-0042-3.
- 11. Marshall A.W., Olkin I. Neravenstva: teoriya mazhorizatsii i ee prilozheniya [Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications]. Moscow, Mir, 1983. 574 p. (In Russian)

Для цитирования: Эшкабилов Ю.Х., Истамов Ж.З. О свойствах стохастических операторов порядка ν в конечномерном симплексе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 651–659. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.651-659.

For citation: Eshkabilov Yu.Kh., Istamov J.Z. Properties of stochastic operators of order ν on a finite-dimensional simplex. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 651–659. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.651-659. (In Russian) ДЛЯ ЗАМЕТОК

Индекс 19423