



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

КАЗАНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

220-летие КФУ

Том 166

Книга 3

2024

Ученые записки Казанского университета.

Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2024

Т. 166, кн. 3

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Егоров – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

С.Р. Насыров – д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.Х. Салахов – д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстюков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 30.09.2024.
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 14,57. Уч.-изд. л. 11,08.
Тираж 300 экз. Заказ 95/9

Отпечатано в типографии Издательства
Казанского университета
420008, Российская Федерация, Республика
Татарстан, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

© Казанский федеральный университет, 2024

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.
Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
Peer-Reviewed Scientific Journal

2024
Vol. 166
no. 3

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Andrey G. Egorov – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich’s Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: September 30, 2024.
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional
printing sheet: 14.57. Publisher’s signature: 11.08.
Circulation: 300 copies. Order: 95/9

Printed in KFU Publishing House
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, Republic
of Tatarstan, 420008 Russia

© Kazan Federal University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Анисимов В.Д., Егоров А.Г., Нуриев А.Н., Зайцева О.Н.</i> Пропульсивное движение цилиндрического виброробота в вязкой жидкости ..	277
<i>Байзаев С., Баротов Р.Н.</i> О построении регулярных решений одного класса обобщенных систем Коши – Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами	297
<i>Брычков Ю.А., Савищенко Н.В.</i> Пропускная способность канала связи с квадратурной фазовой модуляцией и фазовым квантователем	306
<i>Вершинин И.С.</i> Элементы теории ассоциативной защиты информации	320
<i>Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н.</i> Взаимодействие волны давления с трещиновато-пористой зоной в пористой среде	331
<i>Донской И.Г.</i> Численное моделирование характеристик зажигания цилиндрического тепловыделяющего образца в среде со случайными колебаниями температуры	343
<i>Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Хайдаров Л.И., Тазюков Б.Ф.</i> О задаче деградации композитных балок при продольном изгибе и методе решения при больших перемещениях	364
<i>Korzyuk V.I., Rudzko J.V.</i> Initial-boundary value problem with Dirichlet and Wentzell conditions for a mildly quasilinear biwave equation	377
<i>Лапич А.О., Медведев М.Ю.</i> Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции	395
<i>Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Чумакова С.Ф.</i> Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки	407
<i>Султанов Л.У., Гарифуллин И.Р.</i> Колебания пластин и оболочек с присоединенной массой	426
<i>Эшкабилев Ю.Х., Нодиров Ш.Д.</i> Положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром	437

CONTENTS

<i>Anisimov V.D.</i> , <i>Egorov A.G.</i> , <i>Nuriev A.N.</i> , <i>Zaitseva O.N.</i> Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid.....	277
<i>Baizaez S.</i> , <i>Barotov R.N.</i> On the construction of regular solutions for a class of generalized Cauchy–Riemann systems with coefficients bounded on the entire plane.....	297
<i>Brychkov Yu.A.</i> , <i>Savischenko N.V.</i> Capacity of a communication channel with quadrature phase-shift keying and phase quantization.....	306
<i>Vershinin I.S.</i> Elements of the theory of associative information protection....	320
<i>Gubaidullin A.A.</i> , <i>Boldyreva O.Yu.</i> , <i>Dudko D.N.</i> Pressure wave interaction with fractured porous zone in porous medium.....	331
<i>Donskoy I.G.</i> Numerical modeling of the ignition characteristics of a cylindrical heat-generating sample in a medium with stochastic temperature variations.....	343
<i>Kayumov R.A.</i> , <i>Mukhamedova I.Z.</i> , <i>Khaidarov L.I.</i> , <i>Tazyukov B.F.</i> On the problem of composite beam degradation under longitudinal bending and the solution method for large displacements.....	364
<i>Korzyuk V.I.</i> , <i>Rudzko J.V.</i> Initial-boundary value problem with Dirichlet and Wentzell conditions for a mildly quasilinear biwave equation.....	377
<i>Lapich A.O.</i> , <i>Medvedik M.Y.</i> Algorithm for searching inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems.....	395
<i>Paimushin V.N.</i> , <i>Shishkin V.M.</i> , <i>Chumakova S.F.</i> Mathematical modeling of the dynamic deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers.....	407
<i>Sultanov L.U.</i> , <i>Garifullin I.R.</i> Vibrations of plates and shells with attached mass.....	426
<i>Eshkabilov Yu.Kh.</i> , <i>Nodirov Sh.D.</i> Positive fixed points of Hammerstein integral operators with degenerate kernel.....	437

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.517.6

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296

ПРОПУЛЬСИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО
ВИБРОРОБОТА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В.Д. Анисимов, А.Г. Егоров, А.Н. Нуриев, О.Н. Зайцева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию движения пропульсивной многомассовой системы – виброробота (ВР) – в вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрена конструкция ВР, состоящая из круглого цилиндрического корпуса, помещенного в вязкую жидкость, и внутренней массы (ВМ), совершающей малоамплитудные маятниковые колебания внутри корпуса. С помощью метода асимптотических разложений решены совместные механическая и гидродинамическая задачи, описывающие самопродвижение такой системы в жидкости. Гидродинамическая задача сформулирована на основе полного нестационарного уравнения Навье–Стокса. Построено аналитическое решение, описывающее крейсерский режим движения ВР в жидкости, найдено нестационарное гидродинамическое воздействие на ВР, а также проведена оценка эффективности движения такой пропульсивной системы.

Ключевые слова: виброробот, пропульсивное движение, крейсерская скорость, уравнение Навье – Стокса

Введение

Задача о самопродвижении тел в жидкости имеет богатую историю и восходит к попыткам объяснения движения птиц, рыб и микроорганизмов. Теория пропульсивного колебательного движения тел в потоке стала развиваться в начале XX-го века на базе теории идеальной жидкости как ответвление классической аэродинамики полета. Как и в теории обтекания стационарного крыла, моделям, описывающим колебательные движения тела в потоке, необходимы дополнительные предположения о точках отрыва потока или о структуре вихревого следа. Для решения этой задачи Л. Прандтлем [1], В. Бирнбаумом [2], Т. Теодорсеном [3], И. Гарриком [4], Г. Вагнером [5] и Г. Глауэртом [6] развивался подход, основанный на введении поверхностей разрыва скоростей внутри идеальной жидкости. В работах Г. Кюсснера [7], Г. Кюсснера и И. Шварца [8] был предложен метод решения проблемы нестационарного движения крыла, основанный на суперпозиции сингулярностей в идеальной жидкости. Аналогичные подходы развивались и советскими учеными М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым [9], Л.И. Седовым [10] и А.И. Некрасовым [11]. В целом формулирование дополнительных предположений в условиях нестационарного движения тела представляет основную трудность при использовании аппарата идеальной жидкости и в большинстве случаев значительно ограничивает область применимости моделей, названных выше.

Полностью разрешить все эти проблемы возможно при описании гидродинамики с помощью полного уравнения Навье – Стокса. Именно такой подход является доминирующим в современных исследованиях колебательного движения тела в жидкости (см., например, работы [12–26]). В общем случае решение полной нелинейной задачи возможно только с помощью приближенных численных методов. Прямые численные методы решения уравнения Навье – Стокса имеют высокую вычислительную сложность, что существенно лимитирует возможности исследования нестационарного пропульсивного движения даже в двумерном приближении из-за большого числа параметров задачи. В частном случае малых амплитуд колебаний полезной альтернативой прямым численным методам служат приближенные асимптотические подходы.

Метод последовательных асимптотических разложений для исследования гидродинамических течений, формирующихся около тела, поступательно колеблющегося в жидкости, успешно применялся в работах Г. Шлихтинга [27], Й. Хольстмарка [28], Н. Райли [29,30] и А.Н. Нуриева [31,32]. В работе Н. Райли и Э. Дж. Ватсона [33] впервые была продемонстрирована возможность применения этого метода для решения задачи о вращательно-поступательном движении круглого цилиндра. В исследованиях А.Н. Нуриева, А.Г. Егорова и др. [34–37] в рамках асимптотического подхода впервые были получены аналитические приближенные решения уравнения Навье – Стокса, описывающие пропульсивные характеристики мапущего цилиндрического крыла при малоамплитудных колебаниях. Аналитический характер этих результатов позволяет достаточно широко применять их для учета аэрогидродинамики при изучении самодвижущихся устройств.

Помимо проблем аэрогидродинамики для создания эффективных самодвижущихся колебательных устройств необходимо решить проблему разработки эффективного метода расчета возбуждения колебаний. В природе колебания крыльев и плавников вызываются мышцами, однако для искусственных устройств пока не разработано столь же эффективной альтернативы им. В последнее время активно обсуждается возможность самодвижения тела за счет колебаний внутренних масс (ВМ), перемещение которых можно осуществлять с помощью обычных электродвигателей. Одним из первых вопрос об оптимальном движении системы посредством перемещения внутреннего тела был поставлен Ф.Л. Черноусько [38,39], рассмотревшим прямолинейное движение по горизонтальной плоскости твердого тела с полостью, содержащей подвижную ВМ, при наличии кулоновского трения между плоскостью и телом. Данная проблематика широко обсуждается в литературе как для других идеализированных законов сопротивления, так и для неоднородных перемещений ВМ [40–45]. В частности, используются модели, в которых сила сопротивления однозначно определяется мгновенными кинематическими характеристиками движения корпуса ВР. Но при движении виброробота в вязкой жидкости действующие на тело гидродинамические силы не могут быть описаны исключительно в терминах мгновенных кинематических характеристик. Исследование движения ВР в жидкости с использованием разных приближенных подходов для оценки нелокального по времени гидродинамического воздействия проводились в работах [46–50]. В исследовании [50] было рассмотрено движение ВР в условиях маятникового колебания внутренней массы, когда внешний корпус совершает вращательно-поступательные колебания в жидкости. Гидродинамическое воздействие на корпус робота при этом описывается с помощью асимптотической модели [34]. В этой работе рассмотрен широкий спектр амплитуд колебаний маятника, исследованы вопросы выбора оптимального закона колебаний. В настоящей работе развиты исследования движения ВР этой конфигурации в области малых

амплитуд, где асимптотическая модель [34] дает наиболее точные результаты. Изучены крейсерские режимы движения, когда средние за период движения силы и момент равны нулю, а также проведены оценки эффективности движения ВР.

1. Постановка задачи

Рассматриваемая система, состоящая из корпуса массы $m_{кр}$ с цилиндрической оболочкой радиуса a и точечной ВМ $m_{вм}$, изображена на рис. 1. Общая масса аппарата $m_{вр} = m_{кр} + m_{вм}$, радиус инерции корпуса равен $r_{кр}$. Обозначим через $V_x(t), V_y(t), \Omega(t)$ линейные скорости центра корпуса и угловую скорость его вращения, $X(t), Y(t)$ – координаты ВМ в системе координат, перемещающейся поступательно вместе с центром корпуса, $F_x(t), F_y(t), M(t)$ – действующие на ВР гидродинамические силы и момент.

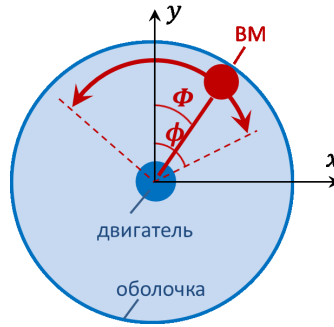


Рис. 1. Схема ВР. Синим изображен корпус, красным – ВМ. Оси (x, y) перемещаются поступательно вместе с центром корпуса. ВМ периодически колеблется относительно оси y с размахом колебаний 2ϕ

Примем, что ВМ периодически колеблется вокруг пространственной оси y с амплитудой ϕ и частотой ω по дуге окружности максимально возможного радиуса

$$X = a \sin \Phi, \quad Y = a \cos \Phi, \quad \Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k \cos \omega_k t.$$

Нормируем, сохранив за ними прежние обозначения, X и Y на a , а переменные t , V , Ω , F и M на

$$t_{sc} = \omega^{-1}, \quad v_{sc} = \frac{m_{вм}}{m_{вр}} a \omega, \quad \omega_{sc} = \frac{v_{sc}}{a}, \quad f_{sc} = \pi \rho a^2 v_{sc} \omega, \quad m_{sc} = a f_{sc}.$$

Через ρ обозначим плотность жидкости. Приняв дополнительно нейтральную плавучесть ВР (т.е. $m_{вр} = \pi \rho a^2$), запишем механическую подзадачу в безразмерной форме

$$\alpha \dot{\Omega} + \phi \cos t = M + \gamma (Y \dot{V}_x - X \dot{V}_y), \quad \dot{V}_x + \ddot{X} = F_x, \quad \dot{V}_y + \ddot{Y} = F_y. \quad (1)$$

Безразмерные параметры определены здесь как

$$\gamma = \frac{m_{вм}}{m_{вр}}, \quad \alpha = \frac{m_{кр} r_{кр}^2}{m_{вр} a^2} = (1 - \gamma) \frac{r_{кр}^2}{a^2}.$$

Будем считать угол поворота ϕ ВМ малым. В линейном по ϕ приближении $X = \Phi$,

$Y = 1$, вследствие чего $\dot{V}_y = F_y = 0$, и перепишем (1) как

$$\alpha\dot{\Omega} - \ddot{\Phi} = M, \quad \dot{V}_x + \ddot{\Phi} = F_x. \quad (2)$$

Далее для простоты записи нижний индекс x при V и F будем опускать.

Для замыкания (2) необходимо указать нелокальную по времени связь силовых характеристик движения F и M с кинематическими V и Ω . Этому служит гидродинамическая подзадача. Уравнения Навье – Стокса, описывающие течение жидкости вокруг колеблющегося цилиндра, запишем в подвижной полярной системе координат (r, θ) , перемещающейся поступательно вместе с центром цилиндра. Используя в качестве основных характеристик течения завихренность w и функцию тока ψ , запишем определяющие уравнения в виде

$$r > 1: \quad \omega = \Delta\psi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \beta^{-1} \Delta\omega. \quad (3)$$

Безразмерная частота колебаний β – параметр Стокса – выражается через кинематическую вязкость ν как

$$\beta = a^2 \omega / \nu.$$

Граничные условия для (3) определяются кинематическими характеристиками $V(t)$ и $\Omega(t)$ движения цилиндра

$$r = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\Omega, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim r\gamma V_0 \cos \theta - rV \sin \theta. \quad (4)$$

Константа V_0 представляет собой крейсерскую скорость движения ВР и находится из условия равенства нулю средних по времени сил, действующих на цилиндр. После решения задачи (3)–(4) силовые характеристики движения цилиндра найдем через завихренность и ее нормальную производную на границе цилиндра по формулам [34]

$$F = \dot{V} - \frac{1}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - w \right)_{r=1} \sin \theta d\theta, \quad M = -\frac{4}{\beta} \Omega - \frac{1}{\pi\beta} \int_0^{2\pi} w(1, \theta) d\theta. \quad (5)$$

Совместное решение механической и гидродинамической задач найдем в виде рядов по степеням γ с удержанием в них двух главных (нулевого и первого порядков) членов разложения. Для гидродинамической подзадачи получим в главном члене линейное (стоксовское) приближение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(0)} - \beta^{-1} \Delta w^{(0)} &= 0, \quad w^{(0)} = \Delta \psi^{(0)}, \\ r = 1: \quad \psi^{(0)} &= 0, \quad \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial r} = -\Omega^{(0)}, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(0)} \sim -rV^{(0)} \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Оно описывает чисто осцилляционное движение жидкости. В следующем члене имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} w^{(1)} - \beta^{-1} \Delta w^{(1)} &= G, \quad w^{(1)} = \Delta \psi^{(1)}, \quad G = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)}, \\ r = 1: \quad \psi^{(1)} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi^{(1)} \sim rV_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение этой задачи содержит две составляющих скорости: чисто осцилляционную и стационарную, определяемую как среднее за период колебаний. Такое среднее по времени будем обозначать угловыми скобками. Именно стационарные компоненты скорости ВР V_0 будут представлять для нас основной интерес. Они заранее неизвестны и должны находиться в ходе решения из условий равенства нулю средних сил. Осреднив по времени гидродинамическую подзадачу (7), получим

$$\begin{aligned} -\beta^{-1}\Delta\langle w^{(1)}\rangle &= \langle G\rangle, \quad \langle w^{(1)}\rangle = \Delta\langle\psi^{(1)}\rangle, \quad G = \frac{1}{r}\frac{\partial(\psi^{(0)}, w^{(0)})}{\partial(r, \theta)}, \\ r=1: \quad \langle\psi^{(1)}\rangle &= \frac{\partial\langle\psi^{(1)}\rangle}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \langle\psi^{(1)}\rangle \sim rV_0 \cos \theta. \end{aligned} \quad (8)$$

Как видно, характеристики течения, в том числе крейсерская скорость V_0 , полностью определяются функциями $V^{(0)}(t)$ и $\Omega^{(0)}(t)$. Их необходимо выразить через заданный закон движения ВМ $\Phi(t)$ посредством соотношений (2), принимающих в главном члене вид

$$\alpha\dot{\Omega}^{(0)} - \ddot{\Phi} = M^{(0)}, \quad \dot{V}^{(0)} + \ddot{\Phi} = F^{(0)}. \quad (9)$$

2. Стоксовское приближение

Положив

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k e^{ikt}, \quad V^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{ikt}, \\ M^{(0)} &= \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} m_k e^{it}, \quad F^{(0)} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{ikt} \end{aligned}$$

и используя линейность (6), найдем решение гидродинамической подзадачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= -\operatorname{Re}(\psi_{\Omega}(r, t)) - \sin \theta \operatorname{Re}(\psi_V(r, t)), \\ \psi_{\Omega}(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \psi_{\Omega,k}(r) e^{it}, \quad \psi_V = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \psi_{V,k}(r) e^{ikt}. \end{aligned} \quad (10)$$

Такое же представление, как (10), примем и для $w^{(0)}$ с побуквенной заменой в (10) ψ на w . Подставив (10) в (6), придем для функций $\psi_{\Omega,k}$, $w_{\Omega,k}$ и $\psi_{V,k}$, $w_{V,k}$ к следующей паре простых одномерных задач

$$\begin{aligned} ik\beta w_{\Omega,k} - \mathcal{L}_0 w_{\Omega,1} &= 0, \quad w_{\Omega,1} = \mathcal{L}_0 \psi_{\Omega,1}, \\ r=1: \quad \psi_{\Omega,1} &= 0, \quad \frac{d\psi_{\Omega,1}}{dr} = 1, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_{\Omega,1} = o(r); \\ ik\beta w_{V,k} - \mathcal{L}_1 w_{V,k} &= 0, \quad w_V = \mathcal{L}_1 \psi_{V,k}, \\ r=1: \quad \psi_{V,k} &= 0, \quad \frac{d\psi_{V,k}}{dr} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_{V,k} \sim r, \end{aligned}$$

в которых операторы \mathcal{L}_m определены как

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}.$$

Очевидно, что их решения при любом k получаются из решений для $k = 1$ заменой в последних $\beta \rightarrow k\beta$. Обозначив $z_k = \sqrt{ik\beta}$, представим эти решения через модифицированные функции Бесселя K_j в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\Omega,k} &= s_{\Omega,k} + \frac{w_{\Omega,k}}{z_1^2}, \quad w_{\Omega,k} = -z_k \frac{K_0(z_1 r)}{K_1(z_1)}, \quad s_{\Omega,k} = \frac{K_0(z_k)}{z_k K_1(z_k)}, \\ \psi_{V,k} &= r - \frac{1}{r} - \frac{s_{V,k}}{r} + \frac{1}{z_k^2} w_{V,k}, \quad w_{V,k} = z_k \frac{2K_1(z_k r)}{K_0(z_k)}, \quad s_{V,k} = \frac{2K_1(z_k)}{z_k K_0(z_k)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Разрез при взятии квадратного корня считается проведенным вдоль отрицательной вещественной полуоси так, что $\sqrt{ik\beta}$ равен $e^{i\pi/4}\sqrt{k\beta}$.

Вычислив силовые характеристики согласно (5), найдем

$$m_k = -ik\omega_k \left(-\frac{4i}{k\beta} + 2s_{\Omega,k} \right), \quad f_k = -ikv_k (1 + 2s_{V,k}). \quad (12)$$

Это основной результат решения в главном члене гидродинамической подзадачи.

Механическая подзадача (9) с использованием (12) приводит к следующим соотношениям между амплитудами временных гармоник

$$v_k = -\frac{ik\phi_k}{2(1 + s_{V,k})}, \quad \omega_k = -\frac{ik\phi_k}{\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta}. \quad (13)$$

Формулы (11)–(13) полностью определяют решение в главном члене. В заключение данного пункта дадим также используемое в дальнейшем выражение для безразмерной, нормированной на $d_{sc} = f_{sc}v_{sc}$, диссипации d энергии. В главном члене она представляется суммой диссипаций в различных движениях $d = d_V + d_\Omega$

$$\begin{aligned} d_V &= -\langle F^{(0)} V^{(0)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2 \operatorname{Re}(iks_{V,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{V,k} \phi_k^2, \\ d_{V,k} &= \frac{-k^3 \operatorname{Im}(s_{V,k})}{4|1 + s_{V,k}|^2}, \\ d_\Omega &= -\langle M^{(0)} \Omega^{(0)} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|^2 \left(\frac{2}{\beta} + \operatorname{Re}(iks_{\Omega,k}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{\Omega,k} \phi_k^2, \\ d_{\Omega,k} &= \frac{k^3 (2/k\beta - \operatorname{Im}(s_{\Omega,k}))}{|\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta|^2}. \end{aligned}$$

Диссипации d_V и d_Ω представим суммами диссипаций по всем гармоникам с частотами $k\omega$, поэтому каждое слагаемое должно зависеть лишь от своей частоты $k\omega$. Наличие множителей k^3 в $d_{V,k}$ и $d_{\Omega,k}$ объясняется тем, что нормирующий множитель d_{sc} пропорционален ω^3 .

3. Нахождение крейсерской скорости ВР

Стационарные гидродинамические поля, называемые вторичными течениями, определяются решением задачи (8). Правая часть в (8) и порождаемые ею решения содержат две азимутальные гармоники: $\cos \theta$ и $\sin 2\theta$. Вторая из них не дает вкладов ни в момент, ни в силу, действующие на тело; она не понадобится в дальнейшем при вычислении V_0 . Оставив в $\langle G \rangle$ лишь первую азимутальную гармонику, запишем

$$\langle G \rangle = \cos \theta \sum_{k=1}^{\infty} k \phi_k^2 G_k(r; \alpha, \beta), \quad G_k = \frac{k}{2r} \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{w}_{V,k} \cdot \psi'_{\Omega,k} - \bar{\psi}_{V,k} \cdot w'_{\Omega,k}}{2(1 + \bar{s}_{V,k})(\alpha + 2s_{\Omega,k} - 4i/k\beta)} \right).$$

Черта сверху означает комплексное сопряжение, а штрих – дифференцирование по r . Выделим в G_k зависящую от пространственной координаты составляющую

$$\tilde{G}_k(r; \beta) = k (\bar{w}_{V,k} \cdot \psi'_{\Omega,k} - \bar{\psi}_{V,k} \cdot w'_{\Omega,k}) / 2r$$

и решим для нее задачу

$$\mathcal{L}_1 W = -\tilde{G}_k, \quad W = \mathcal{L}_1 \Psi, \quad \Psi(1) = \Psi'(1) = 0, \quad \Psi|_{r \rightarrow \infty} \sim \tilde{V}_k r. \quad (14)$$

Величину \tilde{V}_k найдем из условия равенства нулю средней силы, которое запишем в терминах W как

$$W'(1) - W(1) = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (14), (15) получено в [34]. Ограничимся здесь явным представлением для составляющей крейсерской скорости

$$\tilde{V}_k = -\frac{k\beta}{8} \int_1^\infty \tilde{G}_k(r; \beta) (2r^2 \ln r - r^2 + 1) dr.$$

После нахождения комплексной величины \tilde{V}_k крейсерскую скорость вычислим по формулам

$$V_0 = \sum_{k=1}^\infty k \frac{\phi_k^2}{2|A_k|^2 |\alpha + B_k|^2} \left(\alpha \operatorname{Re}(\tilde{V}_k A_k) + \operatorname{Re}(\tilde{V}_k B_k) \right),$$

$$A_k = 1 + s_{V,k}, \quad B_k = 2s_{\Omega,k} + \frac{4i}{\beta k}.$$

Наличие множителя k по-прежнему объясняется тем, что нормирующий множитель v_{sc} прямо пропорционален ω .

4. Оптимальность гармонических колебаний

Вопрос об оптимальном законе $\Phi(t)$ в рассматриваемом случае малых колебаний ВМ решается просто. Под оптимальным традиционно понимается такой набор ϕ_k , при котором отношение $\Lambda = V_0/d$ достигает максимума. Это, разумеется, эквивалентно максимизации крейсерской скорости V_0 при заданном уровне диссипации d либо минимизации диссипации при заданной величине крейсерской скорости. Обе эти величины определены однозначно

$$d = \sum_{k=1}^\infty d_k \phi_k^2, \quad V_0 = \sum_{k=1}^\infty u_k \phi_k^2.$$

При введении множителя Лагранжа λ придем для нахождения оптимума к соотношениям

$$u_k \phi_k = \lambda d_k \phi_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Удовлетворить всем им за счет единственного множителя Лагранжа возможно лишь тогда, когда при фиксированном номере n

$$\lambda = u_n/d_n, \quad \phi_k = 0 \quad (k \neq n).$$

Оптимальен тот номер n , при котором отношение $\Lambda = u_n/d_n$ максимально. Его нахождение лишено смысла; важно лишь, что оптимальными являются гармонические колебания. Рассмотрим их подробнее.

5. Гармонические колебания ВМ

Расчетные формулы для случая гармонических колебаний получаются из представленных выше сохранением в суммах лишь первого члена. Нижний индекс 1 при этом для простоты будем отбрасывать, так, например, запишем $\Phi = \phi \cos t$.

Гармонические колебания корпуса ВР полностью характеризуются сдвигом фаз и отношением амплитуд поступательных и вращательных колебаний к амплитуде ϕ колебаний ВМ

$$A_V = \frac{1}{|a_V|}, \quad A_\Omega = \frac{1}{|a_\Omega|}, \quad \varphi_V = \arccos \frac{-\operatorname{Re} a_V}{|a_V|}, \quad \varphi_\Omega = \arccos \frac{-\operatorname{Re} a_\Omega}{|a_\Omega|},$$

$$a_V = 2(1 + s_V), \quad a_\Omega = \alpha + 2s_\Omega - 4i/\beta.$$

В практически важном случае больших β поведение комплекснозначных функций $a_V(\beta)$ и $a_\Omega(\beta)$ дается асимптотиками

$$a_\Omega(\alpha, \beta) \sim \alpha + \frac{2}{\sqrt{i\beta}} + \frac{3}{i\beta} + O(\beta^{-3/2}), \quad a_V(\beta) \sim 2 + \frac{4}{\sqrt{i\beta}} + \frac{2}{i\beta} + O(\beta^{-3/2}). \quad (16)$$

По своему физическому смыслу они учитывают три типа сил: инерции, Бассэ и вязкого трения. Из них, в частности, следует, что при $\beta = \infty$ (что эквивалентно невязкой (идеальной) жидкости) корпус перемещается и вращается в противофазе с ВМ ($\varphi_\Omega = \varphi_V = \pi$) с амплитудами соответственно вдвое меньшей и в α^{-1} раз большей амплитуды вращения ВМ. Относительная погрешность использования асимптотик (16) при вычислении A_V не превышает 1% уже при $\beta > 1$. При расчете A_Ω погрешность зависит от параметра α , возрастаая при приближении α к нулю. Но даже при $\alpha = 0$ погрешность в 1% достигается в области $\beta > 9$ относительно малых частот. Зависимости, представленные на рис. 2, показывают, что в практически важном случае $\beta > 100$ вращательные и поступательные колебания корпуса близки к противофазным по отношению к колебаниям ВМ; сами они практически синфазны.

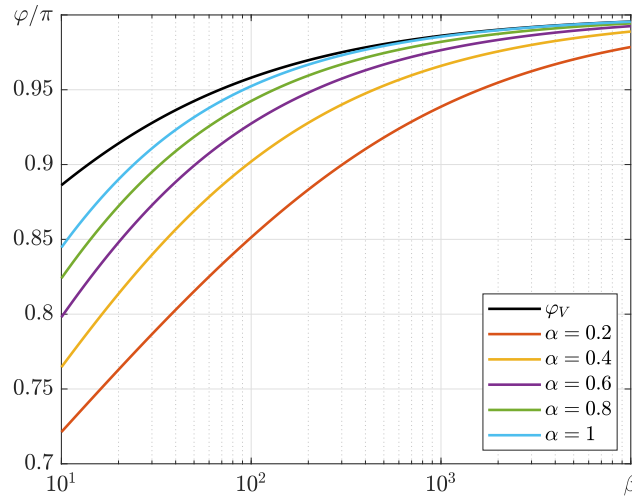


Рис. 2. Зависимость сдвига фаз поступательных φ_V (черная линия) и вращательных φ_Ω (цветные линии) колебаний корпуса от β

Сравним между собой диссипацию энергии во вращательном и поступательном движениях

$$A_D = \frac{d_V}{d_\Omega} = \frac{|a_\Omega|^2}{|a_V|^2} \cdot \frac{\operatorname{Im} a_V}{\operatorname{Im} a_\Omega}.$$

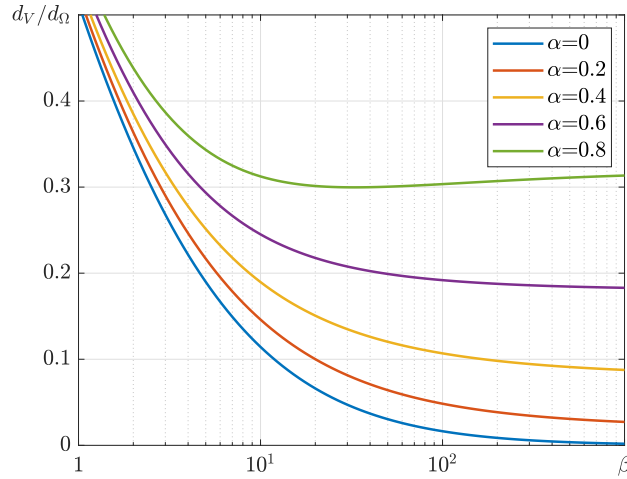


Рис. 3. Зависимость отношения диссипации энергии во вращательном и поступательном движениях от β при различных значениях параметра α

Как видно из рис. 3, на вращение корпуса затрачивается существенно больше энергии, чем на поступательные колебания. Это тем более так, чем меньше α и больше β . В пределе $\beta = \infty$ имеем $A_D = \alpha^2/4$. Энергозатратность вращательных колебаний связана с тем, что они происходят с существенно большей амплитудой, чем поступательные. Поэтому, в частности, предполагаемая малость амплитуды колебаний ВМ еще не означает малости вращательных колебаний ВР. В особой степени это относится к случаю малых α , который реализуется при малой массе оболочки ВР.

Вычисление крейсерской скорости проводилось по формулам раздела 3. Обработка результатов выполнялась в переменных u_∞ , β_∞ , связанных с V_0 , β простой перенормировкой

$$u_\infty = -\alpha V_0/\phi^2, \quad \beta_\infty = \alpha\beta = (1 - \gamma) \frac{r_{\text{кр}}^2 \omega}{\nu}.$$

Ее подсказывает построенная асимптотика V_0 при больших β . В терминах u_∞ и β_∞ она носит универсальный, не зависящий от α вид

$$\beta_\infty \rightarrow \infty : \quad u_\infty = \frac{3}{8} - \frac{7}{\sqrt{2}} \beta_\infty^{-1/2} + O(\beta_\infty^{-1}). \quad (17)$$

Расчеты показали, что во всем практически значимом диапазоне изменения параметра α зависимости $u_\infty(\beta_\infty)$ близки не только асимптотически, но и всюду (см. рис. 4). Обратим внимание на знак u_∞ . Он отрицателен при малых β_∞ , значит, ВР движется по направлению оси y с относительно небольшой скоростью. В интересующем нас случае больших β_∞ ВР движется в противоположном направлении с большей скоростью, вплоть до $u_\infty = 3/8$ при $\beta_\infty = \infty$. При больших β_∞ можно пользоваться универсальной асимптотикой, изображенной пунктиром на

рис. 4. На практике удобно использовать аппроксимацию Паде (штриховая линия на рис. 4)

$$u_{\infty} \approx 0.5 \frac{\beta_{\infty} - 5.5\sqrt{\beta_{\infty}}}{1.33\beta_{\infty} + 12.7\sqrt{\beta_{\infty}} + 80.7}. \quad (18)$$

Она построена так, чтобы u_{∞} совпадала при больших β_{∞} с универсальной асимптотикой (17), проходила через нуль в выбранной точке и имела нужную величину экстремума в области малых β_{∞} (отрицательных u_{∞}). Окончательно представив выражение для размерной крейсерской скорости U_{∞} , запишем

$$U_{\infty} = a\omega \cdot (\alpha^{-1}\phi^2\gamma^2 u_{\infty}).$$

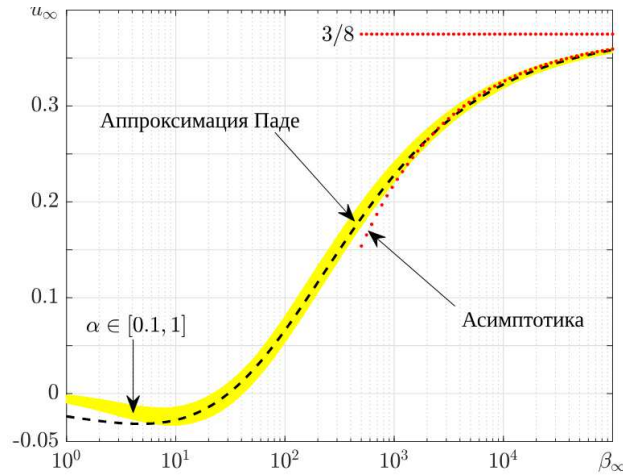


Рис. 4. Зависимость безразмерной крейсерской скорости u_{∞} от безразмерной частоты β_{∞} колебаний ВМ. Ее асимптотики (17) и аппроксимация (18)

6. Гидродинамика и эффективность движения виброробота

Рассмотрим гидродинамику движения робота более подробно. Положим в условиях $\beta > 100$, $\alpha \geq 0.1$, что вращательные и поступательные колебания корпуса, вызванные гармоническими колебаниями ВМ, происходят синфазно. Как можно видеть на рис. 2, сдвиг фазы между вращательными и поступательными колебаниями корпуса в обозначенных условиях действительно мал. Достаточно обширные результаты для этого случая представлены в исследовании [34]. Чтобы использовать результаты этой работы, необходимо выразить используемые в ней гидродинамические параметры подобию (помечаем их нижним индексом 0), определяющие непосредственно структуру течения около корпуса, через безразмерные параметры, используемые в настоящем исследовании. Параметр β одинаков в обеих работах. Безразмерные амплитуды поступательных (γ_0) и вращательных (Θ_0) колебаний корпуса выражаются через параметры колебаний внутренней массы (β, ϕ) и параметры распределения массы робота (γ, α) следующим образом:

$$\gamma_0 = \frac{\gamma\phi}{|a_V(\beta)|}, \quad \Theta_0 = \frac{\gamma\phi}{|a_{\Omega}(\beta; \alpha)|}. \quad (19)$$

Переход между безразмерными крейсерскими скоростями определяется как

$$u_{0,\infty} = \frac{1}{\alpha} |a_V| |a_{\Omega}| u_{\infty}.$$

Здесь $u_{0,\infty}\Theta_0$ характеризует отношение размерной стационарной скорости движения робота к скорости поступательных колебаний корпуса. При вычислении a_V , a_Ω с 1 % относительной погрешностью при $\beta > 10$ можно использовать формулы (16).

Определим параметры виброробота, позволяющие достичь наибольшую эффективность движения. Эффективность движения ε определим как отношение мощности, необходимой для равномерного движения тела в жидкости с постоянной скоростью V , к мощности, требуемой рассматриваемому движителю для перемещения тела с той же средней скоростью. Мощность в рассматриваемом случае в точности равна диссипации энергии жидкостью. Значит, эффективность движения можно вычислить как $\varepsilon = D_c/D$, где D_c – диссипация энергии при движении с постоянной скоростью, D – диссипация при движении за счет поступательно-вращательных колебаний.

При движении цилиндрического корпуса с постоянной скоростью V диссипация энергии равна

$$D_c = C_D(\text{Re})\rho a V^3.$$

Здесь C_D – коэффициент сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса,

$$\text{Re} = \frac{2aV}{\nu},$$

построенного по диаметру ($2a$) цилиндра.

Далее, для исследуемого диапазона Re будем считать C_D величиной порядка единицы.

Для рассматриваемого движителя (размерную) диссипацию энергии можно определить через параметры движения корпуса как

$$D = 2\pi\rho U^2 a^2 \omega (d_{0,V} + \xi^2 d_{0,\theta}),$$

где U – амплитуда скорости поступательных колебаний корпуса.

Эффективность можно вычислить по формуле

$$\varepsilon = \frac{D_c}{D} = \frac{C_D}{2\pi} \frac{\gamma_0^3 \Theta_0^3 u_{0,\infty}^3}{\Theta_0^2 d_{0,\theta} + \gamma_0^2 d_{0,V}}. \quad (20)$$

Максимизируя ε , учтем, что диапазон применимости гидродинамической модели, используемой в настоящей работе, согласно [34] ограничен как по амплитуде вращательных колебаний корпуса, так и по амплитуде поступательных колебаний. Примем, что $\Theta_0 \leq 1.3$, $\gamma_0 \leq 0.25$ при $\beta \leq 6000$. Также заметим, что в условиях текущей механической модели предполагалась малость угла поворота маятника ϕ . Согласно результатам [50] можно принять $\phi \leq 0.85$. Из (20) очевидно, что максимальная эффективность обеспечивается при наибольших амплитудах колебания корпуса γ_0 , Θ_0 , которые, исходя из (19), достигаются при наибольших значениях амплитуды колебаний маятника ϕ . Также, исходя из (19), γ_0 пропорционально γ , т.е. чем тяжелее внутренняя масса, тем больше амплитуда колебаний корпуса. При выборе максимальных значений $\phi = 0.85$ и $\Theta_0 = 1.3$ наибольшее значение γ можно выбрать при условии $\alpha = 1 - \gamma$, т.е. когда вся масса корпуса сосредоточена в оболочке. Эффективность виброробота в обозначенных условиях и соответствующие параметры его движения представлены на рис. 5. Как можно видеть, уже при $\beta > 3700$ эффективность движения рассматриваемой системы превышает 10 %, что является относительно высоким показателем для пропульсивных систем при низких числах Рейнольдса (см., например, [51, 52]).

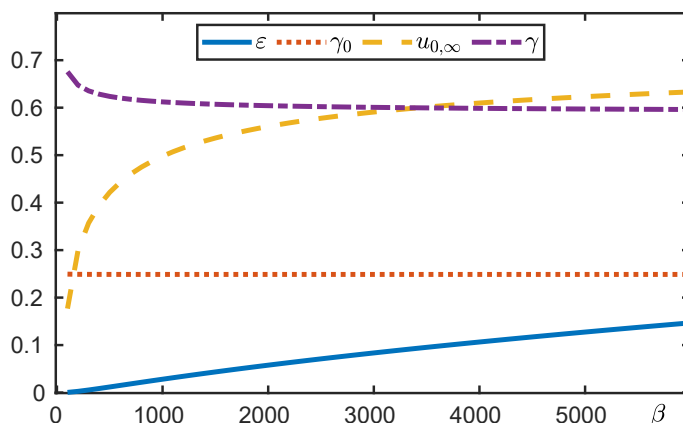


Рис. 5. Эффективность движения (ε), скорость ($u_{0,\infty}$), соотношение масс ВР (γ) и амплитуда колебаний ВМ (γ_0) при $\Theta_0 = 1.3$, $\phi = 0.85$

Заключение

Получено аналитическое решение, описывающее движение ВР, индуцированное малоамплитудными маятниковыми колебаниями ВМ, в вязкой несжимаемой жидкости с использованием метода асимптотических разложений. Найдено выражение для крейсерской скорости движения ВР, проведена оценка эффективности движения такой пропульсивной системы. Показано, что наиболее эффективное движение наблюдается при наибольших допустимых (в рамках рассматриваемых предположений) колебаниях внутренней массы в условиях, когда вся масса корпуса сосредоточена в оболочке, а масса подвижной внутренней части составляет приблизительно 60 % от всей массы ВР. В этом случае эффективность системы по относительным энергозатратам достигает 10 % уже при значениях безразмерной частоты $\beta \approx 3700$, при этом число Ренольдса, вычисленное по крейсерской скорости движения ВР, составляет $Re \approx 1443$. Заметим, что движение ВР при указанных параметрах можно сравнить с движением маленькой рыбки или малька, так как при характерном размере (диаметре) 3.8 см и частоте колебаний 3 Гц рассматриваемая система будет иметь скорость в 0.05 м/с, что приблизительно соответствует частоте и скорости движения рыбки аналогичного размера [53].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922) / T.V. Kármán, T. Levi-Civita (Hrsg.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1924. S. 18–33. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3>.
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungenelastisch befestigter Tragflügel // Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt. 1924. Bd. 15. S. 128–134.

3. *Theodorsen T.* General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Report 496. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935. P. 291–311.
4. *Garrick I.E.* Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil. NACA Report 567. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–14.
5. *Wagner H.* Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // ZAMM. 1925. Bd. 5, H. 1. S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>.
6. *Glauert H.* The force and moment on an oscillating aerofoil // Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929 / A. Gilles, L. Hopf, T.v. Kármán (Hrsg.). Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
7. *Küssner H.G.* Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln // Luftfahrtforschung. 1936. Bd. 13, H. 12. S. 410–424.
8. *Küssner H.G., Schwartz I.R.* The Oscillating Wing with Aerodynamically Balanced Elevator. Technical Memorandum 991. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. 32 p.
9. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла. В кн.: «Техн. заметки ЦАГИ». М.: ЦАГИ, 1935. С. 48–52.
10. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 444 с.
11. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: АН СССР, 1947. 260 с.
12. *Alben S.* Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power // J. Fluid Mech. 2021. V. 915. Art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>.
13. *Alben S.* Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency // J. Fluid Mech. V. 915. Art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.
14. *Alben S., Shelley M.* Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 2005. V. 102, No 32. P. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
15. *Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y.* Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil // AIAA J. 1999. V. 37, No 10. P. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
16. *Lewin G.C., Haj-Hariri H.* Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 492. P. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
17. *Liu H.* A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering // J. Exp. Biol. 1998. V. 201, No 4. P. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
18. *Lua K.* On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight // J. Fluids Struct. 2016. V. 66. P. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.
19. *Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P.* Efficiency of fish propulsion // Bioinspiration Biomimetics. 2015. V. 10, No 4. Art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
20. *Pedro G., Suleman A., Djilali N.* A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 42, No 5. P. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
21. *Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J.* Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching // Phys. Fluids. 2010. V. 22, No 4. Art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.

22. *Taha H.E.* Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing // Proc. AIAA Scitech 2020 Forum. 2020. AIAA 2020-0824. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
23. *Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y.* Locomotion of a passively flapping flat plate // J. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
24. *Дынкин Я.А.* К расчету машущего гибкого профиля в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Изв. высш. учебн. завед. Машиностр. 2016. № 4. С. 22–30. <https://10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>.
25. *Коваль К.А., Сухоруков А.Л., Чернышев И.А.* Результаты верификации численного метода расчета гидродинамических и гидроакустических характеристик плавникового движителя // Фундам. и прикл. гидрофиз. 2016. Т. 9, № 4. С. 60–72.
26. *Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W.* A review on fluid dynamics of flapping foils // Ocean Eng. 2020. V. 195. Art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
27. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Zeit. 1932. Bd. 33. S. 327–335.
28. *Holtmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S.* Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1954. V. 26, No 1. P. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
29. *Riley N.* Oscillatory viscous flows. Review and extension // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3, No 4. P. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imat/3.4.419>.
30. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. 1975. V. 68., No 4. P. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
31. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, No 6. P. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.
32. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // J. Fluid Mech. 2021. V. 913. Art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
33. *Riley N., Watson E.* Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid // Mathematika. 1993. V. 40, No 2. P. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
34. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. V. 941. Art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
35. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M.* Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 8. P. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
36. *Егоров А.Г., Нуриев А.Н.* Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2–3. С. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>.
37. *Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D., Zaitseva O.N.* Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2024. V. 36, No 2. Art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
38. *Chernous'ko F.L.* On the motion of a body containing a movable internal mass // Dokl. Phys. 2005. V. 50, No 11. P. 593–597. <https://doi.org/10.1134/1.2137795>.
39. *Chernous'ko F.L.* Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass // J. Appl. Math. Mech. 2006. V. 70, No 6. P. 819–842. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003>.

40. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L. Optimal control of the rectilinear motion of a twobody system in a resistive medium // J. Appl. Math. Mech. 2012. V. 76, No 1. P. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001>.
41. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode // ZAMM. 2013. V. 93, No 12. P. 895–913. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200124>.
42. Yegorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a resistive medium // J. Appl. Math. Mech. 2010. V. 74, No 4. P. 443–451. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.010>.
43. Egorov A.G., Zakharova O.S. The optimal quasistationary motion of a vibration-driven robot in a viscous medium // Russ. Math. 2012. V. 56, No 2. P. 50–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020065>.
44. Du Z., Fang H., Zhan X., Xu J. Experiments on vibration-driven stick-slip locomotion: A sliding bifurcation perspective // Mech. Syst. Signal Process. 2018, V. 105. P. 261–275. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.12.001>.
45. Diao B., Zhang X., Fang H., Xu J. Optimal control of the multi-module vibration-driven locomotion robot // J. Sound Vib. 2022. V. 527. Art. 116867. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116867>.
46. Egorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with a inherited law of resistance // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2015. V. 54, No 3. P. 495–503. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030065>.
47. Vetchanin E.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // Regular Chaotic Dyn. 2013. V. 18, Nos 1–2. P. 100–117. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010073>.
48. Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation // Regular Chaotic Dyn. 2018. V. 23, Nos 7–8. P. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.
49. Artemova E.M., Karavaev Y.L., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass // Regular Chaotic Dyn. 2020. V. 25, No 6. P. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>.
50. Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D. Optimization of the movement of a cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid, induced by pendulum oscillations of the internal mass // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 444, No 10. P. 4438–4447. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100104>.
51. Purcell E.M. Life at low Reynolds number // Am. J. Phys. 1977. V. 45, No 1. P. 3–11. <https://doi.org/10.1119/1.10903>.
52. Becker L.E., Koehler S.A., Stone H.A. On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer // J. Fluid Mech. 2003. V. 490. P. 15–35. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005184>.
53. Sánchez-Rodríguez J., Raufaste C., Argentina M. Scaling the tail beat frequency and swimming speed in underwater undulatory swimming // Nat. Commun. 2023. V. 14, No 1. Art. 5569. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-41368-6>.

Поступила в редакцию 30.07.2024

Принята к публикации 24.08.2024

Анисимов Вадим Дмитриевич, ассистент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: anvad96@bk.ru

Егоров Андрей Геннадьевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Нуриев Артем Наилевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: nuriev_an@mail.ru

Зайцева Ольга Николаевна, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: olga_fdpi@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 277–296

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.277-296

Propulsive Motion of Cylindrical Vibration-Driven Robot in a Viscous Fluid

*V.D. Anisimov**, *A.G. Egorov*, *A.N. Nuriev***, *O.N. Zaitseva****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **anvad96@bk.ru*, ***nuriev_an@mail.ru*, ****olga_fdpi@mail.ru*

Received July 30, 2024; Accepted August 24, 2024

Abstract

The propulsive motion of a multimass system, vibration-driven robot (VR), in a viscous incompressible fluid was studied. The VR consisted of a round cylindrical body submerged in the fluid and an internal mass (IM) performing small-amplitude pendulum-like oscillations inside the body. Using the method of asymptotic expansions, the combined mechanical and hydrodynamic problems that describe the self-propulsion of the system in the fluid were solved. The hydrodynamic problem was formulated on the basis of the complete non-stationary Navier–Stokes equation. An analytical solution was derived to describe the cruising regime of the VR motion in the fluid. The non-stationary hydrodynamic influence on the VR was determined. The efficiency of the propulsive system’s motion was assessed.

Keywords: vibration-driven robot, propulsion, cruising speed, Navier–Stokes equation

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. VR diagram. The body is shown in blue, and the IM is indicated in red. The axes (x, y) move translationally with the center of the body. The IM periodically oscillates about the y axis with the amplitude 2ϕ .

Fig. 2. Phase-shift dependence of the translational (φ_V , black line) and rotational (φ_Ω , colored lines) oscillations of the body on β .

Fig. 3. Dependence of the ratio of energy dissipation in rotational and translational oscillations on β for different values of the parameter α .

Fig. 4. Dependence of the dimensionless cruising speed u_∞ on the dimensionless frequency β_∞ of IM oscillations. Its asymptotics (17) and approximation (18).

Fig. 5. Efficiency of the VR motion (ε), speed ($u_{0,\infty}$), VR mass ratio (γ), and IM oscillation amplitude (γ_0) at $\Theta_0 = 1.3$, $\phi = 0.85$.

References

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Kármán T.V., Levi-Civita T. (Hrsg.). Berlin, Heidelberg, Springer, 1924. S. 18–33. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3>. (In German)
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, S. 128–134. (In German)
3. Theodorsen T. General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter. NACA Report 496. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935, pp. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a Flapping and Oscillating Airfoil. NACA Report 567. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–14.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *ZAMM*, 1925, Bd. 5, H. 1, S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>. (In German)
6. Glauert H. The force and moment on an oscillating aerofoil. In: Gilles A., Hopf L., Kármán Th.v. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1930, S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
7. Küssner H.G. Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. *Luftfahrtforschung*, 1936, Bd. 13, H. 12, S. 410–424. (In German)
8. Küssner H.G., Schwartz I.R. The Oscillating Wing with Aerodynamically Balanced Elevator. Technical Memorandum 991. Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. 32 p.
9. Keldysh M.V., Lavrent'ev M.A. On the theory of the oscillating wing. In: *Tekhn. zametki TsAGI* [Technical Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute]. Moscow, TsAGI, 1935, pp. 48–52. (In Russian)
10. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane Problems of Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 444 p. (In Russian)
11. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Theory of a Wing in a Nonsteady Flow]. Moscow, Leningrad, Akad. Nauk SSSR, 1947. 260 p. (In Russian)
12. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>
13. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.

14. Alben S., Shelley M. Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2005, vol. 102, no. 32, pp. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
15. Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil. *AIAA J.*, 1999, vol. 37, no. 10, pp. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
16. Lewin G.C., Haj-Hariri H. Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 492, pp. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
17. Liu H. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *J. Exp. Biol.*, 1998, vol. 201, no. 4, pp. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
18. Lua K., Dash S.M., Lim T.T., Yeo K.S. On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight. *J. Fluids Struct.*, 2011, vol. 66, pp. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.
19. Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P. Efficiency of fish propulsion. *Bioinspiration Biomimetics*, 2015, vol. 10, no. 4, art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
20. Pedro G., Suleman A., Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
21. Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, no. 4, art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.
22. Taha H.E. Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing. *Proc. AIAA Scitech 2020 Forum*. 2020, AIAA 2020-0824. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
23. Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y. Locomotion of a passively flapping flat plate. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 659, pp. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
24. Dynnikov Ya.A. On the calculation of a flapping flexible airfoil in the flow of viscous incompressible fluid. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.*, 2016, no. 4, pp. 22–30. <https://10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>. (In Russian)
25. Koval' K.A., Sukhorukov A.L., Chernyshev I.A. Verification results of the numerical method for calculating the hydrodynamic and hydroacoustic characteristics of a fin propulsor. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 60–72. (In Russian)
26. Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W. A review on fluid dynamics of flapping foils. *Ocean Eng.*, 2020, vol. 195, art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
27. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Zeit.*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
28. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1954, vol. 26, no. 1, pp. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
29. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension. *IMA J. Appl. Math.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
30. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
31. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming Reynolds numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 6, pp. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.

32. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 913, art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
33. Riley N., Watson E. Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid. *Mathematika*, 1993, vol. 40, no. 2, pp. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
34. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
35. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
36. Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>. (In Russian)
37. Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D., Zaitseva O.N. Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 2024, vol. 36, no. 2, art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
38. Chernous'ko F.L. On the motion of a body containing a movable internal mass. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 11, pp. 593–597. <https://doi.org/10.1134/1.2137795>.
39. Chernous'ko F.L. Analysis and optimization of the motion of a body controlled by means of a movable internal mass. *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70, no. 6, pp. 819–842. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2007.01.003>.
40. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L. Optimal control of the rectilinear motion of a twobody system in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001>.
41. Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K. The undulatory motion of a chain of particles in a resistive medium in the case of a smooth excitation mode. *ZAMM*, 2013, vol. 93, no. 12, pp. 895–913. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200124>.
42. Yegorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 443–451. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.010>.
43. Egorov A.G., Zakharova O.S. The optimal quasistationary motion of a vibration-driven robot in a viscous medium. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 50–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020065>.
44. Du Z., Fang H., Zhan X., Xu J. Experiments on vibration-driven stick-slip locomotion: A sliding bifurcation perspective. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2018, vol. 105, pp. 261–275. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.12.001>.
45. Diao B., Zhang X., Fang H., Xu J. Optimal control of the multi-module vibration-driven locomotion robot. *J. Sound Vib.* 2022, vol. 527, art. 116867. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116867>.
46. Egorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a medium with a inherited law of resistance. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 495–503. <https://doi.org/10.1134/S1064230715030065>.
47. Vetchanin E.V., Mamaev I.S., Tenenev V.A. The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid. *Regular Chaotic Dyn.*, 2013, vol. 18, nos. 1–2. <https://doi.org/10.1134/S1560354713010073>.
48. Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation. *Regular Chaotic Dyn.*, 2018, vol. 23, nos. 7–8, pp. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.

49. Artemova E.M., Karavaev Y.L., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Dynamics of a spherical robot with variable moments of inertia and a displaced center of mass. *Regular Chaotic Dyn.*, 2020, vol. 25, no. 6, pp. 689–706. <https://doi.org/10.1134/S156035472006012X>.
50. Egorov A.G., Nuriev A.N., Anisimov V.D. Optimization of the movement of a cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid, induced by pendulum oscillations of the internal mass. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 444, no. 10, pp. 4438–4447. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100104>.
51. Purcell E.M. Life at low Reynolds number. *Am. J. Phys.*, 1977, vol. 45, no. 1, pp. 3–11. <https://doi.org/10.1119/1.10903>.
52. Becker L.E., Koehler S.A., Stone H.A. On self-propulsion of micro-machines at low Reynolds number: Purcell's three-link swimmer. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 490, pp. 15–35. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005184>.
53. Sánchez-Rodríguez J., Raufaste C., Argentina M. Scaling the tail beat frequency and swimming speed in underwater undulatory swimming. *Nat. Commun.*, 2023, vol. 14, no. 1, art. 5569. <https://doi.org/10.1038/s41467-023-41368-6>.

Для цитирования: Анисимов В.Д., Егоров А.Г., Нуриев А.Н., Зайцева О.Н. Пропульсивное движение цилиндрического виброробота в вязкой жидкости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 277–296. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.277-296>.

For citation: Anisimov V.D., Egorov A.G., Nuriev A.N., Zaitseva O.N. Propulsive motion of cylindrical vibration-driven robot in a viscous fluid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 277–296. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.277-296>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.297-305

О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ–РИМАНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Байзаев¹, Р.Н. Баротов²

¹Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

²Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Аннотация

В статье рассматривается обобщенная система Коши–Римана на всей комплексной плоскости. Коэффициент при сопряжении искомой функции принадлежит гёльдеровому пространству и для $|z| > 1$ равен $e^{im\varphi}$, m – целое. Оказывается, при $m \leq 0$ эта система не имеет ненулевых решений, растущих не быстрее полинома. Для $m \geq 0$ построено многообразие всех регулярных, т.е. не имеющих особенностей в конечной части плоскости решений. Эти решения записываются в виде рядов по бесселевым функциям мнимого аргумента. Из полученного многообразия выделены ограниченные во всей плоскости решения и определена размерность линейного вещественного пространства таких решений. Эта размерность равна числу m .

Ключевые слова: обобщенная система Коши–Римана, гёльдеровы пространства, ограниченные коэффициенты, ограниченные решения

Введение

Рассмотрим обобщенную систему Коши–Римана

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + a(z)w + b(z)\bar{w} = 0, \quad (1)$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$. В случае, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C)$, $p > 2$, теория систем вида (1) разработана И.Н. Векуа [1], Л. Берсом [2] и их последователями. Система (1) с коэффициентами, определенными на всей комплексной плоскости \mathbb{C} , исследовалась рядом авторов (см., например, [3, 4]), которые получили формулы представления решений, аналоги теоремы Лиувилля и др. В работах [5–7] системы вида (1) и равномерно эллиптические системы первого порядка изучены в пространстве Гёльдера (см. ниже). Получен критерий нётеровости соответствующего оператора L и формула для индекса.

Пусть C_α – банахово пространство функций $w(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ограниченных на \mathbb{C} и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$. Норма в C_α определяется равенством:

$$\|w\|_\alpha = \|w\|_0 + H_\alpha(w),$$

где

$$\|w\|_0 = \sup |w(z)|, \quad H_\alpha(w) = \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} |w(z_1) - w(z_2)|;$$

C_α^1 – банахово пространство функций $w(z) \in C_\alpha$ таких, что $w_z, w_{\bar{z}} \in C_\alpha$ с нормой

$$\|w\|_{1,\alpha} = \|w\|_\alpha + \|w_z\|_\alpha + \|w_{\bar{z}}\|_\alpha.$$

Класс непрерывно дифференцируемых во всей плоскости функций обозначим через C^1 .

Говорят, что непрерывная на всей плоскости функция $f(z)$ слабо осциллирует в бесконечности, если выполняется условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \max_{|\zeta - z| \leq 1} |f(z) - f(\zeta)| = 0. \quad (2)$$

Приведем ряд утверждений, установленных в работах [5, 6] (см. также монографию [8, сс. 34, 73]).

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) принадлежат пространству C_α и удовлетворяют условию (2). Для того чтобы оператор $L: C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} (|b(z)| - |a(z)|) > 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $0 < \varepsilon < 2\varepsilon_0$. Если функция $w(z)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию роста $|w(z)| \leq Ke^{\varepsilon|z|}$, то она убывает на бесконечности как $e^{-\varepsilon|z|}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда индекс оператора $L: C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ равен индексу Коши функции $b(z)$ на бесконечности.

Построение решений

Рассмотрим уравнение

$$L_m w \equiv w_{\bar{z}} + \varepsilon(z) e^{im\varphi} \bar{w} = 0, \quad (3)$$

здесь $m \in \mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $z = re^{i\varphi}$ и $\varepsilon(z) = \begin{cases} |z|, & \text{при } |z| \leq 1, \\ 1, & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$

Коэффициент $\varepsilon(z) e^{im\varphi}$ этого уравнения принадлежит пространству C_α и удовлетворяет условию (2) (см. [9]), при этом $\varepsilon_0 = 1$. Поэтому в силу теоремы 1 оператор $L_m: C_\alpha^1 \rightarrow C_\alpha$ будет нётеровым, причем индекс этого оператора будет равен индексу Коши коэффициента $\varepsilon(z) e^{im\varphi}$ на бесконечности, т. е.

$$\text{ind } L_m = m. \quad (4)$$

Из работы [6] следует следующее утверждение.

1) При $m \leq 0$ уравнение (3) не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих условию

$$|w(z)| \leq K e^{2|z|},$$

здесь постоянная K , вообще говоря, зависит от $w(z)$. В частности, уравнение (3) для указанных значений m не имеет ненулевых ограниченных на всей плоскости или растущих на бесконечности не быстрее многочлена решений.

2) Из формулы (4) и предыдущего утверждения следует, что

$$\dim \text{Ker } L_m = \begin{cases} m & \text{при } m > 0, \\ 0 & \text{при } m \leq 0. \end{cases}$$

Из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

3) При $m > 0$ каждое решение уравнения (3) из пространства C_α^1 экспоненциально убывает на бесконечности, точнее, удовлетворяет условию

$$|w(z)| \leq M e^{-2|z|},$$

здесь постоянная M , вообще говоря, зависит от $w(z)$.

Отметим следующее свойство уравнений вида (3).

4) Если $w(z)$ – решение уравнения (3), то функция $\omega(z) = \frac{w(z)}{z}$ будет решением уравнения вида (3) с показателем $m-2$, а функция $zw(z)$ – соответствующего уравнения с показателем $m+2$.

В настоящей работе будет предложен метод построения регулярных во всей плоскости решений, т.е. принадлежащих классу C^1 , в частности, ограниченных во всей плоскости решений уравнения (3). В полярных координатах уравнение (3) имеет вид:

$$w_r + \frac{i}{r} w_\varphi + 2\varepsilon(r) e^{i(m-1)\varphi} \bar{w} = 0.$$

Разыскивая регулярные решения в виде ряда

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(r) e^{in\varphi}$$

с условиями $w_n(0) = 0 \quad \forall n \neq 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(w'_n - \frac{n}{r} w_n \right) e^{in\varphi} + 2\varepsilon(r) \bar{w}_n e^{i(m-1-n)\varphi} \right] = 0.$$

Заменяя в ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{w}_n e^{i(m-1-n)\varphi}$ индекс n на $m-1-n$, для коэффициентов $w_n(r)$ получим уравнение вида

$$w'_n - \frac{n}{r} w_n + 2\varepsilon(r) \bar{w}_{m-1-n} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

В начале рассмотрим случай, когда m четное. Тогда $n \neq m-1-n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и в уравнение (5) входят две неизвестные функции $w_n(r)$ и $\omega_n(r) = \bar{w}_{m-1-n}(r)$. Так как при изменении n от $\frac{m}{2}$ до $+\infty$ выражение $m-1-n$ меняется от $\frac{m}{2}-1$ до $-\infty$, то достаточно считать, что $n \geq \frac{m}{2}$. Поэтому из (5) можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w'_n = \frac{n}{r} w_n - 2\varepsilon \omega_n, \\ \omega'_n = -2\varepsilon w_n + \frac{m-1-n}{r} \omega_n, \end{cases} \quad n \geq \frac{m}{2}. \quad (6)$$

Стандартным образом из системы (6) переходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$w_n'' - \left(\frac{m-1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right) w_n' + \left(\frac{n(m-n)}{r^2} + \frac{\varepsilon' n}{\varepsilon r} - 4\varepsilon^2 \right) w_n = 0. \quad (7)$$

Решения $w_n(r)$ уравнения (7) определим для индексов $n \geq \frac{m}{2}$, а остальные $w_{m-1-n}(r)$ находим из уравнения (5) по формуле

$$w_{m-1-n}(r) = \frac{1}{2\varepsilon(r)} \left[-w_n'(r) + \frac{n}{r} w_n(r) \right]. \quad (8)$$

Пусть $0 \leq r \leq 1$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$w_n'' - \frac{m}{r} w_n' + \left(\frac{n(1+m-n)}{r^2} - 4r^2 \right) w_n = 0.$$

Это уравнение подстановкой $w_n(r) = r^{\frac{m+1}{2}} u_n(r^2)$ приводится к следующему уравнению:

$$(r^2)^2 u_n''(r^2) + r^2 u_n'(r^2) - \left(\left(\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4} \right)^2 + (r^2)^2 \right) u_n(r^2) = 0.$$

Находя общее решение этого уравнения (см. [10, с. 688]), определяем $w_n(r)$:

$$w_n(r) = r^{\frac{m+1}{2}} \left(A_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) + B_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2) \right), \quad n \geq \frac{m}{2}, \quad (9)$$

A_n, B_n – произвольные комплексные постоянные, I_ν, K_ν – функции Бесселя мнимого аргумента.

Используя свойства бесселевых функций (см. [11, с. 93–95]), неизвестные w_{m-1-n} находим по формуле (8):

$$w_{m-1-n}(r) = r^{\frac{m+1}{2}} \left(-\overline{A}_n I_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) \right), \quad n \geq \frac{m}{2}. \quad (10)$$

Порядок полюса $r = 0$ функции $r^{\frac{m+1}{2}} K_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2)$ равен $n - m + 1$. Поэтому для $n \geq m$ нужно взять $B_n = 0$, и тогда

$$\begin{aligned} w_n(r) &= A_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}}(r^2), \\ w_{m-1-n}(r) &= -\overline{A}_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2} - \frac{m-3}{4}}(r^2) \quad \forall n \geq m. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, при $0 \leq r \leq 1$ мы нашли все $w_n(r)$, и они в зависимости от значений n определяются формулами (9)–(11).

Пусть теперь $r \in (1; \infty)$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$w_n'' - \frac{m-1}{r} w_n' + \left(\frac{n(m-n)}{r^2} - 4 \right) w_n = 0.$$

Это уравнение подстановкой $w_n(r) = r^{\frac{m}{2}} u_n(2r)$ приводится к уравнению

$$(2r)^2 u_n''(2r) + 2r u_n'(2r) - \left(\left(n - \frac{m}{2} \right)^2 + (2r)^2 \right) u_n(2r) = 0. \quad (12)$$

Находя общее решение этого уравнения (см. [10, с. 688]), для $w_n(r)$ получим формулу

$$w_n(r) = r^{\frac{m}{2}} \left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) \right), \quad n \geq \frac{m}{2}, \quad (13)$$

C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные.

Воспользуясь свойствами бесселевых функций, и с учетом того, что $\varepsilon(r) = 1$, неизвестные $w_{m-1-n}(r)$ определяем по формуле (8):

$$w_{m-1-n}(r) = r^{\frac{m}{2}} \left(-\overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) + \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) \right), \quad n \geq \frac{m}{2}. \quad (14)$$

Таким образом, мы нашли регулярные решения уравнения (5) на промежутках $[0, 1]$ и $[1, +\infty)$. Для получения регулярных решений на полуоси $[0, +\infty)$, необходимо потребовать выполнения условий

$$w_n(1-0) = w_n(1+0), \quad w_{m-1-n}(1-0) = w_{m-1-n}(1+0), \quad n \geq \frac{m}{2}.$$

Эти условия, с учетом формул (9)–(14) для $w_n(r)$ и $w_{m-1-n}(r)$, примут вид

$$A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2), \quad n \geq \frac{m}{2}, \quad (15)$$

$$\overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) - \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = \overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2), \quad n \geq \frac{m}{2}, \quad (16)$$

$$A_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2), \quad n \geq m, \quad (17)$$

$$\overline{A}_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = \overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2), \quad n \geq m. \quad (18)$$

Задаем A_n произвольно для $n \geq \frac{m}{2}$, а B_n – для $\frac{m}{2} \leq n < m$. Тогда из (15), (16) однозначно определяем C_n и D_n через A_n и B_n для $\frac{m}{2} \leq n < m$, а из (17), (18) – через A_n для $n \geq m$. Можно поступить и по-другому, что мы будем делать при построении ограниченных во всей плоскости решений.

Таким образом, мы установили следующую теорему.

Теорема 4. Пусть m четное. Тогда регулярные решения уравнения (3) определяются формулой

$$w(z) = \begin{cases} w_{r \leq 1} & \text{при } r \leq 1, \\ w_{r > 1} & \text{при } r > 1, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$w_{r \leq 1} = r^{\frac{m+1}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} - \overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) \right], \quad (20)$$

$$w_{r > 1} = r^{\frac{m}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) \right) e^{in\varphi} - \right. \\ \left. - \left(\overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) \right) e^{i(m-1-n)\varphi} \right]. \quad (21)$$

Теперь определим ограниченные во всей плоскости решения. На основе поведения бесселевых функций $I_\nu(2r)$ и $K_\nu(2r)$ при $r \rightarrow \infty$ заключаем, что нужно положить $C_n = 0$, $n \geq \frac{m}{2}$. Тогда из (17), (18) следует, что $A_n = D_n = 0$, $n \geq \frac{m}{2}$. Поэтому в первой сумме (20) и в (21) останутся слагаемые с номерами $n \in [\frac{m}{2}, m-1]$. Задавая D_n произвольными для таких n , из (15), (16) можно однозначно выразить A_n и B_n через D_n .

Справедлива следующая

Теорема 5. Пусть m четное. Тогда ограниченные во всей плоскости решения уравнения (3) определяются формулой вида (19), в которой

$$w_{r \leq 1} = r^{\frac{m+1}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} - \overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2) e^{in\varphi} + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2) e^{i(m-1-n)\varphi} \right) \right], \quad (22)$$

$$w_{r > 1} = r^{\frac{m}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r) e^{in\varphi} + \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) e^{i(m-1-n)\varphi} \right], \quad (23)$$

причем, как было указано выше, произвольными являются D_n , $n \in [\frac{m}{2}, m-1]$, а A_n и B_n однозначно выражаются через эти постоянные.

Следовательно, размерность множества ограниченных во всей плоскости решений как линейное пространство над полем вещественных чисел равна m . Это согласуется с утверждением 2).

Теперь рассмотрим случай, когда m нечетное. Тогда $n = m-1-n$ при $n = \frac{m-1}{2} = s$ и уравнение (5) при таком значении n примет вид

$$w'_s - \frac{s}{r} w_s + 2\varepsilon(r) \overline{w}_s = 0.$$

Введя обозначение $w_s = u + iv$, где u, v – вещественные функции переменной r , имеем

$$u' + iv' - \frac{s}{r}(u + iv) + 2\varepsilon(r)(u - iv) = 0,$$

или, отделяя вещественные и мнимые части, получим уравнения

$$u' - \left[\frac{s}{r} - 2\varepsilon(r) \right] u = 0, \quad v' - \left[\frac{s}{r} + 2\varepsilon(r) \right] v = 0.$$

Отсюда

$$u = A_s r^s e^{-2\gamma(r)}, \quad v = B_s r^s e^{2\gamma(r)},$$

где $A_s, B_s \in \mathbb{R}$ и $\gamma(r) = \int_0^r \varepsilon(t) dt$. Поэтому

$$w_s = r^s \left[A_s e^{-2\gamma(r)} + i B_s e^{2\gamma(r)} \right].$$

Ограниченные при $r \rightarrow \infty$ решения имеют вид $w_s = A_s r^s e^{-2\gamma(r)}$.

Далее будем считать, что $n > s = \frac{m-1}{2}$, и повторяем схему, изложенную для случая четного m . В результате все формулы (9)–(23) будут справедливы с небольшими изменениями: ограничения вида $n \geq m$ сохраняются, а ограничения вида

$n \geq \frac{m}{2}$ заменяются на $n > \frac{m-1}{2}$, в формулах (20), (21) добавляется слагаемое $w_s e^{is\varphi}$, а в формулах (22), (23) – слагаемое $A_s r^s e^{-2\gamma(r)} e^{is\varphi}$.

В формулах для ограниченных во всей плоскости решений произвольными являются вещественная постоянная A_s и комплексные постоянные D_n , $n \in (\frac{m-1}{2}, m-1]$, а A_n и B_n однозначно выражаются через эти постоянные. Следовательно, размерность множества ограниченных во всей плоскости решений как линейное пространство над полем вещественных чисел равна $1 + 2 \cdot \frac{m-1}{2} = m$. Это согласуется с утверждением 2).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
2. Bers L., Courant Institute of Mathematical Sciences. Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York, NY: New York Univ., Inst. Math. Mech., 1953. iii, 187 p.
3. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Тр. АН Таджик. ССР, 1963. 183 с.
4. Виноградов В.С. О теоремах Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических функций // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16, №1. С. 42–46.
5. Мухамадиев Э., Байзаев С. К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 280–283.
6. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
7. Байзаев С., Мухамадиев Э. О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера // Вестн. НГУ. Сер.: Матем. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–13.
8. Байзаев С. Избранные труды. Худжанд, 2024. 350 с.
9. Байзаев С., Баротов Р.Н. О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 22–35. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
11. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Пер. со 2-го англ. изд. В.С. Бермана. [Под ред. и с доп. Г. Шиловой]. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.

Поступила в редакцию 21.05.2024

Принята к публикации 24.07.2024

Байзаев Саттор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
17 мкр-н., д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Баротов Рузибой Нумонжонович, докторант (PhD) математического факультета

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
пр. Мавлонбекова, д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан
E-mail: ruzmet.tj@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.297-305

**On the Construction of Regular Solutions for a Class of Generalized
Cauchy–Riemann Systems with Coefficients Bounded on the Entire Plane***S. Baizaev^a, R.N. Barotov^{b*}*^a*Tajik State University of Law, Business and Politics,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*^b*Khujand State University named after Academician B. Gafurov,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

E-mail: *ruzmet.tj@mail.ru

Received May 21, 2024; Accepted July 24, 2024

Abstract

This article explores the generalized Cauchy–Riemann system on the entire complex plane. The coefficient for the conjugation of the desired function belongs to the Hölder space and, for $|z| > 1$, equals $e^{im\varphi}$, where m is an integer. For $m \leq 0$, the system was shown to have no nonzero solutions that grow no faster than a polynomial. For $m \geq 0$, the complete set of regular solutions, i.e., those without singularities in the finite part of the plane, was constructed. The obtained solutions were expressed as series of Bessel functions of an imaginary argument. From the resulting set, the solutions bounded on the entire plane were distinguished, and the dimension of the real linear space of these solutions, which equals m , was determined.

Keywords: generalized Cauchy–Riemann system, Hölder spaces, bounded coefficients, bounded solutions

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1988. 512 p. (In Russian)
2. Bers L., Courant Institute of Mathematical Sciences. *Theory of Pseudo-Analytic Functions*. New York, NY, New York Univ., Inst. Math. Mech., 1953. iii, 187 p.
3. Mikhailov L.G. *Novyi klass osobykh integral'nykh uravnenii i ego primeneniya k differentsial'nykh uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami* [A New Class of Singular Integral Equations and Its Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, Tr. Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1963. 183 p. (In Russian)
4. Vinogradov V.S. Liouville theorems for an equation of generalized analytic functions. *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 42–46. (In Russian)
5. Muhamadiev E., Baizaev S. On the theory of bounded solutions of a generalized Cauchy–Riemann system. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 287, no. 2, pp. 280–283. (In Russian)
6. Baizaev S., Muhamadiev E. On the index of first-order elliptic operators in the plane. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 663–672.

7. Baizaev S., Muhamadiev E. On the normal solvability of elliptic equations in the Holder space functions on plane. *Vestn. NGU. Ser.: Mat.*, 2006, vol. 6, no. 1, pp. 3–13. (In Russian)
8. Baizaev S. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Khujand, 2024. 350 p. (In Russian)
9. Baizaev S., Barotov R.N. Some estimates for elliptic systems generalizing the Bitsadze system of equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>. (In Russian)
10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Ucheb. Posobie* [Equations of Mathematical Physics. A Study Guide]. 6th ed., revis. enlarged. Moscow, Izd. MGU, 1999. 799 p. (In Russian)
11. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funktsii* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions]. Berman V.S. (Trans.). Shilov G. (Ed.). Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1949. 799 p. (In Russian)

Для цитирования: Байзаев С., Баротов Р.Н. О построении регулярных решений одного класса обобщенных систем Коши–Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 297–305. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.297-305>.

For citation: Baizaev S., Barotov R.N. On the construction of regular solutions for a class of generalized Cauchy–Riemann systems with coefficients bounded on the entire plane. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 297–305. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.297-305>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.724.2

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.306-319

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАНАЛА СВЯЗИ С КВАДРАТУРНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ И ФАЗОВЫМ КВАНТОВАТЕЛЕМ

Ю.А. Брычков¹, Н.В. Савищенко²

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия

²Военная академия связи им. С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

Аннотация

Рассмотрено влияние на пропускную способность канала связи $C_{M,L}$ числа L уровней фазового квантования выхода канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) в системе связи, использующей сигналы квадратурной фазовой модуляции (ФМ-4).

Ключевые слова: пропускная способность, информационная ёмкость, матрица переходных вероятностей, квантование, сигналы QPSK (quadrature phase-shift keying), сигналы ФМ-4, функция Гаусса, функция Оуэна

Введение

Одной из характеристик канала связи является пропускная способность, которая представляет собой теоретический предел скорости, при которой потенциально возможна надежная передача информации. Канал связи, с точки зрения теории информации, представляет собой множество входных и выходных символов и соответствующую матрицу переходных вероятностей (распределение переходных вероятностей канала). Если рассматривается ситуация, когда переходные вероятности постоянны во времени и переходы различных символов независимы, то это случай дискретного канала связи без памяти [1, 2]. При использовании многопозиционных сигналов и аналого-цифрового преобразователя с квантованием по уровню (или по фазе) дискретный канал без памяти преобразуется в расширенный канал связи с M -ным входом и L -ным выходом. Такие схемы квантования применяются в современных системах декодирования с “мягким” решением, когда $L > M$ (мягкий квантователь или многоуровневое квантование). Случай $L = M$ соответствует “жесткому” решению (жесткий квантователь или двухуровневое квантование). Режим без квантования соответствует режиму с бесконечным числом уровней квантования $L \rightarrow \infty$. При больших значениях сигнал/шум “мягкое” декодирование эффективнее “жесткого” на 3 дБ, а при реальных значениях отношения сигнал/шум – на 2 дБ [1, 2].

Целью работы является решение задачи, позволяющей оценить влияние числа уровней квантования L на пропускную способность канала связи. Для многофазных сигналов может быть удобнее реализовывать не амплитудное квантование, а квантование по фазе.

Цифровая реализация декодера подразумевает использование квантования на конечном числе уровней L выхода канала $y(t)$, представляющего собой при использовании канала связи с АБГШ непрерывный гауссовский случайный процесс. Рассмотрим квантование по фазе (фазовое квантование) для многопозиционной фазовой модуляции (ФМ- M) [1–5] для случая $M = 4$, т.е. для сигналов квадратурной фазовой модуляции (QPSK, Quadrature Phase-Shift Keying). Канал связи без памяти с дискретным входом и аддитивным белым гауссовским шумом, представляющий собой канал без памяти с дискретными входным и непрерывным выходным алфавитами, с помощью квантования может быть сведен к дискретному каналу связи. Квантование выхода канала на L уровней преобразует АБГШ-канал в канал связи с конечными алфавитами на входе и выходе. При использовании в системе передачи M сигналов и L уровней квантования, $L \geq M$, полученный канал может быть описан матрицей переходных вероятностей размером $M \times L$.

1. Основные соотношения для канала связи с АБГШ, ФМ-4 и фазовым квантованием выхода

Пусть задан канал с детерминированными параметрами, АБГШ, дискретным (с шагом T_s) временем, L -уровневым (равномерным) симметричным фазовым квантованием выхода, где $L = 2^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), и использованием сигнала ФМ-4 (QPSK) [1, 4, 5]. Пусть $T_s = T_b \log_2 M$ – длительность сигналов фазовой модуляции, $E_s = P_s T_s$ и P_s – средняя за время T_s энергия и мощность сигнала соответственно, N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности АБГШ и, соответственно, $\lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} P_s/N_0 = \text{const}(T_s)$, $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} E_s/N_0 = \lambda_s T_s$. Пусть $\Pi(\lambda_s T_s) = \|P(q_j/r)\|_{r=0;j=0}^{M-1,L-1} = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\|_{r=0;j=0}^{M-1,L-1}$ – заданная указанными условиями $M \times L$ -матрица переходных вероятностей канала, $M = 4$.

Математическая модель канала связи с АБГШ и QPSK: $y(t) = s_r(t) + n(t)$, $t \in [0, T_s]$; $s_r(t)$, $r = 0, \dots, 3$, – равновероятные сигналы QPSK с максимальной (средней) энергией E_s . Здесь $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Основное внимание сосредоточено ниже на пропускной способности в единицу времени канала $C_{M,L}$ (для системы сигналов с $M = 4$) с неограниченной полосой и очень большим шумом (определяемым неравенством $N_0 \gg \lambda_s T_s$) [1, с. 152], для чего в рассматриваемой модели канала достаточно перейти к исследованию перехода, предельного для $T_s \rightarrow 0$. Цель и содержание настоящей работы состоят в формулировке и доказательстве следующей теоремы.

Пусть $C_{4,L}^*(\lambda_s T_s)$ – информационная ёмкость канала связи.

Теорема 1. Пропускная способность в единицу времени неограниченного по полосе канала с четверичным ($M = 4$) входом, АБГШ, сигналом QPSK и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, \dots$) равномерным фазовым квантованием выхода при заданной этими условиями матрице переходных вероятностей $\Pi(\lambda_s T_s) = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\|$ и любом фиксированном $\lambda_s = P_s/N_0$ определяется соотношением

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = g_{M,q}^{(p)}(L) \frac{\lambda_s}{\ln 2} = g_{M,q}^{(p)} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F),$$

где $C_{\text{нк}}(F)$ – пропускная способность непрерывного канала связи с АБГШ, $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F) = \lim_{F \rightarrow \infty} F \log_2(1 + \lambda_s/F) = \lambda_s/\ln 2$.

Для множителя $g_{M,q}^{(p)}(L) \stackrel{\text{def}}{=} g_{4,q}^{(p)}(L)$ справедливо выражение

$$g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{1}{8} \sec \frac{\pi}{2L} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2L} \left(\pi \operatorname{sinc} \frac{\pi}{L} + 2 \right),$$

и $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$.

Из теоремы следует, что $g_{4,q}^{(p)}(4) = \frac{2}{\pi}$ и $\lim_{L \rightarrow \infty} g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{\pi+2}{8} = 0.642699 \dots < 1$. Случай $L = M = 4$ соответствует “жесткому” решению.

При доказательстве теоремы необходимо все ограничения для рассматриваемой модели канала, оговоренные выше, формализовано отобразить в $M \times L$ -матрице переходных вероятностей $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\lambda_s T_s)$ и показать, что модели соответствует четверичный по входу и L -уровневый строго симметричный канал по входу.

2. Пропускная способность для канала связи с ФМ-М и АБГШ. Жесткий квантователь

2.1. Матрица переходных вероятностей для сигналов ФМ-М. Рассмотрим канал с детерминированными параметрами и аддитивным белым шумом. Предположим, что задана система сигналов с фазовой модуляцией. Определим для этого случая одномерные условные вероятности при оптимальном когерентном приеме: $\pi_{r,r^*} = P(r^*/r)$, где $r = 0, \dots, M-1$ – переданные M -ные символы; $r^* = 0, \dots, M-1$ – принятые по ним решения. Совокупность одномерных условных вероятностей определяет матрицу переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$. Можно показать, что [4]

$$\begin{aligned} \pi_{00}(\gamma) &= \pi_{kk}(\gamma) = 1 - Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}\right) - 2T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right), \\ \pi_{0k}(\gamma) &= \frac{1}{2} \left[Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k-1)\pi}{M}\right) - Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k+1)\pi}{M}\right) \right] + \\ &\quad + T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k-1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{M}\right) - \\ &\quad - T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k+1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{M}\right), \quad k = 1, \dots, \operatorname{ent}[(M-1)/2]; \\ \pi_{0k}(\gamma) &= \pi_{0,M-k}(\gamma), \quad k = \operatorname{ent}[(M-1)/2] + 1, \dots, M-1; \\ \pi_{0,M/2}(\gamma) &= Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}\right) - 2T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \\ T(z, a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{1+t^2} e^{-z^2(1+t^2)/2} dt, \quad |\arg a| < \pi \end{aligned}$$

– функции Гаусса и Оуэна соответственно [6, 7].

Матрица переходных вероятностей относится к классу матриц тёплицева типа, т. е. является симметричной относительно двух главных диагоналей, в частности,

$$\begin{aligned} \pi_{km}(\gamma) &= \pi_{mk}(\gamma), \quad k, m = 0, \dots, M-1, \\ \pi_{km}(\gamma) &= \pi_{0,|k-m|}(\gamma), \quad k, m = 1, \dots, M/2-1, \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\mathbf{\Pi}(\gamma) = \begin{pmatrix} \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{02}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-1}(\gamma) \\ \pi_{01}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-2}(\gamma) \\ \pi_{02}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-3}(\gamma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{0,M-1}(\gamma) & \pi_{0,M-2}(\gamma) & \pi_{0,M-3}(\gamma) & \dots & \pi_{0,0}(\gamma) \end{pmatrix}.$$

2.2. Информационная ёмкость и пропускная способность симметричного дискретного канала связи. Дискретный канал называется симметричным по входу, если все строки матрицы переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первой строки, и симметричным по выходу, если все столбцы матрицы $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первого столбца [3]. Дискретный канал называется симметричным, если он симметричен и по входу, и по выходу. Проанализировав матрицу переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$, нетрудно убедиться в том, что данный дискретный канал является симметричным. Информационная ёмкость $C_{M,M}^*(\lambda_s, T_s)$ и соответствующая ей пропускная способность $C_{M,M}(\lambda_s, T_s)$ симметричного дискретного канала без памяти имеют вид [3]

$$C_M^*(\lambda_s, T_s) \stackrel{\text{def}}{=} C_{M,M}^*(\lambda_s, T_s) = \log_2 M + \sum_{k=0}^{M-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma), \quad [\text{бит/символ}],$$

$$C_M(\lambda_s, T_s) = \frac{1}{T_s} C_M^*(\lambda_s, T_s), \quad [\text{бит/с}],$$

где $\pi_{0k}(\gamma)$, $k = 0, \dots, M-1$, – элементы первой строки матрицы переходных вероятностей.

При фиксированном значении $\lambda_s = P_s/N_0$ можно так изменять длительность канальных символов T_s и, соответственно, скорость передачи, что будет обеспечиваться наибольшая пропускная способность канала связи:

$$\begin{aligned} C_M^{\max}(\lambda_s) &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_M^*(\lambda_s, T_s) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} \left[\log_2 M + \sum_{k=0}^{M-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) \right] = \\ &= \lambda_s \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \left[\log_2 M + \pi_{00}(\gamma) \log_2 \pi_{00}(\gamma) + \right. \\ &\quad \left. + \pi_{0,M/2}(\gamma) \log_2 \pi_{0,M/2}(\gamma) + 2 \sum_{k=0}^{M/2-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что для $k = 1, \dots, M/2 - 1$

$$\begin{aligned} \pi_{00}(\gamma) \log_2 \pi_{00}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} + \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1 - \ln M}{\pi} \cos \frac{\pi}{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} \right] \sin \frac{\pi}{M} \gamma + O(\gamma^{3/2}), \\ \pi_{0,M/2}(\gamma) \log_2 \pi_{0,M/2}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} - \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1 - \ln M}{\pi} \cos \frac{\pi}{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} \right] \sin \frac{\pi}{M} \gamma + O(\gamma^{3/2}), \\ \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} + \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \cos \frac{2k\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2\pi \ln 2} \left[M \sin^2 \frac{\pi}{M} \cos^2 \frac{2k\pi}{M} + (1 - \ln M) \sin \frac{2\pi}{M} \cos \frac{4k\pi}{M} \right] \gamma + O(\gamma^{3/2}). \end{aligned}$$

Подставив эти формулы в (1), получим

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lambda_s = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \frac{P_s}{N_0},$$

где $M = 2^K$, $K = 2, 3, \dots$. Случай $M = 2$ рассматривается отдельно и приводит к результату $C_2^{\max}(\lambda_s) = \frac{2}{\pi \ln 2} \lambda_s$. Таким образом, окончательно получим

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lambda_s, & M \geq 3; \\ \frac{2}{\pi \ln 2} \lambda_s, & M = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\frac{\lim_{M \rightarrow \infty} C_M^{\max}(\lambda_s)}{C_2^{\max}(\lambda_s)} = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337 \dots$. Таким образом, переход от двоичных сигналов ФМ-2 (BPSK) к многопозиционным сигналам ФМ- M (MPSK) при $M \gg 1$ и $\gamma \ll 1$ увеличивает пропускную способность дискретного канала $C_M^{\max}(\lambda_s)$ не более чем в $\pi^2/8$ раз. При этом, если $\gamma \gg 1$, то пропускная способность дискретного канала возрастает практически пропорционально $\log_2 M$. Кроме того, пропускная способность данного дискретного канала (при условии, что в непрерывном канале $F \rightarrow \infty$) меньше в $\frac{4}{\pi} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M}$ при $M > 3$ и в $\frac{\pi}{2}$ при $M = 2$ по сравнению с пропускной способностью $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)$, соответствующей непрерывному каналу с АБГШ при $F \rightarrow \infty$:

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F),$$

так как $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F) = \lim_{F \rightarrow \infty} F \log_2(1 + \lambda_s/F) = \lambda_s / \ln 2$. В частности, для сигналов ФМ-4 (QPSK) $C_4^{\max}(\lambda_s) = \frac{2}{\pi} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)$.

Кроме того, отсюда следует, что $\frac{\lim_{M \rightarrow \infty} C_M^{\max}(\lambda_s)}{\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)} = \frac{\pi}{4} = 0.785398 \dots$. Таким образом, при $F \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ и неограниченной сложности корректирующего (помехоустойчивого) кодирования существенное ограничение на выбор сигнальной конструкции, выражающееся в применении сигналов ФМ- M , уменьшает пропускную способность дискретного канала лишь в $\frac{4}{\pi} = 1.273$ раз по сравнению со случаем, когда нет никаких ограничений на выбор сигнальных конструкций.

3. Матрица переходных вероятностей для канала связи с АБГШ, ФМ-4 и фазовым квантованием выхода

Фазовый квантователь. При использовании фазового квантователя (рис. 1), применив [4], получим, что элементы матрицы переходных вероятностей примут вид

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = & 2 \left[T \left(\sin \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \right) - \right. \\ & \left. - T \left(\sin \frac{(L/M - k)\pi}{L} \sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(L/M - k)\pi}{L} \right) \right] + \\ & + Q \left(\sin \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \sqrt{2\gamma} \right) - Q \left(\sin \frac{(L/M - k)\pi}{L} \sqrt{2\gamma} \right), \end{aligned}$$

$$k = 0, \dots, L/M - 2;$$

$$\pi_{0,L/M-1}(\gamma) = 1 - 2T\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{\pi}{L}\right) - Q\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right);$$

$$\pi_{0,k}(\gamma) = 2\left[T\left(\sin \frac{k\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{k\pi}{L}\right) - T\left(\sin \frac{(k+1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(k+1)\pi}{L}\right)\right],$$

$$k = L/M, \dots, 2L/M - 2;$$

$$\pi_{0,2L/M-1}(\gamma) = 2T\left(\cos \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{\pi}{L}\right);$$

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = & 2\left[T\left(\cos \frac{(L/M-k)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(L/M-k)\pi}{L}\right) - \right. \\ & \left. - T\left(\cos \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\right)\right] + \\ & + Q\left(\cos \frac{(L/M-k)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right) - Q\left(\cos \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right), \end{aligned}$$

$$k = 2L/M, \dots, 3L/M - 2;$$

$$\pi_{0,3L/M-1}(\gamma) = Q\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right) - 2T\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{\pi}{L}\right);$$

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = \pi_{0,k-2L/M} = & 2\left[T\left(\cos \frac{(k+1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(k+1)\pi}{L}\right) - \right. \\ & \left. - T\left(\cos \frac{k\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{k\pi}{L}\right)\right], \quad k = 3L/M, \dots, 4L/M - 2; \end{aligned}$$

$$\pi_{0,4L/M-1}(\gamma) = \pi_{2L/M-1,0}(\gamma) = 2T\left(\cos \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{\pi}{L}\right).$$

Учитывая свойства сигналов QPSK, получим, что

$$\pi_{1,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1; \end{cases}$$

$$\pi_{2,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+2L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-2L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-2L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1; \end{cases}$$

$$\pi_{3,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-3L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1. \end{cases}$$

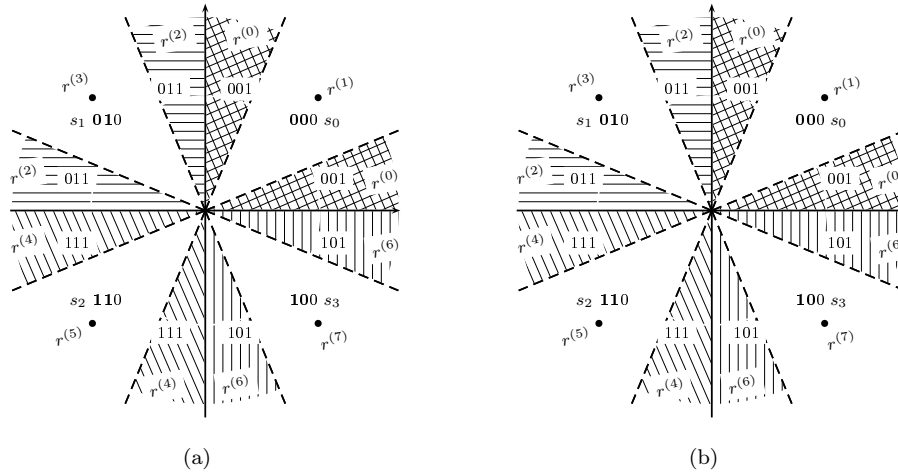


Рис. 1. Сигнал QPSK: а) Фазовый квантователь $L = 8$; б) Фазовый квантователь $L = 16$ (для секторов принято обозначение вида $r^{(\ell)} = r_k \& r^{*(\ell)}$, $\ell = 0, \dots, L-1$, $k = 0, \dots, M-1$, где r_k – код отображения Грея для сигналов QPSK ($M = 4$), $r^{(\ell)}$ – код квантования)

4. Информационная ёмкость симметричного в широком смысле канала связи

Информационная ёмкость [бит/символ] канала с M -ным входом, АБГШ и L -уровневым квантованием выхода при заданной этими условиями матрице переходных вероятностей $\Pi = \|\mathbf{P}(q_j/r)\|$ определена К. Шенноном [1, 3] соотношением

$$\begin{aligned} C_{M,L}^*(\gamma) &= \max_{\mathbf{P}(r)} I(R, Q) = H(Q) - H(Q/R) = \\ &= \max_{\mathbf{P}(r)} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} \mathbf{P}(r) \mathbf{P}(q_j/r) \log_2 \frac{\mathbf{P}(q_j/r)}{\sum_{r'=0}^{M-1} \mathbf{P}(r') \mathbf{P}(q_j/r')}. \end{aligned} \quad (2)$$

В канале с АБГШ и ФМ-4 (QPSK) матрица переходных вероятностей $\Pi(\gamma) = \|\mathbf{P}(q_j/r)\| = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\| = \|\pi_{rj}(\gamma)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{rj}\|$ имеет следующий вид:

$$\Pi(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{02}(\gamma) & \pi_{03}(\gamma) & \dots & \pi_{0,L-2}(\gamma) & \pi_{0,L-1}(\gamma) \\ \pi_{10}(\gamma) & \pi_{11}(\gamma) & \pi_{12}(\gamma) & \pi_{13}(\gamma) & \dots & \pi_{1,L-2}(\gamma) & \pi_{1,L-1}(\gamma) \\ \pi_{20}(\gamma) & \pi_{21}(\gamma) & \pi_{22}(\gamma) & \pi_{23}(\gamma) & \dots & \pi_{2,L-2}(\gamma) & \pi_{2,L-1}(\gamma) \\ \pi_{30}(\gamma) & \pi_{31}(\gamma) & \pi_{32}(\gamma) & \pi_{33}(\gamma) & \dots & \pi_{3,L-2}(\gamma) & \pi_{3,L-1}(\gamma) \end{bmatrix}.$$

С учетом полученных результатов получим, что матрица переходных вероятностей $\Pi(\gamma)$ примет вид $\Pi(\gamma) = [\Pi_1(\gamma) \mid \Pi_2(\gamma) \mid \Pi_3(\gamma) \mid \Pi_4(\gamma)]$:

$$\Pi(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \end{matrix} & \begin{matrix} \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \end{matrix} \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \end{array} \right].$$

Пусть $\pi_k(\gamma) = (\pi_{0,k}(\gamma), \dots, \pi_{0,k+L/M-1}(\gamma))$, $k = 0, L/M, 2L/M$ – вектор-строка, тогда матрица переходных вероятностей может быть представлена в виде

$$\mathbf{\Pi}(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) \\ \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) \\ \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) \\ \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) \end{bmatrix}.$$

При таком представлении матрица переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}(\gamma)$ является бисимметричной (симметричной относительно главной и побочной диагоналей) и относится к типу матриц Тёплица (на диагоналях, параллельных главной, находятся одинаковые элементы – в данном случае вектора).

Дискретный канал является симметричным по входу, так как, используя элементы первой строки, можно образовать строки со второй по четвертую.

Для расчета пропускной способности (информационной ёмкости) по точной формуле необходимо показать, что матрица переходных вероятностей может быть представлена в виде $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{P}_0 \ \mathbf{P}_1 \ \dots]$, где \mathbf{P}_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, – матрицы, соответствующие симметричному каналу связи (симметричность по входу и выходу).

Для этого матрицы \mathbf{P}_k строятся следующим образом. Из каждой матрицы $\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2, \mathbf{\Pi}_3, \mathbf{\Pi}_4$ выбираются столбцы с одинаковыми номерами. Следовательно, из матрицы $\mathbf{\Pi}$ выбираются столбцы с номерами $k, k + L/M, k + 2L/M, k + 3L/M$, где $k = 0, \dots, L/M - 1$. Перестановкой столбцов матрица $\mathbf{\Pi}(\gamma)$ представима в виде клеточной матрицы $\mathbf{\Pi}(\gamma) = [\mathbf{P}_0(\gamma) \ \mathbf{P}_1(\gamma) \ \dots \ \mathbf{P}_{L/M-1}(\gamma)]$, где матрица $\mathbf{P}_k(\gamma)$ при $k = 0, \dots, L/M - 1$

$$\mathbf{P}_k(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3)$$

удовлетворяет условию симметрии и по входу, и по выходу канала, т.е. матрице $\mathbf{\Pi}$ соответствует определение понятия “строго симметричного канала по входу” дискретного канала [3] или понятие “симметричного в широком смысле” канала [8]. Для такого канала максимум взаимной информации достигается при равновероятных символах входного алфавита $P(r) = 1/M$ [3, 8].

Найдем $H(Q)$, учитывая, что при равномерном распределении на входе канала и применении формулы полной вероятности выражение для энтропии будет равно

$$H(Q) = -M \sum_{k=0}^{L/M-1} P(q_k) \log_2 P(q_k),$$

где

$$P(q_k) = \sum_r P(r) P(q_k/r) = \frac{1}{M} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)].$$

Аналогично

$$H(Q/R) = - \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)].$$

В соответствии с (2), (3) информационная ёмкость [бит/символ] канала с четверичным ($M = 4$) входом, АБГШ и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, 4, \dots$) симметричным и равномерным фазовым квантованием выхода примет вид

$$C_{4,L}^*(\gamma) = \log_2 M - \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \quad (4) \\ \times \log_2 [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] + \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)],$$

где выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] = 1.$$

После несложных преобразований получим, что для сигналов QPSK и L -уровневым фазовым квантованием выхода

$$C_{M,L}^*(\gamma) = \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \quad (5) \\ \times \left[\log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \right. \\ \rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ \left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right],$$

где

$$\mathcal{H}_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -x_1 \log_2 x_1 - x_2 \log_2 x_2 - \dots - \\ - (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) \log_2 (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

– энтропийная функция.

При $\gamma = E_s/N_0 \rightarrow \infty$ и $\lambda_s = P_s/N_0 \rightarrow \infty$ из (4) и (5) следует, что информационная ёмкость канала ([бит/символ]) с четверичным ($M = 4$) входом, сигналом ФМ-4 (QPSK), АБГШ и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, 4, \dots$) фазовым квантованием выхода и, соответственно, его пропускная способность в единицу времени ([бит/с]) приобретают значения

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{M,L}^*(\gamma) = \log_2 M, \quad \lim_{\lambda_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = \frac{\log_2 M}{T_s}.$$

5. Фазовый квантователь. Предельная информационная ёмкость и пропускная способность

Пропускная способность для сверхширокополосного канала связи, т.е. при $T_s \rightarrow 0$, может быть определена как

$$\begin{aligned} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) &= \lambda_s \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \\ &\times \left[\log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \right. \\ &\rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ &\left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как при $\gamma \rightarrow 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] = \frac{M}{L}, \quad k = 0, \dots, \frac{L}{M} - 1,$$

получим, что ($M = 4$)

$$\begin{aligned} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) &= \frac{M}{L} \lambda_s \sum_{k=0}^{L/M-1} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \left[\log_2 M - \right. \\ &- \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \\ &\rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ &\left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд

$$\begin{aligned} \log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}}, \frac{\pi_{0,k+L/M}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}}, \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}} \right) = \\ = \begin{cases} \frac{L^2}{8\pi \ln 2} [2 - \sin \frac{2k\pi}{L} - \sin \frac{2(k+1)\pi}{L} + 2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} - 2 \cos \frac{\pi}{L}] \gamma + O(\gamma^{3/2}), & k = 0, \dots, L/M - 2; \\ \frac{L^2}{4\pi \ln 2} \sin^2 \frac{\pi}{L} \gamma + O(\gamma^{3/2}), & k = L/M - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

после элементарных преобразований получим, что

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) = \frac{L}{4\pi \ln 2} \left(L \sin \frac{\pi}{L} + 2 \right) \tan \frac{\pi}{2L} \frac{P_s}{N_0} = g_{M,q}^{(p)}(L) \frac{\lambda_s}{\ln 2},$$

где ($M = 4$)

$$g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{1}{8} \sec \frac{\pi}{2L} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2L} \left(\pi \operatorname{sinc} \frac{\pi}{L} + 2 \right).$$

Табл. 1

Значения $g_{4,q}^{(p)}(L)$ [в разгах и дБ] при фазовом квантовании на $L = 4, \dots, 512, \dots$ уровней

L	4	8	16	32	64
$g_q^{(p)}(L)$	0.636620	0.640941	0.642245	0.642585	0.642670
$10 \lg g_q^{(p)}(L)$	-1.96120	-1.93182	-1.92299	-1.92070	-1.92012
L	128	256	512	1024	∞
$g_q^{(p)}(L)$	0.642692	0.642697	0.642699	0.642699	0.642699
$10 \lg g_q^{(p)}(L)$	-1.91997	-1.91994	-1.91993	-1.91992	-1.91992

В частности, при $L = 4$, $L = 8$ и $L = 16$ (табл. 1)

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,4}^*(\lambda_s T_s) = \frac{2}{\pi \ln 2} \frac{P_s}{N_0} = 0.636620 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0},$$

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,8}^*(\lambda_s T_s) = 0.640941 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}, \quad \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,16}^*(\lambda_s T_s) = 0.642245 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}$$

соответственно.

При четверично-квантованном выходе канала, т.е. при $L = M = 4$, получим нижнюю границу $\frac{2}{\pi}$, соответствующую жесткому декодированию. При теоретическом пределе по динамическому диапазону, т.е. при $L \rightarrow \infty$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = \frac{\pi + 2}{8} \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0} = 0.642699 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}.$$

Заключение

Проведено исследование пропускной способности дискретного канала связи при использовании многопозиционных сигналов ФМ- M . Получена точная формула пропускной способности, справедливая во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум и произвольной позиционности сигналов.

Для канала связи, использующего сигналы QPSK (ФМ-4) и фазовое квантование на L уровней, доказано точное соотношение для пропускной способности (информационной ёмкости), корректное во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум. Получены предельные соотношения, характерные для канала связи с очень большим шумом. Показано, что потери в пропускной способности при фазовом квантовании являются незначительными, но при этом использование “мягкого” декодирования может дать энергетический выигрыш 2–3 дБ. Целью дальнейших исследований является рассмотрение влияния фазового квантования, используемого для сигналов ФМ-8, на пропускную способность.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Витерби А.Д., Омура Дж.К. Принципы цифровой связи и кодирования. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982. 536 с.
2. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
3. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. М.: Наука, 1982. 416 с.

4. *Savischenko N.V.* Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. Singapore: World Sci., 2014. 640 p.
5. *Бураченко Д.Л., Савищенко Н.В.* Геометрические модели сигнально-кодовых конструкций. СПб.: ВАС, 2020. 390 с.
6. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* A special function of communication theory // Integr. Transforms Spec. Funct. 2015. V. 26, No 6. P. 470–484.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1020307>.
7. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Some properties of the Owen T -function // Integr. Transforms Spec. Funct. 2016. V. 27, No 2.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1111889>. P. 163–180.
8. *Кудряшов Б.Д.* Теория информации. СПб.: Питер, 2009. 320 с.

Поступила в редакцию 20.04.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Брычков Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук

ул. Вавилова, д. 40, г. Москва, 119333, Россия

E-mail: yua@rambler.ru

Савищенко Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин

Военная академия связи им. С.М. Будённого

Тихорецкий пр., д. 3, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

E-mail: snikaspb@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.306-319

**Capacity of a Communication Channel with Quadrature
Phase-Shift Keying and Phase Quantization**Yu.A. Brychkov^{a*}, N.V. Savischenko^{b**}^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*^b*Military Telecommunications Academy, St. Petersburg, 194064 Russia*E-mail: ^{*}yua@rambler.ru, ^{**}email2@yandex.ru

Received April 20, 2024; Accepted May 20, 2024

Abstract

The influence of the number of phase quantization levels L on the capacity $C_{M,L}$ of a communication channel with additive white Gaussian noise (AWGN) was studied in a communication system using QPSK (4-PSK).

Keywords: channel capacity, information capacity, transition probability matrix, quantization, QPSK (quadrature phase-shift keying) signals, Gaussian function, Owen function

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. QPSK signal: *a*) Phase quantization level $L = 8$; *b*) Phase quantization level $L = 16$ (sectors are labeled as $r^{(\ell)} = r_k \& r^{*(\ell)}$, $\ell = 0, \dots, L - 1$, $k = 0, \dots, M - 1$, where r_k is the Gray code for QPSK signals ($M = 4$), $r^{(\ell)}$ is the quantization code.

References

1. Viterbi A.J., Omura J.K. *Printsipy tsifrovoy svyazi i kodirovaniya* [Principles of Digital Communication and Coding]. Moscow, Radio Svyaz', 1982. 536 p. (In Russian)
2. Clark G.C., Jr., Cain J.B. *Kodirovanie s ispravleniem oshibok v sistemakh tsifrovoy svyazi* [Error-Correction Coding for Digital Communications]. Moscow, Radio Svyaz', 1987. 392 p. (In Russian)
3. Kolesnik V.D., Poltyrev G.Sh. *Kurs teorii informatsii* [A Course in Information Theory]. Moscow, Nauka, 1982. 416 p. (In Russian)
4. Savischenko N.V. *Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory*. Singapore, World Sci., 2014. 640 p.
5. Burachenko D.L., Savischenko N.V. *Geometricheskie modeli signal'no-kodovykh konstruktsii* [Geometric Models of Signal-Code Sequences]. St. Petersburg, VAS, 2020. 390 p. (In Russian)

6. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. A special function of communication theory. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, 2015, vol. 26, no. 6, pp. 470–484.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1020307>.
7. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Some properties of the Owen T -function. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, 2016, vol. 27, no. 2, pp. 163–180.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1111889>.
8. Kudryashov B.D. *Teoriya informatsii* [Information Theory]. St. Petersburg, Piter, 2009. 320 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Брычков Ю.А., Савищенко Н.В. Пропускная способность канала связи с квадратурной фазовой модуляцией и фазовым квантователем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 306–319. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.306-319>. ⟩

⟨ **For citation:** Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Capacity of a communication channel with quadrature phase-shift keying and phase quantization. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 306–319. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.306-319>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.056

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.320-330

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АССОЦИАТИВНОЙ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

И.С. Вершинин

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Рассмотрены элементы теории нового научного направления – ассоциативной защиты информации при ее хранении и передаче. Показано, что применение данного подхода ведет к повышению уровня защиты и помехоустойчивости анализа сцен.

Ключевые слова: ассоциативная защита, анализ сцен, помехоустойчивость, криптостойкость, стегостойкость

Введение

Интенсивное развитие компьютерной стеганографии началось с 1990-х годов, когда возникли новые задачи сокрытия информации, которые не могла решить классическая криптография. Известные в настоящее время стеганографические методы предполагают внедрение информации в изображение, видео- или аудиофайлы. Было развито множество методов с применением серьезного математического аппарата.

Так, для погружения скрытой информации в неподвижные изображения большое распространение получили алгоритмы Jsteg, Outguess, F5.

Jsteg вкладывает информацию в наименьшие значащие биты (НЗБ) частотных коэффициентов цветных изображений в формате JPEG. Outguess также вкладывает сообщение в наименее значимые биты (НЗБ) частотных коэффициентов цветных изображений, однако для повышения стойкости к стегоанализу выполняется повторное вложение с целью приближения гистограммы покрывающих сообщений к гистограмме стегосистемы.

F5 отличается от Jsetg и Outguess тем, что при вложении минимизируется количество изменяемых коэффициентов, что затрудняет использование простейших методов стегоанализа.

Известны более сложные стегосистемы, такие как Model based или Perturbed Stegosystem (PS), которые оказываются трудно обнаруживаемыми. Идея построения первой состоит в том, что статистика НЗБ частотных коэффициентов изображения после вложения «подгоняется» под статистику этих же НЗБ покрывающих сообщений (без вложения) по некоторой аналитической модели. В случае же PS используются факт двойного квантования с ухудшением качества (который имеет место в реальных алгоритмах сжатия изображения) и вложение в определенные

коэффициенты. Такой метод почти не искажает статистику по сравнению с исходным покрывающим сообщением. В настоящее время известно понятие совершенных стегосистем. В них исходные контейнеры и соответствующие им стегоконтейнеры подчинены одному закону распределения вероятностей. Однако применение таких стегосистем на практике является затруднительным.

Как известно, для большинства современных стегосистем, скрывающих информацию в различного рода файлах, надежность этих систем зависит от объема встраиваемой информации. Чем он больше, тем ниже надежность, и наоборот. Отсюда получаем критерий выбора оптимального решения в зависимости от указанного соотношения. Варьируя эти параметры, можно добиться либо высокого качества стегопоследовательности, либо большого объема скрываемых в стегоконтейнере данных. Увеличение одновременно обоих параметров недостижимо. Таким образом, можно сделать вывод о том, что применение существующих стегосистем к защите сцен с большим объемом данных является затруднительным, а в ряде случаев – невозможным, т. к. при большом объеме скрываемых данных неизбежна существенная потеря стойкости. Рассматриваемый далее ассоциативный подход более подходит для целей защиты данных анализируемых сцен. В рамках представленного научного направления ассоциативной защиты информации ведется двумерно-ассоциативный анализ сцен, которые могут быть представлены в виде картографической и текстовой информации. Проводится распознавание сцен, итогом которого является описание сцены в терминах «объекты – координаты» [1]. Количество типов объектов и их координат полагаются заранее известными.

Каждому объекту/координате ставится в соответствие k -разрядный десятичный код. Местоположение объекта определяется двумя координатами X и Y (рис. 1). Каждый разряд десятичного кода есть бинарная матрица A^t в алфавите почтовых индексов (десятичных цифр), размер которой $m \times n$, $m = 2n - 1$. Рис. 2 – пример отображения цифры 9 при $n = 5$.

Код объекта	Код координаты X	Код координаты Y
-------------	------------------	------------------

Рис. 1. Структура записи в таблице данных сцены

1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Рис. 2. Цифра 9

Далее проводится процедура маскирования. Для этого по разработанному АЛГОРИТМУ (см. далее) каждой бинарной матрице ставится в соответствие инверсная матрица маски с теми же размерами. Единичные биты матриц масок указывают на биты эталона, которые должны сохраняться и будут использоваться

в дальнейшем для проведения процедуры распознавания. Все остальные биты эталона (т. н. замаскированные биты) заменяются случайными значениями в процессе проведения процедуры рандомизации. В итоге исходные бинарные матрицы будут представлены (заменены) троичными матрицами, элементы которых принадлежат множеству $\{0, 1, -\}$.

Маскирование осуществляется из условия минимизации сохраняемых бит в матрицах-эталонах. Тем самым повышается стойкость защиты. Распознавание букв кодового слова осуществляется сопоставлением сохраненных бит на множестве троичных эталонов, т. е. проводится ассоциативная обработка.

Рассмотрим наиболее существенные отличия ассоциативной стегозащиты от существующих стего- и криптометодов защиты информации. Основой ассоциативной защиты является процедура маскирования. При этом маски могут быть использованы в двух случаях: для нейтрализации противодействия распознаванию санкционированным пользователем и для противодействия распознаванию несанкционированным пользователем. В первом случае речь идет об искажениях в изображениях, которые могут быть как случайными, так и преднамеренными. Это могут быть либо помехи, возникающие в процессе хранения или передачи информации, либо внедряемые злоумышленником преднамеренно путем искажения бит замаскированного изображения.

Во втором случае процедура рандомизации приводит к искажению части изображения, однако знание маски позволяет провести правильную идентификацию объектов при распознавании, т. е. процедура маскирования в этом случае является определяющей. Рандомизация же призвана скрыть сообщение, оставив истинными лишь незамаскированные биты.

Распознавание проводится по маскам. Для этого для каждого объекта/координаты проводится сопоставление со всеми троичными эталонами с использованием масок, указывающих местоположение незамаскированных (существенных) бит.

Таким образом, здесь можно говорить о симбиозе понятий крипто- и стеганографии. Оба понятия дополняют друг друга. Как известно, криптография путем применения сложных математических алгоритмов приводит к получению шифртекста той же длины, что и исходное сообщение. В случае ассоциативной защиты полезное сообщение – это небольшое количество сохраненных по маске бит, которые погружаются в пустой контейнер достаточно большого объема, что характерно для стеганографии. Вместе с тем, представление десятичных цифр бинарными матрицами (определяющими размер носителя) с последующим маскированием и рандомизацией – своеобразное шифрование, хотя оно и отлично от принятого криптографического.

Процедуру маскирования можно отнести к трафаретному способу стеганографии (в качестве частного случая). Известно, что трафарет «накладывается» на исходное (передаваемое) сообщение. Далее «поверх» трафарета наносится текст, имеющий некоторый смысл. В случае ассоциативной стегозащиты основное отличие в том, что исходные (незамаскированные) биты сообщения погружаются в шумовую картину. Другими словами, сообщение при передаче маскируется под шум канала. Противник в этом случае должен будет определить, присутствуют ли в системе связи только наложение шума канала или совокупность шума канала и стегосигнала [2]. В результате проведенных процедур маскирования и рандомизации из исходных представлений сцен формируются (по аналогии со стеганографией) стегоконтейнеры. Исходный (пустой) контейнер имеет длину $L = k(9n - 12)$. Количество $(9n - 12)$ определяется совокупным контуром существенных бит би-

нарных матриц. В алфавите почтовых индексов существенные биты располагаются по внешнему контуру и внутреннему «зигзагу» соответствующих бинарных матриц. Рис. 3, а – пример представления совокупного контура для $n = 3$, рис. 3, б – для $n = 7$. В сформированные контейнеры заносится отрезок ПСП, далее в них по маске внедряются сохраняемые истинные биты. Их число определяется примерным значением $q = 5k$, что значительно меньше значения L . Это характерно для стеганографии.

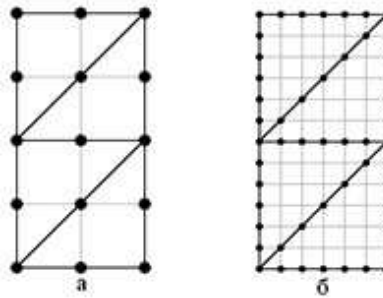


Рис. 3. Существенные биты

Метод ассоциативной стегозащиты, в сравнении с известными методами стеганографии, позволяет потенциально обеспечить безусловную стегостойкость. При этом рассматриваемый подход обладает свойством более высокой помехоустойчивости хранимой или передаваемой информации по сравнению с известными шифрами.

1. Базовый алгоритм маскирования

Далее бинарные матрицы эталонов A^t будем обозначать как эталоны символов Θ_t . Разработанный базовый алгоритм маскирования или просто АЛГОРИТМ [3] осуществляет случайный поиск сохраняемых (немаскируемых) бит эталонов заданного множества. На рис. 4 и 5 представлена блок-схема АЛГОРИТМА. Суть работы АЛГОРИТМА заключается в выборе одного из вариантов маскирования на каждом этапе работы АЛГОРИТМА для рассматриваемой на этом этапе совокупности эталонов. АЛГОРИТМ построен таким образом, что при отсутствии информации об истинном ключе, генерируемом с его помощью, вероятность правильного распознавания должна быть невелика.

Пусть D_l – множество бинарных матриц эталонов, рассматриваемых на l -этапе работы алгоритма. Множество D_0 содержит полное множество типов эталонов.

По результатам проведенных исследований установлено, что для проведения правильного распознавания объектов в стегоконтейнерах необходимо и достаточно сохранить значения лишь нескольких бит. АЛГОРИТМ выполняет поиск таких бит. Сохраняемые биты выбираются из условия взаимной непокрываемости, т.е. на каждом этапе работы АЛГОРИТМА идет противопоставление рассматриваемых на этом этапе эталонов по значению одного бита, который должен сохраняться истинным для всех эталонов подмножества.

На рис. 6 показан пример одного из результатов работы АЛГОРИТМА. Биты, которые не маскируются (т.е. сохраняются), представлены точками.

В теореме 1 сформулировано важнейшее свойство АЛГОРИТМА, служащее основой для всего ассоциативного подхода.

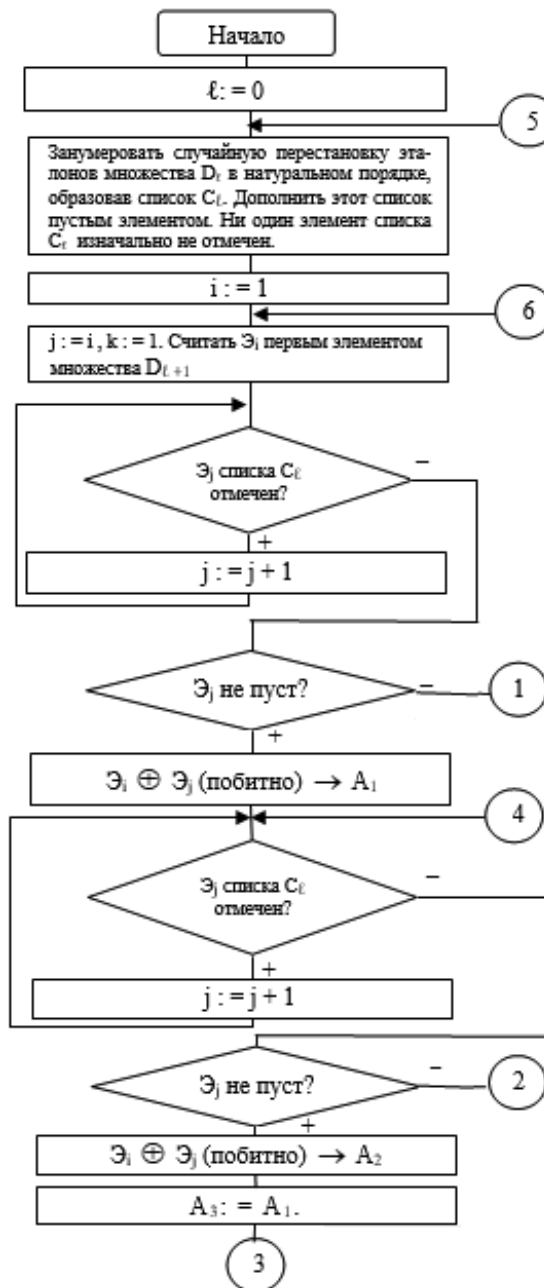


Рис. 4. Блок-схема АЛГОРИТМА

Теорема 1. Для произвольной бинарной матрицы размером $m \times n$ проведение процедуры распознавания на множестве эталонов тех же размеров по маскам, сгенерированным с использованием АЛГОРИТМА, приведет к распознаванию в этой матрице одного и только одного эталона из указанного множества.

В частности, данная теорема используется для определения стегостойкости и помехоустойчивости ассоциативной защиты.

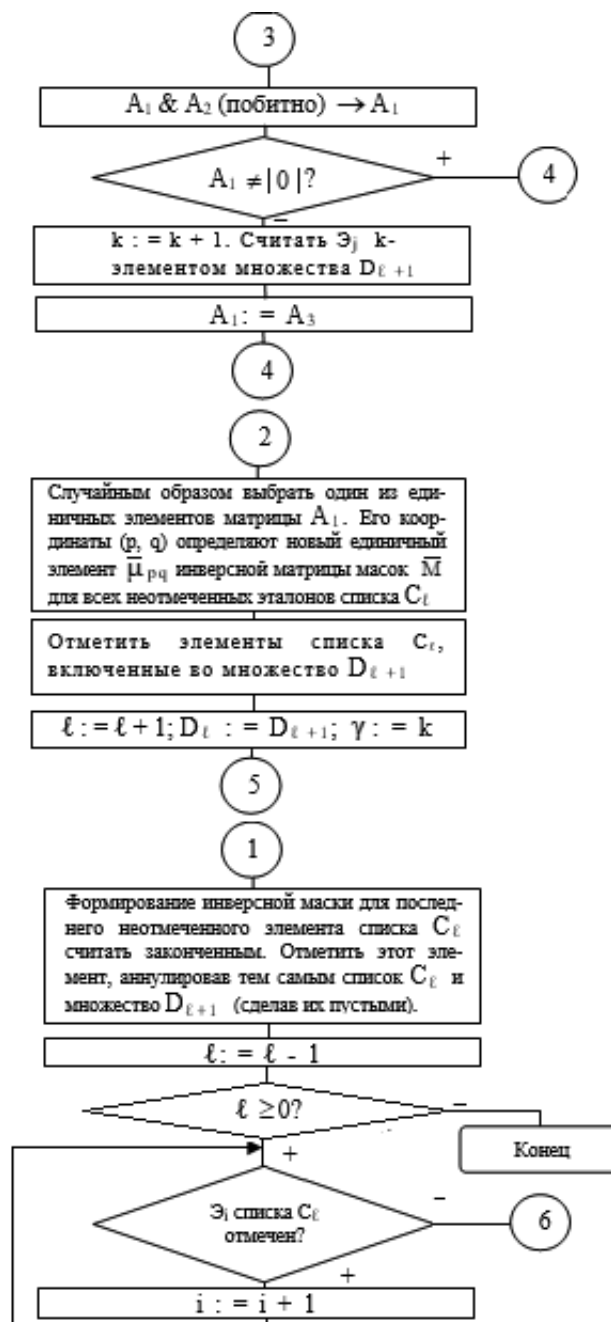


Рис. 5. Блок-схема АЛГОРИТМА (продолжение)

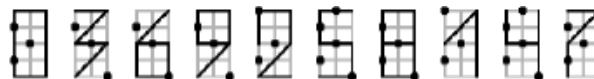


Рис. 6. Результат работы АЛГОРИТМА

2. Помехоустойчивость

При хранении и/или передаче информации возможно воздействие помех, как случайных, так и преднамеренных. Целью проведенных исследований было рассмотрение потенциальных возможностей рассматриваемого метода по противодействию указанным помехам, т. е. определение помехоустойчивости метода. Исследования проводились для трехразрядных стегоконтейнеров при $n = 60$ путем сравнения с (255, 223)-кодом Рида – Соломона [4].

Рассматривалось два случая. В первом помехам в стегоконтейнере было подвержено не более 16 байт (указанный код Рида – Соломона в этом случае позволяет скорректировать имеющиеся ошибки), во втором – более 16 байт. В результате проведенных исследований была установлена неудовлетворительная способность рассматриваемого подхода противостоять действию помех. Для повышения помехоустойчивости метода необходимо введение избыточности. При этом было предложено вводить избыточность не в передаваемое сообщение, а увеличивать число используемых ключей (наборов масок). Это означает следующее.

При погружении информации в стегоконтейнеры необходимо использовать не один, а несколько наборов масок Q (их нечетное количество). Эти же наборы масок используются и при распознавании. В случае воздействия помех результаты распознавания на этих ключах могут отличаться. За результат распознавания принимается код символа, полученный при соблюдении т. н. мажоритарного принципа, т. е. для каждого разряда стегоконтейнера за результат принимается та кодовая буква, которая была распознана не менее $(Q + 1)/2$. При несоблюдении условия устанавливается отказ от распознавания (фиксируется обнаружение ошибки).

Установлено, что на практике целесообразно использовать $Q = 7$. Указанное количество ключей позволяет не допустить прием зашумленного сообщения как истинного при искажении более 16 байт в сообщении (в отличие от рассматриваемого варианта кода Рида – Соломона) при действии как случайных, так и преднамеренных помех. Следует отметить, что для случайных помех достаточно выбора $Q = 5$. Однако, поскольку в реальных системах неизвестно, какая именно помеха будет действовать (возможно также воздействие и обеих помех), целесообразно использование семи наборов масок.

3. Стойкость ассоциативной защиты

Рассматриваются два аспекта стойкости – стего- и криптостойкость. Это обусловлено следующим. В работе [5] утверждается, что стегостойкость безусловна, если псевдослучайная последовательность (ПСП) непрерывно генерируется на множестве контейнеров. При этом увеличение совокупной длины ПСП возрастает при увеличении n , но среднее количество вкраплений остается неизменным. Однако для объемных сцен это условие не выполняется. В случае увеличения числа контейнеров значение n остается неизменным, т. е. увеличивается длина ПСП и среднее число вкраплений (они возрастают линейно). Это приводит к нарушению условия неразличимости исходного и заполненного контейнеров, т. е. необходимо проведение стегоанализа. Если по его результатам неразличимость не будет установлена, требуется проведение криптоанализа.

3.1. Стегостойкость. Стегостойкость определялась экспериментально путем применения к ПСП набора статистических тестов NIST. При успешном прохождении тестирования по NIST (по всем 15 тестам, входящим в набор), ПСП считается истинно случайной или «белой». Если хотя бы один тест не пройден,

то ПСП признается «черной». Получены оценки вероятности генерации случайных («белых») ГАММ для формирования пустых контейнеров и получения на их основе «белых» стегоконтейнеров путем вставки по маске истинной информации. По результатам проведенных экспериментов установлена безусловная стегостойкость ассоциативной защиты при произвольном выборе ГАММЫ.

Если предположить, что при передаче информации пересылки пустых и стегоконтейнеров имеют равную вероятность, то получаем равенство априорных и апостериорных вероятностей (как при передаче «белых» и «черных» ГАММ, так и при передаче соответствующих стегоконтейнеров), т. е. выполняется критерий совершенной секретности К. Шеннона. Однако его выполнение не является обязательным, т. к. выбор «белой» ГАММЫ при формировании стегоконтейнера позволяет получить безусловную стегостойкость.

Дополнительно был проведен стегоанализ при действии следующих атак на стегоконтейнер (в скобках приведены соответствующие им криптоатаки):

- А. Атака на основе известного заполненного контейнера (атака с использованием только шифртекста);
- В. Атака на основе известного встроенного сообщения (атака с использованием выбранного открытого текста);
- С. Атака разрушения или подмены скрытого сообщения.

В первом случае определяющую роль сыграло число всевозможных ключей для используемого метода. Вычислительная стойкость современных систем сокрытия информации определяется невозможностью полного перебора ключей за приемлемое время для выявления истинного ключа даже с применением суперкомпьютерных технологий. Согласно проведенной оценке числа ключей вероятность случайного подбора истинного ключа при $n = 60$ составляет 10^{-29} . Она ничтожна.

Во втором случае было проведено исследование, в котором открытый текст был представлен 10-разрядным кодом (1 2 3 4 5 6 7 8 9 0) в формате почтовых индексов. При проведении исследования считалось, что противнику известно соответствующее открытому тексту стегосообщение. При заданных условиях оценивалось количество ключей (наборов масок), которые потенциально могли быть использованы при генерации данного стегосообщения. Для этого осуществлялся поиск бит, которые могли быть использованы в качестве дихотомальных при работе АЛГОРИТМА. Эксперимент проводился при $n = 60$.

Количество найденных наборов масок (ключей) составило 10^{14} . При этом полное множество ключей – 10^{29} . Если принять время испытания одного ключа (с учетом выявления семантики кодируемых сущностей) равным 1 мкс, то полный перебор в этом случае займет более 6 лет. Тем не менее потенциально существует возможность успешного проведения данной атаки. Однако использование 10-разрядного кода маловероятно, т. к. на практике применяется существенно меньшее число разрядов. В третьем случае подмена или разрушение противником стегосообщения эквивалентны воздействию помех. Тогда использование избыточного числа ключей приведет к отказу у распознавания. Таким образом, будет детектирована попытка подмены или разрушения сообщения.

3.2. Проведенный криптоанализ. Он был ограничен случаем воздействия трех характерных криптоатак: «лобовой» (со знанием только шифртекста) и со знанием открытого текста, которые уже были рассмотрены в п. 3.1, а также на ГАММУ. В рамках атаки на ГАММУ были рассмотрены 2 вопроса: 1) можно ли при

знании отрезка ГАММЫ, примененной при создании стегоконтейнеров, сформировать ключевой набор масок; 2) какова временная сложность экспериментального определения истинной ГАММЫ при использовании ГПСП «Вихрь Мерсенна»?

Идея рассмотрения первого вопроса состояла в выявлении истинных бит и формировании матриц масок на основе найденной совокупности координат этих бит. Каждому конкретному эталону ставилась в соответствие та или иная маска из найденного набора. Установлено, что эксперимент закончится успешно при числе стегоконтейнеров, равном 33.

Получение ответа на второй вопрос связано с выявлением принципиальной возможности нахождения истинного отрезка ГАММЫ, использованного при рандомизации. Для стегоконтейнера длины L случайным образом выбиралось начальное состояние ГПСП. В сгенерированной ПСП последовательно выделялись окна длиной L со сдвигом на 1 бит. Далее выполнялась проверка истинности ГАММЫ путем ее поразрядного суммирования по модулю 2 с контейнером. Если число единиц в результате больше 24, процедура с окнами продолжалась. Иначе найденная ГАММА полагалась истинной. По алгоритму и программе, разработанным в соответствии с этой методикой, в течение суток удалось провести всего лишь $2,88 \times 10^9$ сдвигов окна. Истинной ГАММЫ выявлено не было. Поскольку длина периода использованного ГПСП равна $2^{19937} - 1$, то просмотр всех указанных окон за приемлемое время невозможен.

Таким образом, проведенные исследования позволяют установить доказуемую стойкость ассоциативного подхода. Данное свойство ранее было установлено только для шифрования методом гаммирования.

Заключение

В статье дано понятие ассоциативной защиты, рассмотрен АЛГОРИТМ маскирования, сформулирована теорема, положенная в основу всего ассоциативного подхода. Приведены результаты исследований по помехоустойчивости к действию случайных и преднамеренных помех, а также по стего- и криптостойкости.

Практическое применение ассоциативного подхода возможно для защиты данных картографии и текстовых сцен [6, 7]. Мыслимы и иные сферы применения.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1976. 511 с.
2. Коржик В.И., Небаева К.А., Алексеев М. Использование модели канала с шумом для построения стegosистемы // Телекоммуникации. 2013. № S7. С. 33–36.
3. Райхлин В.А., Вершинин И.С., Глебов Е.Е. К решению задачи маскирования стилизованных двоичных изображений // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 2001. № 1. С. 42–47.
4. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. М.: Техносфера, 2006. 320 с.
5. Ker D.A. A capacity result for batch steganography // IEEE Signal Process. Lett. 2007. V. 14, No 8. P. 525–528. <https://doi.org/10.1109/LSP.2006.891319>.
6. Raikhlin V.A., Verzhinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. Reliable recognition of masked binary matrices. Connection to information security in map systems // Lobachevskii J. Math. 2013. V. 34, No 4. P. 319–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080213040112>.

7. *Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A.* Associative steganography of text messages // *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.* 2021. V. 45, No 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.3103/S0278641921010076>.

Поступила в редакцию 23.06.2024

Принята к публикации 15.08.2024

Вершинин Игорь Сергеевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой компьютерных систем

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева-КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: ISVershinin@kai.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 320–330

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.320-330

Elements of the Theory of Associative Information Protection

I.S. Vershinin

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*

E-mail: ISVershinin@kai.ru

Received June 23, 2024; Accepted August 15, 2024

Abstract

This article explores elements of the theory of a new scientific field – associative protection of information during storage and transmission. The approach under study is shown to enhance the level of protection and noise immunity in scene analysis.

Keywords: associative protection, scene analysis, noise immunity, cryptoresistance, stego-resistance

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Entry structure in the scene data table.

Fig. 2. The digit 9.

Fig. 3. Significant bits.

Fig. 4. Block diagram of the ALGORITHM.

Fig. 5. Block diagram of the ALGORITHM (continued from Fig. 4).

Fig. 6. Result of the ALGORITHM.

References

1. Duda R., Hart P. *Raspoznavanie obrazov i stsen* [Pattern Classification and Scene Analysis]. Moscow, Mir, 1976. 511 p. (In Russian)
2. Korzhik V.I., Nebaeva K.A., Alekseev M. Using the noisy channel model for stegosystem design. *Telekommunikatsii*, 2013, no. S7, pp. 33–36. (In Russian)
3. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Glebov E.E. On solving the problem of masking of conventionalized dual images. *Vestn. KGTU im. A.N. Tupoleva*, 2001, no. 1, pp. 42–47. (In Russian)
4. Morelos-Zaragoza R. *Iskusstvo pomekhoustoichivogo kodirovaniya* [The Art of Error Correcting Coding]. Moscow, Tekhnosfera, 2006. 320 p. (In Russian)
5. Ker D.A. A capacity result for batch steganography. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2007, vol. 14, no. 8, pp. 525–528. <https://doi.org/10.1109/LSP.2006.891319>.
6. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. Reliable recognition of masked binary matrices. Connection to information security in map systems. *Lobachevskii J. Math.*, 2013, vol. 34, no. 4, pp. 319–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080213040112>.
7. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A. Associative steganography of text messages. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2021, vol. 45, no. 1, pp. 1–11. <https://doi.org/10.3103/S0278641921010076>.

⟨ **Для цитирования:** Вершинин И.С. Элементы теории ассоциативной защиты информации // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 320–330. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.320-330>. ⟩

⟨ **For citation:** Vershinin I.S. Elements of the theory of associative information protection. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 320–330. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.320-330>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.546: 534.1

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.331-342

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ С ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ ЗОНОЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

А.А. Губайдуллин, О.Ю. Болдырева, Д.Н. Дудко

*Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, 625026, Россия*

Аннотация

Численно исследовано распространение волны сжатия в пористой среде, содержащей трещиновато-пористую зону. Исследование проведено с использованием двухскоростной модели пористой среды и трехскоростной модели трещиновато-пористой среды. Задача исследована в двумерной постановке. Рассмотрены случаи, когда пористая среда имеет свободную поверхность или является неограниченной. Трещиновато-пористая зона имеет границу в форме эллипса или прямоугольника. Изучено влияние таких неоднородностей на картину распространения возмущений давления.

Ключевые слова: пористая среда, трещиновато-пористая зона, волна, отражение

Введение

Нефтяные пласты могут иметь зонально-неоднородную структуру. Наличие трещиноватых зон может усложнять разработку таких месторождений. Для выявления трещиноватых зон могут применяться волновые методы. В связи с этим актуальной является задача компьютерного моделирования распространения волн в пористой среде, содержащей трещиновато-пористые зоны.

Взаимодействие волн давления с границами между флюидом/твердым телом и пористой/трещиновато-пористой средой, между пористой и трещиновато-пористой средами изучались ранее в ряде работ [1–6]. При этом исследовались процессы отражения и прохождения на границах сред при нормальном и наклонном падении. Однако случай границы с трещиновато-пористой средой рассматривался лишь в трех работах.

В [7] рассмотрены характеристики плоской быстрой продольной волны в пористой среде при падении на границу со средой с двойной пористостью в зависимости от частоты и угла падения. Используются граничные условия – открытые поры и закрытые поры. Показано сильное влияние граничных условий на характеристики коэффициентов отражения и прохождения.

В [8] получены и проанализированы коэффициенты отражения и прохождения при падении плоской гармонической волны из упругого тела в среду с двойной пористостью.

Численное исследование прохождения и отражения волны сжатия в пористой среде от плоского слоя трещиновато-пористой среды при нормальном и наклонном падении выполнено в [9].

Во всех указанных работах процессы изучались для случая плоской границы. В случае криволинейных границ между средами процессы отражения/прохождения волн становятся более сложными, и такие задачи практически не изучены. В настоящей работе рассмотрено распространение волны сжатия в пористой среде с трещиновато-пористой зоной в форме эллипса или прямоугольника и исследованы особенности волновых процессов.

1. Математическая модель

Уравнения движения трещиновато-пористой среды в рамках модели с тремя скоростями и тремя давлениями [10] представлены ниже. При отсутствии трещин эта система сводится к системе уравнений обычной пористой среды с упругим скелетом [11].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla^i(\rho_s v_s^i) &= 0, \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla^i(\rho_f v_f^i) = -q, \quad \frac{\partial \rho_{fr}}{\partial t} + \nabla^i(\rho_{fr} v_{fr}^i) = q, \\ \rho_s \frac{d_s v_s^k}{dt} &= -\alpha_s \nabla^k p_l + \nabla^i \sigma_{s*}^{ik} + F_f^k + F_{fr}^k, \\ \rho_f \frac{d_f v_f^k}{dt} &= -\alpha_f \nabla^k p_f - F_f^k - v_f^k q, \quad \rho_{fr} \frac{d_{fr} v_{fr}^k}{dt} = -\alpha_{fr} \nabla^k p_{fr} - F_{fr}^k + v_{fr}^k q, \end{aligned}$$

где ρ_j , v_j и α_j – приведенная плотность, скорость и объемное содержание j -й фазы. Индексы s относятся к параметрам скелета, f – к параметрам жидкости в порах, fr – к параметрам жидкости в трещинах; p_l – усредненное по объему (по порам и трещинам) давление жидкости; σ_{s*} , p_f и p_{fr} – эффективное напряжение в скелете и давление жидкости в порах и трещинах соответственно; q – интенсивность обмена жидкостью между порами и трещинами, k_f – проницаемость системы пор, a_{*j} – характерный размер пор или трещин, a_b – радиус пористых блоков, μ_f – динамическая вязкость жидкости;

$$q = \zeta \frac{\rho_{f0} k_f}{\mu_f} \frac{p_f - p_{fr}}{a_b^2}, \quad k_f = \frac{\alpha_f a_{*f}^2}{\alpha_s \eta_{\mu f}}, \quad p_l = \frac{\alpha_f p_f + \alpha_{fr} p_{fr}}{\alpha_f + \alpha_{fr}}.$$

Силы взаимодействия между скелетом и жидкостью в порах F_f и между скелетом и жидкостью в трещинах F_{fr} приняты в виде суммы сил присоединенных масс F_{mj} и вязкого трения $F_{\mu j}$:

$$\begin{aligned} F_f &= F_{mf} + F_{\mu f}, \quad F_{fr} = F_{mfr} + F_{\mu fr}, \\ F_{mf} &= \frac{1}{2} \eta_{mf} \alpha_s \alpha_f \rho_{f0} \left(\frac{d_f v_f}{dt} - \frac{d_s v_s}{dt} \right), \quad F_{\mu f} = \eta_{\mu f} \alpha_s \alpha_f \mu_f a_{*f}^{-2} (v_f - v_s), \\ F_{mfr} &= \frac{1}{2} \eta_{mfr} \alpha_s \alpha_{fr} \rho_{f0} \left(\frac{d_{fr} v_{fr}}{dt} - \frac{d_s v_s}{dt} \right), \quad F_{\mu fr} = \eta_{\mu fr} \alpha_s \alpha_{fr} \mu_{fr} a_{*fr}^{-2} (v_{fr} - v_s), \end{aligned}$$

где ρ_j^0 – истинная плотность j -фазы, нижний индекс 0 обозначает невозмущенное значение параметра, η_{mj} и $\eta_{\mu j}$ – безразмерные коэффициенты взаимодействия фаз, зависящие от структуры среды.

Скелет пористой среды полагается упругим:

$$\begin{aligned} \sigma_{s*}^{ki} &= \alpha_s (\lambda_* \epsilon_s^{mm} \delta^{ki} + 2\mu_* \epsilon_s^{ki} + \nu_* p_l \delta^{ki}), \quad \frac{d_s \epsilon_s^{ki}}{dt} = \frac{1}{2} (\nabla^k v_s^i + \nabla^i v_s^k), \\ \lambda_* &= (1 - \eta) \lambda_{*f} + \eta \lambda_{*fr}, \quad \mu_* = (1 - \eta) \mu_{*f} + \eta \mu_{*fr}, \quad \nu_* = \frac{\lambda_* + \frac{2}{3} \mu_*}{K_s}, \end{aligned}$$

$$\eta = \left[1 + \frac{\alpha_f \nu_{*fr}}{\alpha_{fr} \nu_{*f}}\right]^{-1}, \quad \nu_{*j} = \frac{\lambda_{*j} + \frac{2}{3}\mu_{*j}}{K_s}, \quad j = f, fr,$$

где ϵ_s – деформации скелета трещиновато-пористой среды, λ_* и μ_* – модули упругости.

Уравнение состояния для каждой из фаз принято в акустическом приближении

$$p_s - p_{s0} = K_s(\rho_s^\circ - \rho_{s0}^\circ)/\rho_{s0}^\circ, \quad p_f - p_{f0} = K_f(\rho_f^\circ - \rho_{f0}^\circ)/\rho_{f0}^\circ, \quad p_{fr} - p_{fr0} = K_f(\rho_{fr}^\circ - \rho_{f0}^\circ)/\rho_{f0}^\circ,$$

где p_s – истинное давление в твердой фазе, K_s и K_f – объемные модули упругости для материала скелета и флюида.

Для замыкания системы уравнений использованы соотношения между истинными давлениями в фазах p_f, p_{fr}, p_s и эффективным давлением в скелете p_{s*} , соотношение между истинной и приведенной плотностями, а также уравнение для изменения пористости внутри пористого блока

$$p_{s*} = \alpha_s(p_s - p_l), \quad p_{s*} = -\frac{1}{3}\sigma_{s*}^{mm},$$

$$p_j = \alpha_j \rho_j^\circ, \quad j = s, f, fr, \quad \alpha_s + \alpha_f + \alpha_{fr} = 1,$$

$$\frac{\alpha_s - \alpha_{s0}}{\alpha_{s0}} + \frac{\alpha_{fr} - \alpha_{fr0}}{1 - \alpha_{fr0}} \nu_{*f} = (1 - \nu_{*f}) \left[\frac{\rho_s - \rho_{s0}}{\rho_{s0}} - \frac{p_f - p_{f0}}{K_s} \right].$$

Полное напряжение σ в среде связано с эффективным напряжением σ_{s*} в скелете и изменением среднего давления $\Delta p_l = p_l - p_0$ следующим образом: $\sigma^{ik} = \sigma_{s*}^{ik} - \delta^{ik} \Delta p_l$.

2. Результаты расчетов

Задачу о распространении возмущения давления в пористой среде с включением трещиновато-пористой зоны рассмотрим в двумерной постановке. Схема расчетной области представлена на рис. 1. Расчеты проводились для включений трещиновато-пористой среды в форме эллипса и прямоугольника. На границе между пористой и трещиновато-пористой средами принималось условие «открытые поры», т.е. условие непрерывности потока жидкости, давлений и нормальных к границе компонент полного напряжения.

Для компьютерной реализации дифференциальных уравнений математической модели был использован метод Мак-Кормака [12], модифицированный применительно к волновым процессам в пористой и трещиновато-пористой средах [13, 14]. Данный метод относится к методам сквозного счета, и указанные выше кинематические и динамические условия на границах выполняются автоматически.

Расчетная область была прямоугольной, $0 < x < x_{max}$, $0 < z < z_{max}$.

Были рассмотрены два варианта пористой среды: пористая среда является неограниченной или имеет свободную поверхность. Соответственно, задавались два варианта условий на границе расчетной области:

1. На всех границах $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$, где $W = \{\rho_j, v_j^x, v_j^z, \dots\}$ ($j = s, f, fr$) – вектор рассчитываемых значений, n – нормаль к границе;

2. $z = 0$ является свободной поверхностью, т.е. при $z = 0$ выполняется $p_f - p_0 = 0$, $p_{fr} - p_0 = 0$, $\sigma^{zz} = \sigma^{xz} = 0$, при $z = 0$ для остальных компонент W выполняется $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$; на остальных границах $\frac{\partial W}{\partial n} = 0$ для всех компонент W . В начальный момент времени среда покоилась. Возмущение создавалось источником жидкости

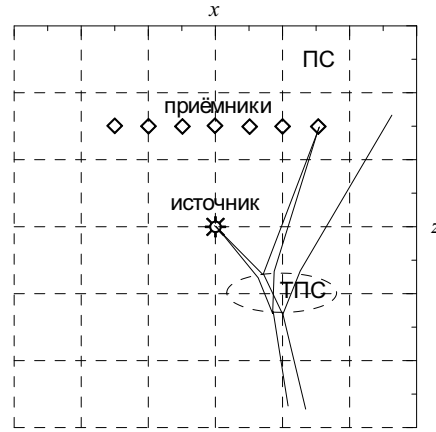


Рис. 1. Схема задачи о распространении возмущения в пористой среде с трещиновато-пористым включением

конечной длительности, расположенным при $|x - x_s| < r_s, |z - z_s| < r_s$. В расчетах для этого в уравнение баланса флюида вводился источниковый член J ,

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla^i(\rho_f v_f^i) = -q + J, \quad J = \begin{cases} \rho_{f0}^o \frac{d\phi}{dt}, & |x - x_s| \leq r_s \quad \text{и} \quad |z - z_s| \leq r_s, \\ 0, & |x - x_s| \geq r_s \quad \text{и/или} \quad |z - z_s| \geq r_s, \end{cases}$$

$\phi(t)$ – объем жидкости, закачанный за время t и отнесенный к объему зоны источника,

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ A(1 - \cos \frac{\pi t}{t_s})/2, & 0 \leq t \leq t_s, \\ A, & t > t_s. \end{cases}$$

В представленных далее расчетах были использованы следующие значения параметров пористой и трещиновато-пористой сред.

Характеристики пористой среды: $\alpha_f = 0.2$, $a_{*f} = 0.05$ мм, $\eta_{mf} = 1$, $\eta_{\mu f} = 50$, $\lambda_{*f} = \mu_{*f} = 8$ ГПа.

Характеристики трещиновато-пористой среды: $\alpha_f = 0.29$, $a_{*f} = 0.05$ мм, $\eta_{mf} = 1$, $\eta_{\mu f} = 50$, $\lambda_{*f} = \mu_{*f} = 8$ ГПа, $\alpha_{fr} = 0.01$, $a_{*fr} = 0.5$ мм, $a_b = 148.5$ мм, $\eta_{mfr} = 1$, $\eta_{\mu fr} = 10$, $\lambda_{*fr} = \mu_{*fr} = 1$ ГПа, $\zeta = 0.01$, $\eta = 0.22$, $\lambda_* = \mu_* = 6.49$ ГПа.

Рассмотрим случай неограниченной пористой среды с эллиптической зоной трещиновато-пористой среды. Пусть расчетная область занимает пространство $0 < z < 6$ м, $0 < x < 6$ м. Эллиптическая зона имеет центр $x = 2$ м, $z = 4$ м и полуоси $a_x = 0.5$ м, $a_z = 0.2$ м (рис. 1). Датчики давления расположены на линии $z = 2$ м в точках с координатами $x = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5$ м, источник возмущения давления имеет координаты $x_s = 3$ м, $z_s = 3$ м, размер $r_s = 2$ см и длительность воздействия $t_s = 0.05$ мс с амплитудой $A = 10$. Формирующаяся при таком воздействии волна является радиально-симметричной, имеет основную фазу сжатия длительности t_s и последующую фазу разрежения.

Были исследованы распространение волны давления в пористой среде и ее взаимодействие с трещиновато-пористой зоной. В качестве иллюстрации полученных результатов на рис. 2 для нескольких моментов времени показаны поля среднего полного напряжения $-\sigma$ (где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma^{xx} + \sigma^{yy} + \sigma^{zz})$), а на рис. 3 приведены расчетные осциллограммы, записанные на указанных выше датчиках.

Видно (рис. 2), что в результате воздействия источника возмущения в пористой среде формируются быстрая (деформационная) и медленная (фильтрационная) волны, распространяющиеся с радиальной симметрией, при этом медленная волна характеризуется значительным затуханием. Далее, при взаимодействии быстрой волны с трещиновато-пористой зоной образуются отраженные и прошедшие волны. После прохождения быстрой волной всего участка трещиновато-пористой среды наблюдаются две выраженные отраженные волны, имеющие форму окружностей. При этом центры окружностей соответствуют первой и последней точкам прохождения быстрой волной трещиновато-пористой зоны.

Для более детального анализа построенной волновой картины были рассчитаны профили полного напряжения на ряде приемников (рис. 1), результат расчета представлен на рис. 3. На графиках видны проходящая быстрая волна, а затем несколько отраженных волн значительно меньшей амплитуды. Медленная волна не наблюдается. Справа показаны отраженные волны более детально – в более крупном масштабе. Первое отражение происходит с инверсией фазы, так как в данном случае трещиновато-пористая среда является акустически более мягкой по сравнению с пористой средой. Так как граница между ними криволинейная, то при взаимодействии исходного импульса с этой зональной неоднородностью возникает сложная интерференционная картина как внутри этой зоны, так и снаружи – в окружающей пористой среде.

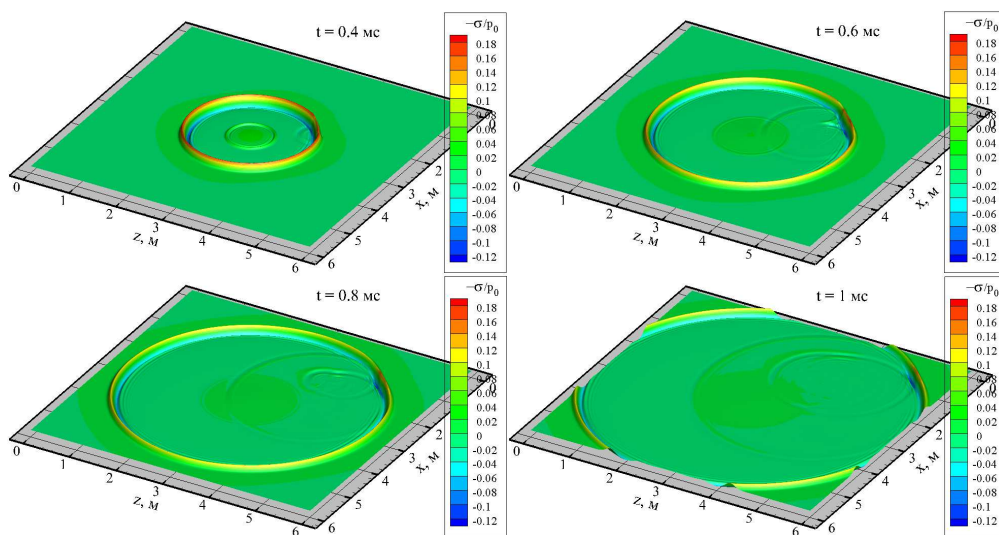


Рис. 2. Поля безразмерного полного напряжения при распространении волны сжатия в пористой среде с трещиновато-пористым включением в моменты времени $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ мс

В наземной сейсморазведке источники и приемники колебаний обычно размещаются на поверхности земли. В связи с этим представляет также интерес исследование распространения возмущения в области со свободной поверхностью.

Пусть расчетная область – прямоугольник $0 < x < 9$ м, $0 < z < 4$ м. Граница $z = 0$ является свободной поверхностью. Эллиптическая трещиновато-пористая зона имеет центр с координатами $x = 4$ м, $z = 2$ м и полуоси $a_x = 0.5$ м, $a_z = 0.2$ м. Координаты и размер источника равны $x_s = 3$ м, $z_s = 0.05$ м, $r_s = 2$ см. Длительность, амплитуда воздействия и $\phi(t)$ те же, что и в расчетах к рис. 2 и 3.

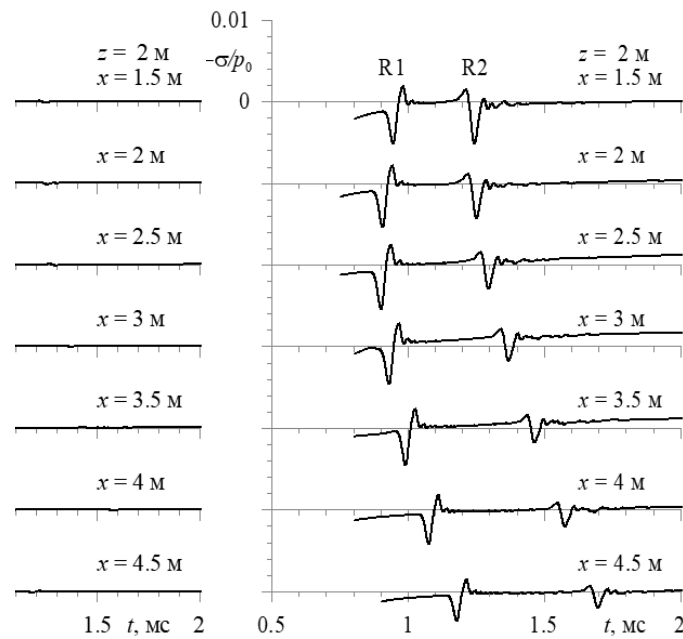


Рис. 3. Слева: расчетные осциллограммы безразмерного полного напряжения в пористой среде, содержащей трещиновато-пористое включение, для ряда точек выше источника. Справа: эти же графики, показаны отраженные волны (R1, R2) в увеличенном масштабе

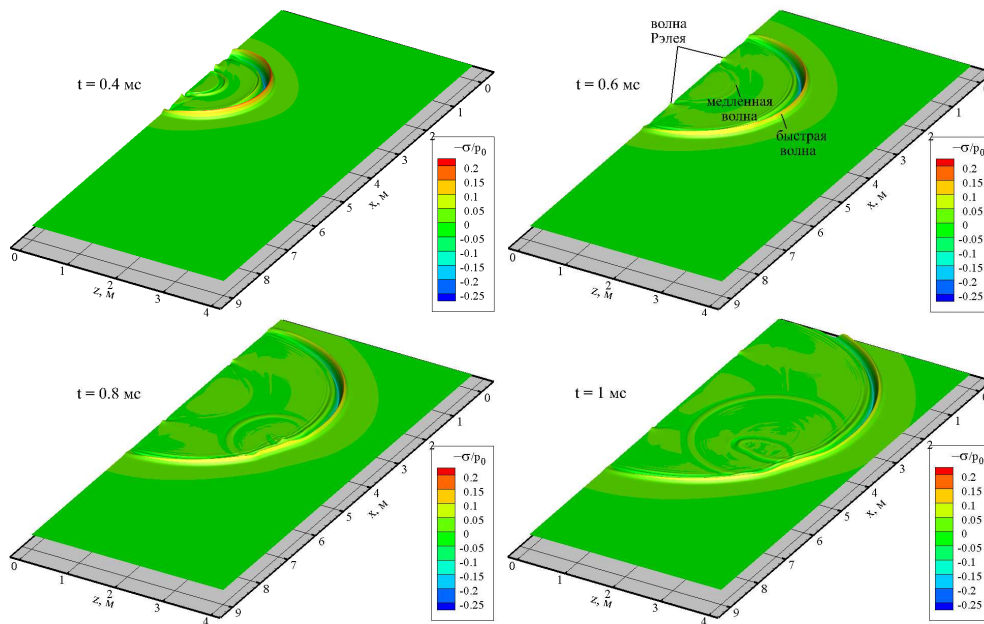


Рис. 4. Поля безразмерного полного напряжения при распространении волны сжатия в пористой среде с трещиновато-пористым включением в моменты времени $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ мс; граница $z = 0$ является свободной поверхностью

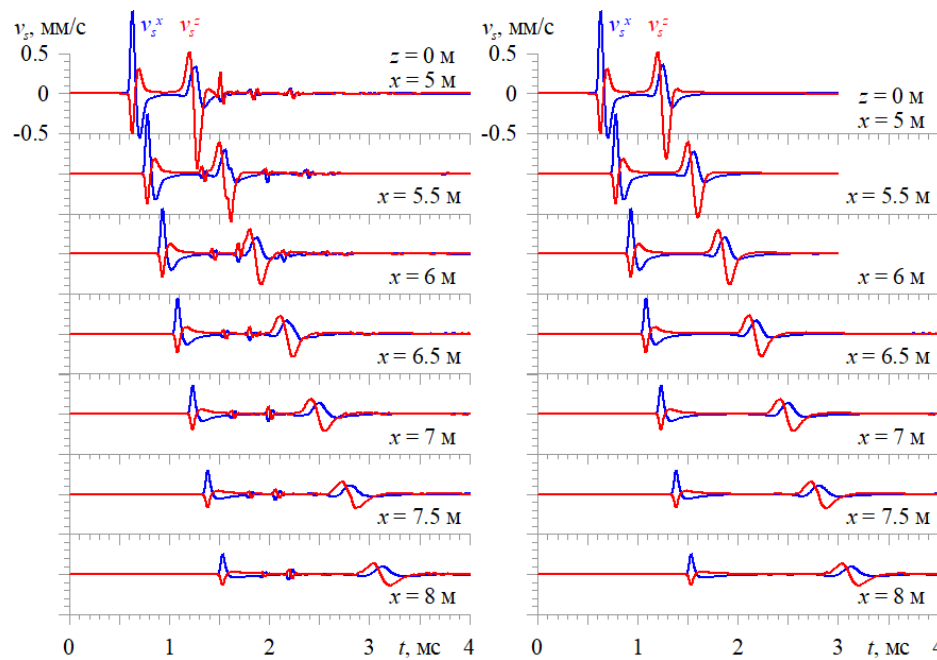


Рис. 5. Изменение компонент скоростей частиц скелета пористой среды v_s^x, v_s^z в ряде точек на свободной поверхности $z = 0$ для пористой среды с трещиновато-пористым включением (слева) и для однородной пористой среды (справа)

Были рассчитаны распространение импульса давления в пористой среде и ее взаимодействие с трещиновато-пористой зоной. В качестве иллюстрации полученных результатов на рис. 4 для нескольких моментов времени показаны поля среднего полного напряжения, а на рис. 5 приведены профили компонент скоростей частиц скелета пористой среды в ряде точек на свободной поверхности. Видно (рис. 4), что формируются быстрая и медленная волны, при этом отраженная от свободной поверхности быстрая волна почти не заметна. В отличие от случая неограниченной пористой среды образуется поверхностная волна Рэлея, скорость которой близка к скорости поперечной волны в пористой среде. Заметим, что рассчитанные по дисперсионным соотношениям скорости волн в данной пористой среде составляют $C_{l1} = 3200$ м/с, $C_{l2} = 1148$ м/с для продольных быстрой и медленной волн, $C_t = 1712$ м/с для поперечной волны. На рис. 4 для момента времени $t = 0.6$ мс стрелками указаны продольные быстрая и медленная волны, а также поверхностная волна Рэлея. Поверхностная волна Рэлея принципиально отличается от объемных волн тем, что возмущение в ней сосредоточено лишь вблизи поверхности, что и наблюдается на рис. 4.

Поверхностная волна в среде может образоваться при условии, что источник возмущения расположен близко к свободной поверхности, в пределах пространственной протяженности образовавшейся радиальной продольной волны. В данной пористой среде и при таком воздействии (впрыск флюида длительности $t_s = 0.05$ мс) формируется осесимметричное возмущение длительности $2t_s = 0.1$ мс с фазой сжатия и последующей фазой разрежения. При этом пространственная протяженность возмущения составляет $C_{l1} \cdot 2t_s \approx 0.32$ м, а расстояние от источника возмущения до границы – 0.05 м. Таким образом, условия для формирования поверхностной волны выполняются.

Для анализа влияния трещиновато-пористой зоны на процесс распространения возмущения были проведены расчеты в однородной пористой среде без трещиновато-пористой зоны. На рис. 5 показано изменение компонент скоростей частиц скелета пористой среды v_s^x, v_s^z в ряде точек на свободной поверхности $z = 0$ для пористой среды с трещиновато-пористой зоной (слева) и для однородной пористой среды (справа).

Для однородной пористой среды на графиках v_s^x, v_s^z (рис. 5, справа) присутствуют быстрая продольная и поверхностная волны, других волн нет. При прохождении первой, продольной волны, компоненты скорости $v_s^x(t), v_s^z(t)$ изменяются одновременно. При прохождении второй, поверхностной волны, сначала изменяется v_s^z , затем при максимальном значении v_s^z начинается изменение v_s^x , т.е. движение частиц скелета происходит по эллипсу, как это и наблюдается в поверхностных волнах Рэлея. В среде с трещиновато-пористой зоной кроме этих волн также хорошо заметны отраженные и переотраженные от границы с эллиптической зоной волны (рис. 5, слева). В данном расчете временные интервалы между вступлениями отраженных волн для каждой из точек наблюдения составляют около 0.25 – 0.3 мс, что хорошо соотносится с удвоенным временем пробега продольной волной трещиновато-пористого участка (скорость быстрой волны в трещиновато-пористой среде $C_{II} = 2900$ м/с, а оси эллипса равны 1 м и 0.4 м).

Кроме того, для обоих вариантов пористой области было исследовано влияние размеров и формы трещиновато-пористой зоны на поведение волн. Для этого сравнивались соответствующие расчетные осциллограммы, записанные на датчиках-приемниках. Установлено, что при изменении размеров включения пропорционально изменяются временные интервалы между отраженными волнами, а незначительное изменение формы включений несущественно влияет на сигнал, полученный на приемниках. Здесь можно увидеть аналогию с волнами на воде, возникающими от предмета, брошенного в воду. По воде распространяются круги независимо от формы предмета.

Заключение

Численно исследовано распространение волны сжатия в пористой среде, содержащей трещиновато-пористую зону. Исследование проведено с использованием двухскоростной модели пористой среды и трехскоростной модели трещиновато-пористой среды. Задача исследована в двумерной постановке. Рассмотрены случаи, когда пористая среда имеет свободную поверхность или является неограниченной, а трещиновато-пористая зона имеет границу в форме эллипса или прямоугольника. На границе пористой и трещиновато-пористой сред задавалось граничное условие «открытые поры». Проанализированы картины распространения волн в ситуациях, когда точечный источник возмущения расположен внутри расчетной области либо вблизи свободной поверхности. Для компьютерной реализации дифференциальных уравнений математической модели использован метод Мак-Кормака, модифицированный применительно к волновым процессам в пористой и трещиновато-пористой средах. Изучено влияние трещиновато-пористых зон на картину распространения возмущений давления в пористой среде. Сравнение полученных расчетных данных со случаем однородной пористой среды позволило выявить на численных осциллограммах отраженные от включения волны. Выявлены особенности волновых процессов. Установлено, что при изменении размеров включения пропорционально изменяются временные интервалы между отраженными волнами, а изменение формы включений несущественно влияет на рассчитанный сигнал в приемниках.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания № 124021500017-5.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Denneman A.I.M., Drijkoningen G.G., Smeulders D.M.J., Wapenaar K.* Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface // *Geophysics*. 2002. V. 67, No 1. P. 282–291. <https://doi.org/10.1190/1.1451800>.
2. *Fellah Z.E., Berger S., Lauriks W., Depollier C., Aristegui C., Chapelon J.-Y.* Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No 5. P. 2424–2433. <https://doi.org/10.1121/1.1567275>.
3. *Kumar R., Kumar S., Miglani A.* Reflection and transmission of plane waves between two different fluid-saturated porous half-spaces // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2011. V. 52, No 5. P. 773–782. <https://doi.org/10.1134/S0021894411050129>.
4. *Гималтдинов И.К., Ситдикова Л.Ф.* Динамика звуковых волн при наклонном падении на границу “пористая среда – газ” // *Вестн. ТюмГУ. Сер.: Физ.-мат. модел. Нефть, газ, энерг.* 2015. Т. 1, № 2 (2). С. 112–123.
5. *Gimaltdinov I.K., Sitdikova L.F., Dmitriev V.L., Levina T.M., Khabeev N.S., Wanqing S.* Reflection of acoustic waves from a porous material at oblique incidence // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2017. V. 90, No 5. P. 1043–1052. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1655-1>.
6. *Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N.* Compression pulse propagation in fractured porous medium // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 11. P. 4987–4993. <https://doi.org/10.1134/S1995080223110161>.
7. *Dai Z.-J., Kuang Z.-B., Zhao S.-X.* Reflection and transmission of elastic waves from the interface of a fluid-saturated porous solid and a double porosity solid // *Transp. Porous Media.* 2006. V. 65, No 2. P. 237–264. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-6084-5>.
8. *Kumar M., Barak M.S., Kumari M.* Reflection and refraction of plane waves at the boundary of an elastic solid and double-porosity dual-permeability materials // *Pet. Sci.* 2019. V. 16, No 2. P. 298–317. <https://doi.org/10.1007/s12182-018-0289-z>.
9. *Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N.* Wave interaction with fractured porous layer in porous medium // *Lobachevskii J. Math.* 2024. V. 45, No 5. P. 1971–1979. <https://doi.org/10.1134/S1995080224602145>.
10. *Gubaidullin A.A., Kuchugurina O.Yu.* Propagation of weak perturbations in cracked porous media // *J. Appl. Math. Mech.* 1999. V. 63, No 5. P. 769–777. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00097-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00097-0).
11. *Nigmatulin R.I.* Dynamics of Multiphase Media. V. 1. CRC Press, 1990. 532 p.
12. *MacCormack R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *Proc. AIAA Hypervelocity Impact Conf. AIAA Paper 69-354*, 1969.
13. *Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N.* Numerical simulation of wave propagation in a fractured porous medium // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 12. P. 3471–3477. <https://doi.org/10.1134/S1995080222150094>.
14. *Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N.* Approach to the numerical study of wave processes in a layered and fractured porous media in a two-dimensional formulation // *Mathematics*, 2023, V. 11, No 1. Art. 227. <https://doi.org/10.3390/math11010227>.

Поступила в редакцию 16.06.2024

Принята к публикации 18.07.2024

Губайдуллин Амир Анварович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук
ул. Таймырская, д. 74, а/я 1507, г. Тюмень, 625026, Россия
E-mail: *a.a.gubaidullin@yandex.ru*

Болдырева Ольга Юрьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук
ул. Таймырская, д. 74, а/я 1507, г. Тюмень, 625026, Россия
E-mail: *olga.boldyreva@mail.ru*

Дудко Дина Николаевна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук
ул. Таймырская, д. 74, а/я 1507, г. Тюмень, 625026, Россия
E-mail: *d_dina@bk.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 331–342

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.331-342

Pressure Wave Interaction with Fractured Porous Zone in Porous Medium

A.A. Gubaidullin, O.Yu. Boldyreva**, D.N. Dudko****

*Tyumen Branch of Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Tyumen, 625026 Russia*

E-mail: **a.a.gubaidullin@yandex.ru, **olga.boldyreva@mail.ru, ***d_dina@bk.ru*

Received June 16, 2024; Accepted July 18, 2024

Abstract

The propagation of a pressure wave in a porous medium with a fractured porous zone was numerically investigated. The study used a two-velocity model of a porous medium and a three-velocity model of a fractured porous medium. The problem was examined in a two-dimensional formulation, considering cases when a porous medium has a free surface or is unbounded. The fractured porous zone was shown to have either an ellipse- or rectangle-shaped boundary. The influence of such inhomogeneities on the propagation of pressure perturbations was analyzed.

Keywords: porous medium, fractured porous zone, waves, reflection

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under state assignment no. 124021500017-5.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Schematic representation of the problem of the propagation of perturbations in a porous medium with a fractured porous zone.

Fig. 2. Fields of dimensionless total stress during the propagation of a pressure wave in a medium with a fractured porous zone at time points $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ms.

Fig. 3. On the left: calculated waveforms of dimensionless total stress in a porous medium with a fractured porous zone, for a number of points above the source. On the right: the same waveforms showing the reflected waves (R1, R2) in enlarged scale.

Fig. 4. Fields of dimensionless total stress during the propagation of a pressure wave in a medium with a fractured porous zone at time points $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ ms; the boundary $z = 0$ is a free surface.

Fig. 5. Changes in the components of particle velocities within the porous medium skeleton, v_s^x and v_s^z , at certain points on the free surface $z = 0$ for a porous medium with a fractured porous zone (on the left) and for a homogeneous porous medium (on the right).

References

1. Denneman A.I.M., Drijkoningen G.G., Smeulders D.M.J., Wapenaar K. Reflection and transmission of waves at a fluid/porous-medium interface. *Geophysics*, 2002, vol. 67, no. 1, pp. 282–291. <https://doi.org/10.1190/1.1451800>.
2. Fellah Z.E., Berger S., Lauriks W., Depollier C., Aristegui C., Chapelon J.-Y. Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 113, no. 5, pp. 2424–2433. <https://doi.org/10.1121/1.1567275>.
3. Kumar R., Kumar S., Miglani A. Reflection and transmission of plane waves between two different fluid-saturated porous half-spaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, no. 5, pp. 773–782. <https://doi.org/10.1134/S0021894411050129>.
4. Gimaltdinov I.K., Sitdikova L.F. The dynamics of the sound waves at oblique incidence on the border “porous medium–gas”. *Vestn. TyumGU. Ser.: Fiz.-Mat. Model. Neft', Gaz, Energ.*, 2015, vol. 1, no. 2 (2), pp. 112–123. (In Russian)
5. Gimaltdinov I.K., Sitdikova L.F., Dmitriev V.L., Levina T.M., Khabeev N.S., Wanqing S. Reflection of acoustic waves from a porous material at oblique incidence. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2017, vol. 90, no. 5, pp. 1043–1052. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1655-1>.
6. Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N. Compression pulse propagation in fractured porous medium. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 11, pp. 4987–4993. <https://doi.org/10.1134/S1995080223110161>.
7. Dai Z.-J., Kuang Z.-B., Zhao S.-X. Reflection and transmission of elastic waves from the interface of a fluid-saturated porous solid and a double porosity solid. *Transp. Porous Media*, 2006, vol. 65, no. 2, pp. 237–264. <https://doi.org/10.1007/s11242-005-6084-5>.
8. Kumar M., Barak M.S., Kumari M. Reflection and refraction of plane waves at the boundary of an elastic solid and double-porosity dual-permeability materials. *Pet. Sci.*, 2019, vol. 16, no. 2, pp. 298–317. <https://doi.org/10.1007/s12182-018-0289-z>.
9. Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N. Wave interaction with fractured porous layer in porous medium. *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 5, pp. 1971–1979. <https://doi.org/10.1134/S1995080224602145>.
10. Gubaidullin A.A., Kuchugurina O.Yu. Propagation of weak perturbations in cracked porous media. *J. Appl. Math. Mech.*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 769–777. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(99\)00097-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00097-0).
11. Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. Vol. 1. CRC Press, 1990. 532 p.

12. MacCormack R.W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *Proc. AIAA Hypervelocity Impact Conf.* AIAA Paper 69-354, 1969.
13. Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N. Numerical simulation of wave propagation in a fractured porous medium. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 12, pp. 3471–3477. <https://doi.org/10.1134/S1995080222150094>.
14. Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N. Approach to the numerical study of wave processes in a layered and fractured porous media in a two-dimensional formulation. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 1, art. 227. <https://doi.org/10.3390/math11010227>.

Для цитирования: Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Взаимодействие волны давления с трещиновато-пористой зоной в пористой среде // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 331–342. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.331-342>.

For citation: Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Yu., Dudko D.N. Pressure wave interaction with fractured porous zone in porous medium. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 331–342. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.331-342>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 544.5; 662.612; 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.343-363

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК
ЗАЖИГАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО
ТЕПЛО ВЫДЕЛЯЮЩЕГО ОБРАЗЦА В СРЕДЕ
СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ТЕМПЕРАТУРЫ**

И.Г. Донской

Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, 664033, Россия

Аннотация

Рассмотрена задача тепловой устойчивости цилиндрического образца с нелинейным тепловыделением при случайном блуждании температуры окружающей среды. Исследовано поведение такой системы в зависимости от параметров задачи (интенсивности тепловыделения, дисперсии случайного блуждания). Для этого предложен численный алгоритм, основанный на усреднении множества реализаций случайного блуждания внешней температуры. Разработан численный метод решения задачи теплопроводности с источником и со случайными условиями на границе, сочетающий явные и неявные схемы для линейаризованных уравнений переноса и метод Эйлера – Маруямы. Получены распределения характеристик зажигания и моменты этих распределений, установлена их зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: тепловой взрыв, стохастическое дифференциальное уравнение, математическое моделирование, метод Монте-Карло

Введение

Химические реакции часто протекают в условиях с динамическими вариациями условий (температуры, давления, концентраций). Средняя скорость химической реакции при этом не всегда может быть оценена по средним значениям определяющих параметров. В простейших случаях вариации условий можно представить в виде шумов с заданными спектральными характеристиками. Оценка влияния этих характеристик на скорость реакции (в частности) и устойчивости реакционной системы (в целом) является важной задачей, которая, однако, требует специального исследования для каждого отдельного набора химических реакций и диапазона условий.

Особую значимость флуктуационные процессы приобретают в связи с задачами, связанными с тепловой устойчивостью химических реакторов и других теплонапряженных устройств, например, при исследовании аварийных режимов электрохимических элементов и способов их предупреждения [1, 2]. Модели случайного блуждания используются, например, для исследования транспорта частиц в пористых средах [3–5], в атмосферных потоках [6], в пламенах [7–9], а также на поверхностях (что особенно важно для гетерогенных каталитических реакций) [10, 11].

Широко используются перколяционные модели разложения и горения материалов [12–14], а также изменения структуры пористых сред [15].

Влияние флуктуаций на развитие теплового взрыва в адиабатических системах исследовалось в работах [16–18], где впервые был установлен различный характер развития флуктуаций в докритических и сверхкритических условиях. Более простые модели были предложены для сложных химических реакций в изотермических условиях [19–21], в т. ч. для цепной реакции со стохастическим обрывом [22]. Флуктуации и связанные с ними отклонения от детерминированного поведения становятся значительными для систем с малым числом реагирующих частиц [23–25]. Неадиабатические системы с линейными теплопотерями, приводящие к моделям типа Семенова, рассматривались авторами [26, 27]; флуктуации коэффициента массопереноса для гетерогенной экзотермической реакции – в работе [28].

Взаимное влияние химической реакции и процессов переноса на уровне флуктуаций существует даже несмотря на различную векторную размерность соответствующих потоков [29]. В работах [30, 31] было рассмотрено флуктуационное взаимовлияние химической реакции и коэффициентов переноса; в работе [32] выведены флуктуационно-диссипационные соотношения для массопереноса и химических реакций (при отсутствии массопереноса такие соотношения приведены в [33, 34]). Уравнения химической кинетики могут быть выражены с помощью марковских аппроксимаций [35, 36], и для таких системы разработаны численные алгоритмы решения на основе метода Монте-Карло [37, 38] (в т. ч. на основе методов расщепления [39]). Бистабильные потенциалы для уравнений реакции – диффузии использованы в [40, 41] для исследования устойчивости. Задача теплового взрыва с флуктуациями температуры рассмотрена авторами [42, 43]; влияние флуктуаций скорости реакции на устойчивость плоских образцов исследована с помощью метода Ляпунова в [44].

Важным объектом исследования являются простейшие реакторы, такие как реакторы идеального перемешивания. При исследовании этих реакторов основным параметром является отношение времени пребывания реагентов (интегральная характеристика процессов переноса) к скорости химической реакции. Флуктуации могут наблюдаться для расхода реагентов в изотермических реакторах [45, 46], для скорости перемешивания [47] и начальной температуры реагентов [48]. Независимые случайные колебания температуры и концентрации на входе в реактор рассмотрены в работе [49]. Для адиабатического реактора были получены бимодальные распределения, похожие на наблюдаемые в закрытых системах [50]. Управление реакторами с целью подавления опасных колебаний построено в работе [51].

Другим примером реактора с существенным влиянием стохастичности является зернистый слой со случайно расположенными активными центрами. Такие системы численно исследованы в работах [52, 53], где для случайных засыпок были получены статистические данные по ансамблям стационарных решений. Важным приложением стохастического моделирования является реагирование в турбулентных потоках, где большую роль играют методы Монте-Карло. Первые численные модели перемешивания в однофазных и дисперсных потоках были предложены в работах [54, 55]. При моделировании турбулентного горения использованы также модели неполного перемешивания и стохастических флеймлетов [56, 57]. Варьирование параметров реакционной способности часто применяется для определения наиболее вероятных диапазонов скоростей химических реакций и уточнения кинетических данных [58–61].

Применительно к теме настоящей работы необходимо отдельно указать работы И.В. Деревича с соавторами, в которых исследованы статистика поведения одиночных реагирующих частиц в стохастических средах [62, 63], а также влияние стохастического распределения активных центров в пористых каталитических гранулах на их тепловые режимы [64] (подобная постановка рассмотрена также в работе [65] для плоской симметрии). Одномерная задача теплового взрыва с колебаниями температуры на границе для сферической симметрии рассмотрена в работе [66], где были получены уравнения для функции плотности вероятности нахождения в разных температурных состояниях. В настоящей работе нестационарная одномерная задача теплопроводности с нелинейным источником и стохастическими колебаниями температуры окружающей среды численно решена для цилиндрической симметрии. Предметом исследования является зависимость ожидаемых характеристик зажигания (времени, температуры среды, тепловых потоков на поверхности частицы) от интенсивности флуктуаций, которые представлены белым шумом.

1. Постановка задачи и численный алгоритм

Рассмотрим уравнение в частных производных, описывающее процесс теплопроводности в области с нелинейным тепловыделением в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + Fk \exp \left(\frac{\theta}{1 + Ar\theta} \right). \quad (1)$$

Здесь θ – температура, ξ – пространственная координата, t – время, Fk – тепловыделение при начальной температуре ($\theta = 0$) и Ar – параметр, учитывающий снижение чувствительности тепловыделения с ростом температуры. Уравнение (1) является одним из основных объектов исследования в теории горения [67].

Будем считать, что ось симметрии цилиндрического образца соответствует $\xi = 0$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 0) = 0. \quad (2)$$

На внешней границе ($\xi = 1$) температура образца равна температуре окружающей среды:

$$\theta(t, 1) = \theta_{env}(t). \quad (3)$$

В детерминированных постановках температура окружающей среды может быть постоянной [68] либо изменяться по заданному закону [69] (в т.ч. нелинейно [70]). Ключевым является параметр Fk , для которого существует критическое значение, выше которого система (1)–(3) не имеет ограниченного решения. Критическое значение параметра Fk для цилиндрической симметрии при $\theta_{env} = 0$ равно 2 [67]. С ростом температуры окружающей среды критическое значение Fk уменьшается экспоненциально. В стохастической постановке эта температура является случайным процессом, который генерируется некоторым шумом [62, 66]. Для упрощения расчетов примем, что температура окружающей среды определяется случайным блужданием (белый шум):

$$d\theta_{env} = \sigma \delta W. \quad (4)$$

В уравнении (4) σ – дисперсия случайного блуждания, δW – случайное приращение винеровского процесса. Тогда задача (1)–(4) определяет множество возможных реализаций, которые рано или поздно приведут к тепловому взрыву в образце: ожидаемое время зажигания зависит от дисперсии случайного блуждания и степени близости параметра Fk к критическому значению [71]. В работе [66] дан метод

расчета функции плотности вероятностей для осредненной температуры частицы. Более простую оценку вероятности достижения условий теплового взрыва для заданного временного промежутка можно получить, например, используя квазистационарное приближение [72], однако такое приближение дает систематическую ошибку, связанную с нестационарностью процесса. В связи с этим на настоящий момент наиболее надежным методом решения системы уравнений (1)–(4) является прямое численное моделирование (метод Монте-Карло).

Разностная схема для уравнения (1) выглядит следующим образом:

$$\theta_i - \theta_i^0 = Fo \left[\frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} \theta_{i-1} - \left(1 + \frac{\xi_{i-1}}{xi_i} \theta_i + \theta_{i+1} \right) \right] + \tau S_i^0. \quad (5)$$

Здесь Fo – сеточное число Фурье ($Fo = \tau/h^2$, где τ – шаг временной сетки, h – шаг пространственной сетки), S – функция источника ($S_i = Fk \exp \theta_i^0 / (1 + Ar \theta_i^0)$), индекс 0 относится к предыдущему временному слою. Схема (5) комбинирует неявный метод для определения температуры с источником в явной форме (что позволяет упростить расчеты, правда, за счет понижения порядка сходимости). Граничные условия линеаризуются следующим образом:

$$\theta_1 - \theta_2 = 0, \quad (6)$$

$$\theta_N = \theta_N^0 + \sigma \eta \sqrt{\tau}. \quad (7)$$

Здесь $\eta \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т.е. имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией. Уравнение (7) представляет собой реализацию метода Эйлера–Маруямы [72]. Сходимость представленной схемы исследована в работах [65, 73], где был показан первый порядок сходимости по шагам пространственной и временной сеток. Отметим, что температура окружающей среды может расти и уменьшаться с одинаковой вероятностью, поэтому даже для условий, заведомо закритических с точки зрения детерминированной модели, могут наблюдаться стабильные (ограниченно) стохастические режимы.

Разностная схема (5)–(7) была использована для численного интегрирования системы уравнений (1)–(4) на заданном временном интервале (40 условных временных единиц) с начальным условием

$$\theta(0, \xi) = 0. \quad (8)$$

Шаг пространственной сетки равен $h = 0.001$, шаг временной сетки также равен $\tau = 0.001$. Параметрами для расчетов являются значения начальной интенсивности тепловыделения Fk и дисперсии случайного блуждания σ . Значения Fk варьируются от 0.5 до 3 с шагом 0.5 (как указано выше, критическое значение Fk для детерминированной задачи с постоянной температурой окружающей среды равно 2 [67]); значения дисперсии случайного блуждания варьируются от 0.1 до 1 с шагом 0.1. Для получения нужного объема статистических данных проводились по 1000 расчетов с разными случайными траекториями температуры окружающей среды, задаваемыми уравнением (7). Параметр Ar для всех случаев равен 0.02. Физический смысл этого параметра – отношение начальной температуры к энергии активации химической реакции, и большинство реакций горения характеризуется, как правило, малыми значениями Ar (в классических работах часто используется приближение $Ar = 0$). Выбранное значение соответствует химической реакции с энергией активации порядка 120 кДж/моль; в этом диапазоне значений влияние параметра Ar на условия зажигания незначительно [74].

Критическим условиям в задаче о тепловом взрыве (1) соответствует достижение бесконечно большой температуры за конечное время. Этот критерий, естественно, сложно реализовать в расчетах. Кроме того, на границе критических условий резко возрастает время зажигания [44]. В связи с этим предлагается использовать ослабленный, но просто реализуемый критерий. Условием теплового взрыва считается достижение достаточно высокой температуры в образце: при достижении значения максимальной температуры образца порядка 10 (как правило, в его центре) расчеты быстро расходятся, поэтому вычисления можно остановить. По результатам многовариантных запусков оцениваются вероятность зажигания образца, а также распределение характерных величин, соответствующих условиям зажигания: время зажигания; максимальная температура окружающей среды, достигнутая за время расчета; температура окружающей среды в момент зажигания и тепловые потоки на внешней границе (последние интересны с практической точки зрения: эти величины доступны для измерения в экспериментальных условиях).

Изменение температуры образца во времени показано на рис. 1. При $\sigma = 0$ (детерминированная задача) время зажигания бесконечно велико, наблюдается монотонный рост температуры с выходом на стационарное решение. С ростом σ усиливаются колебания на внешней границе ($\xi = 1$), причем эти колебания могут как ускорять, так и замедлять зажигание (в примере с $\sigma = 0.5$ температура долгое время блуждает в субкритической области, поэтому зажигание существенно затягивается). Максимальная температура во всех случаях достигается в центре образца. Множество решений, полученных таким образом, осредняется и анализируется. Результаты осреднения и анализа представлены в следующем разделе.

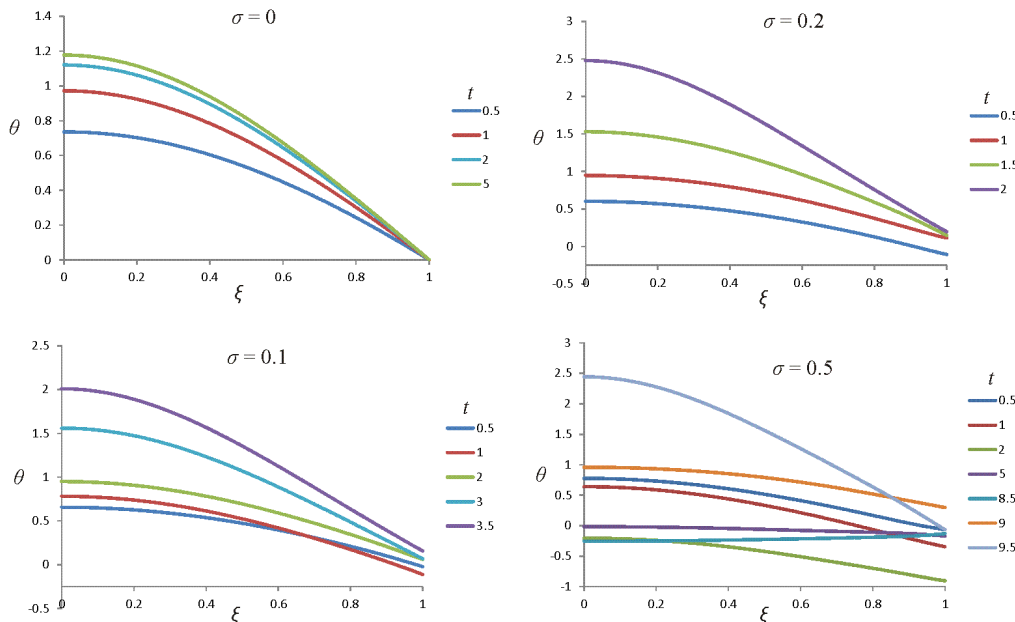


Рис. 1. Примеры расчетов температуры внутри образца при разных значениях σ и t ($Fk = 2$)

2. Результаты расчетов и их обсуждение

Вероятность зажигания рассчитана как отношение числа расчетов, в которых максимальная температура преодолевает значение 10, к их общему числу. Зависимость вероятности зажигания от параметров Fk и σ представлена на рис. 2. Для малых значений параметра Fk вероятность растет с дисперсией случайного блуждания, т.е. с ростом σ возрастает вероятность достижения достаточно высокой температуры окружающей среды, при которой установленное значение Fk становится критическим. При $Fk = 2$ (критическое значение для детерминированной задачи) зажигание происходит в 80–90 % случаев: флуктуации внешней температуры могут привести к охлаждению, и тогда образец оказывается стабильным. С дальнейшим увеличением параметра Fk зависимость обращается: вероятность зажигания уменьшается с дисперсией случайного блуждания, что связано с увеличением доли случайных траекторий, приводящих систему в безопасную температурную область. Та же картина видна на рис. 3, где показана зависимость среднего времени зажигания: для малых Fk процесс зажигания лимитируется случайным блужданием внешней температуры (времена зажигания имеют порядок полного времени расчета); для больших Fk становится все более значительной вероятность «случайного охлаждения».

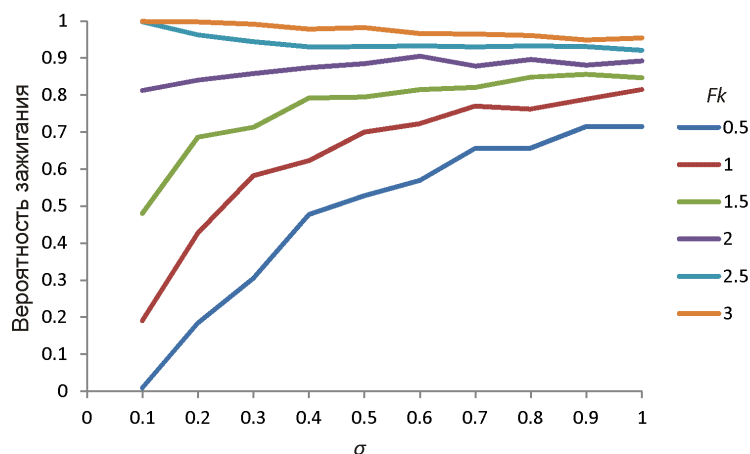


Рис. 2. Вероятность зажигания образца за $t = 40$

Помимо среднего времени зажигания, была рассчитана также его дисперсия (см. рис. 4). Интересно, что при значениях Fk в диапазоне от 1 до 2 дисперсия времени зажигания слабо зависит от шага случайного блуждания, а для малых и больших значений Fk поведение дисперсии качественно одинаково (рост вместе с σ).

Распределение времени зажигания при $Fk = 1$ (критическая температура для этого значения составляет около 0.7) представлено на рис. 5, где показано смещение ожидаемого времени зажигания в сторону меньших значений: с ростом σ увеличивается вероятность того, что температура окружающей среды достигнет критического значения.

Температура в момент зажигания далеко не всегда превышает критическую (см. рис. 6). Более того, в редких случаях зажигание происходит даже при температуре окружающей среды меньше начальной. Это связано с запаздыванием

зажигания по сравнению с изменением температуры: развитие тепловых возмущений может приобрести необратимый характер уже после достижения пиковой температуры, распределение которой показано на рис. 7.

Оценка теплового состояния теплонапряженных устройств, как правило, проводится по его внешним характеристикам, т. е. по условиям на границе. Поэтому помимо температуры окружающей среды исследуется также тепловой поток на внешней границе:

$$q = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 1). \quad (9)$$

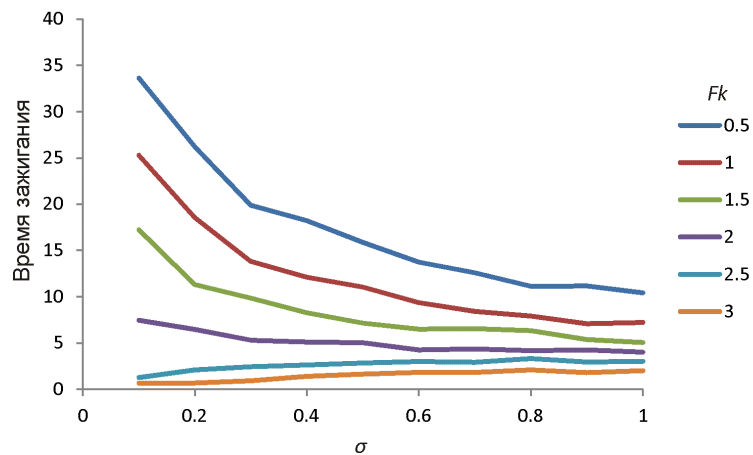


Рис. 3. Среднее время зажигания

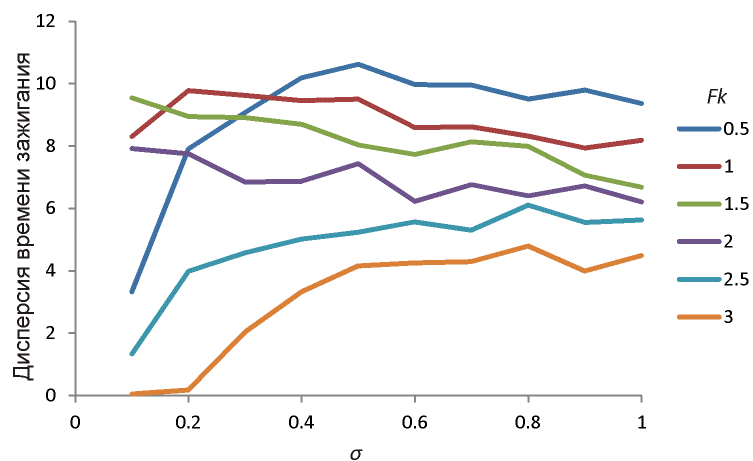
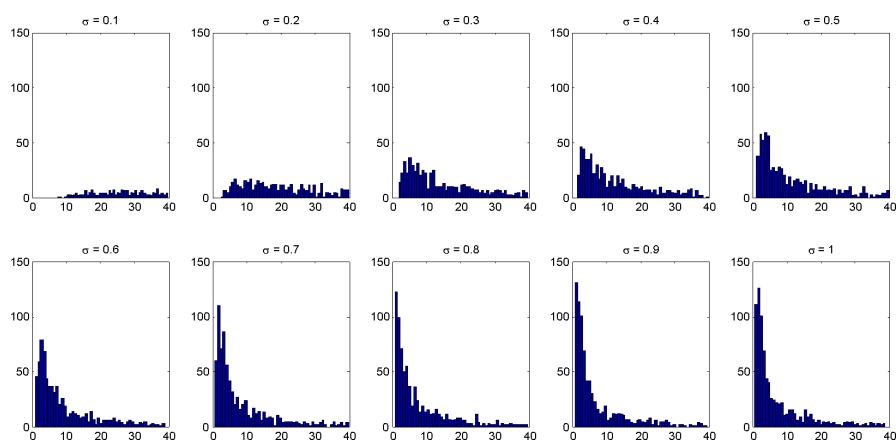
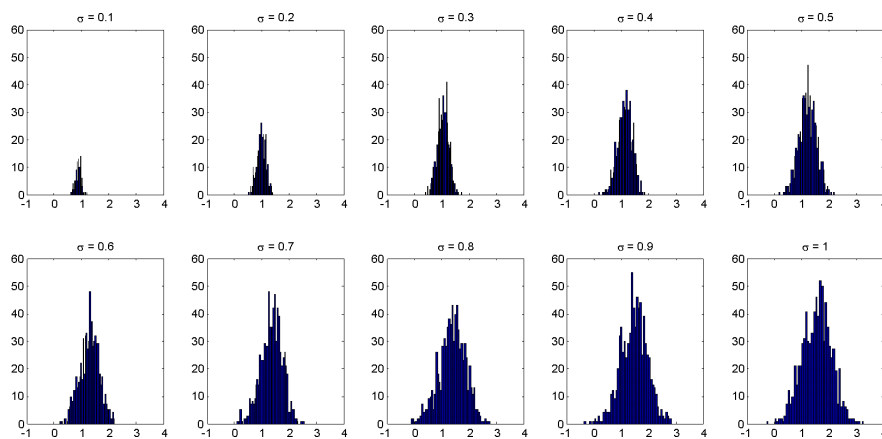
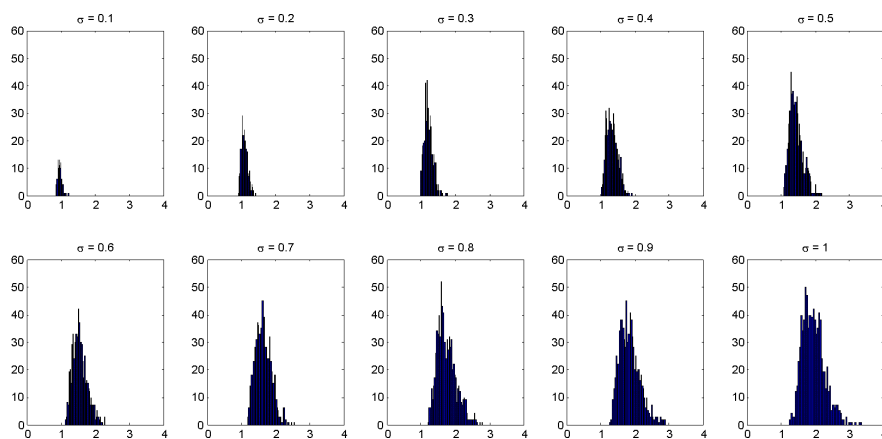


Рис. 4. Дисперсия времени зажигания

Зависимость среднего теплового потока на границе от параметров Fk и σ представлена на рис. 8: интенсивность теплопотерь для всех случаев примерно линейно снижается с ростом дисперсии случайного блуждания, что связано с ростом температуры окружающей среды. Максимальное значение теплового потока слабо зависит от параметра Fk , поскольку соответствует предвзрывному состоянию с

Рис. 5. Распределение времен зажигания для $Fk = 1$ Рис. 6. Распределение температуры окружающей среды в момент зажигания для $Fk = 1$ Рис. 7. Распределение максимальной температуры окружающей среды за все время расчета для $Fk = 1$

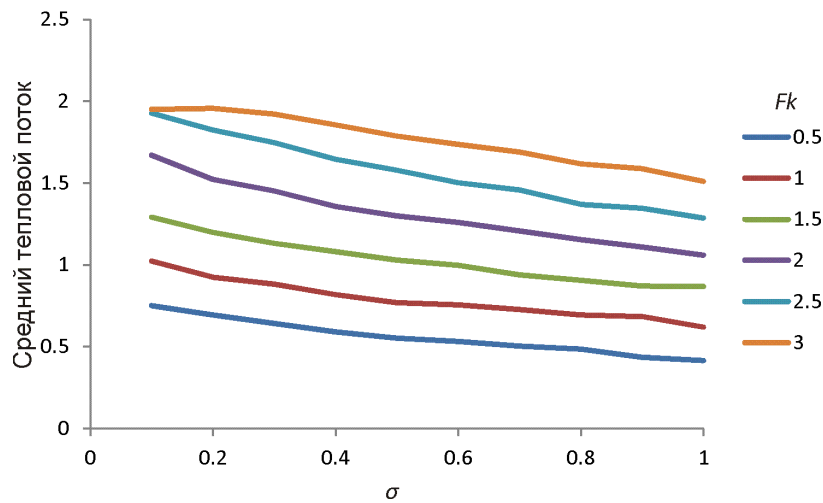


Рис. 8. Зависимость среднего теплового потока (9) от параметров Fk и σ

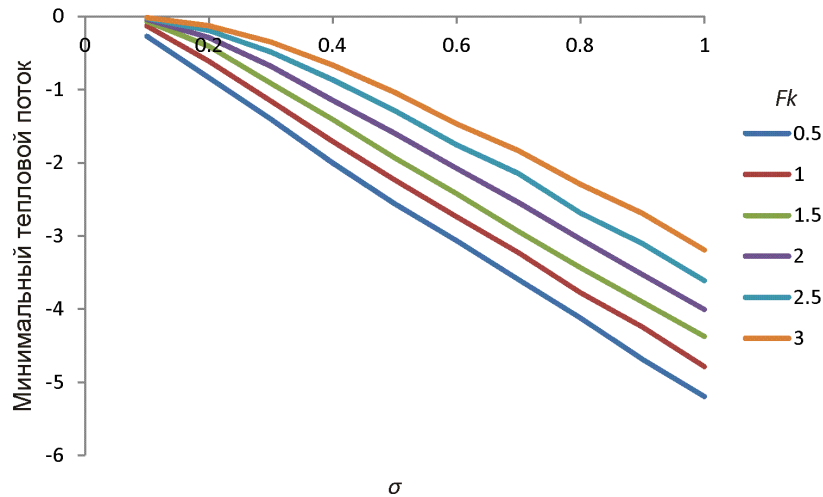
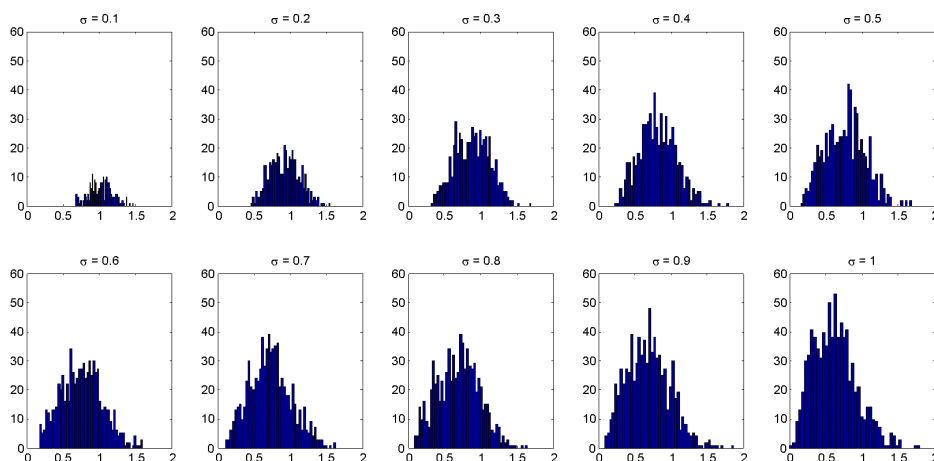
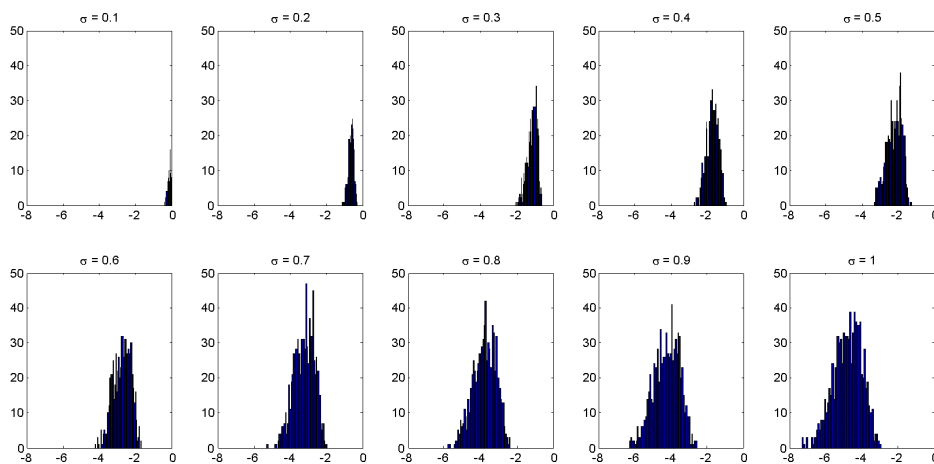


Рис. 9. Зависимость минимального теплового потока (9) от параметров Fk и σ

примерно одинаковой максимальной температурой. Зависимость для минимального теплового потока за все время представлено на рис. 9. Эта величина оказывается более чувствительной к дисперсии случайного блуждания. Кроме того, зажигание во всех случаях протекает в тех случаях, когда наблюдается существенный поток теплоты по направлению из окружающей среды к образцу, т. е. при отрицательных значениях (9).

Распределение среднего и минимального тепловых потоков для $Fk = 1$ показано на рис. 10 и 11. Средний тепловой поток для всех случаев положителен, однако минимальный тепловой поток при этом оказывается существенным.

Полученные расчеты показывают закономерности, которые могут быть применены, например, при разработке методов управления тепловым состоянием устройств с высокой чувствительностью к перегреву, например, электрохимических элементов и каталитических реакторов [1, 51]. Среди таких методов мо-

Рис. 10. Средний тепловой поток на внешней границе образца для $Fk = 1$ Рис. 11. Минимальный тепловой поток на внешней границе образца для $Fk = 1$

гут быть пассивные (добавление теплопоглощающих элементов [75]) и активные (конвективное охлаждение [76]). Например, для теплофизических и реакционных свойств, типичных для литиевых батарей [77, 78], параметр Fk имеет порядок единицы при температурах около 400 К ($Ar = 0.022$). Тогда ожидаемое время теплового взрыва (выхода батареи из строя) может быть оценено, если известны характеристики случайных колебаний в среде, в которой находится батарея. Колебания могут быть связаны с естественной конвекцией, погодными условиями, аварийными ситуациями и т. д.

Заключение

Для исследования характеристик зажигания реагирующего тепловыделяющего образца в стохастической среде использован численный алгоритм, реализующий метод Монте-Карло для нестационарной задачи теплового взрыва со случайным блужданием температуры окружающей среды. Получены зависимости этих характеристик от параметров задачи (интенсивности тепловыделения в начальном

состоянии и дисперсии блуждания), для каждого сочетания параметров проведены расчеты для 1000 случайных траекторий. Результаты расчетов показали качественные различия в зависимости вероятности зажигания от дисперсии случайного блуждания для докритических и сверхкритических значений интенсивности тепловыделения. Показано изменение тепловых потоков на границе области в критических режимах: несмотря на то, что средний тепловой поток направлен от образца к окружающей среде, зажигание происходит только при наличии периодов внешнего нагрева. Полученные результаты могут быть полезны при разработке методов управления тепловым состоянием теплонапряженных устройств в стохастических условиях.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00406 (<https://rscf.ru/project/23-29-00406/>).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Mallick S., Gayen D.* Thermal behaviour and thermal runaway propagation in lithium-ion battery systems — a critical review // *J. Energy Storage*. 2023. V. 62. Art. 106894. <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.106894>.
2. *Fu H., Wang J., Li L., Gong J., Wang X.* Numerical study of mini-channel liquid cooling for suppressing thermal runaway propagation in a lithium-ion battery pack // *Appl. Therm. Eng.* 2023. V. 234, Art. 121349. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.121349>.
3. *Drewry H.P.G., Seaton N.A.* Continuum random walk simulations of diffusion and reaction in catalyst particles // *AIChE J.* 1995. V. 41, No 4. P. 880–893. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.121349>.
4. *Feres R., Yablonsky G.S., Mueller A., Baernstein A., Zheng X., Gleaves J.T.* Probabilistic analysis of transport–reaction processes over catalytic particles: Theory and experimental testing // *Chem. Eng. Sci.* 2009. V. 64, No 3. P. 568–581. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.09.033>.
5. *Zielinski J.M., Petersen E.E.* Monte Carlo simulation of diffusion and chemical reaction in catalyst pores // *AIChE J.* 1987. V. 33, No 12. P. 1993–1997. <https://doi.org/10.1002/aic.690331208>.
6. *Garmory A., Richardson E.S., Mastorakos E.* Micromixing effects in a reacting plume by the Stochastic Fields method // *Atmos. Environ.* 2006. V. 40, No 6. P. 1078–1091. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2005.11.002>.
7. *Ghoniem A.F., Oppenheim A.K.* Numerical solution for the problem of flame propagation by the random element method // *AIAA J.* 1984. V. 22, No 10. P. 1429–1435. <https://doi.org/10.2514/3.8799>.
8. *Бетев А.С., Киверин А.Д., Медведев С.П., Яковенко И.С.* Численное моделирование режимов турбулентного горения водорода вблизи бедного предела // *Хим. физ.* 2020. Т. 39, № 12. С. 17–23. <https://doi.org/10.31857/S0207401X2012002X>.
9. *Tunér M.* Stochastic reactor models for engine simulations. Doctoral Thesis. Lund: Lund Univ., 2008. 194 p.
10. *Keil F.J.* Diffusion and reaction in porous networks // *Catal. Today*. 1999. V. 53, No 2. P. 245–258. [https://doi.org/10.1016/S0920-5861\(99\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0920-5861(99)00119-4).
11. *Zhdanov V.P., Kasemo B.* Simulations of the reaction kinetics on nanometer supported catalyst particles // *Surf. Sci. Rep.* 2000. V. 39, Nos 2–4. P. 25–104. [https://doi.org/10.1016/S0167-5729\(00\)00004-2](https://doi.org/10.1016/S0167-5729(00)00004-2).

12. Kerstein A.R., Edwards B.F. Percolation model for simulation of char oxidation and fragmentation time-histories // Chem. Eng. Sci. 1987. V. 42, No 7. P. 1629–1634. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(87\)80167-7](https://doi.org/10.1016/0009-2509(87)80167-7).
13. Гринчук П.С. Горение гетерогенных систем со стохастической пространственной структурой вблизи пределов распространения // ИФЖ. 2013. Т. 86, № 4. С. 819–831.
14. Xin H., Wang C., Louw E., Wang D., Mathews J.P. Atomistic simulation of coal char isothermal oxy-fuel combustion: Char reactivity and behavior // Fuel. 2016. V. 182. P. 935–943. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2016.05.103>.
15. Panga M.K.R., Ziauddin M., Balakotaiah V. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization // AIChE J. 2005. V. 51, No 12. P. 3231–3248. <https://doi.org/10.1002/aic.10574>.
16. Baras F., Nicolis G., Mansour M.M., Turner J.W. Stochastic theory of adiabatic explosion // J. Stat. Phys. 1983. V. 32, No 1. P. 1–23. <https://doi.org/10.1007/BF01009416>.
17. de Pasquale F., Mecozzi A. Theory of chemical fluctuations in thermal explosions // Phys. Rev. A. 1985. V. 31, No 4. Art. 2454. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.2454>.
18. Fernandez A. Theory of scaling for fluctuations in thermal explosion conditions // Ber. Bunsenges. Phys. Chem. 1987. V. 91, No 2. P. 159–163. <https://doi.org/10.1002/bbpc.19870910216>.
19. Frankowicz M., Nicolis G. Transient evolution towards a unique stable state: Stochastic analysis of explosive behavior in a chemical system // J. Stat. Phys. 1983. V. 3, No 3. P. 595–609 <https://doi.org/10.1007/BF01018836>.
20. Frankowicz M., Mansour M.M., Nicolis G. Stochastic analysis of explosive behaviour: A qualitative approach // Physica. 1984. V. 125, No 1. P. 237–246. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(84\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0378-4371(84)90011-6).
21. van Kampen N.G. Intrinsic fluctuations in explosive reactions // J. Stat. Phys. 1987. V. 46, No 5. P. 933–948. <https://doi.org/10.1007/BF01011150>.
22. Vlad M.O., Ross J. A stochastic approach to nonequilibrium chain reactions in disordered systems: Breakdown of eikonal approximation // Int. J. Thermophys. 1997. V. 18, No 4. P. 957–975. <https://doi.org/10.1007/BF02575241>.
23. Gorecki J., Popielawski J. On the stochastic theory of adiabatic thermal explosion in small systems — numerical results // J. Stat. Phys. 1986. V. 44, No 5. P. 941–954. <https://doi.org/10.1007/BF01011916>.
24. Zheng Q., Ross J. Comparison of deterministic and stochastic kinetics for nonlinear systems // J. Chem. Phys. 1991. V. 94, No 5. P. 3644–3648. <https://doi.org/10.1063/1.459735>.
25. Chou D.-P., Lackner T., Yip S. Fluctuation effects in models of adiabatic explosion // J. Stat. Phys. 1992. V. 69, No 1. P. 193–215. <https://doi.org/10.1007/BF01053790>.
26. Nowakowski B., Lemarchand A. Thermal explosion near bifurcation: Stochastic features of ignition // Phys. A. 2002. V. 311, Nos 1–2. P. 80–96. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)00824-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00824-5).
27. Lemarchand A., Nowakowski B. Fluctuation-induced and nonequilibrium-induced bifurcations in a thermochemical system // Mol. Simul. 2004. V. 30, Nos 11–12. P. 773–780. <http://dx.doi.org/10.1080/0892702042000270151>.
28. Бувечич Ю.А., Федотов С.П. Формирование режимов гетерогенной реакции под воздействием мультипликативного шума // ИФЖ. 1987. Т. 53, № 5. С. 802–807.
29. Wei J. Irreversible thermodynamics in engineering // Ind. Eng. Chem. 1966. V. 58, No 10. P. 55–60. <https://doi.org/10.1021/ie50682a010>.

30. *van der Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., Kawai R.* Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55, No 4. Art. 4084. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.4084>.
31. *Bedeaux D., Pagonabarraga I., Ortiz de Zárate J.M., Sengers J.V., Kjølstrup S.* Mesoscopic non-equilibrium thermodynamics of non-isothermal reaction-diffusion // *Phys. Chem. Chem. Phys.* 2010. V. 12. P. 12780–12793. <https://doi.org/10.1039/C0CP00289E>.
32. *Bochkov G.N., Orlov A.L., Kolpashchikov V.L.* Fluctuation-dissipation models of mass transfer in systems with chemical reactions // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* 1985. V. 12, No 1. P. 33–43. [https://doi.org/10.1016/0735-1933\(85\)90005-3](https://doi.org/10.1016/0735-1933(85)90005-3).
33. *Schmiedl T., Seifert U.* Stochastic thermodynamics of chemical reaction networks // *J. Chem. Phys.* 2007. V. 126. Art. 044101. <https://doi.org/10.1063/1.2428297>.
34. *Ge H., Qian H.* Mathematical formalism of nonequilibrium thermodynamics for nonlinear chemical reaction systems with general rate law // *J. Stat. Phys.* 2017. V. 166, No 1. P. 190–209. <https://doi.org/10.1007/s10955-016-1678-6>.
35. *Darvey I.G., Staff P.J.* Stochastic approach to first-order chemical reaction kinetics // *J. Chem. Phys.* 1966. V. 44. P. 990–997. <https://doi.org/10.1063/1.1726855>.
36. *van Kampen N.G.* The equilibrium distribution of a chemical mixture // *Phys. Lett. A.* 1976. V. 59, No 5. P. 333–334. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90398-4](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90398-4).
37. *Gillespie D.T.* Stochastic simulation of chemical kinetics // *Annu. Rev. Phys. Chem.* 2007. V. 58. P. 35–55. <https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.58.032806.104637>.
38. *Higham D.J.* Modeling and simulating chemical reactions // *SIAM Rev.* 2008. V. 50, No 2. P. 347–368. <https://doi.org/10.1137/060666457>.
39. *Sandu A.* A new look at the chemical master equation // *Numer. Algorithms.* 2014. V. 65, No 3. P. 485–498. <https://doi.org/10.1007/s11075-013-9758-z>.
40. *Schlögl F.* Stochastic measures in nonequilibrium thermodynamics // *Phys. Rep.* 1980. V. 62, No 4. P. 267–380. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90019-8](https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90019-8).
41. *Montefusco A., Peletier M.A., Öttinger H.C.* A framework of nonequilibrium statistical mechanics. II. Coarse-graining // *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 2021. V. 46, No 1. P. 15–33. <https://doi.org/10.1515/jnet-2020-0068>.
42. *Fernández A., Rabitz H.* The scaling of nonequilibrium fluctuations in gaseous thermal explosions // *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.* 1988. V. 92, No 6. P. 754–760. <https://doi.org/10.1002/bbpc.198800184>.
43. *Baer M.R., Gartling D.K., Desjardin P.E.* Probabilistic models for reactive behaviour in heterogeneous condensed phase media // *Combust. Theory Modell.* 2012. V. 16, No 1. P. 75–106. <https://doi.org/10.1080/13647830.2011.606916>.
44. *Fedotov S.P.* Stochastic analysis of the thermal ignition of a distributed explosive system // *Phys. Lett. A.* 1993. V. 176, Nos 3–4. P. 220–224. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)91038-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)91038-7).
45. *Baratti R., Tronci S., Schaum A., Alvarez J.* Dynamics of nonlinear chemical process with multiplicative stochastic noise // *IFAC-PapersOnLine.* 2016. V. 49, No 7. P. 869–874. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.299>.
46. *Schaum A., Tronci S., Baratti R., Alvarez J.* On the dynamics and robustness of the chemostat with multiplicative noise // *IFAC-PapersOnLine.* 2021. V. 54, No 3. P. 342–347. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.265>.
47. *Leicher J., Wirtz S., Scherer V.* Evaluation of an entropy-based combustion model using stochastic reactors // *Chem. Eng. Technol.* 2008. V. 31, No 7. P. 964–970. <https://doi.org/10.1002/ceat.200700463>.
48. *Rao N.J., Ramkrishna D., Borwanker J.D.* Nonlinear stochastic simulation of stirred tank reactors // *Chem. Eng. Sci.* 1974. V. 29, No 5. P. 1193–1204. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(74\)80118-1](https://doi.org/10.1016/0009-2509(74)80118-1).

49. *Alvarez J., Baratti R.* On the closed-loop stochastic dynamics of two-state nonlinear exothermic CSTRs with PI temperature control // *Comput. Chem. Eng.* 2023. V. 174. Art. 108246. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2023.108246>.
50. *Oberlack M., Arlitt R., Peters N.* On stochastic Damköhler number variations in a homogeneous flow reactor // *Combust. Theory Modell.* 2000. V. 4, No 4. P. 495–509. <https://doi.org/10.1088/1364-7830/4/4/307>.
51. *Bashkirtseva I.* Controlling the stochastic sensitivity in thermochemical systems under incomplete information // *Kybernetika.* 2018. V. 54, No 1. P. 96–109. <http://doi.org/10.14736/kyb-2018-1-0096>.
52. *Calverley E.M., Witt P.M., Sweeney J.D.* Reactor runaway due to statistically driven axial activity variations in graded catalyst beds // *Chem. Eng. Sci.* 2012. V. 80. P. 393–401. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.06.047>.
53. *Ganzer G., Freund H.* Influence of statistical activity variations in diluted catalyst beds on the thermal reactor behavior: Derivation of an a priori criterion // *Chem. Eng. Sci.* 2020. V. 220. Art. 115607. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115607>.
54. *Curl R.L.* Dispersed phase mixing: I. Theory and effects in simple reactors // *AIChE J.* 1963. V. 9, No 2. P. 175–181. <https://doi.org/10.1002/aic.690090207>.
55. *Kerstein A.R.* One-dimensional turbulence: Model formulation and application to homogeneous turbulence, shear flows, and buoyant stratified flows // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 392. P. 277–334. <https://doi.org/10.1017/S0022112099005376>.
56. *Correa S.M.* Turbulence-chemistry interactions in the intermediate regime of premixed combustion // *Combust. Flame.* 1993. V. 93, Nos 1–2. P. 41–60. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(93\)90083-F](https://doi.org/10.1016/0010-2180(93)90083-F).
57. *Iavarone S., Péquin A., Chen Z.X., Doan N.A.K., Swaminathan N., Parente A.* An a priori assessment of the Partially Stirred Reactor (PaSR) model for MILD combustion // *Proc. Combust. Inst.* 2021. V. 38, No 4. P. 5403–5414. <https://doi.org/10.1016/j.proci.2020.06.234>.
58. *Медведев В.Г., Телегин В.Г., Телегин Г.Г.* Статистический анализ кинетики адиабатического теплового взрыва // *ФГВ.* 2009. № 3. С. 44–48.
59. *Tomlin A.S., Turányi T.* Investigation and improvement of reaction mechanisms using sensitivity analysis and optimization // *Cleaner Combustion: Developing Detailed Chemical Kinetic Models* / Ed. by F. Battin-Leclerc, J.M. Simmie, E. Blurock. Ser.: Green Energy and Technology. London: Springer, 2013. P. 411–445. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5307-8_16.
60. *Gel A., Chaudhari K., Turton R., Nicoletti P.* Application of uncertainty quantification methods for coal devolatilization kinetics in gasifier modeling // *Powder Technol.* 2014. V. 265. P. 66–75. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.01.024>.
61. *Fischer M., Vignes A.* An imprecise Bayesian approach to thermal runaway probability // *Proc. 12th Int. Symp. on Imprecise Probability: Theories and Applications. Ser.: Proceedings of Machine Learning Research (PMLR).* 2021. V. 147. P. 150–160.
62. *Derevich I.V.* Effect of temperature fluctuations of fluid on thermal stability of particles with exothermic chemical reaction // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2010. V. 53, Nos 25–26. P. 5920–5932. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.031>.
63. *Derevich I., Galdina D.* Simulation of thermal explosion of catalytic granule in fluctuating temperature field // *J. Appl. Math. Phys.* 2013. V. 1, No 5. P. 1–7. <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2013.15001>.
64. *Derevich I.V., Ermolaev V.S., Mordkovich V.Z., Solomonik I.G., Fokina A.Yu.* Heat and mass transfer in Fischer–Tropsch catalytic granule with localized cobalt microparticles // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2018. V. 121. P. 1335–1349. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.01.077>.

65. Донской И.Г., Гросс Е.И. Численный анализ стохастических закономерностей теплового зажигания в стохастической среде // Информ. и матем. техн. в науке и управл. 2024. № 1. С. 66–77. <https://doi.org/10.25729/ESI.2024.33.1.006>.
66. Деревич И.В., Клочков А.К. Тепловой взрыв одиночных частиц в случайном поле температуры среды // ТВТ. 2023. Т. 61, № 1. С. 108–117. <https://doi.org/10.31857/S0040364423010039>.
67. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.
68. Мержанов А.Г., Озерковская Н.И., Шкадинский К.Г. Динамика теплового взрыва в послеиндукционный период // ФГВ. 1999. Т. 35, № 6. С. 65–70.
69. Барзыкин В.В. Тепловой взрыв при линейном нагреве // ФГВ. 1973. № 1. С. 37–54.
70. Novozhilov V. Thermal explosion in oscillating ambient conditions // Sci. Rep. 2016. V. 6, No 1. Art. 29730. <https://doi.org/10.1038/srep29730>.
71. Fedotov S.P. Statistical model of the thermal ignition of a distributed system // Combust. Flame. 1992. V. 91, No 1. P. 65–70. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(92\)90127-B](https://doi.org/10.1016/0010-2180(92)90127-B).
72. Kloeden P.E., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Ser.: Stochastic Modelling and Applied Probability. Vol. 23. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. xxxvi, 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>.
73. Donskoy I. Thermal explosion problem with a stochastic boundary: quasi-stationary approximation and direct numerical modelling // Research Square. Preprint. 2023. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3464165/v1>.
74. Takeno T. Ignition criterion by thermal explosion theory // Combust. Flame. 1977. V. 29. P. 209–211. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(77\)90108-0](https://doi.org/10.1016/0010-2180(77)90108-0).
75. Wilke S., Schweitzer B., Khateeb S., Al-Hallaj S. Preventing thermal runaway propagation in lithium ion battery packs using a phase change composite material: An experimental study // J. Power Sources. 2017. V. 340. P. 51–59. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.11.018>.
76. Shahid S., Agelin-Chaab M. A review of thermal runaway prevention and mitigation strategies for lithium-ion batteries // Energy Convers. Manage.: X. 2022. V. 16. Art. 100310. <https://doi.org/10.1016/j.ecmx.2022.100310>.
77. Chen M., Sun Q., Li Y., Wu K., Liu B., Peng P., Wang Q. A thermal runaway simulation on a lithium titanate battery and the battery module // Energies. 2015. V. 8, No 1. P. 490–500. <https://doi.org/10.3390/en8010490>.
78. Feng X., He X., Ouyang M., Wang L., Lu L., Ren D., Santhanagopalan S. A coupled electrochemical-thermal failure model for predicting the thermal runaway behavior of lithium-ion batteries // J. Electrochem. Soc. 2018. V. 165, No 16. Art. A3748. <https://doi.org/10.1149/2.0311816jes>.

Поступила в редакцию 17.07.2024

Принята к публикации 24.08.2024

Донской Игорь Геннадьевич, доктор технических наук, старший научный сотрудник
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН
ул. Лермонтова, д. 130, г. Иркутск, 664033, Россия
E-mail: donskoy.chem@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.343-363

**Numerical Modeling of the Ignition Characteristics
of a Cylindrical Heat-Generating Sample in a Medium
with Stochastic Temperature Variations**

*I.G. Donskoy**Melentiev Energy Systems Institute, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Irkutsk, 664933 Russia*E-mail: *donskoy.chem@mail.ru*

Received July 17, 2024; Accepted August 24, 2024

Abstract

The problem of thermal stability of a cylindrical sample with nonlinear heat generation placed in a medium with the ambient temperature random walk was studied. The behavior of this system was examined depending on the parameters of the problem (heat generation intensity, random walk variance). A numerical algorithm based on averaging multiple random trajectories of the ambient temperature was proposed. A numerical method was developed for solving the heat transfer problem with the heat source and stochastic boundary which combines both explicit and implicit schemes for linearized transfer equations and the Euler–Maruyama method. The distributions of ignition characteristics and their moments were obtained. Their dependencies on the parameters of the problem were investigated.

Keywords: thermal explosion, stochastic differential equation, mathematical modeling, Monte Carlo method

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-29-00406, <https://rscf.ru/project/23-29-00406/>.)

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

- Fig. 1. Temperature profiles inside the sample for various values of σ and t ($Fk = 2$).
Fig. 2. Probability of sample ignition at $t = 40$.
Fig. 3. Average ignition time.
Fig. 4. Variance of ignition time.
Fig. 5. Distribution of ignition times for $Fk = 1$.
Fig. 6. Ambient temperature distribution at the moment of ignition for $Fk = 1$.
Fig. 7. Maximum ambient temperature distribution over the entire calculation period for $Fk = 1$.
Fig. 8. Average heat flux (9) dependence on Fk and σ .
Fig. 9. Minimum heat flux (9) dependence on Fk and σ .
Fig. 10. Average heat flux at the outer boundary of the sample for $Fk = 1$.
Fig. 11. Minimum heat flux at the outer boundary of the sample for $Fk = 1$.

References

1. Mallick S., Gayen D. Thermal behaviour and thermal runaway propagation in lithium-ion battery systems – a critical review. *J. Energy Storage*, 2023, vol. 62, art. 106894. <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.106894>.
2. Fu H., Wang J., Li L., Gong J., Wang X. Numerical study of mini-channel liquid cooling for suppressing thermal runaway propagation in a lithium-ion battery pack. *Appl. Therm. Eng.*, 2023, vol. 234, art. 121349. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.121349>.
3. Drewry H.P.G., Seaton N.A. Continuum random walk simulations of diffusion and reaction in catalyst particles. *AIChE J.*, 1995, vol. 41, no. 4, pp. 880–893. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.121349>.
4. Feres R., Yablonsky G.S., Mueller A., Baernstein A., Zheng X., Gleaves J.T. Probabilistic analysis of transport–reaction processes over catalytic particles: Theory and experimental testing. *Chem. Eng. Sci.*, 2009, vol 64, no. 3, pp. 568–581. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.09.033>.
5. Zielinski J.M., Petersen E.E. Monte Carlo simulation of diffusion and chemical reaction in catalyst pores. *AIChE J.*, 1987, vol. 33, no. 12, pp. 1993–1997. <https://doi.org/10.1002/aic.690331208>.
6. Garmory A., Richardson E.S., Mastorakos E. Micromixing effects in a reacting plume by the Stochastic Fields method. *Atmos. Environ.*, 2006, vol. 40, no. 6, pp. 1078–1091. <https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2005.11.002>.
7. Ghoniem A.F., Oppenheim A.K. Numerical solution for the problem of flame propagation by the random element method. *AIAA J.*, 1984, vol. 22, no. 10, pp. 1429–1435. <https://doi.org/10.2514/3.8799>.
8. Betev A.S., Kiverin A.D., Medvedev S.P., Yakovenko I.S. Numerical simulation of turbulent hydrogen combustion regimes near the lean limit. *Russ. J. Phys. Chem.*, 2020, vol. 14, no. 6, pp. 940–945. <https://doi.org/10.1134/S1990793120060160>.
9. Tunér M. Stochastic reactor models for engine simulations. *Doctoral Thesis*. Lund, Lund Univ., 2008. 194 p.
10. Keil F.J. Diffusion and reaction in porous networks. *Catal. Today*, 1999, vol. 53, no. 2, pp. 245–258. [https://doi.org/10.1016/S0920-5861\(99\)00119-4](https://doi.org/10.1016/S0920-5861(99)00119-4).
11. Zhdanov V.P., Kasemo B. Simulations of the reaction kinetics on nanometer supported catalyst particles. *Surf. Sci. Rep.*, 2000, vol. 39, nos. 2–4, pp. 25–104. [https://doi.org/10.1016/S0167-5729\(00\)00004-2](https://doi.org/10.1016/S0167-5729(00)00004-2).
12. Kerstein A.R., Edwards B.F. Percolation model for simulation of char oxidation and fragmentation time-histories. *Chem. Eng. Sci.*, 1987, vol. 42, no. 7, pp. 1629–1634. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(87\)80167-7](https://doi.org/10.1016/0009-2509(87)80167-7).
13. Grinchuk P.S. Combustion of heterogeneous systems with a stochastic spatial structure near the propagation limits. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2013, vol. 86, no. 4, pp. 875–887. <https://doi.org/10.1007/s10891-013-0907-y>.
14. Xin H., Wang C., Louw E., Wang D., Mathews J.P. Atomistic simulation of coal char isothermal oxy-fuel combustion: Char reactivity and behavior. *Fuel*, 2016, vol. 182, pp. 935–943. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2016.05.103>.
15. Panga M.K.R., Ziauddin M., Balakotaiah V. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization. *AIChE J.*, 2005, vol. 51, no. 12, pp. 3231–3248. <https://doi.org/10.1002/aic.10574>.
16. Baras F., Nicolis G., Mansour M.M., Turner J.W. Stochastic theory of adiabatic explosion. *J. Stat. Phys.*, 1983, vol. 32, no. 1, pp. 1–23. <https://doi.org/10.1007/BF01009416>.
17. de Pasquale F., Mecozzi A. Theory of chemical fluctuations in thermal explosions. *Phys. Rev. A*, 1985, vol. 31, no. 4, art. 2454. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.2454>.

18. Fernandez A. Theory of scaling for fluctuations in thermal explosion conditions. *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, 1987, vol. 91, no. 2, pp. 159–163. <https://doi.org/10.1002/bbpc.19870910216>.
19. Frankowicz M., Nicolis G. Transient evolution towards a unique stable state: Stochastic analysis of explosive behavior in a chemical system. *J. Stat. Phys.*, 1983, vol. 3, no. 3, pp. 595–609. <https://doi.org/10.1007/BF01018836>.
20. Frankowicz M., Mansour M.M., Nicolis G. Stochastic analysis of explosive behaviour: A qualitative approach. *Physica*, 1984, vol. 125, no. 1, pp. 237–246. [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(84\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0378-4371(84)90011-6).
21. van Kampen N.G. Intrinsic fluctuations in explosive reactions. *J. Stat. Phys.*, 1987, vol. 46, no. 5, P. 933–948. <https://doi.org/10.1007/BF01011150>.
22. Vlad M.O., Ross J. A stochastic approach to nonequilibrium chain reactions in disordered systems: Breakdown of eikonal approximation. *Int. J. Thermophys.*, 1997, vol. 18, no. 4, pp. 957–975. <https://doi.org/10.1007/BF02575241>.
23. Gorecki J., Popielawski J. On the stochastic theory of adiabatic thermal explosion in small systems — numerical results. *J. Stat. Phys.*, 1986, vol. 44, no. 5, pp. 941–954. <https://doi.org/10.1007/BF01011916>.
24. Zheng Q., Ross J. Comparison of deterministic and stochastic kinetics for nonlinear systems. *J. Chem. Phys.*, 1991, vol. 94, no. 5, pp. 3644–3648. <https://doi.org/10.1063/1.459735>.
25. Chou D.-P., Lackner T., Yip S. Fluctuation effects in models of adiabatic explosion. *J. Stat. Phys.*, 1992, vol. 69, no. 1, pp. 193–215. <https://doi.org/10.1007/BF01053790>.
26. Nowakowski B., Lemarchand A. Thermal explosion near bifurcation: Stochastic features of ignition. *Phys. A*, 2002, vol. 311, nos. 1–2, pp. 80–96. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(02\)00824-5](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(02)00824-5).
27. Lemarchand A., Nowakowski B. Fluctuation-induced and nonequilibrium-induced bifurcations in a thermochemical system. *Mol. Simul.*, 2004, vol. 30, nos. 11–12, pp. 773–780. <http://dx.doi.org/10.1080/0892702042000270151>.
28. Buevich Yu.A., Fedotov S.P. Formation of heterogeneous reaction regimes under the action of multiplicative noise. *J. Eng. Phys.*, 1987, vol. 53, no. 5, pp. 1302–1306. <https://doi.org/10.1007/BF00871092>.
29. Wei J. Irreversible thermodynamics in engineering. *Ind. Eng. Chem.*, 1966, vol. 58, no. 10, pp. 55–60. <https://doi.org/10.1021/ie50682a010>.
30. van der Broeck C., Parrondo J.M.R., Toral R., Kawai R. Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise. *Phys. Rev. E*, 1997, vol. 55, no. 4, art. 4084. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.55.4084>.
31. Bedeaux D., Pagonabarraga I., Ortiz de Zárate J.M., Sengers J.V., Kjelstrup S. Mesoscopic non-equilibrium thermodynamics of non-isothermal reaction-diffusion. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2010, vol. 12, pp. 12780–12793. <https://doi.org/10.1039/C0CP00289E>.
32. Bochkov G.N., Orlov A.L., Kolpashchikov V.L. Fluctuation-dissipation models of mass transfer in systems with chemical reactions. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 1985, vol. 12, no. 1, pp. 33–43. [https://doi.org/10.1016/0735-1933\(85\)90005-3](https://doi.org/10.1016/0735-1933(85)90005-3).
33. Schmiedl T., Seifert U. Stochastic thermodynamics of chemical reaction networks. *J. Chem. Phys.*, 2007, vol. 126, art. 044101. <https://doi.org/10.1063/1.2428297>.
34. Ge H., Qian H. Mathematical formalism of nonequilibrium thermodynamics for nonlinear chemical reaction systems with general rate law. *J. Stat. Phys.*, 2017, vol. 166, no. 1, pp. 190–209. <https://doi.org/10.1007/s10955-016-1678-6>.
35. Darvey I.G., Staff P.J. Stochastic approach to first-order chemical reaction kinetics. *J. Chem. Phys.*, 1966, vol. 44, pp. 990–997. <https://doi.org/10.1063/1.1726855>.

36. van Kampen N.G. The equilibrium distribution of a chemical mixture. *Phys. Lett. A*, 1976, vol. 59, no. 5, pp. 333–334. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90398-4](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90398-4).
37. Gillespie D.T. Stochastic simulation of chemical kinetics. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 2007. V. 58. P. 35–55. <https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.58.032806.104637>.
38. Higham D.J. Modeling and simulating chemical reactions. *SIAM Rev.*, 2008, vol. 50, no. 2, pp. 347–368. <https://doi.org/10.1137/060666457>.
39. Sandu A. A new look at the chemical master equation. *Numer. Algorithms*, 2014, vol. 65, no. 3, pp. 485–498. <https://doi.org/10.1007/s11075-013-9758-z>.
40. Schlögl F. Stochastic measures in nonequilibrium thermodynamics. *Phys. Rep.*, 1980, vol. 62, no. 4, pp. 267–380. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90019-8](https://doi.org/10.1016/0370-1573(80)90019-8).
41. Montefusco A., Peletier M.A., Öttinger H.C. A Framework of nonequilibrium statistical mechanics. II. coarse-graining. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 2021, vol. 46, no. 1, pp. 15–33. <https://doi.org/10.1515/jnet-2020-0068>.
42. Fernández A., Rabitz H. The scaling of nonequilibrium fluctuations in gaseous thermal explosions. *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, 1988, vol. 92, no. 6, pp. 754–760. <https://doi.org/10.1002/bbpc.198800184>.
43. Baer M.R., Gartling D.K., Desjardin P.E. Probabilistic models for reactive behaviour in heterogeneous condensed phase media. *Combust. Theory Modell.*, 2012, vol. 16, no. 1, pp. 75–106. <https://doi.org/10.1080/13647830.2011.606916>.
44. Fedotov S.P. Stochastic analysis of the thermal ignition of a distributed explosive system. *Phys. Lett. A*, 1993, vol. 176, nos. 3–4, pp. 220–224. [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)91038-7](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)91038-7).
45. Baratti R., Tronci S., Schaum A., Alvarez J. Dynamics of nonlinear chemical process with multiplicative stochastic noise. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 7, pp. 869–874. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.299>.
46. Schaum A., Tronci S., Baratti R., Alvarez J. On the dynamics and robustness of the chemostat with multiplicative noise. *IFAC-PapersOnLine*, 2021, vol. 54, no. 3, pp. 342–347. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.08.265>.
47. Leicher J., Wirtz S., Scherer V. Evaluation of an entropy-based combustion model using stochastic reactors. *Chem. Eng. Technol.*, 2008, vol. 31, no. 7, pp. 964–970. <https://doi.org/10.1002/ceat.200700463>.
48. Rao N.J., Ramkrishna D., Borwanker J.D. Nonlinear stochastic simulation of stirred tank reactors. *Chem. Eng. Sci.*, 1974 vol. 29, no. 5, pp. 1193–1204. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(74\)80118-1](https://doi.org/10.1016/0009-2509(74)80118-1).
49. Alvarez J., Baratti R. On the closed-loop stochastic dynamics of two-state nonlinear exothermic CSTRs with PI temperature control. *Comput. Chem. Eng.*, 2023, vol. 174, art. 108246. <https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2023.108246>.
50. Oberlack M., Arlitt R., Peters N. On stochastic Damköhler number variations in a homogeneous flow reactor. *Combust. Theory Modell.*, 2000, vol. 4, no. 4, pp. 495–509. <https://doi.org/10.1088/1364-7830/4/4/307>.
51. Bashkirtseva I. Controlling the stochastic sensitivity in thermochemical systems under incomplete information. *Kybernetika*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 96–109. <http://doi.org/10.14736/kyb-2018-1-0096>.
52. Calverley E.M., Witt P.M., Sweeney J.D. Reactor runaway due to statistically driven axial activity variations in graded catalyst beds. *Chem. Eng. Sci.*, 2012, vol. 80, pp. 393–401. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.06.047>.
53. Ganzer G., Freund H. Influence of statistical activity variations in diluted catalyst beds on the thermal reactor behavior: Derivation of an a priori criterion. *Chem. Eng. Sci.*, 2020, vol. 220, art. 115607. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115607>.

54. Curl R.L. Dispersed phase mixing: I. Theory and effects in simple reactors. *AIChE J.*, 1963, vol. 9, no. 2, pp. 175–181. <https://doi.org/10.1002/aic.690090207>.
55. Kerstein A.R. One-dimensional turbulence: Model formulation and application to homogeneous turbulence, shear flows, and buoyant stratified flows. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 392, pp. 277–334. <https://doi.org/10.1017/S0022112099005376>.
56. Correa S.M. Turbulence-chemistry interactions in the intermediate regime of premixed combustion. *Combust. Flame*, 1993, vol. 93, nos. 1–2, pp. 41–60. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(93\)90083-F](https://doi.org/10.1016/0010-2180(93)90083-F).
57. Iavarone S., Péquin A., Chen Z.X., Doan N.A.K., Swaminathan N., Parente A. An a priori assessment of the Partially Stirred Reactor (PaSR) model for MILD combustion. *Proc. Combust. Inst.*, 2021, vol. 38, no. 4, pp. 5403–5414. <https://doi.org/10.1016/j.proci.2020.06.234>.
58. Medvedev V.G., Telegin V.G., Telegin G.G. Statistical analysis of kinetics of an adiabatic thermal explosion. *Combust., Explos., Shock Waves*, 2009, vol. 45, no. 3, pp. 274–277. <https://doi.org/10.1007/s10573-009-0036-2>.
59. Tomlin A.S., Turányi T. Investigation and improvement of reaction mechanisms using sensitivity analysis and optimization. In: Battin-Leclerc F., Simmie J.M., Blurock E. (Eds.) *Cleaner Combustion: Developing Detailed Chemical Kinetic Models*. Ser.: Green Energy and Technology. London, Springer, 2013, pp. 411–445. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5307-8_16.
60. Gel A., Chaudhari K., Turton R., Nicoletti P. Application of uncertainty quantification methods for coal devolatilization kinetics in gasifier modeling. *Powder Technol.*, 2014, vol. 265, pp. 66–75. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.01.024>.
61. Fischer M., Vignes A. An imprecise Bayesian approach to thermal runaway probability. *Proc. 12th Int. Symp. on Imprecise Probability: Theories and Applications*. Ser.: Proceedings of Machine Learning Research (PMLR). 2021, vol. 147, pp. 150–160.
62. Derevich I.V. Effect of temperature fluctuations of fluid on thermal stability of particles with exothermic chemical reaction. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2010, vol. 53, nos. 25–26, pp. 5920–5932. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.031>.
63. Derevich I., Galdina D. Simulation of thermal explosion of catalytic granule in fluctuating temperature field. *J. Appl. Math. Phys.*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 1–7. <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2013.15001>.
64. Derevich I.V., Ermolaev V.S., Mordkovich V.Z., Solomonik I.G., Fokina A.Yu. Heat and mass transfer in Fischer–Tropsch catalytic granule with localized cobalt microparticles. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2018, vol. 121, pp. 1335–1349. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.01.077>.
65. Donskoy I.G., Gross E.I. Numerical analysis of thermal ignition statistics in a stochastic reacting medium. *Inf. Mat. Tekh. Nauke Upr.*, 2024, no. 1, pp. 66–77. <https://doi.org/10.25729/ESI.2024.33.1.006>. (In Russian)
66. Derevich I.V., Klochkov A.K. Thermal explosion of single particles in a random medium-temperature field. *High Temp.*, 2023, vol. 61, no. 1, pp. 98–107. <https://doi.org/10.1134/S0018151X23010030>.
67. Frank-Kamenetskii D.A. *Diffuziya i teploperedacha v khimicheskoi kinetike* [Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics]. Moscow, Nauka, 1987. 502 p. (In Russian)
68. Merzhanov A.G., Ozerkovskaya N.I., Shkadinskii K.G. Dynamics of thermal explosion in the postinduction period. *Combust., Explos. Shock Waves*, 1999, vol. 35, no. 6, pp. 660–665. <https://doi.org/10.1007/BF02674540>.
69. Barzykin V.V. Thermal explosion under linear heating. *Combust., Explos. Shock Waves*, 1973, vol. 9, no. 1, pp. 29–42. <https://doi.org/10.1007/BF00740358>.

70. Novozhilov V. Thermal explosion in oscillating ambient conditions. *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, no. 1, art. 29730. <https://doi.org/10.1038/srep29730>.
71. Fedotov S.P. Statistical model of the thermal ignition of a distributed system. *Combust. Flame*, 1992, vol. 91, no. 1, pp. 65–70. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(92\)90127-B](https://doi.org/10.1016/0010-2180(92)90127-B).
72. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Ser.: Stochastic Modelling and Applied Probability. Vol. 23. Berlin, Heidelberg, Springer, 1992. xxxvi, 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>.
73. Donskoy I. Thermal explosion problem with a stochastic boundary: Quasi-stationary approximation and direct numerical modelling. *Research Square*. Preprint, 2023. <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-3464165/v1>.
74. Takeno T. Ignition criterion by thermal explosion theory. *Combust. Flame*, 1977, vol. 29, pp. 209–211. [https://doi.org/10.1016/0010-2180\(77\)90108-0](https://doi.org/10.1016/0010-2180(77)90108-0).
75. Wilke S., Schweitzer B., Khateeb S., Al-Hallaj S. Preventing thermal runaway propagation in lithium ion battery packs using a phase change composite material: An experimental study. *J. Power Sources*, 2017, vol. 340, pp. 51–59. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.11.018>.
76. Shahid S., Agelin-Chaab M. A review of thermal runaway prevention and mitigation strategies for lithium-ion batteries. *Energy Convers. Manage.: X*, 2022, vol. 16, art. 100310. <https://doi.org/10.1016/j.ecmx.2022.100310>.
77. Chen M., Sun Q., Li Y., Wu K., Liu B., Peng P., Wang Q. A thermal runaway simulation on a lithium titanate battery and the battery module. *Energies*, 2015, vol. 8, no. 1, pp. 490–500. <https://doi.org/10.3390/en8010490>.
78. Feng X., He X., Ouyang M., Wang L., Lu L., Ren D., Santhanagopalan S. A coupled electrochemical-thermal failure model for predicting the thermal runaway behavior of lithium-ion batteries. *J. Electrochem. Soc.*, 2018, vol. 165, no. 16, art. A3748. <https://doi.org/10.1149/2.0311816jes>.

Для цитирования: Донской И.Г. Численное моделирование характеристик за-
жигания цилиндрического тепловыделяющего образца в среде со случайными колеба-
ниями температуры // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166,
кн. 3. С. 343–363. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.343-363>.

For citation: Donskoy I.G. Numerical modeling of the ignition characteristics of a
cylindrical heat-generating sample in a medium with stochastic temperature variations.
Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024,
vol. 166, no. 3, pp. 343–363.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.343-363>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.364-376

О ЗАДАЧЕ ДЕГРАДАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК
ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ И МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Р.А. Каюмов¹, И.З. Мухамедова^{1,2}, Л.И. Хайдаров¹, Б.Ф. Тазюков²

¹*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Казань, 420043, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Предложены определяющие соотношения и методика анализа поведения стеклопластика при совместном воздействии силовых факторов и щелочной среды при продольном изгибе. Описаны модели натурного и численного экспериментов. Предложен новый подход к решению задачи о продольном изгибе балки с начальной прогибью без привлечения геометрически нелинейных соотношений. Такой подход может быть использован в тех случаях, когда результирующая конфигурация балки представляет собой пологую кривую. Приведены результаты числовых расчетов. В первом случае рассмотрен брус с начальной прогибью на основе предложенного подхода и с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Для верификации во втором случае решена задача в геометрически нелинейной постановке. Установлено характерное согласование полученных результатов.

Ключевые слова: стеклопластик, конечно-элементная модель, геометрическая нелинейность, щелочная среда, параметр поврежденности, вычислительный эксперимент

Введение

Процесс деформирования и деградации композитов имеет особенности в зависимости от структуры и типа компонент материала, а также от вида нагружения [1, 2]. В общем случае уровень деградации учитывается не только при оценке прочности, но и в физических соотношениях, описывающих упругие и реологические процессы. Например, в [3] рассмотрена связанная задача теории пластического течения и теории поврежденности, в [4] использованы физические соотношения для параметра поврежденности, которые содержат деформацию ползучести. Существуют теории, в которых в качестве меры деградации используется величина интенсивности накопленных деформаций ползучести (см. в [5]). Различные формы соотношений для параметра деградации описаны в работах [6–9]. Вопросы влияния различных дефектов и накопления повреждений на механические характеристики композитных конструкций рассмотрены в работах [10–18]. В них проведен обзор существующих математических и экспериментальных методов, предложены модели деградации свойств композитов, дана оценка влияния поврежденности на изменение свойств композита и распределение напряжений.

Задача определения механических характеристик композитных материалов по известным входным и выходным данным, называемая задачей идентификации, является обратной задачей, которая, как правило, не может быть решена точно. Кроме того, она может оказаться неустойчивой к исходным данным. Некоторые подходы к определению параметров, характеризующих нелинейно-упругое поведение волокнистых композитных материалов (ВКМ), рассмотрены в [19–21]. В случае линейно-упругих композитов были установлены условия невырожденности разрешающей системы уравнений и предложены способы её нормировки, улучшающие обусловленность задачи. В [22, 23] такая же задача рассмотрена для определения линейно-упругих характеристик ВКМ. В [24, 25] предложен метод идентификации линейно-упругих характеристик ВКМ по замерам деформаций тонкой многослойной пластины, изготовленной наложением слоев ВКМ с различной ориентацией волокон. В [26, 27] идентификация линейно-упругих характеристик ВКМ произведена по результатам динамических испытаний оболочек и пластин. В [28, 29] в качестве объектов испытаний рассмотрены намоточные оболочки вращения. В [19] предложен подход, при котором вводятся дополнительные неизвестные, представляющие собой независимые вариации как исходных, так и искоемых параметров. Показано, что получаемое при этом решение гораздо точнее удовлетворяет всем разрешающим уравнениям задачи. Обнаружено также, что при больших различиях в значениях неизвестных даже незначительные (в пределах $\pm 5\%$) возмущения исходных данных весьма существенно влияют на определяемые значения малых параметров. Методам регуляризации таких задач идентификации посвящена достаточно обширная литература (см., например, обзоры в [30, 31]).

1. Определяющие соотношения для наследственно-упругого материала с учетом деградации

Рассмотрим модель стеклопластикового образца толщины H_0 и длины l , находящегося в щелочной среде при продольном изгибе (рис. 1). Щелочь, как химическая агрессивная среда, приводит к изменению механических свойств композита, а именно, накоплению микровреждений в материале. Это явление в дальнейшем будем называть деградацией композитного материала [32–34].

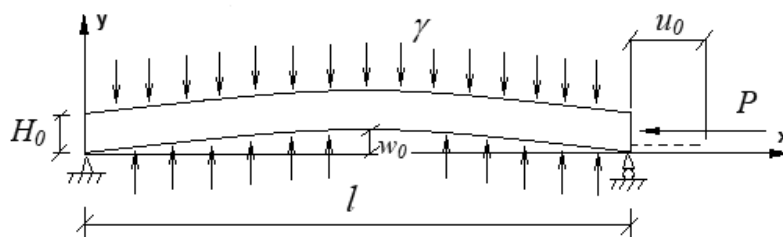


Рис. 1. Модель стеклопластикового образца, находящегося в щелочной среде с концентрацией γ

Согласно [35] введем скалярный параметр поврежденности ω , который будет описывать накопление в материале дефектов типа микротрещин и микропор. Поскольку далее рассматривается изгиб балок, то использование скалярного параметра вполне оправдано. Следуя работам Ю.Н. Работнова [4, 35], кинетическое

уравнение относительно ω примем в простейшем виде

$$\dot{\omega} = \frac{B_{\omega}\sigma_x}{(1-\omega)}(1+W). \quad (1)$$

Здесь постоянную B_{ω} нужно находить из экспериментов. В (1) входит второй параметр состояния W , определяющий концентрацию щелочи в материале.

Будем использовать определяющие соотношения для стеклопластика с учетом вязкоупругих свойств полимерного материала по линейной теории наследственности. Примем гипотезу Качанова [36], согласно которой механизмы процессов вязкоупругости и накопления повреждений, в общем, различны и независимы. Тогда для деформации вязкоупругости можно записать следующее определяющее соотношение

$$\varepsilon^{visco} = \int_0^t H(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau.$$

Ядро ползучести H примем в виде ядра Абеля [37], которое хорошо описывает ползучесть различных полимерных материалов:

$$H(t-\tau) = \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha}}, \quad C \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Здесь константы C и α определяются из экспериментов.

Дискретизацию задачи осуществим методом конечных элементов (МКЭ), в качестве которых приняты шестиузловые треугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений. Для численного интегрирования по времени применим метод Эйлера.

Для вектора деформации, возникающего от наличия поврежденности, примем кинетическую зависимость

$$\{\dot{\varepsilon}^{\omega}\} = [D]^{-1} \{\sigma\} z \omega^k. \quad (3)$$

Здесь $[D]$ – матрица упругих постоянных для плоского напряженного состояния; z и k – некоторые постоянные величины, определяемые из экспериментов.

С учетом процесса накопления микроповреждений и вязкоупругих свойств стеклопластика, полная деформация ε примет вид

$$\varepsilon = e + \varepsilon^{visco} + \varepsilon^{\omega},$$

где e – упругая часть деформации. С учетом вышеизложенного закон Гука примет форму:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{visco}\} - \{\varepsilon^{\omega}\}).$$

Согласно принципу Лагранжа можно записать соотношение

$$\int_V \delta \varepsilon^T \{\sigma\} dV = \delta \{U\}^T \{P\}.$$

Здесь $\{U\}$ – вектор перемещений, $\{P\}$ – вектор внешних сил, знак « T » означает операцию транспонирования.

Таким образом, по методу конечных элементов разрешающее уравнение равновесия примет вид

$$[K]\{U\} = \{P\} + \{P^{visco}\} + \{P^{\omega}\}.$$

Здесь $[K]$ – глобальная матрица жесткости. В узлах сетки, кроме вектора внешних узловых сил, действуют компоненты, отвечающие за процесс вязкоупругости $\{P^{visco}\}$ и процесс деградации: $\{P^\omega\}$:

$$\{P^{visco}\} = \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon^{visco}\} dV, \quad \{P^\omega\} = \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon^\omega\} dV.$$

2. Модель натурального эксперимента

Исследуем полимерный композитный материал в виде плоских протяженных элементов, армированных стекловолокном.

Для экспериментов была выбрана щелочная среда, в которую погружаются образцы из стеклопластика, закрепленные шарнирно, как показано на рис. 1.

Деформирование исследуемых образцов проводилось следующим образом. Задавалось продольное перемещение правого торца на величину u_0 . Затем правый торец закреплялся как шарнирно неподвижный. При этом максимальный прогиб w_0 будет посередине образца (рис. 1). Далее образцы в таком зафиксированном изогнутом состоянии выдерживались в щелочной среде несколько суток с проведением промежуточных замеров нагрузки. Для этого при $t = t_n$ образцы вынимались из щелочной среды, а правый торец считался шарнирно подвижным, чтобы он мог свободно перемещаться в продольном направлении. Далее, как показано на рис. 1, справа прикладывалась нагрузка P , и вновь образец изгибался так, чтобы его правый торец получил исходное продольное перемещение u_0 . С помощью динамометра производился замер промежуточной нагрузки P_i .

Прогиб запишем в следующем виде:

$$w_0 = w^e + w^{visco} + w^\omega.$$

Здесь w^e – прогиб, зависящий от упругих свойств стеклопластика, w^{visco} – прогиб, вызванный вязкоупругостью, w^ω – прогиб, вызванный накоплением микроразрушений. В начальный момент времени при $t = 0$ [38]

$$w_0 = w^e = \frac{2}{\pi} \sqrt{l u_0}.$$

При промежуточных замерах выражения для прогиба посередине образца примут вид

$$t = t_n : \quad w_n = \frac{2}{\pi} \sqrt{l u_0} - w_n^{visco} - w_n^\omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, с течением времени параметры w^{visco} и w^ω , вызванные вязкоупругостью и деградацией, будут увеличиваться. В итоге получим серию экспериментальных данных, по которым методом идентификации можно определить механические характеристики, входящие в формулы (2) и (3).

3. Метод численного решения

Предложен подход к решению задачи о продольном изгибе балки, который может значительно уменьшить время расчета. Он будет полезен и в задачах оптимизации, а не только при идентификации механических характеристик материала балки, поскольку в этих задачах обычно требуется большое количество расчетов с разными вариантами исходных данных. Этот подход может быть использован и в тех случаях, когда результирующая конфигурация балки представляет собой

пологую кривую, поскольку следующие ниже соотношения (4) и (5) получены с использованием этого предположения [38].

Рассмотрим изогнутый стержень, как показано на рис. 2. При продольном изгибе в случае упругого деформирования параметры P и w_0 связаны приближенным соотношением [35, 38]

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(1 + \frac{\pi^2 w_0^2}{8l^2} \right), \quad (4)$$

где EJ – жесткость стержня.

Зададим изогнутую форму оси стержня по формуле

$$w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5)$$

Продольное перемещение правого торца будет иметь вид [38]

$$u = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l}.$$

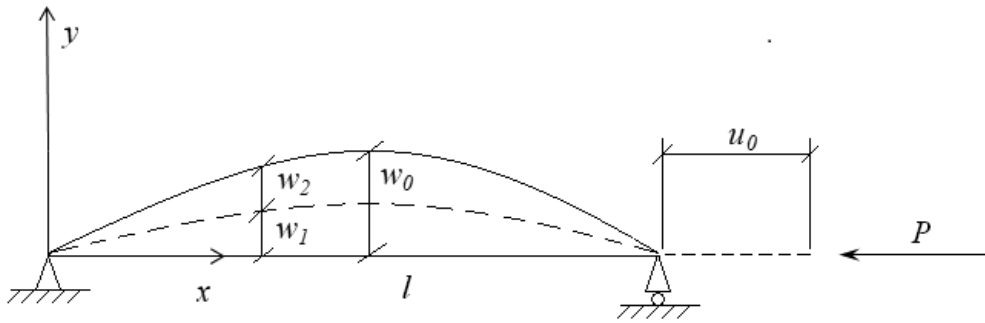


Рис. 2. Модель изгиба стержня продольной силой P

Сведем задачу к геометрически линейной постановке. Считаем, что

$$w_0 = w_1 + w_2.$$

Из соотношения (4) выразим w_0 :

$$w_0 = \frac{l 2\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{Pl^2 - \pi^2 EJ}{EJ}}.$$

Согласно закону Гука можно записать выражение для изгибающего момента в виде

$$M = EJw_2''. \quad (6)$$

Если задача сформулирована в геометрически линейной постановке, то согласно рис. 2 изгибающий момент примет вид

$$M = -Pw_1. \quad (7)$$

Тогда согласно выражениям (6) и (7) можно записать в форме

$$EJw_2'' = -Pw_1,$$

$$w_0 \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right)'' = \frac{1}{EJ} P w_1 + w_1''. \quad (8)$$

Решив дифференциальное уравнение (8) с учетом условий закрепления, получим аналитическое решение в виде

$$w_1(x) = [w_0 EJ \pi^2 / (Pl^2 + EJ \pi^2)] \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (9)$$

Далее решим задачу численно МКЭ. Зададим начальный прогиб w_1 согласно (9) и определим w_2 . В итоге получим выражение

$$w_0 = w_1(l/2) + w_2(l/2).$$

Таким образом, предложенная методика позволяет получать прогибы при продольном изгибе на основе численного решения линейной задачи, например, МКЭ.

Для верификации предложенного подхода рассмотрим задачу о продольном изгибе, которую решим МКЭ в двух постановках. Граничные условия в численных моделях выберем так, чтобы они соответствовали шарнирно-опертой балке. В первой постановке используем двумерную модель. Рассмотрим брус с начальной погибью, которая определялась по формуле (9).

Во втором варианте задача решалась в геометрически нелинейной постановке МКЭ с помощью пакета ANSYS. Второй вариант задачи был просчитан двумя типами конечных элементов (КЭ): балочными и пластинчатыми. Решения с этими типами КЭ дали отличия не более 3 %. Для обеспечения изгиба бруса была задана начальная погибь, но она принималась малой: $w_1 \ll w_0$ ($w_1 < 0.02 w_{\max}$).

На рис. 3 приведены зависимости P/P_{cr} от u_0/l для аналитического решения и решения в геометрически нелинейной постановке (P_{cr} – это критическое напряжение, вычисляемое по формуле Эйлера для шарнирно-опертого стержня). Входные данные: модуль упругости $E = 500000$ кг/см²; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; высота образца $h = 0.6$ см; ширина образца $b = 1$ см. Вычислительные эксперименты проводились для разных длин образца: $l = 18$ см, $l = 30$ см, $l = 42$ см. Расчеты показали, что аналитическое решение и решение, полученное для задачи в первой постановке, оказались близкими. Сравнение результатов расчетов показало, что отличие численного решения задачи в геометрически нелинейной постановке от решения предложенным методом для $l = 18$ см составляет 7%, а для длины $l = 42$ см – 5.3 %.

Отметим, что нарушение условия пологости не очень сильно ухудшает результат. Например, при $l = 18$ см угол наклона получается равным $\arctan(1.48) = 56^\circ$. При этом результаты, полученные аналитически и численно в геометрически нелинейной постановке, отличаются всего на 7 %.

Заключение и выводы

Таким образом, предложена методика решения задачи продольного изгиба при расчете балки с начальной погибью без привлечения геометрически нелинейных соотношений, которая позволяет получать хорошие результаты даже при больших перемещениях. Как видно из рис. 3, продольное перемещение составляет 56 % от длины балки, а отличие нагрузки, полученной при этом предложенным методом, – 7 %.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”).

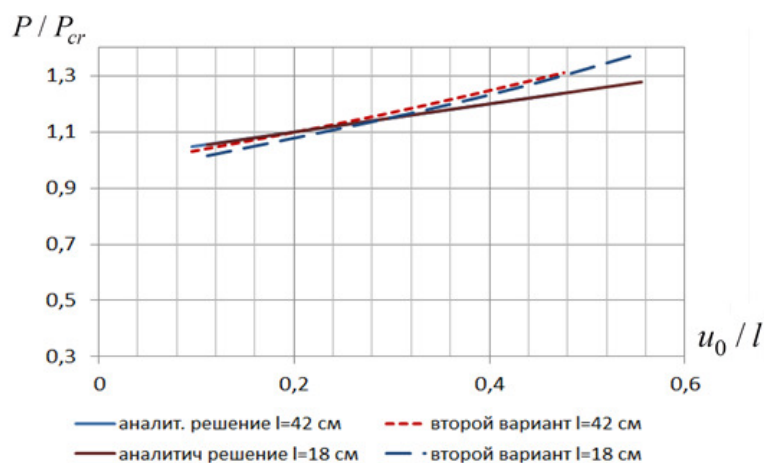


Рис. 3. Зависимость P/P_{cr} от u_0/l для аналитического решения и решения в геометрически нелинейной постановке

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Васильев В.В., Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении // Механ. полимеров. 1970. № 1. С. 144–147.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
3. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Самарск. ун-т, 2001. 631 с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Cocks A.C.F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material // Scr. Metall. 1982. V. 16, No 1. P. 109–114. [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(82\)90413-6](https://doi.org/10.1016/0036-9748(82)90413-6).
6. Ахундов М.Б. Повреждаемость и деформирование нелинейных наследственных сред при сложнапряженном состоянии // Мех. композ. матер. 1991. № 2. С. 235–239.
7. Суворова Ю.В. О критерии прочности, основанном на накоплении повреждений, и его приложениях к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 107–111.
8. Думанский А.М., Финогенов Г.Н. Методика оценки поврежденности полимерных волокнистых композитов при длительном статическом нагружении // Завод. лаб. 1993. № 4. С. 60–62.
9. Москвитин В.В. Некоторые вопросы длительной прочности вязко-упругих тел // Пробл. прочн. 1972. № 2. С. 55–58.
10. Луат Д.Ч., Лурье С.А., Дудченко А.А. Моделирование деградации свойств композита при растрескивании и расслоении при статическом и циклическом нагружении // МКМК. 2008. Т. 14, № 4. С. 623–637.
11. Божоева Л.А. Особенности расчёта на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: ВСГТУ, 2007. 192 с.

12. *Брянский А.А., Башков О.В., Проценко А.Е., Малышева Д.П.* Исследование кинетики накопления повреждений в стеклопластике при испытании изгибом и растяжением // Матер. IV Всерос. нац. научн. конф. студ., аспирантов и молодых ученых. В 4-х частях. 2021. С. 12–15.
13. *Локощенко А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В.* Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала // Машиностр. инженер. образов. 2012. № 3. С. 29–35.
14. *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Мех. композ. матер. 1984. № 2. С. 239–255.
15. *Bottega W.J., Maewal A.* Delamination buckling and growth in laminates // J. Appl. Mech. 1983. V. 50, No 1. P. 184–189. <https://doi.org/10.1115/1.3166988>.
16. *Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G.* One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling // Int. J. Solids Struct. 1981. V. 27, No 11. P. 1069–1083. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90014-7).
17. *Muc A., Stawiarski A.* Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations // Compos. Struct. 2012. V. 94, No 5. P. 1871–1879. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.11.026>.
18. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A.* Degradation of the mechanical properties of fiber reinforced plastic under cyclic loading // Mech. Compos. Mater. 2023. V. 59, No 2. P. 371–380. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10101-1>.
19. *Каюмов Р.А.* Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 94–103.
20. *Терегулов И.Г., Бутенко Ю.И., Каюмов Р.А., Сафиуллин Д.Х., Алексеев К.П.* К определению механических характеристик нелинейно-упругих композитных материалов // Прикл. мех. техн. физ. 1996. Т. 37, № 6. С. 170–180.
21. *Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Бутенко Ю.И., Сафиуллин Д.Х.* Определение механических характеристик композитов по результатам испытаний многослойных образцов // Мех. композ. матер. 1995. Т. 31, № 5. С. 607–615.
22. *Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И.* Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Мех. композ. матер. 1990. № 4. С. 733–747.
23. *Суворова Ю.В., Добрынин В.С., Статников И.Н., Барт Ю.Я.* Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Мех. композ. матер. 1989. № 1. С. 150–157.
24. *Алфутов Н.А., Таирова Л.П.* Возможности определения свойств монослоя в композите // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов. Рига: Зинатне, 1986. С. 212–215.
25. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П.* Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Т. 30. С. 16–31.
26. *Рикардс Р., Чате А.* Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов // Мех. композ. матер. 1998. Т. 34, № 1. С. 3–16.
27. *Frederiksen P.S.* Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates // J. Compos. Mater. 1997. V. 31, No 4. P. 360–382. <https://doi.org/10.1177/002199839703100403>.
28. *Каюмов Р.А.* Связанная задача расчета механических характеристик материалов и конструкций из них // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 118–127.

29. Тергулов И.Г., Каюмов Р.А., Фазрутдинов И.Х. Идентификация механических характеристик композитного материала по результатам испытаний оболочек вращения // Мех. композ. матер. 1998. Т. 34, № 6. С. 771–776.
30. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: МГУ, 1987. 216 с.
31. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
32. Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Тазюков Б.Ф. Моделирование процесса деградации стеклопластика под действием напряжений и щелочной среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2. С. 194–205.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.194-205>.
33. Kayumov R.A., Suleymanov A.M., Muhamedova I.Z. Estimation of the durability of polymer composites on a fabric basis, taking into account the influence of non-force factors // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 934, No 1. Art. 012041.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012041>.
34. Kayumov R.A., Strakhov D.E., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Mathematical models of inelastic behavior of flat fiberglass samples under three-point bending // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 10. P. 4448–4456.
<https://doi.org/10.1134/S1995080223100207>.
35. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
36. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
37. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
38. Каюмов Р.А., Нежданов Р.О., Тазюков Б.Ф. Определение характеристик волокнистых композитных материалов методами идентификации. Казань: Изд-во КГУ, 2005. 258 с.

Поступила в редакцию 21.06.2024

Принята к публикации 31.07.2024

Каюмов Рашид Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: Kayumov@rambler.ru

Мухамедова Инзилия Заудатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики, старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Л. Лобачевского

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: Muhamedova-inzilija@mail.ru

Хайдаров Ленар Ильнурович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры металлических конструкций и испытания сооружений

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: haidarov_lenar@mail.ru

Тазюков Булат Фэридович, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 364–376

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.364-376

**On the Problem of Composite Beam Degradation under Longitudinal Bending
and the Solution Method for Large Displacements**

R.A. Kayumov^{a}, I.Z. Mukhamedova^{a,b**}, L.I. Khaidarov^{a***}, B.F. Tazyukov^{b****}*

^a*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: **Kayumov@rambler.ru, **Muhammedova-inziliya@mail.ru, ***haidarov_lenar@mail.ru, ****Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

Received June 21, 2024; Accepted July 31, 2024

Abstract

Constitutive relations and a method for analyzing the behavior of fiberglass during longitudinal bending under the combined influence of force factors and an alkaline medium were proposed. Both natural and numerical experimental designs were outlined. A new approach to solving the problem of longitudinal bending of a fiberglass beam with initial failure was introduced, without involving geometrically nonlinear relations. This approach proved to be applicable when the resulting beam configuration is a flat curve. The results of numerical calculations were presented. In the first case, the beam with initial failure was studied using the new approach along with the finite element method (FEM). In the second case, for verification, the problem was solved in a geometrically nonlinear formulation. The results obtained showed a strong agreement.

Keywords: fiberglass, finite element model, geometric nonlinearity, alkaline medium, failure parameter, numerical experiment

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Model of a fiberglass sample placed in an alkaline medium with the concentration γ .

Fig. 2. Model of a beam bending under the longitudinal force P .

Fig. 3. Dependence of P/P_{cr} on u_0/l for the analytical and geometrically nonlinear solutions.

References

1. Vasil'ev V.V., Dudchenko A.A., Elpat'evskii A.N. Analysis of the tensile deformation of glass-reinforced plastics. *Polym. Mech.*, 1970, vol. 6, no. 1, pp. 127–130. <https://doi.org/10.1007/BF00860460>.
2. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloinykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Design of Multilayered Plates and Shells Made of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 263 p. (In Russian)
3. Astaf'ev V.I., Radaev Yu.N., Stepanova L.V. *Nelineinaya mekhanika razrusheniya* [Non-linear Fracture Mechanics]. Samara, Samar. Univ., 2001. 631 p. (In Russian)
4. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksii* [Creep of Structural Elements]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p. (In Russian)
5. Cocks A.C.F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material. *Scr. Metall.*, 1982, vol. 16, no. 1, pp. 109–114. [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(82\)90413-6](https://doi.org/10.1016/0036-9748(82)90413-6).
6. Akhundov M.B. Damage and deformation of nonlinear hereditary media in a complex stress state. *Mech. Compos. Mater.*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 155–158. <https://doi.org/10.1007/BF00614731>.
7. Suvorova Yu.V. Strength criterion based on defectiveness buildup and its application to composite materials. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1979, no. 4, pp. 107–111. (In Russian)
8. Dumanskii A.M., Finogenov G.N. Methodology for assessing the damage in polymer fiber composites during prolonged static loading. *Zavod. Lab.*, 1993, no. 4, pp. 60–62. (In Russian)
9. Moskvitin V.V. Some problems of the long-term strength of viscoelastic media. *Probl. Prochn.*, 1972, no. 2, pp. 55–58. (In Russian)
10. Luat D. C., Lurie S. A., Dudchenko A. A. Modeling the degradation of composite properties due to cracking and delamination under static and cyclic loadings. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 623–637. (In Russian)
11. Bokhoeva L.A. *Osobennosti rascheta na prochnost' elementov konstruksii iz izotropnykh i kompozitsionnykh materialov s dopustimymi defektami* [Strength Calculation for Structural Elements Made of Isotropic and Composite Materials with Minor Defects]. Ulan-Ude, VSGTU, 2007. 192 p. (In Russian)
12. Bryanskii A.A., Bashkov O.V., Protsenko A.E., Malysheva D.P. A study of damage accumulation kinetics in fiberglass during buckling and stretching tests. *Mater. IV Vseros. nats. nauchn. konf. stud., aspir. i molod. uchen.* [Proc. IV All-Russ. Natl. Sci. Conf. of Students, Graduate Students, and Young Researchers]. 2021, pp. 12–15. (In Russian)
13. Lokoshchenko A.M., Agakhi K.A., Fomin L.V. Beam bending under creep conditions considering material failure and varying resistance. *Mashinostr. Inzh. Obraz.*, 2012, no. 3, pp. 29–35. (In Russian)
14. Bolotin V.V. Defects of the delamination type in composite structures. *Mech. Compos. Mater.*, 1984, vol. 20, no. 2, pp. 173–188. <https://doi.org/10.1007/BF00610358>.
15. Bottega W.J., Maewal A. Delamination buckling and growth in laminates. *J. Appl. Mech.*, 1983, vol. 50, no. 1, pp. 184–189. <https://doi.org/10.1115/1.3166988>.
16. Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Struct.*, 1981, vol. 27, no. 11, pp. 1069–1083. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90014-7).
17. Muc A., Stawiarski A. Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 5, pp. 1871–1879. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.11.026>.

18. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Degradation of the mechanical properties of fiber reinforced plastic under cyclic loading. *Mech. Compos. Mater.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 371–380. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10101-1>.
19. Kayumov R.A. Extended problem of the identification of mechanical characteristics of materials on the basis of testing of structures. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2004, no. 2, pp. 94–103. (In Russian)
20. Teregulov I.G., Butenko Yu.I., Kayumov R.A., Safiullin D.Kh., Alekseev K.P. On determining the mechanical properties of nonlinear-elastic composite materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/BF02369273>.
21. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Butenko Yu.I., Safiullin D.Kh. Determination of the mechanical indices of composite materials by testing multilayered samples. *Mech. Compos. Mater.*, 1996, vol. 31, no. 5, pp. 446–452. <https://doi.org/10.1007/BF00617127>.
22. Vorontsov G.V., Plyushchev B.I., Reznichenko A.I. Determining the reduced elastic characteristics of reinforced composite materials using the methods of inverse tensometric problems. *Mech. Kompoz. Mater.*, 1990, no. 4, pp. 733–747. (In Russian)
23. Suvorova Yu.V., Dobrynin V.S., Statnikov I.N. Determining the properties of a composite in a structure by the parametric-identification method. *Mech. Compos. Mater.*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 130–136. <https://doi.org/10.1007/BF00608463>.
24. Alfutov N.A., Tairova L.P. Possibilities for determining the properties of a composite monolayer. In: *Metody i sredstva diagnostiki nesushchei sposobnosti izdelii iz kompozitov* [Methods and Tools for Determining the Load-Bearing Capacity of Composite Products]. Riga, Zinatne, 1986, pp. 212–215. (In Russian)
25. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Tairova L.P. Identification of elastic characteristics of unidirectional materials by testing multilayer composites. In: *Raschety na prochnost'* [Strength Calculations]. Vol. 30. Moscow, Mashinostroenie, 1989, pp. 16–31. (In Russian)
26. Rikards R., Chate A. Identification of mechanical properties of composites based on design of experiments. *Mech. Compos. Mater.*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1007/BF02256137>.
27. Frederiksen P.S. Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates. *J. Compos. Mater.*, 1997, vol. 31, no. 4, pp. 360–382. <https://doi.org/10.1177/002199839703100403>.
28. Kayumov R.A. Identification of mechanical characteristics of materials and design of structures made of these materials. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1999, no. 6, pp. 118–127. (In Russian)
29. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Fakhрутдинov I.H. Identification of the mechanical characteristics of composite materials from experimental data of shells of revolution. *Mech. Compos. Mater.*, 1998, vol. 34, no. 6, pp. 545–548. <https://doi.org/10.1007/BF02254663>.
30. Morozov V.A. *Metody regulyarizatsii neustoichivyykh zadach* [Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, MGU, 1987. 216 p. (In Russian)
31. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnyykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1979. 285 p. (In Russian)
32. Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Modeling of fiberglass degradation process under stresses and alkaline environment. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 194–205. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.194-205>. (In Russian)
33. Kayumov R.A., Suleymanov A.M., Muhamedova I.Z. Estimation of the durability of polymer composites on a fabric basis, taking into account the influence of non-force factors. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 934, no. 1, art. 012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012041>.

34. Kayumov R.A., Strakhov D.E., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Mathematical models of inelastic behavior of flat fiberglass samples under three-point bending. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4448–4456. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100207>.
35. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1979. 744 p. (In Russian)
36. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Principles of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974. 312 p. (In Russian)
37. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 400 p. (In Russian)
38. Kayumov R.A., Nezhdanov R.O., Tazyukov B.F. *Opredelenie kharakteristik voloknistykh kompozitnykh materialov metodami identifikatsii* [Determining Fiber Composite Material Characteristics by the Identification Methods]. Kazan, Izd. KGU. 2005. 258 p. (In Russian)

Для цитирования: Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Хайдаров Л.И., Тазюков Б.Ф.

О задаче деградации композитных балок при продольном изгибе и методе решения при больших перемещениях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 364–376. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.364-376>.

For citation: Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z., Khaidarov L.I., Tazyukov B.F.

On the problem of composite beam degradation under longitudinal bending and the solution method for large displacements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 364–376. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.364-376>. (In Russian)

ORIGINAL ARTICLE

UDC 517.956.35

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.377-394

**Initial-Boundary Value Problem with Dirichlet and Wentzell
Conditions for a Mildly Quasilinear Biwave Equation**

V.I. Korzyuk^{a,b}, J.V. Rudzko^b

^a*Belarusian State University, Minsk, 220000 Republic of Belarus*

^b*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, 220000 Republic of Belarus*

Abstract

For a nonstrictly hyperbolic mildly quasilinear biwave equation in the first quadrant, an initial-boundary value problem with the Cauchy conditions specified on the spatial half-line and the Dirichlet and Wentzell conditions applied on the time half-line was examined. The solution was constructed in an implicit analytical form as a solution of some integro-differential equations. The solvability of these equations was investigated using the parameter continuation method. For the problem under study, the uniqueness of the solution was proved, and the conditions under which its classical solution exists were established. In the case when the data were not smooth enough, a mild solution was constructed.

Keywords: method of characteristics, mildly quasilinear biwave equation, nonlinear equation, nonstrictly hyperbolic equation, initial-boundary value problem, matching conditions, classical solution, parameter continuation method, mild solution

Introduction

The classical linear biwave equation

$$(\partial_t^2 - a^2 \Delta)(\partial_t^2 - b^2 \Delta)u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \quad (1)$$

applies to mathematical models related to the mathematical theory of elasticity. For example, the Cauchy–Kovalevski–Somigliana solution of the elastodynamic wave equation can be obtained by solving the biwave equation [1]. The Cauchy problem for Eq. (1) was examined in [1, 2] for the cases $a \neq b$ and $a = b$, respectively.

The following equation is one of the simplest one-dimensional linear generalizations of Eq. (1)

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)u(t, x) + m^2 \partial_t^2 u(t, x) = f(t, x), \quad (2)$$

on which the Timoshenko–Ehrenfest beam theory relies [3]. When the axial effect is considered, the equation becomes [4]

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)u(t, x) + m^2 \partial_t^2 u(t, x) + N \partial_x^2 u(t, x) = f(t, x), \quad (3)$$

taking the place of (2).

A large class of boundary value problems was investigated in [5–9] for the linear generalization of Eq. (1) expressed as

$$(\partial_t^2 - a^2 \Delta)(\partial_t^2 - b^2 \Delta)u(t, \mathbf{x}) + \sum_{|\alpha| \leq 3} a^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^\alpha u(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}).$$

In [10], it was proposed to describe various physical processes by nonlinear equations of the form

$$(\partial_t^2 - \Delta)^l u(t, \mathbf{x}) = F(u(t, \mathbf{x}), \Delta u(t, \mathbf{x})). \quad (4)$$

For $l = 1$ and $F(u, w) = F(u)$, Eq. (4) reduces to the standard nonlinear wave equation $(\partial_t^2 - \Delta)u(t, x) = F(u(t, x))$, which describes a scalar, spinless, and uncharged particle in the quantum field theory [11]. The symmetry properties of Eq. (4) with $l = 2$ and $F(u, w) = F(u)$ were studied in [11]. The solvability of boundary value problems for Eq. (4) was analyzed using the Leray–Schauder fixed point theorem in [12–15].

All of Eqs. (1)–(4), where $l = 2$, in the one-dimensional case, represent a special instance of the following equation:

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)u(t, x) = f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x), \partial_t^2 u(t, x), \partial_t \partial_x u(t, x), \partial_x^2 u(t, x)), \quad (5)$$

which is classified as (strictly) hyperbolic if $a \neq b$ and as nonstrictly hyperbolic if $a = b$.

This article focuses on the nonstrictly hyperbolic case of Eq. (5). Section 1 contains a statement of the initial-boundary value problem. In Section 2, this problem is reduced to the solution of integro-differential equations, and their solvability, uniqueness, and well-posedness are established. In Section 3, the existence and uniqueness theorem for the initial-boundary value problem is formulated. Section 4 outlines a mild solution and proves its existence and uniqueness. The last section summarizes the findings of the study.

1. Statement of the Problem

In the domain $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ of two independent variables $(t, x) \in \overline{Q} \in \mathbb{R}^2$, the following one-dimensional nonlinear equation is considered:

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)^2 u(t, x) = \mathcal{F}[u](t, x) := f(t, x, u(t, x), \partial_t u(t, x), \partial_x u(t, x), \partial_t^2 u(t, x), \partial_t \partial_x u(t, x), \partial_x^2 u(t, x)), \quad (6)$$

where $a > 0$ for definiteness, and f is a function defined on the set $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}^6$. Equation (6) is equipped with the initial conditions

$$u(0, x) = \varphi_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = \varphi_1(x), \quad \partial_t^2 u(0, x) = \varphi_2(x), \quad \partial_t^3 u(0, x) = \varphi_3(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (7)$$

and the boundary conditions

$$u(t, 0) = \mu_0(t), \quad \partial_x^2 u(t, 0) = \mu_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (8)$$

where $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \mu_0$, and μ_1 are the functions defined on the half-line $[0, \infty)$.

As noted above, equations of the form (6) are used for modeling Timoshenko beams [3] in the nonstrictly hyperbolic case, i.e., when the equality $E = \kappa G$ holds, where E is the elastic modulus of the beam material, G is the shear modulus of the beam material, and κ is the Timoshenko shear coefficient. The homogeneous boundary conditions of the form $u(t, 0) = \partial_x^2 u(t, 0) = 0$ correspond to a simply supported

beam, the parameter $a = \sqrt{E\rho^{-1}}$, and the function f can be defined by the formula $\mathcal{F}[u](t, x) := (\kappa AGJ^{-1}m^{-1} + m^{-1}\partial_t^2 - EIJ^{-1}m^{-1})q(t, x) - \kappa AGJ^{-1}\partial_t^2 u(t, x)$, where A is the cross-sectional area of the beam, I is the second moment of cross-sectional area, $q(t, x)$ is a distributed load (force per unit length), $m := \rho A$, and $J := \rho I$.

2. Integro-Differential Equation

The domain Q is divided by the characteristic $x - at = 0$ into two subdomains $Q^{(j)} = \{(t, x) \in Q : (-1)^j(at - x) > 0\}$, $j = 1, 2$. In the closure $\overline{Q^{(j)}}$ of each of the subdomains $Q^{(j)}$, the integro-differential equations considered are

$$\begin{aligned}
 u^{(1)}(t, x) = & \int_{x-at}^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(z) + 2a^2t\varphi_2(z) + (a^2t^2 - (x-z)^2)\varphi_3(z)}{8a^3} dz + \\
 & + \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} - \frac{t(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at))}{4} + \\
 & + \frac{at(D\varphi_0(x-at) - D\varphi_0(x+at))}{4} + \\
 & + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2)\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau, z)}{8a^3} dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (9) \\
 u^{(2)}(t, x) = & \int_0^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(z) + 2a^2t\varphi_2(z) + (a^2t^2 - (x-z)^2)\varphi_3(z)}{8a^3} dz + \\
 & + \int_{at-x}^0 \frac{6a^2\varphi_1(z) + 2a^2t\varphi_2(z) + (a^2t^2 - (x+z)^2)\varphi_3(z)}{8a^3} dz + \\
 & + \frac{x}{2} \int_0^{x-at} \mu_1\left(-\frac{z}{a}\right) dz + \mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi_0(x+at) - \varphi_0(at-x)}{2} - \frac{x\varphi_1(0)}{2a} + \\
 & + \frac{t(\varphi_1(at-x) - \varphi_1(x+at))}{4} - \frac{x D\mu_0(0)}{2a} + \frac{x D\mu_0\left(t - \frac{x}{a}\right)}{2a} + \\
 & + \frac{at(D\varphi_0(at-x) - D\varphi_0(x+at))}{4} + \\
 & + \int_{t-x/a}^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2)\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau, z)}{8a^3} dz + \\
 & + \int_0^{t-x/a} d\tau \int_0^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2)\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau, z)}{8a^3} dz + \\
 & + \int_0^{t-x/a} d\tau \int_0^{a(t-\tau)-x} \frac{((x+z)^2 - a^2(t-\tau)^2)\mathcal{F}[u^{(2)}](\tau, z)}{8a^3} dz, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(2)}}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

where D is the ordinary derivative operator.

On the closure \overline{Q} of the domain Q , a function u is defined as the one coinciding with the solution $u^{(j)}$ of the integral equations (9) and (10)

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

on the closure $\overline{Q^{(j)}}$ of the domain $Q^{(j)}$.

Theorem 1. *Let the conditions $\varphi_0 \in C^5([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^4([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$, $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ hold. The function u belongs to the class $C^4(\overline{Q})$ and satisfies Eq. (6), the initial conditions (7), and the boundary conditions (8) if and only if, for each $j = 1, 2$, it is a solution of Eqs. (9) and (10) in the space $C^2(\overline{Q^{(j)}})$, subject to the following matching conditions:*

$$D\mu_0(0) = \varphi_1(0), \quad \mu_1(0) = D^2\varphi_0(0), \quad (12)$$

$$D^2\mu_0(0) = \varphi_2(0), \quad D\mu_1(0) = D^2\varphi_1(0), \quad (13)$$

$$D^3\mu_0(0) = \varphi_3(0), \quad D^2\mu_1(0) = D^2\varphi_2(0), \quad (14)$$

$$D^4\mu_0(0) = 2a^2D^2\varphi_2(0) - a^4D^4\varphi_0(0) + f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} D^5\mu_0(0) = & a^2D^2\varphi_3(0) + a^2D^3\mu_1(0) - a^4D^4\varphi_1(0) + D^2\varphi_1(0) \times \\ & \times \partial_{u_{xx}}f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), u_{xx} = D^2\varphi_0(0)) + \\ & + D\varphi_2(0)\partial_{u_{tx}}f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), u_{tx} = D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)) + \\ & + \varphi_3(0)\partial_{u_{tt}}f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), u_{tt} = \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)) + \\ & + D\varphi_1(0)\partial_{u_x}f(0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), u_x = D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)) + \\ & + \varphi_2(0)\partial_{u_t}f(0, 0, \varphi_0(0), u_t = \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)) + \\ & + \varphi_1(0)\partial_u f(0, 0, u = \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)) + \\ & + \partial_t f(t = 0, 0, \varphi_0(0), \varphi_1(0), D\varphi_0(0), \varphi_2(0), D\varphi_1(0), D^2\varphi_0(0)). \end{aligned} \quad (16)$$

Proof. 1. Let the function $u \in C^4(\overline{Q})$ satisfy Eq. (6) in \overline{Q} , the initial conditions (7), and the boundary conditions (8) everywhere. Under a linear nondegenerate change of the independent variables $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ and with $u(t, x)$ expressed as $v(\xi, \eta)$, the differential equation is transformed into

$$\partial_\xi^2 \partial_\eta^2 v(\xi, \eta) = \frac{1}{16a^4} \mathcal{F}[u] \left(\frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right).$$

Integrating it four times yields the equation

$$\begin{aligned} v(\xi, \eta) = & f_1(\xi) + \eta f_2(\xi) + f_3(\eta) + \xi f_4(\eta) + \\ & + \frac{1}{16a^4} \int_0^\xi dy \int_{|\xi|}^\eta (\xi - y)(\eta - z) \mathcal{F}[u] \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) dz. \end{aligned}$$

Returning to the original variables t and x , we obtain

$$\begin{aligned} u(t, x) = & f_1(x - at) + (x + at)f_2(x - at) + f_3(x + at) + (x - at)f_4(x + at) + \\ & + \frac{1}{16a^4} \int_0^{x-at} dy \int_{|x-at|}^{x+at} (x - at - y)(x + at - z) \mathcal{F}[u] \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) dz. \end{aligned} \quad (17)$$

By introducing functions g_1 , g_2 , g_3 , and g_4

$$f_1(z) = g_1(z) - \frac{zg_2(z)}{2a}, \quad f_2(z) = \frac{g_2(z)}{2a}, \quad f_3(z) = g_3(z) + \frac{zg_4(z)}{2a}, \quad f_4(z) = -\frac{g_4(z)}{2a},$$

we can rewrite (17) as

$$u(t, x) = g_1(x - at) + tg_2(x - at) + g_3(x + at) + tg_4(x + at) + \\ + \frac{1}{16a^4} \int_0^{x-at} dy \int_{|x-at|}^{x+at} (x - at - y)(x + at - z) \mathcal{F}[u] \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right) dz. \quad (18)$$

Note that the functions g_1 , g_2 , g_3 , and g_4 in the representation (18) should be determined by the initial conditions (7) and the boundary conditions (8). Substituting (18) into (7), we obtain the following system

$$g_1(x) + g_3(x) = \varphi_0(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (19)$$

$$g_2(x) + g_4(x) - aDg_1(x) + aDg_3(x) = \varphi_1(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (20)$$

$$\int_0^x \frac{(x - y)\mathcal{G}(x, y)}{4a^2} dy - 2aDg_2(x) + \\ + 2aDg_4(x) + a^2D^2g_1(x) + a^2D^2g_3(x) = \varphi_2(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (21)$$

$$\int_0^x -\frac{(x - y)\partial_x \mathcal{G}(x, y) + 3\mathcal{G}(x, y)}{4a} dy + \\ + a^2(aD^3g_3(x) - aD^3g_1(x) + 3D^2g_2(x) + 3D^2g_4(x)) = \varphi_3(x), \quad x \in [0, \infty), \quad (22)$$

where $G(y, z)$ is denoted as

$$\mathcal{G}(y, z) = \mathcal{F}[u] \left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2} \right).$$

From (19) and (20), we have

$$g_1(x) = \varphi_0(x) - g_3(x), \quad g_2(x) = \varphi_1(x) - g_4(x) + aDg_1(x) - aDg_3(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (23)$$

Substituting (23) into (21) and (22), we get two ordinary differential equations

$$D^3g_3(x) = \int_0^x -\frac{(x - y)\partial_x \mathcal{G}(y, x) + 3\mathcal{G}(y, x)}{16a^4} dy - \\ - \frac{\varphi_3(x)}{4a^3} + \frac{3D^2\varphi_1(x)}{4a} + \frac{D^3\varphi_0(x)}{2}, \quad x \in [0, \infty), \quad (24)$$

$$Dg_4(x) = \int_0^x -\frac{(x - y)\mathcal{G}(y, x)}{16a^3} dy - \\ - aD^2g_3(x) + \frac{aD^2\varphi_0(x)}{4} + \frac{\varphi_2(x)}{4a} + \frac{D\varphi_1(x)}{2}, \quad x \in [0, \infty). \quad (25)$$

Let us integrate Eqs. (24) and (25)

$$g_3(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 d\xi \int_0^\xi -\frac{(\xi-y)\partial_\xi \mathcal{G}(y,\xi) + 3\mathcal{G}(y,\xi)}{16a^4} dy +$$

$$+ \frac{\varphi_0(x)}{2} - \frac{1}{8a^3} \int_0^x (x-\xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi + \frac{3}{4a} \int_0^x \varphi_1(\xi) d\xi, \quad x \in [0, \infty), \quad (26)$$

$$g_4(x) = C_4 - aDg_3(x) + \frac{1}{4a} \int_0^x \varphi_2(\xi) d\xi + \frac{aD\varphi_0(x)}{4} +$$

$$+ \int_0^x d\xi \int_0^\xi -\frac{(\xi-y)\mathcal{G}(y,\xi)}{16a^3} dy + \frac{\varphi_1(x)}{2}, \quad x \in [0, \infty), \quad (27)$$

where C_1 , C_2 , C_3 , and C_4 are the integration constants. Substituting (23), (26), and (27) into (18) results in

$$u(t, x) = \int_{x-at}^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(z) + 2a^2t\varphi_2(z) + (a^2t^2 - (x-z)^2)\varphi_3(z)}{8a^3} dz +$$

$$+ \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} - \frac{t(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at))}{4} +$$

$$+ \frac{at(D\varphi_0(x-at) - D\varphi_0(x+at))}{4} +$$

$$+ \frac{1}{16a^4} \int_0^{x-at} dy \int_{x-at}^{x+at} (x-at-y)(x+at-z)\mathcal{F}[u]\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz +$$

$$+ \int_0^{x-at} dz \int_0^z \frac{\mathcal{G}(y,z)(-3a^2t^2 + 2at(z-y) + 3(x-z)^2) - (y-z)\partial_z \mathcal{G}(y,z)((x-z)^2 - a^2t^2)}{32a^4} dy +$$

$$+ \int_0^{x+at} dz \int_0^z \frac{(y-z)\partial_z \mathcal{G}(y,z)((x-z)^2 - a^2t^2) + \mathcal{G}(y,z)(3a^2t^2 + 2at(y-z) - 3(x-z)^2)}{32a^4} dy,$$

$$(t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (28)$$

To simplify the expression (28), we integrate by parts, i.e.,

$$\int_0^{x+at} dz \int_0^z \frac{(y-z)((x-z)^2 - a^2t^2)\partial_z \mathcal{G}(y,z)}{32a^4} dy =$$

$$= \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2t^2) dz \int_0^z \frac{(y-z)\partial_z \mathcal{G}(y,z)}{32a^4} dy =$$

$$= \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2t^2) dz \int_0^z \frac{(y-z)\partial_z \mathcal{G}(y,z) - \mathcal{G}(y,z) + \mathcal{G}(y,z)}{32a^4} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2 t^2) dz \int_0^z \frac{(y-z) \partial_z \mathcal{G}(y, z) - \mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy + \\
&\quad + \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2 t^2) dz \int_0^z \frac{\mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy = \\
&= \left[dV = \left[\int_0^z \frac{(y-z) \partial_z \mathcal{G}(y, z) - \mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy \right] dz, \quad V = \int_0^z \frac{(y-z) \mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy \right] = \\
&= UV \Big|_{z=0}^{z=x+at} - \int_0^{x+at} V dU + \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2 t^2) dz \int_0^z \frac{\mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy = \\
&= \int_0^{at+x} dz \int_0^z \frac{(x-z)(y-z) \mathcal{G}(y, z)}{16a^4} dy + \int_0^{x+at} ((x-z)^2 - a^2 t^2) dz \int_0^z \frac{\mathcal{G}(y, z)}{32a^4} dy. \quad (29)
\end{aligned}$$

The resulting expression is

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x+at} dz \int_0^z \frac{(y-z) \partial_z \mathcal{G}(y, z) ((x-z)^2 - a^2 t^2) + \mathcal{G}(y, z) (3a^2 t^2 + 2at(y-z) - 3(x-z)^2)}{32a^4} dy = \\
&= \int_0^{x+at} dz \int_0^z \frac{(at-x+y)(at+x-z) \mathcal{G}(y, z)}{16a^4} dy.
\end{aligned}$$

Similarly, the following calculation is performed:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x-at} dz \int_0^z \frac{\mathcal{G}(y, z) (-3a^2 t^2 + 2at(z-y) + 3(x-z)^2) - (y-z) \partial_z \mathcal{G}(y, z) ((x-z)^2 - a^2 t^2)}{32a^4} dy = \\
&= \int_{x-at}^0 dz \int_0^z \frac{(at-x+y)(at+x-z) \mathcal{G}(y, z)}{16a^4} dy.
\end{aligned}$$

Thus, there is an equation

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \int_{x-at}^{x+at} \frac{6a^2 \varphi_1(z) + 2a^2 t \varphi_2(z) + (a^2 t^2 - (x-z)^2) \varphi_3(z)}{8a^3} dz + \\
&\quad + \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} - \frac{t(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at))}{4} + \\
&\quad + \frac{at(D\varphi_0(x-at) - D\varphi_0(x+at))}{4} + \\
&\quad + \frac{1}{16a^4} \int_0^{x-at} dy \int_{x-at}^{x+at} (x-at-y)(x+at-z) \mathcal{F}[u] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dz -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{16a^4} \int_{x-at}^{x+at} dz \int_0^z (x-at-y)(x+at-z) \mathcal{F}[u] \left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) dy, \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (30)$$

Then, changing the variables $\tau = (z-y)/(2a)$, $\xi = (z+y)/2$ in the double integral in the formula (30), we arrive at Eq. (9).

To define the functions g_1 and g_2 for the negative values of the argument, the boundary conditions (8) are used. Substituting the expression (18) yields the equations

$$g_1(-at) + tg_2(-at) + g_3(at) + tg_4(at) = \mu_0(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (31)$$

$$\int_0^{-at} \frac{(-at-y)\mathcal{G}(y, a, t)}{4a^4} dy + D^2 g_1(-at) + tD^2 g_2(-at) + \quad (32)$$

$$+ D^2 g_3(at) + tD^2 g_4(at) = \mu_1(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (33)$$

From (31), we have

$$g_1(z) = \frac{-ag_3(-z) + a\mu_0\left(-\frac{z}{a}\right) + zg_2(z) + zg_4(-z)}{a}, \quad z \in (-\infty, 0]. \quad (34)$$

Substituting (34) into (33) leads to a first-order ordinary differential equation

$$Dg_2(z) = \int_0^z -\frac{(z-y)\mathcal{G}(y, -z)}{8a^3} dy - \frac{D^2\mu_0\left(-\frac{z}{a}\right)}{2a} + \frac{a\mu_1\left(-\frac{z}{a}\right)}{2} + Dg_4(-z), \quad z \in (-\infty, 0]. \quad (35)$$

Integrating (35), we get

$$g_2(z) = g_2(0) + \int_0^z d\xi \int_0^\xi -\frac{(\xi-y)\mathcal{G}(y, -\xi)}{8a^3} dy + \frac{a}{2} \int_0^z \mu_1\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi + g_4(0) - \\ - g_4(-z) + \frac{D\mu_0\left(-\frac{z}{a}\right)}{2a^2} - \frac{D\mu_0(0)}{2a^2}, \quad z \in (-\infty, 0], \quad (36)$$

where the values $g_2(0)$, $g_4(0)$, and $g_4(-z)$ can be calculated by the formulas (23) and (27). Then, using the representations (23), (26), (27), (34), and (36), we substitute the functions g_1 , g_2 , g_3 , and g_4 into the formula (17) for $(t, x) \in \overline{Q^{(2)}}$, integrate by parts as in (29), and get Eq. (10).

The continuity conditions for the function u and its partial derivatives up to and including the fourth order, i.e.,

$$\partial_t^k \partial_x^p u^{(1)}(t, x = at) = \partial_t^k \partial_x^p u^{(2)}(t, x = at), \quad 0 \leq k + p \leq 4, \quad (37)$$

are also satisfied, where k and p are nonnegative integers. It turns out that the equalities (37) entail the matching conditions (12)–(16), which can be verified directly using the algorithm outlined in [16]. Note that, in this case, the conditions (12)–(16) cannot be strictly justified by differentiating the initial and boundary conditions, as was done, for example, in [17].

2. Assume that the representations (9)–(11) hold for the function u , which belongs to the classes $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ and $C^2(\overline{Q^{(2)}})$, and the conditions (12)–(16) are satisfied. Then, by virtue of the smoothness conditions $\varphi_0 \in C^5([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^4([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$, $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$, similar to [18], it follows that the function u belongs to the classes $C^4(\overline{Q^{(1)}})$ and $C^4(\overline{Q^{(2)}})$. We substitute the representations (9)–(11) into Eq. (6) and verify that the function u satisfies this equation in $\overline{Q^{(1)}}$ and $\overline{Q^{(2)}}$. In this case, for the function u to belong to the class $C^4(\overline{Q})$, it is sufficient that the values of the functions $u^{(2)}$ and $u^{(2)}$ and the values of their derivatives up to and including the fourth order coincide with each other on the characteristic $x = at$, i.e., that the equalities (37) hold. The latter is equivalent to the validity of the conditions (12)–(16), as can be easily derived by following the argument in the reverse order to that in item 1 of the proof, based on the representations (9)–(11). \square

Theorem 2. *Let the conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ hold and the function f satisfy the Lipschitz condition with $L \in C(\overline{Q})$ in the last six variables, i.e., there exists the function $L \in C(\overline{Q})$ such that*

$$|f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) - f(t, x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)| \leq L(t, x) \sum_{i=1}^6 |u_i - z_i|.$$

Then, there exist unique solutions of Eqs. (9) and (10) in the spaces $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ and $C^2(\overline{Q^{(2)}})$, respectively, and these solutions continuously depend on the initial data.

Proof. To be definite, consider Eq. (9) for the function $u^{(1)}$, which can be solved by the parameter continuation method [19, 20]. Set

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \int_{x-at}^{x+at} \frac{6a^2\varphi_1(z) + 2a^2t\varphi_2(z) + (a^2t^2 - (x-z)^2)\varphi_3(z)}{8a^3} dz + \\ &+ \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2} - \frac{t(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at))}{4} + \\ &+ \frac{at(D\varphi_0(x-at) - D\varphi_0(x+at))}{4}, \\ K[u](t, x) &= \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2)\mathcal{F}[u](\tau, z)}{8a^3} dz. \end{aligned}$$

Rewrite Eq. (9) in the operator form

$$u^{(1)}(t, x) = K[u^{(1)}](t, x) + v(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}. \quad (38)$$

Let us also introduce the following family of equations with the parameter $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$u_\varepsilon^{(1)}(t, x) - \varepsilon(K[u_\varepsilon^{(1)}] - K[0])(t, x) = w(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(1)}}, \quad (39)$$

where $w(t, x) = v(t, x) + K[0](t, x)$. It is clear that any solution $u_\varepsilon^{(1)}(t, x)$ of Eq. (39) with $\varepsilon = 1$ is also a solution of Eq. (38), and vice versa. Hence, the task reduces to solving Eq. (39) when $\varepsilon = 1$.

Let us introduce the set $\Omega_m = \{(t, x) \mid (t, x) \in \overline{Q^{(1)}} \wedge x + at \leq m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Due to the smoothness conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$, as in [18], we conclude that $K[g] \in C^2(\Omega_m)$, assuming that, for example, $g \in C^2(\Omega_m)$. It implies that the operator K maps from the space $C^2(\Omega_m)$ to the space $C^2(\Omega_m)$. Let us show that the operator $K: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ is Lipschitz-continuous. We have

$$\begin{aligned}
|K[u_1](t, x) - K[u_2](t, x)| &= \left| \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2) \mathcal{F}[u_1](\tau, z)}{8a^3} dz - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2) \mathcal{F}[u_2](\tau, z)}{8a^3} dz \right| \leq \\
&\leq \left| \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2) (\mathcal{F}[u_1](\tau, z) - \mathcal{F}[u_2](\tau, z))}{8a^3} dz \right| \leq \\
&\leq \alpha \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} |L(t, x)| (|u_1 - u_2| + |\partial_t u_1 - \partial_t u_2| + |\partial_x u_1 - \partial_x u_2| + \\
&\quad + |\partial_t^2 u_1 - \partial_t^2 u_2| + |\partial_t \partial_x u_1 - \partial_t \partial_x u_2| + |\partial_x^2 u_1 - \partial_x^2 u_2|)(t, x) dz \leq \\
&\leq \alpha a \|L\|_{C(\Omega_m)} \|u_1 - u_2\|_{C^2(\Omega_m)} t^2 \leq \alpha m \|L\|_{C(\Omega_m)} \|u_1 - u_2\|_{C^2(\Omega_m)}, \\
&\quad (t, x) \in \Omega_m, \quad u_1 \in C^2(\Omega_m), \quad u_2 \in C^2(\Omega_m), \quad (40)
\end{aligned}$$

where

$$\alpha = \max_{(t,x) \in \Omega_m} \left| \frac{a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2}{8a^3} \right|.$$

Proceeding to (40), we arrive at the estimate

$$\begin{aligned}
|\partial_t^p \partial_x^k K[u_1](t, x) - \partial_t^p \partial_x^k K[u_2](t, x)| &\leq \alpha_{p,k} \|u_1 - u_2\|_{C^2(\Omega_m)}, \quad (t, x) \in \Omega_m, \\
0 \leq p + k \leq 2, \quad u_1 \in C^2(\Omega_m), \quad u_2 \in C^2(\Omega_m), \quad (41)
\end{aligned}$$

where k and p are nonnegative integers, and $\alpha_{p,k}$ is a constant determined by the function L , the number a , and the set Ω_m . It follows from (41) that

$$\|K[u_1] - K[u_2]\|_{C^2(\Omega_m)} \leq \beta \|u_1 - u_2\|_{C^2(\Omega_m)}, \quad u_1 \in C^2(\Omega_m), \quad u_2 \in C^2(\Omega_m), \quad (42)$$

where $\beta = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} + \alpha_{0,1} + \alpha_{2,0} + \alpha_{1,1} + \alpha_{0,2}$. The inequality (42) implies that the operator $K: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ is Lipschitz-continuous.

Consider the operator K_ε defined by the formula

$$K_\varepsilon[u] = u - \varepsilon(K[u] - K[0]).$$

Since the operator $K: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ is Lipschitz-continuous, the operator $K_\varepsilon: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ retains this property.

Let us prove that the operator $K_\varepsilon: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ is coercive. To achieve this, it suffices to derive an a priori estimate of the form

$$\|u_\varepsilon^{(1)}\|_{C^2(\Omega_m)} \leq C \|w\|_{C^2(\Omega_m)}, \quad (43)$$

for the solution $u_\varepsilon^{(1)}$ of Eq. (39), where C is some constant that does not depend on the function $u_\varepsilon^{(1)}$ and the number ε . We have

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| &= |w(t, x) + \varepsilon(J[u_\varepsilon^{(1)}](t, x) - K[0](t, x))| \leq \|w\|_{C(\Omega_m)} + \\ &+ \left| \varepsilon \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{(a^2(t-\tau)^2 - (x-z)^2) (\mathcal{F}[u^{(1)}](\tau, z) - \mathcal{F}[0](\tau, z))}{8a^3} dz \right| \leq \\ &\leq \|w\|_{C(\Omega_m)} + \alpha \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \end{aligned} \quad (44)$$

where

$$\begin{aligned} U(t, x) &= |u^{(1)}(t, x)| + |\partial_t u^{(1)}(t, x)| + |\partial_x u^{(1)}(t, x)| + \\ &+ |\partial_t^2 u^{(1)}(t, x)| + |\partial_t \partial_x u^{(1)}(t, x)| + |\partial_x^2 u^{(1)}(t, x)|. \end{aligned} \quad (45)$$

Similarly, we get

$$|\partial_t u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| \leq \|\partial_t w\|_{C(\Omega_m)} + \gamma_{1,0} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad (46)$$

$$|\partial_x u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| \leq \|\partial_x w\|_{C(\Omega_m)} + \gamma_{0,1} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} |\partial_t^2 u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| &\leq \\ &\leq \|\partial_t^2 w\|_{C(\Omega_m)} + \lambda_1 \int_0^t U(\tau, x - a(t - \tau)) d\tau + \psi_1 \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \\ &+ \gamma_{2,0} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} |\partial_t \partial_x u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| &\leq \\ &\leq \|\partial_t \partial_x w\|_{C(\Omega_m)} + \lambda_2 \int_0^t U(\tau, x - a(t - \tau)) d\tau + \psi_2 \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \\ &+ \gamma_{1,1} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} |\partial_x^2 u_\varepsilon^{(1)}(t, x)| &\leq \\ &\leq \|\partial_x^2 w\|_{C(\Omega_m)} + \lambda_3 \int_0^t U(\tau, x - a(t - \tau)) d\tau + \psi_3 \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \\ &+ \gamma_{0,2} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \end{aligned} \quad (50)$$

where $\gamma_{1,0}$, $\gamma_{0,1}$, $\gamma_{2,0}$, $\gamma_{1,1}$, $\gamma_{0,2}$, λ_i ($i = 1, 2, 3$), and ψ_i ($i = 1, 2, 3$) are the constants, which depend on the function L , the number a , and the set Ω_m .

Summation of the inequalities (44)–(50) yields

$$|U(t, x)| \leq \|w\|_{C^2(\Omega_m)} + \lambda \int_0^t U(\tau, x - a(t - \tau)) d\tau + \psi \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \\ + \gamma \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m, \quad (51)$$

where $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, $\gamma = \alpha + \gamma_{1,0} + \gamma_{0,1} + \gamma_{2,0} + \gamma_{1,1} + \gamma_{0,2}$.

Let us denote $V(s) = U(s, x - a(t - s))$ for fixed $x \in \{x \mid \exists t : (t, x) \in \Omega_m\}$. Then, we have

$$|V(t)| \leq \|w\|_{C^2(\Omega_m)} + \lambda \int_0^t V(\tau) d\tau + \psi \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \\ + \gamma \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz, \quad (t, x) \in \Omega_m,$$

Applying the Grönwall lemma to the preceding inequality, we obtain

$$|V(t)| \leq \left(\|w\|_{C^2(\Omega_m)} + \psi \int_0^t U(\tau, x + a(t - \tau)) d\tau + \right. \\ \left. + \gamma \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz \right) \exp(\lambda t), \quad (t, x) \in \Omega_m.$$

Using this technique iteratively, we get

$$|U(t, x)| \leq \left(\|w\|_{C^2(\Omega_m)} + \gamma \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} U(\tau, z) dz \right) \exp\left(\frac{\psi m}{2a} \exp\left(\frac{\lambda m}{2a}\right)\right), \\ (t, x) \in \Omega_m.$$

Applying the multidimensional Grönwall lemma [21] to the preceding inequality, we derive the estimate

$$|U(t, x)| \leq \|w\|_{C^2(\Omega_m)} \exp\left(\frac{\psi m}{2a} \exp\left(\frac{\lambda m}{2a}\right)\right) \exp\left(\gamma a t^2 \exp\left(\frac{\psi m}{2a} \exp\left(\frac{\lambda m}{2a}\right)\right)\right), \\ (t, x) \in \Omega_m. \quad (52)$$

The formulas (45) and (52) are actually the a priori estimates of the form (43). Therefore, we have proved that the operator $K_\varepsilon: C^2(\Omega_m) \mapsto C^2(\Omega_m)$ is coercive.

Note that the function $B: [0, 1] \ni \varepsilon \mapsto A_\varepsilon$ is continuous in the seminorm of the space of Lipschitz-continuous operators [19]. It is obvious that $B(0) = A_0$ is continuously

invertible, as it corresponds to the identity operator. Considering this, we conclude that the conditions of [19, Theorem 4] hold for the operator-function B . Therefore, Eq. (39) has a unique solution in the space $C^2(\Omega_m)$ for any $\varepsilon \in [0, 1]$, and this solution continuously depends on the initial data. Thus, we have solved Eq. (38) in the space $C^2(\Omega_m)$.

To construct the solution u of Eq. (38) in the space $C^2(\overline{Q^{(1)}})$, consider the following limit

$$u = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m, \quad (53)$$

where u_m ($m \in \mathbb{N}$) is the solution of Eq. (38) in the space $C^2(\Omega_m)$. We also assume that the functions $u_m \in C^2(\overline{Q^{(1)}})$ are extended in some way outside the set Ω_m .

Let us prove the existence of the limit (53). Consider the functions u_n and u_m , where $n < m$. In this case, $u_m|_{\Omega_n} \equiv u_n$. Otherwise, there would be a contradiction with the uniqueness of the solution of Eq. (38) in the class $C^2(\Omega_n)$. Thus, for any $\varepsilon > 0$, there exists an integer $N(\varepsilon) = m$ such that for any integer $M > N(\varepsilon)$ we have $\|u_N - u_M\|_{C^2(\Omega_m)} < \varepsilon$. This indicates that the sequence (u_m) is fundamental in any seminorm of the form $\|\cdot\|_{C^2(\Omega_k)}$, where $k \in \mathbb{N}$. Since $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, the topology of the Fréchet space $C^2(\overline{Q^{(1)}})$ can be induced by a countable family of seminorms $\|\cdot\|_{C^2(\Omega_k)}$. So, the sequence (u_m) converges in the space $C^2(\overline{Q^{(1)}})$.

Next, we can prove that the limit (53) solves Eq. (38). Consider a point $(t_0, x_0) \in \overline{Q^{(1)}}$. There exists a number m such that $(t_0, x_0) \in \Omega_m$. We have $u|_{\Omega_n} \equiv u_m$, where $m > n$. Otherwise, there would be a contradiction with the uniqueness of the solution of Eq. (38) in the class $C^2(\Omega_n)$. Then,

$$u(t_0, x_0) = u_m(t_0, x_0) = K[u_m](t_0, x_0) + w(t, x). \quad (54)$$

Let us pass to the limit as $m \rightarrow \infty$ in (54) and obtain

$$\begin{aligned} u(t_0, x_0) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (K[u_m](t_0, x_0) + w(t_0, x_0)) = K\left[\lim_{m \rightarrow \infty} u_m\right](t_0, x_0) + w(t_0, x_0) = \\ &= K[u](t_0, x_0) + w(t_0, x_0). \end{aligned}$$

Given the arbitrariness of the point $(t_0, x_0) \in \overline{Q^{(1)}}$ and the preceding equality, we conclude that the function u defined by the limit (53) is a solution of Eq. (38) in the class $C^2(\overline{Q})$.

Let us prove that the limit (53) is the unique solution of Eq. (38). Assume that Eq. (38) has two solutions u and \tilde{u} in the space $C^2(\overline{Q^{(1)}})$. Then, the functions $u|_{\Omega_m}$ and $\tilde{u}|_{\Omega_m}$ are the solutions of Eq. (38) in the class $C^2(\Omega_m)$. Therefore, $u|_{\Omega_m} \equiv \tilde{u}|_{\Omega_m}$. Since $\bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m = \overline{Q^{(1)}}$, we arrive at the equality $u \equiv \tilde{u}$. This proves that Eq. (38) has a unique solution in the class $C^2(\overline{Q^{(1)}})$.

Therefore, we have constructed a unique solution of Eq. (9) in the class $C^2(\overline{Q^{(1)}})$. The existence of a unique solution of Eq. (10) in the class $C^2(\overline{Q^{(2)}})$, which continuously depends on the initial data, can be proved in a similar way. \square

3. Classical Solution

The following theorem is a consequence of Theorems 1 and 2.

Theorem 3. *Let the conditions $\varphi_0 \in C^5([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^4([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$, $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ hold and the function f satisfy the Lipschitz condition with $L \in C(\overline{Q})$ in the last six variables, i.e., there exists the function $L \in C(\overline{Q})$ such that*

$$|f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) - f(t, x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)| \leq L(t, x) \sum_{i=1}^6 |u_i - z_i|.$$

Then, the initial-boundary value problem (6)–(8) has a unique solution u in the class $C^4(\overline{Q})$ if and only if the conditions (12)–(16) are satisfied. This solution is determined by the formulas (9)–(11).

4. Mild Solution

Consider the problem (6)–(8) for the case, where the functions φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3 , μ_0 , μ_1 , and f are not smooth enough.

Definition 1. We define the function u representable in the form (9)–(11) as a mild solution of the problem (6)–(8).

Remark 1. Any classical solution of the problem (6)–(8) is also a mild solution of this problem.

Remark 2. If the additional smoothness conditions $\varphi_0 \in C^5([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^4([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C^2([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^5([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^3([0, \infty))$, $f \in C^2(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ and the matching conditions (12)–(16) hold, then the mild solution of problem (6)–(8) is classical.

Let $\tilde{Q} = \overline{Q} \setminus \{(t, x) \mid x = at\}$.

Theorem 4. *Let the conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ hold and the function f satisfy the Lipschitz condition with $L \in C(\overline{Q})$ in the last six variables, i.e., there exists the function $L \in C(\overline{Q})$ such that*

$$|f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) - f(t, x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)| \leq L(t, x) \sum_{i=1}^6 |u_i - z_i|.$$

Then, the initial-boundary value problem (6)–(8) has a mild solution u in the class $C^2(\tilde{Q})$.

Proof. The solvability of the integral equations (9) and (10) and the belonging of their solutions to the classes of $C^2(\overline{Q}^{(1)})$ and $C^2(\overline{Q}^{(2)})$, respectively, follows from Theorem 2. \square

If the matching conditions (12)–(16) are partially met, the smoothness of the mild solution can be increased, i.e., the following theorem holds.

Theorem 5. Let the conditions $\varphi_0 \in C^3([0, \infty))$, $\varphi_1 \in C^2([0, \infty))$, $\varphi_2 \in C^1([0, \infty))$, $\varphi_3 \in C([0, \infty))$, $\mu_0 \in C^3([0, \infty))$, $\mu_1 \in C^1([0, \infty))$, $f \in C(\overline{Q} \times \mathbb{R}^6)$ hold and the function f satisfy the Lipschitz condition with $L \in C(\overline{Q})$ in the last six variables, i.e., there exists the function $L \in C(\overline{Q})$ such that

$$|f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) - f(t, x, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)| \leq L(t, x) \sum_{i=1}^6 |u_i - z_i|.$$

Then, the initial-boundary value problem (6)–(8) has a mild solution u in the class $C^2(\tilde{Q}) \cap C(\overline{Q})$ if and only if $\varphi_0(0) = \mu_0(0)$.

Proof. 1. Let us prove the necessity of the condition $\varphi_0(0) = \mu_0(0)$. If $u \in C(\overline{Q})$, then $u(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} u(0, x)$. The representations (9)–(11) imply $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu_0(t) = \mu_0(0)$ and $\lim_{x \rightarrow 0} u(0, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_0(x) = \varphi_0(0)$. Hence, $\varphi_0(0) = \mu_0(0)$.

2. Let us prove the sufficiency of the condition $\varphi_0(0) = \mu_0(0)$. According to Theorem 4, there exist a unique mild solution $u \in C^2(\tilde{Q})$ of the problem (6)–(8). Using the formulas (9)–(11), we compute

$$[(u)^+ - (u)^-](t, x = at) = u^{(1)}(t, at) - u^{(2)}(t, at) = \varphi_0(0) - \mu_0(0), \quad (55)$$

where $(u)^\pm(t, x = at) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} u(t, a t \pm \delta)$. Using (55), we conclude that $u \in C(\tilde{Q})$. \square

Conclusions

Sufficient conditions for the existence of a unique classical solution of the initial-boundary value problem in the first quadrant for a nonstrictly hyperbolic mildly quasi-linear biwave equation are established. The results obtained show that the failure to meet the matching conditions makes it impossible to construct a classical solution in the entire first quadrant. In the case when the initial data are insufficiently smooth, a mild solution of the initial-boundary value problem is constructed, and its uniqueness is proved.

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics (agreement no. 075-15-2022-284).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Korzyuk V., Vinh N.V., Minh N.T. Classical solution of the Cauchy problem for biwave equation: Application of Fourier transform. *Math. Modell. Anal.*, 2012, vol. 17, no. 5, pp. 630–641. <https://doi.org/10.3846/13926292.2012.734864>.
2. Bai Y. On linear homogeneous biwave equations. *J. Partial Differ. Equations*, 2024, vol. 37, no. 1, pp. 59–87. <https://doi.org/10.4208/jpde.v37.n1.4>.
3. Thomson W.T. *Theory of Vibration with Applications*. London, New York, NY, Taylor & Francis, 2010. 546 p.
4. Timoshenko–Ehrenfest beam theory. *Wikipedia, the free encyclopedia*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko%E2%80%93Ehrenfest_beam_theory.

5. Korzyuk V.I., Konopel'ko O.A., Cheb E.S. Boundary-value problems for fourth-order equations of hyperbolic and composite types. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 171, no. 1, pp. 89–115. <https://doi.org/10.1007/s10958-010-0128-2>.
6. Korzyuk V.I., Konopel'ko O.A. Strong solution of boundary value problems in cylindrical domains for a fourth-order equation of composite type. *Differ. Equations*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 690–701. <https://doi.org/10.1134/S0012266110050083>.
7. Korzyuk V.I., Cheb E.S., Thu L.T. Solution of the first mixed problem for the non-rigorous biwave equation. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 2011, vol. 55, no. 4, pp. 5–13. (In Russian)
8. Korzyuk V.I., Cheb E.S. Mixed problems for a biwave equation. *Vestn. BGU. Ser. 1, Fiz. Mat. Inf.*, 2005, no. 1, pp. 63–68. (In Russian)
9. Korzyuk V.I., Cheb E.S. Goursat problem for a fourth-order equation with the biwave operator. *Differ. Equations*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1467–1472. <https://doi.org/10.1134/S0012266109100097>.
10. Fushchych W.I. Symmetry in problems of mathematical physics. In: *Teoretiko-algebraicheskie issledovaniya v matematicheskoi fizike* [Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics]. Kyiv, Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, 1981, pp. 6–28. (In Russian)
11. Fushchych W.I., Roman O.V., Zhdanov R.Z. Symmetry reduction and exact solutions of nonlinear biwave equations. *Rep. Math. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 2, pp. 267–281. [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(96\)89767-9](https://doi.org/10.1016/0034-4877(96)89767-9).
12. Bibilashvili T., Kharibegashvili S. Darboux type problem for a class of fourth-order nonlinear hyperbolic equations. *Mem. Differ. Equations Math. Phys.*, 2023, vol. 89, pp. 39–59.
13. Kharibegashvili S., Midodashvili B. On one boundary value problem for a nonlinear equation with the iterated wave operator in the principal part. *Georgian Math. J.*, 2008, vol. 15, no. 3, pp. 541–554. <https://doi.org/10.1515/GMJ.2008.541>.
14. Kharibegashvili S. On the solvability of the Cauchy characteristic problem for a nonlinear equation with iterated wave operator in the principal part. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, vol. 338, no. 1, pp. 71–81. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.076>.
15. Kharibegashvili S., Midodashvili B. Solvability of characteristic boundary-value problems for nonlinear equations with iterated wave operator in the principal part. *Electron. J. Differ. Equations*, 2008, vol. 2008, no. 72, pp. 1–12.
16. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential. *Differ. Equations*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 175–186. <https://doi.org/10.1134/S0012266122020045>.
17. Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Classical solution of the first mixed problem for the telegraph equation with a nonlinear potential in a curvilinear quadrant. *Differ. Equations*, 2023, vol. 59, no. 8, pp. 1075–1089. <https://doi.org/10.1134/S0012266123080062>.
18. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differ. Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 74–85. <https://doi.org/10.1134/S0012266117010074>.
19. Trenogin V.A. Global invertibility of nonlinear operators and the method of continuation with respect to a parameter. *Dokl. Math.*, 1996, vol. 54, no. 2, pp. 730–732.
20. Trenogin V.A. Invertibility of nonlinear operators and parameter continuation method. In: Ramm A.G. (Ed.) *Spectral and Scattering Theory*. New York, NY, London, Plenum Press, 1998, pp. 189–197.
21. Qin Y. *Integral and Discrete Inequalities and Their Applications*. Vol. II: Nonlinear inequalities. Cham, Birkhäuser, 2016. xvi, 1072 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33304-5>.

Received August 18, 2024

Accepted August 27, 2024

Korzyuk Viktor Ivanovich, Academician, Doctor of Physics and Mathematics, Professor;
Leading Research Fellow

Belarusian State University

pr. Nezavisimosti, 4, Minsk, 220000 Republic of Belarus

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

ul. Surganova, 11, Minsk, 220000 Republic of Belarus

E-mail: korzyuk@bsu.by

Rudzko Jan Viaczaslavavicz, Junior Research Fellow

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus

ul. Surganova, 11, Minsk, 220000 Republic of Belarus

E-mail: janycz@yahoo.com

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.956.35

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.377-394

**Начально-граничная задача с условиями Дирихле и Вентцеля
для слабо квазилинейного биволнового уравнения**

В.И. Корзюк^{1,2}, Я.В. Рудько²

¹*Белорусский государственный университет, г. Минск, 220000, Республика Беларусь*

²*Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, 220000, Республика Беларусь*

Аннотация

Для нестрого гиперболического слабо квазилинейного биволнового уравнения, заданного в первом квадранте, рассматривается начально-граничная задача, в которой на пространственной полупрямой заданы условия Коши, а на временной полупрямой – условия Дирихле и Вентцеля. Решение строится в неявном аналитическом виде как решение некоторых интегро-дифференциальных уравнений. Методом продолжения по параметру исследуется разрешимость этих уравнений. Для рассматриваемой задачи доказывается единственность решения и установлены условия существования ее классического решения. Если данные задачи недостаточно гладкие, то строится слабое решение.

Ключевые слова: метод характеристик, слабо квазилинейное биволновое уравнение, нелинейное уравнение, нестрого гиперболическое уравнение, начально-краевая задача, условия согласования, классическое решение, метод продолжения по параметру, слабое решение.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Поступила в редакцию 18.08.2024

Принята к публикации 27.08.2024

Корзюк Виктор Иванович, академик, доктор физико-математических наук, профессор; главный научный сотрудник

Белорусский государственный университет

пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220000, Республика Беларусь

Институт математики НАН Беларуси

ул. Сурганова, д. 11, г. Минск, 220000, Республика Беларусь

E-mail: *korzyuk@bsu.by*

Рудько Ян Вячеславович, младший научный сотрудник

Институт математики НАН Беларуси

ул. Сурганова, д. 11, г. Минск, 220000, Республика Беларусь

E-mail: *janysz@yahoo.com*

For citation: Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Initial-boundary value problem with Dirichlet and Wentzell conditions for a mildly quasilinear biwave equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 377–394. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.377-394>.

Для цитирования: Korzyuk V.I., Rudzko J.V. Initial-boundary value problem with Dirichlet and Wentzell conditions for a mildly quasilinear biwave equation // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 377–394. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.377-394>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.395-406

АЛГОРИТМ ПОИСКА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ОБРАТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

А.О. Лапич, М.Ю. Медведик

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия

Аннотация

Цель данного исследования – решение обратной задачи для определения неоднородности объекта. Измерение рассеянного поля производится за его пределами в некотором наборе точек наблюдения. Предполагается, что источник излучения и точки наблюдения находятся за пределами исследуемого объекта. Рассеяное поле моделируется как результат решения прямой задачи. Для решения обратной задачи применен двухшаговый метод. Рассмотрены нелинейности различного типа. При построении расчетной сетки использован метод обобщенных сеток. Предложен и реализован численный метод решения задачи. Представленные численные результаты иллюстрируют решение задачи для заданных экспериментальных данных.

Ключевые слова: двухшаговый метод, интегральное уравнение, нелинейная задача дифракции, метод коллокаций, численный метод

Введение

Многие вопросы современной науки и техники приводят к задачам определения внутренней структуры объектов. К таким относятся, например, вопросы медицинской диагностики, в которых зачастую необходимо производить обследование неинвазивными методами для выявления различных заболеваний без необходимости проникновения в тело пациента. Эти методы включают в себя такие процедуры, как ультразвуковое исследование (УЗИ), рентгеноскопия и магнитно-резонансная томография (МРТ). Они позволяют врачам получить информацию о состоянии органов и тканей, делая диагностику более безопасной и удобной для пациентов. Неинвазивные методы и методы неразрушающего контроля используются для оценки объектов без их повреждения. Они позволяют проверить целостность и качество материалов, не требуя разрушительных тестов. Эти методы включают ультразвуковую дефектоскопию, радиографию, тепловизию и магнитную дефектоскопию. Неинвазивные методы широко применяются в промышленности, медицине, археологии и других областях. Они обеспечивают надежную диагностику и контроль без повреждения исследуемых объектов и также позволяют улучшить эффективность процессов контроля и диагностики.

Среди множества способов решения названных проблем стоит отметить акустические и электродинамические методы, которые активно развиваются в последние годы [1, 2]. Исследования в этой области привели к созданию множества различных устройств и алгоритмов для идентификации структуры объектов,

но зачастую качество идентификации таких устройств оставляет желать лучшего. В связи с этим поиск новых подходов в решении рассматриваемой задачи остается актуальным.

Задачи медицинской диагностики являются более сложными, поскольку существуют значительные ограничения на выбор диапазона используемых частот. Согласно нормам СанПиН 2.2.4/2.1.8.055-96 диапазон частот в устройствах медицинской диагностики не должен превышать 10 ГГц, однако большинство диагностирующих устройств использует частоты, значительно превышающие указанные значения. Речь идет о диагностике методами рентгенографии, высокочастотной томографии, а также применении других устройств, использующих схожие принципы. Следует отдельно отметить методы ультразвуковой диагностики, диапазон допустимых частот которых значительно ниже. Но такие сканеры нельзя рассматривать как точный вид диагностики, поскольку для получения качественного изображения структуры исследуемого объекта необходимо вручную подстраивать частоты работы сканирующего устройства. В связи с этим в работе предложен метод, позволяющий решать указанные задачи с использованием широкого диапазона частот.

1. Постановка задачи

Рассмотрим воздействие поля U^0 на двумерный объект Q , расположенный в пространстве R^2 , с целью определения поля U , рассеянного на этом объекте, в рамках решения прямой задачи.

Поле индуцировано точечным источником, находящимся вне изучаемого объекта. На рис. 1 графически представлены неоднородный объект и источник излучения. Используя решение неоднородного уравнения Гельмгольца [3]

$$\Delta u + k^2(x) u = f(x), \quad (1)$$

можно определить поведение рассеянного поля U . Функция $k^2(x)$ является непрерывной вещественной и определяет волновые параметры внутри объекта Q . Известная функция с компактным носителем $f(x)$ является правой частью уравнения (1).

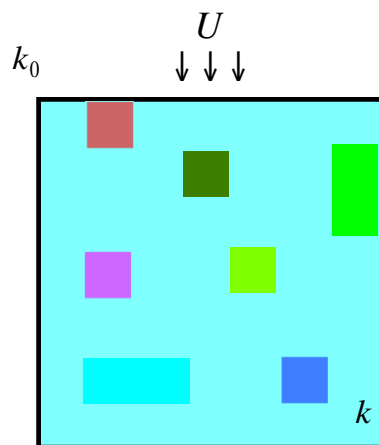


Рис. 1. Исследуемый объект

Справедливо выполнение условий сопряжения на границе раздела сред, которые имеют вид

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где символ $[\cdot]$ определяет скалярную функцию, представляющую собой разность значений функции с разных сторон ∂Q .

Уравнение (1) имеет не единственное решение в классе (обобщенных) функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Поэтому для обеспечения единственности решения поставленной задачи запишем условия излучения Зоммерфельда [4]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 u + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Представим уравнения (1)–(3) как задачу Θ , ее решение единственно [6]. Решение задачи Θ , удовлетворяющее условиям непрерывности, называется классическим решением прямой задачи рассеяния в дифференциальной постановке. Задачу Θ можно свести к интегральному уравнению, используя вторую формулу Грина

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (4)$$

где $f^0(x)$ – функция, задающая падающее поле, $k(y)$ – волновая функция внутри тела, $u(x)$ – искомая функция, а $G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|x-y|)$ – функция Ханкеля первого рода. Уравнение (1) является уравнением Фредгольма второго рода. Хорошо известны многочисленные приложения данного интегрального уравнения. Оно играет важную роль не только в задачах дифракции, но также в квантовой механике и многих других областях физики.

Перепишем уравнение в операторном виде и сформулируем ряд утверждений. Пусть

$$Au := \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy.$$

Запишем $u := u(y)$, $F := f^0(x)$, тогда уравнение (4) примет следующий операторный вид

$$Lu := u - Au := F. \quad (5)$$

Оператор (5) фредгольмов и непрерывно обратим [5]. В работах [6–12] проведены численные исследования интегрального уравнения (4). Получить решение задачи Θ также можно путем применения численного метода.

2. Решение обратной задачи восстановления

Для идентификации структуры исследуемого объекта необходимо знать значение поля в определенных точках, расположенных за пределами объекта. В настоящее время существуют многочисленные приборы, позволяющие измерить данные параметры. В случае отсутствия таких приборов излучаемое поле может быть смоделировано численно. Для этого необходимо решить прямую задачу Θ . Далее, используя значение поля $u(x)$ внутри тела, следует произвести перерасчет поля во внешних точках по формуле пересчета. Данная процедура должна быть выполнена с высокой степенью точности, поскольку используется численный метод расчета, а рассматриваемая задача чувствительна к изменению исходных данных.

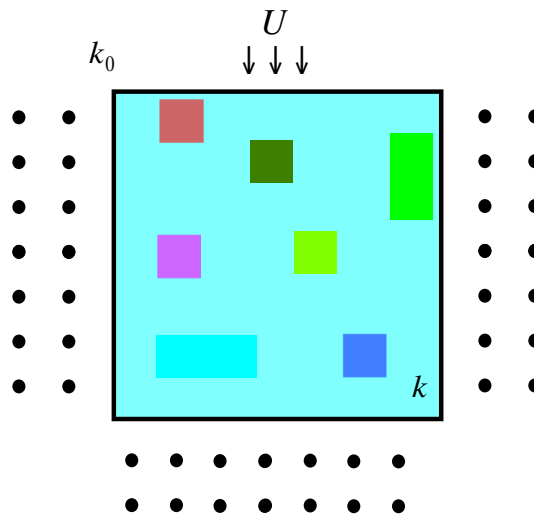


Рис. 2. Пример обратной задачи. Объект, источник излучения и точки наблюдения

Точки наблюдения, в которых измеряется или рассчитывается значение поля, размещаются равномерно вдоль границ исследуемого объекта на небольшом расстоянии друг от друга в несколько слоев (рис. 2). Волна, распространяющаяся от точечного источника излучения, является падающим полем. В такой постановке для решения задачи возможно применение двухшагового алгоритма для идентификации неоднородностей.

Разобьем тело плоской формы на ячейки Π_i , где $i = (i_1, i_2)$. Введем допущение, что параметры неоднородности внутри каждой ячейки не изменяются $k(x) = k_i$. Применим двухшаговый алгоритм [7, 9, 10], который можно записать следующим способом.

1. На первом шаге используем значения поля $u(y_{\text{merg}})$, измеренные в точках наблюдения y_{merg} , которые находятся за пределом объекта на некотором расстоянии. Рассчитаем значение поля внутри объекта, решив уравнение

$$u(y_{\text{merg}}) - f^0(y) = \int_Q G(x, y_{\text{merg}}) u(x) dx. \quad (6)$$

Отметим, что решение уравнения (6) является самой сложной частью двухшагового метода, поскольку это уравнение является уравнением 1-го рода. Система линейных алгебраических уравнений, получаемая в результате решения интегрального уравнения (6), является плохо обусловленной, что приводит к сильно зашумленным восстановленным данным.

2. На втором шаге пересчитаем значение параметров неоднородности $k(y)$, используя значение $u(y)$, по формуле пересчета

$$k^2(y) - k_0^2 = \frac{u(y)}{f(y) + \int_Q G(x, y_{\text{merg}}) u(x) dx}.$$

Для снижения числа обусловленности матрицы можно использовать различные предобуславливатели или методы регуляризации. Это позволяет в некоторых случаях решить системы линейных алгебраических уравнений больших размеров.

В связи с некорректностью задачи малые изменения входных данных (например, наличие шума) приводят к существенным отклонениям в решении задачи. Для борьбы с зашумленными данными можно применять различные методы обработки шума для его снижения и фильтрации, а также нейронные сети для улучшения результатов.

3. Численный метод

Для применения численного метода следует дополнить Q до фигуры прямоугольного вида $P = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, x_3 = c\}$. Построим на P равномерную обобщенную прямоугольную сетку. Будем нумеровать все элементарные прямоугольники $\Pi_{kl} \in P$. Это связано с тем, что нам не известны местоположение, размер и форма неоднородности. Площадь любого элементарного прямоугольника Π_{kl} равна V . Будем называть элементарный прямоугольник носителем базисной функции.

Используем кусочно-постоянные базисные функции и определим их на носителе следующим образом

$$v_{kl} = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{kl}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{kl}. \end{cases} \quad (7)$$

Данная функция удовлетворяет условию аппроксимации в пространстве $L_2(Q)$. В качестве метода решения выберем метод коллокации и рассмотрим его применение для уравнения

$$Au = f. \quad (8)$$

Метод коллокации состоит в нахождении приближенного решения уравнения посредством приравнивания значений функций в левой и правой частях в конечном числе точек, называемых точками коллокации, которые обычно выбираются как центры носителей базисных функций: $x_j = \left\{ \frac{x_{1,j} + x_{1,j+1}}{2}, \frac{x_{2,j} + x_{2,j+1}}{2}, c \right\}$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : X \rightarrow Y$. Метод коллокации решения уравнения (8) состоит в нахождении приближенного решения $u \in X_n$, удовлетворяющего уравнению

$$(Au_n)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n.$$

Рассмотрим линейную оболочку $X_n = \text{span}\{v_1 \dots v_n\}$, состоящую из базисных функций (7). Выразим элемент u_n в виде линейной комбинации

$$u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k.$$

В этом случае метод коллокации приводит к СЛАУ следующего вида

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Av_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n. \quad (9)$$

Приравнивание левой и правой частей уравнений (9) в конечном числе точек коллокации эквивалентно уравнению проекционного метода $P_n Au_n = P_n f$ с некоторым оператором интерполяции P_n , являющимся проекционным оператором.

Поскольку решение уравнения 1-го рода (6) приводит к сильно зашумленным данным, для его эффективного решения будем использовать объединенные расчетные сетки. Для построения такой сетки необходимо ввести в каждом носителе дополнительные коллокационные точки и добавить носители, окружающие их.

Проще всего это сделать путем сдвига ранее описанной регулярной прямоугольной сетки в нескольких направлениях. Более подробное описание подхода представлено в работе [6].

На рис. 3 представлена одна из элементарных ячеек расчетной сетки. Синий квадрат является исходным вариантом ячейки. Зелеными квадратами отмечены смещенные положения ячейки “Верх–лево” и “Низ–право”, красными – “Верх–право” и “Низ–лево”. Середина смещенной ячейки выбирается как положение точек колокации, которые отмечены на рисунке черным цветом. При выходе ячейки за пределы исходной фигуры интегрирование проводится только по внутренним точкам объекта.

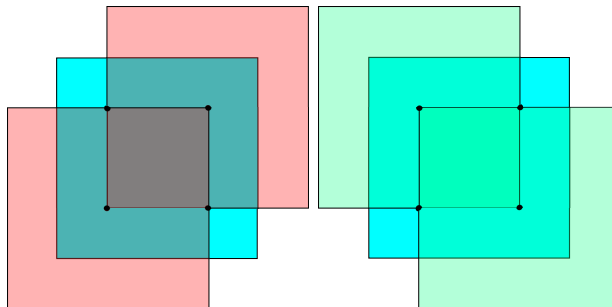


Рис. 3. Сдвиг ячейки сетки

Будем предполагать, что решение задачи получено, и в нашем распоряжении находится матрица, составленная методом Галеркина. Для решения задачи дифракции волны на объекте сложной формы необходимо, чтобы он целиком вмещался в прямоугольник и состоял из элементов сетки. Субиерархический метод [11, 12] позволяет составить матрицу для определения полей внутри объекта сложной формы, используя матрицу, составленную для прямоугольника. В построенной фигуре введем новую нумерацию элементарных прямоугольников. Произведя полный перебор, получим новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на объекте сложной формы. Решив СЛАУ для матрицы, составленной с использованием новой сетки, найдем значения поля внутри фигуры сложной формы. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размеров фигуры и сетки. Субиерархический подход позволяет избежать длительных расчетов, связанных с повторным вычислением матричных элементов.

4. Нелинейный случай

Рассмотрим некоторые варианты задания нелинейного поля. Возьмем нелинейное интегральное уравнение

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y; u(y))) u(y) dy, \quad (10)$$

где волновая функция зависит от $u(y)$. Данное уравнение описывает процесс дифракции волны внутри Q . Для определения нелинейной структуры объекта используем формулу

$$k^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u(x)|^2}{1 + \beta |u(x)|}, \quad (11)$$

где $k_1 - const$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ – некоторые коэффициенты нелинейности.

Моделирование нелинейного поля будем производить итерационно, разбив процесс на два этапа. На первом этапе положим, что тело однородно, т. е. волновая функция является константой: $k^2(x) = k_1 = \text{const}$ (запуск итерационного процесса также возможен при условии, что волновая функция является неоднородной).

Неявный алгоритм. Решим интегральное уравнение

$$u_0(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u_0(y) dy$$

и рассчитаем поле $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитаем значения волновой функции по следующей формуле

$$k_n^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u_n(x)|^2}{1 + \beta |u_n(x)|}. \quad (12)$$

Далее решим линейное уравнение

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_{n+1}(y) dy. \quad (13)$$

Повторим шаги (12)–(13) до достижения необходимой точности. Задача рассматривается в частотной области. Алгоритм считается неявным, так как требуется решение нелинейного уравнения на каждом этапе. Для решения уравнения используем метод коллокаций.

Явный алгоритм. Данный алгоритм заключается в построении явного итерационного процесса, который можно также расписать по шагам. На первом шаге для задания начального приближения решим линейное объемное интегральное уравнение (10) и тем самым определим значение $u_0(x)$. На следующих этапах произведем пересчет значения волновой функции, используя формулу (12) и уравнение пересчета

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_n(y) dy,$$

и найдем решение на новом шаге. Достижение необходимой точности вычисления будет обеспечено путем повторения итерационного процесса.

Данный метод имеет свои недостатки: необходим выбор достаточно точного начального приближения, иначе итерационный процесс не будет сходящимся.

Численное сравнение двух представленных алгоритмов показало, что неявный метод работает в более широком диапазоне значений k , однако уступает явному методу по скорости вычисления.

5. Численные результаты

На рис. 4–6 приведены результаты, которые иллюстрируют решения прямой и обратной задач для некоторых объектов, имеющих как линейную, так и нелинейную структуру. Объединенная расчетная сетка для данной задачи выбрана из 50×50 ячеек. При помощи субиерархического метода [12] из квадрата был “вырезан” эллипс. Данный метод позволяет использовать ранее рассчитанную матрицу для фигур канонического вида и выделять из объекта требуемые формы. Более подробные применение и описание можно также найти в работах [6, 8, 11].

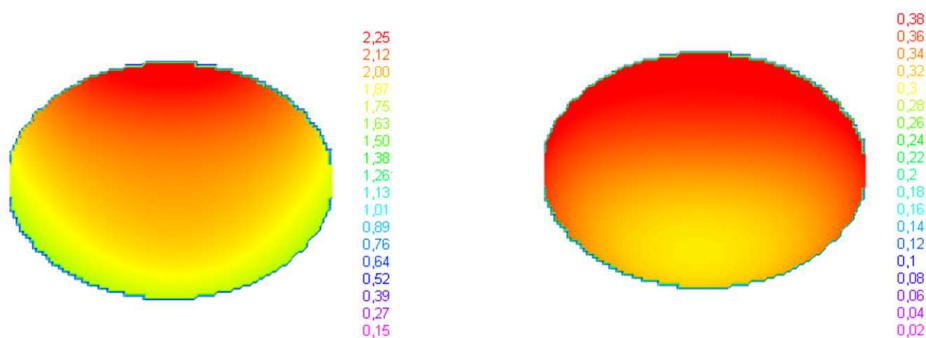


Рис. 4. Линейный случай. Решение прямой и обратной задач на теле в форме эллипса

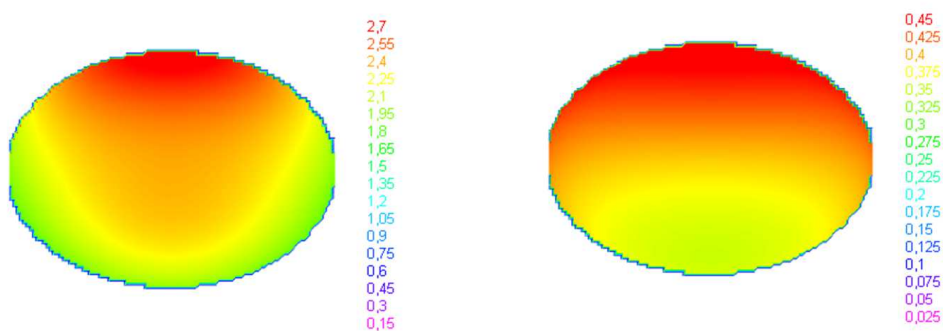


Рис. 5. Нелинейный случай (11) при $\alpha > \beta$. Решение задачи на теле в форме эллипса

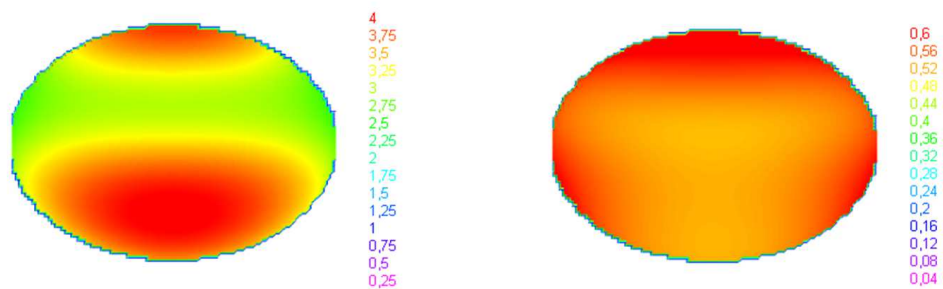


Рис. 6. Нелинейный случай (11) при $\alpha < \beta$. Решение прямой и обратной задач на теле в форме эллипса

Рис. 4 представляет решение прямой (слева) и обратной (справа) задач для объекта в форме эллипса.

На всех рисунках слева показаны значения поля при решении прямой задачи, справа – значения волновой функции. В табл. 1 представлено сравнение результатов решения прямой и обратной задач в некоторых ячейках, которые были выбраны по мере удаления от источника излучения. Сходство этих результатов позволяет

сказать, что данный метод может применяться в подобных задачах. На рис. 7 показано сравнение графиков сходимости итерационного процесса задания нелинейности для разных случаев. По горизонтали указано количество шагов, по вертикали – модуль разности решений обратной задачи на новом и предыдущем шагах.

Табл. 1

Точность решения обратной задачи

Номер слоя	10	20	30	40
Погрешность решения	0.001	0.001	0.01	0.01

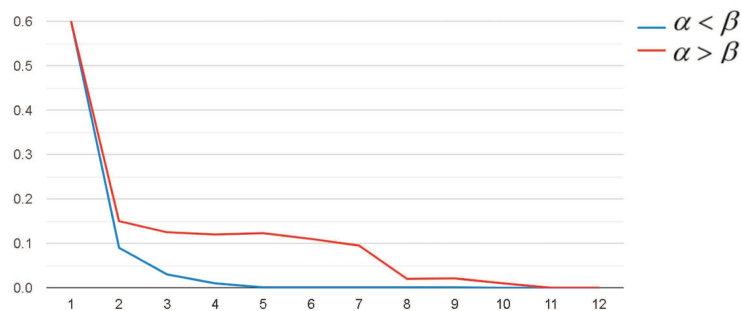


Рис. 7. График сходимости итерационного процесса задания нелинейности

Заключение

Рассмотрено поведение скалярного поля при решении нелинейной задачи дифракции. Использованы различные модели нелинейности. Подбор неоднородностей проведен в итерационной процедуре. Решение задачи восстановления неоднородностей показало хороший результат для всех рассматриваемых случаев, что говорит о возможности применения данного подхода во многих прикладных задачах диагностики. Применение субиерархического метода и задание нелинейности описанными вариантами позволяют моделировать поведение поля на более сложных структурах. Представленные графики сходимости итерационного процесса задания нелинейности показали устойчивость решения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 124020200015-7.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Корженевский А.В. Исследовательский электроимпедансный томограф, доступный для изготовления в нестандартных условиях // Журн. радиоэлектрон. 2021. № 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.5>.
2. Zarafshani A., Bach T., Chatwin C.R., Tang S., Xiang L., Zheng B. Conditioning electrical impedance mammography system // Measurement. 2018. V. 116. P. 38–48. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.10.052>.

3. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
4. *Sommerfeld A.* Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1912. Bd. 21. S. 309–353.
5. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: Русайнс, 2018. 223 с.
6. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 167–177.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>.
7. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, сист., сети в экон., техн., прир. и общ. 2023. № 4. С. 142–153.
<https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>.
8. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана–Швингера методом Галеркина // Изв. высш. учебн. завед. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки. 2023. № 3. С. 66–73.
<https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-5>.
9. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 3. P. 427–447.
<https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
10. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 10. P. 1474–1492. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
11. *Medvedik M.Yu.* A subhierarchy method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes // J. Commun. Technol. Electron. 2012. V. 57, No 2. P. 158–163. <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
12. *Medvedik M.Y.* Solution of integral equations by means of subhierarchy method for generalized computational grids // Math. Models Comput. Simul. 2015. V. 7, No 6. P. 570–580. <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.

Поступила в редакцию 31.05.2024

Принята к публикации 13.07.2024

Лапич Андрей Олегович, аспирант, ассистент кафедры “Математика и суперкомпьютерное моделирование”

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Медведик Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Математика и суперкомпьютерное моделирование”

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: medv@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 3, pp. 395–406

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.395-406

**Algorithm for Searching Inhomogeneities
in Inverse Nonlinear Diffraction Problems***A.O. Lapich*, M.Y. Medvedik****Penza State University, Penza, 440026 Russia**E-mail: *lapich.a@yandex.ru, **medv@mail.ru**Received May 31, 2024; Accepted July 13, 2024***Abstract**

This study aims to solve the inverse problem for determining the heterogeneity of an object. The scattered field was measured outside its boundaries at a set of observation points. Both the radiation source and observation points were assumed to be located outside the object. The scattered field was modeled by solving the direct problem. The inverse problem was solved using a two-step method. Nonlinearities of various types were considered. When introducing the computational grid, the generalized grid method was applied. A numerical method for solving the problem was proposed and implemented. The numerical results obtained illustrate how the problem is solved for specified experimental data.

Keywords: two-step method, integral equation, nonlinear diffraction problem, collocation method, numerical method

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of state assignment no. 124020200015-7.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Object under study.

Fig. 2. Example of an inverse problem. Object, radiation source, and observation points.

Fig. 3. Grid cell displacement.

Fig. 4. Linear case. Solution of the direct and inverse problems for an elliptical body.

Fig. 5. Nonlinear case (11) at $\alpha > \beta$. Solution of the problem for an elliptical body.

Fig. 6. Nonlinear case (11) at $\alpha < \beta$. Solution of the direct and inverse problems for an elliptical body.

Fig. 7. Convergence graph of the iterative process for nonlinearity adjustment.

References

1. Korjenevsky A.V. Electrical impedance tomography system suitable for manufacturing in non-standard conditions. *Zh. Radioelektron.*, 2021, no. 9.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.5>. (In Russian)

2. Zarafshani A., Bach T., Chatwin C.R., Tang S., Xiang L., Zheng B. Conditioning electrical impedance mammography system. *Measurement*, 2018, vol. 116, pp. 38–48. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.10.052>.
3. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 400 p. (In Russian)
4. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 1912, Bd. 21, S. 309–353. (In German)
5. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [Mathematical Theory of Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids]. Moscow, Ru-Science, 2018. 223 p. (In Russian)
6. Lapich A.O., Medvedik M.Y. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem for objects of arbitrary shape. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 167–177. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>. (In Russian)
7. Lapich A.O., Medvedik M.Y. Method for restoring the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements. *Modeli, Sist., Seti Ekon., Tekh., Prir. O-vo.*, 2023, no. 4, pp. 142–153. <https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>. (In Russian)
8. Lapich A.O., Medvedik M.Y. An iterative scheme for solving a Lippmann–Schwinger nonlinear integral equation by the Galerkin method. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, no. 3, pp. 66–73. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-5>. (In Russian)
9. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 427–447. <https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
10. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 10, pp. 1474–1492. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
11. Medvedik M.Yu. A subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 158–163. <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
12. Medvedik M.Y. Solution of integral equations by means of subhierarchical method for generalized computational grids. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 570–580. <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.

⟨ **Для цитирования:** Лапич А.О., Медведик М.Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 395–406. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.395-406>. ⟩

⟨ **For citation:** Lapich A.O., Medvedik M.Y. Algorithm for searching inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 395–406. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.395-406>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, ЗАКРЕПЛЕННОГО
НА ДВУХСТОРОННЕМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ
ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ПРОСЛОЙКИ

В.Н. Паймушин^{1,2}, В.М. Шишкин³, С.Ф. Чумакова⁴

¹Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

³Вятский государственный университет, г. Киров, 610000, Россия

⁴Государственный университет по землеустройству, г. Москва, 105064, Россия

Аннотация

Построена простейшая трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, состоящего из двух участков по длине. Она основана на использовании на незакрепленном участке классической геометрически линейной модели Кирхгофа–Лява, а закрепленный участок конечной длины считается соединенным с жестким и неподвижным опорным элементом через упругие прослойки. На закрепленном участке прогибы стержня и прослоек считаются нулевыми, а для перемещений в осевом направлении в пределах толщин стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера–Лагранжа, получены для введенных в рассмотрение участков соответствующие уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков. На основе построенных уравнений найдены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях стержня рассматриваемого класса. На их основе проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродных ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показана значительная трансформация поперечных касательных напряжений при переходе через границу от незакрепленного участка стержня к закрепленному, а также их ярко выраженная локализация в области закрепленного участка, расположенной вблизи отмеченной границы.

Ключевые слова: колебания, стержень-полоса, модель С.П. Тимошенко, незакрепленный участок, закрепленный участок, уравнение движения, кинематические условия сопряжения участков, силовые условия сопряжения участков, аналитические решения

Введение

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах обычно заменяют граничными условиями того или иного вида, например, шарнирного опирания или жесткого защемления [1–3], что, безусловно, вносит погрешность в решениях данных задач. Так, например, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в концевых сечениях кинематических граничных условий защемления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что места крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах [4–7]. В ранее выполненных работах авторов [8–10] было показано, что для описания процессов статического и динамического деформирования удлиненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) (и математических моделей, применяемых для их описания), имеющей место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (или от закрепленного к незакрепленному). В этих работах рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что обычно имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций к опорным элементам или соединении их между собой внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в другую, названную трансформационной.

Если же закрепление участка конечной длины является двухсторонним, т. е. осуществляется по обеим лицевым поверхностям, то учет податливости закрепленного участка на основе отмеченной модели, как показано в работе [8], невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования более высокого порядка точности. Применительно к незакрепленным участкам тонкостенных элементов конструкций разработке таких моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература, критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [11, 12]. В настоящей работе рассмотрена задача математического моделирования процессов динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на жестком неподвижном опорном элементе через упругие прослойки (рис. 1).

Введение в рассмотрение прослоек в исследуемой механической системе обусловлено, во-первых, их наличием в реальных конструкциях [13]: например, в изделиях конструкционной оптики летательных аппаратов (фонари самолетов, иллюминаторы и любые окна и двери из стекла в зданиях, которые соединяются с элементами жесткого каркаса всегда через эластичные герметизирующие прослойки).

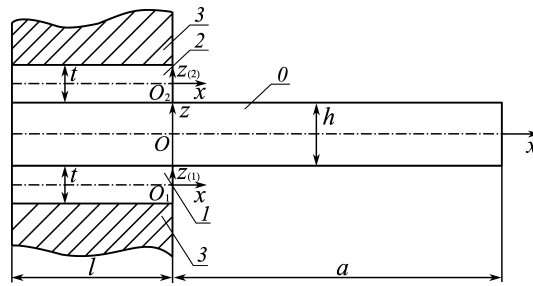


Рис. 1. Схема закрепления стержня-полосы в опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2

Во-вторых, без введения в расчетную схему прослоек построение простейшей математической модели деформирования конструкции в целом с использованием для стержня-полосы в пределах участка его закрепления (рис. 1) простейших известных моделей деформирования (Кирхгофа – Лява, типа С.П. Тимошенко без учета поперечного обжатия и др.) вообще невозможно.

Для постановки и решения рассматриваемого класса задач ниже предложена трансформационная модель деформирования стержня с простейшими аппроксимациями перемещений на его участках: на закрепленных – для стержня и прослоек использована сдвиговая модель С.П. Тимошенко при нулевых прогибах в поперечном направлении, а для незакрепленного – классическая модель Кирхгофа – Лява.

1. Модель деформирования участка закрепления конечной длины

Рассмотрим стержень-полосу единичной ширины, закрепленный на конечной длине l в абсолютно жестком опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2 (рис. 1), работающие на сдвиг. Введя в рассмотрение декартовы системы координат Oxz , $O_1xz_{(1)}$, $O_2xz_{(2)}$ и обозначив через h и t толщины стержня и прослоек соответственно, будем считать, что их деформирование в точках поверхностей $z = \pm h/2$, $z_{(1)} = t/2$, $z_{(2)} = -t/2$ происходит без взаимного проскальзывания. В простейшем приближении процесс деформирования закрепленного участка стержня и прослоек опишем сдвиговой моделью С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для перемещений $U^{(0)}$, $W^{(0)}$ произвольных точек поперечных сечений в направлениях осей Ox , Oz примем соответственно аппроксимации

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} \equiv 0, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (1)$$

$$U^{(k)} = u^{(k)} + z\gamma^{(k)}, \quad W^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad -t/2 \leq z_{(k)} \leq t/2. \quad (2)$$

Здесь $u^{(0)}$, $\gamma^{(0)}$ – осевые перемещения и угол поворота поперечного сечения закрепленного участка стержня соответственно, $u^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, – то же для прослоек.

Подчинив перемещения $U^{(0)}$, $U^{(k)}$ кинематическим условиям сопряжения стержня с прослойками, записываемыми в виде

$$\begin{aligned} U^{(0)}(x, z = -h/2) &= U^{(1)}(x, z_{(1)} = t/2), \\ U^{(0)}(x, z = h/2) &= U^{(2)}(x, z_{(2)} = -t/2), \end{aligned}$$

и считая $U^{(1)}(x, z_{(1)} = -t/2) = 0$, $U^{(2)}(x, z_{(2)} = t/2) = 0$, получим зависимости

$$u^{(1)} = \frac{t}{2}\gamma^{(1)}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right),$$

$$u^{(2)} = -\frac{t}{2}\gamma^{(2)}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{1}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right).$$

При их подстановке в (2) найдем преобразованные аппроксимации

$$U^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t}\right)\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad U^{(2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t}\right)\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right). \quad (3)$$

В геометрически линейном приближении аппроксимациям (1) и (3) соответствуют необходимые в дальнейшем ненулевые компоненты деформаций (нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате x)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(0)} &= u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}, \quad \gamma_{xz}^{(0)} = \gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \\ \gamma_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_{(1)}} = \frac{1}{t}\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad \gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z_{(2)}} = -\frac{1}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

и в физически линейно-упругом приближении – ненулевые компоненты напряжений

$$\sigma_x^{(0)} = E_1\left(u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}\right), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13}\gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (5)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{G_{13}^0}{t}\left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = -\frac{G_{13}^0}{t}\left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \quad (6)$$

где E_1, G_{13} – модуль упругости в направлении оси Ox и модуль поперечного сдвига материала стержня соответственно; G_{13}^0 – модуль поперечного сдвига материала прослоек.

Заметим, что при $t \rightarrow 0$, как следует из (4), $\gamma_{xz}^{(1)} \rightarrow \infty$ и $\gamma_{xz}^{(2)} \rightarrow \infty$. В этом случае при $G_{13}^0 \neq 0$, как видно из (6), $\sigma_{xz}^{(1)} \rightarrow \infty$, $\sigma_{xz}^{(2)} \rightarrow \infty$. Следовательно, основанная на аппроксимациях (3) модель деформирования участка стержня, закрепленного в абсолютно жестком и неподвижном опорном элементе через деформируемые прослойки (рис. 1), при $t \rightarrow 0$ и $G_{13}^0 \neq 0$ является некорректной. При $t = 0$ она становится физически содержательной только при $G_{13}^0 = 0$, когда допускается свободное проскальзывание без трения граничных сечений стержня $z = \pm h/2$ относительно граничных плоскостей опорного элемента [14].

Используя (5) и (6), введем в рассмотрение приведенные к срединным поверхностям $z = 0$, $z_{(1)} = 0$, $z_{(2)} = 0$ усилия и моменты

$$\begin{aligned} T_x^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} dz = B_{11}u_{,x}^{(0)}, \quad M_x^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} z dz = D_{11}\gamma_{,x}^{(0)}, \\ T_{xz}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^{(0)} dz = B_{13}\gamma^{(0)}, \quad B_{11} = E_1 h, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12}, \\ T_{xz}^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(1)} dz_{(1)} = G_{13}^0 \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$T_{xz}^{(2)} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(2)} dz_{(2)} = -G_{13}^0 \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right),$$

при учете которых для определения вариации потенциальной энергии деформации закрепленного участка стержня будет иметь место выражение

$$\begin{aligned} \delta \Pi^{(0)} = & \int_{-l}^0 \left[T_x^{(0)} \delta u_{,x}^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma_{,x}^{(0)} + \frac{T_{xz}^{(1)}}{t} \left(\delta u^{(0)} - \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{T_{xz}^{(2)}}{t} \left(\delta u^{(0)} + \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) \right] dx = \left(T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\ & - \int_{-l}^0 \left\{ \left[T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} (T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)}) \right] \delta u^{(0)} + \left[M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} (T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)}) \right] \delta \gamma^{(0)} \right\} dx, \end{aligned} \quad (8)$$

а также зависимости

$$T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} = 2G_{13}^0 u^{(0)}, \quad T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} = -G_{13}^0 h \gamma^{(0)}. \quad (9)$$

Таким образом, при использовании (7) и (9) придем к дифференциальным выражениям

$$\begin{aligned} L_T^{(0)} &= T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} (T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)}) = B_{11} u_{,xx}^{(0)} - \frac{2G_{13}^0}{t} u^{(0)}, \\ L_M^{(0)} &= M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} (T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)}) = D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (10)$$

указывающим, что исследуемый вид опорного элемента стержня-полосы приводит к несвязанным между собой задачам о продольных осевых и поперечных изгибных формах динамического деформирования на его участке закрепления. При $G_{13}^0 \equiv 0$ они сводятся к дифференциальным выражениям в задачах, которые описывают изученные ранее свободные и вынужденные колебания стержня-полосы, закрепленного на двухсторонних скользящих опорах [14], на основе простейшей трансформационной модели деформирования.

Используя аппроксимации (1) и (3), для вариации работы инерционных сил на закрепленном участке можно получить выражение

$$\delta K^{(0)} = - \int_{-l}^0 \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} \delta u^{(0)} + \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right] dx, \quad (11)$$

где ρ, ρ_0 – плотности материалов стержня и прослойки, $\ddot{u} = \partial^2 / \partial \tau^2$, ... – обозначения частных производных по времени τ .

2. Модель деформирования незакрепленного участка и уравнения движения стержня

При использовании на закрепленном участке стержня аппроксимаций (3), дополненных равенствами $W^{(k)} = W^{(0)} \equiv 0$, $k = 1, 2$, на незакрепленном участке $0 \leq x \leq a$ простейшими для перемещений U, W произвольных точек поперечных сечений в направлениях осей Ox, Oz являются аппроксимации

$$U = u - zw_{,x}, \quad W = w, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (12)$$

соответствующие использованию классической модели Кирхгофа–Лява, где u, w – перемещения точек, расположенных на оси Ox данного участка. Функции перемещений в (1) и (12) в сечении $x = 0$ необходимо подчинить кинематическим условиям сопряжения участков

$$u^{(0)} \Big|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = 0, \quad \gamma^{(0)} \Big|_{x=0} = -w_{,x}|_{x=0}. \quad (13)$$

Аппроксимациям (12) в геометрически линейном приближении соответствуют деформации и нормальные напряжения

$$\varepsilon_x = u_{,x} - zw_{,xx}, \quad \sigma_x = E_1 \varepsilon_x = E_1 (u_{,x} - zw_{,xx}),$$

а также вариация потенциальной энергии деформации

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^a (T_x \delta u_{,x} - M_x \delta w_{,xx}) dx = \\ &= (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + Q_z \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a (T_{x,x} \delta u + Q_{z,x} \delta w) dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь T_x, M_x, Q_z – осевая сила, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении незакрепленной части стержня соответственно, определяемые соотношениями упругости

$$T_x = B_{11} u_{,x}, \quad M_x = -D_{11} w_{,xx}, \quad Q_z = M_{x,x} = -D_{11} w_{,xxx}. \quad (15)$$

В соответствии с (12) выражение для вариации работы инерционных сил запишем в приближении

$$\begin{aligned} \delta K &= - \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \rho [(\ddot{u} - z\ddot{w}_{,x}) (\delta u - z\delta w_{,x}) + \ddot{w} \delta w] dx dz = \\ &= -\rho h \int_0^a \left(\ddot{u} \delta u + \frac{t^2}{12} \ddot{w}_{,x} \delta w_{,x} + \ddot{w} \delta w \right) dx \approx -\rho h \int_0^a (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dx, \end{aligned} \quad (16)$$

пренебрегая в (16) подчеркнутым слагаемым, обусловленным силами инерции при повороте поперечного сечения незакрепленного участка стержня.

Для вывода уравнений движения закрепленного и незакрепленного участков стержня воспользуемся вариационным уравнением принципа Даламбера–Лагранжа

$$\delta\Pi^{(0)} - \delta K^{(0)} + \delta\Pi - \delta K - \delta A = 0. \quad (17)$$

В предположении, что на незакрепленную часть стержня действует поверхностная нагрузка $p_z = p_z(x, \tau)$, входящая в (17), вариация работы внешней нагрузки будет определена выражением

$$\delta A = \int_0^a p_z \delta w dx. \quad (18)$$

Из уравнения (17) после подстановки в него соотношений (8), (11), (14), (16) и (18), а также при учете дифференциальных выражений (10) и кинематических условий сопряжения участков (13) следуют:

- уравнения движения для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} B_{11} u_{,xx}^{(0)} - \frac{2G_{13}^0}{t} u^{(0)} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} &= 0, \\ D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (19) в сечении $x = -l$,

$$T_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta u^{(0)} \neq 0, \quad M_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta \gamma^{(0)} \neq 0; \quad (20)$$

- уравнения движения для незакрепленного участка $0 \leq x \leq a$

$$B_{11} u_{,xx} - \rho h \ddot{u} = 0, \quad -D_{11} w_{,xxxx} - \rho h \ddot{w} + p_z = 0 \quad (21)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (20) в сечении $x = a$,

$$\begin{aligned} T_x|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \\ M_x|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta w_{,x} \neq 0, \\ Q_z|_{x=a} &= 0, \text{ при } \delta w \neq 0; \end{aligned} \quad (22)$$

- а также силовые условия сопряжения участков

$$\left(T_x^{(0)} - T_x \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(M_x^{(0)} - M_x \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad (23)$$

формулируемые в сечении $x = 0$ в силу $\delta u^{(0)} = \delta u \neq 0$, $\delta \gamma^{(0)} = -\delta w_{,x} \neq 0$.

Следует особо подчеркнуть, что в силу принятого для участка $-l \leq x \leq 0$ предположения $w^{(0)}(x) = 0$, содержащееся в (13) второе условие, формулируемое в сечении $x = 0$, является граничным условием $w|_{x=0} = 0$ для второго уравнения в (21).

На основе полученных уравнений движения (19) и (21), соответственно, закрепленных и незакрепленного участков стержня с учетом условий (20), (22) и (23) можно ставить и решать две основные задачи, состоящие в определении требуемого спектра собственных форм и частот колебаний стержня рассматриваемого класса, а также его динамической реакции при действии заданной нагрузки $p_z = p_z(x, \tau)$.

3. Определение собственных форм и частот колебаний стержня (модальный анализ)

Решения уравнений (19) для закрепленного участка стержня (рис. 1) будем искать в виде

$$u^{(0)} = \tilde{u}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad \gamma^{(0)} = \tilde{\gamma}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad (24)$$

где i – мнимая единица, ω – круговая частота. Подставив (24) в (19), получим уравнения

$$\tilde{u}_{,xx}^{(0)} + k_{u_0}^2 \tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{,xx}^{(0)} - k_\gamma^2 \tilde{\gamma}^{(0)} = 0 \quad (25)$$

с коэффициентами

$$k_{u_0}^2 = \frac{1}{B_{11}} \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \omega^2 - \frac{2G_{13}^0}{t} \right],$$

$$k_\gamma^2 = \frac{1}{D_{11}} \left[B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \omega^2 \right].$$

Вычисления показали, что даже при малых значениях G_{13}^0 и толщине про-слоек t одного порядка с h имеют место неравенства $k_{u_0}^2 < 0$ и $k_\gamma^2 > 0$. В этом случае общие решения уравнений (25) будут иметь вид

$$\tilde{u}^{(0)} = c_1 \sin(k_{u_0} x) + c_2 \cos(k_{u_0} x), \quad \tilde{\gamma}^{(0)} = d_1 e^{k_\gamma x} + d_2 e^{-k_\gamma x}, \quad -l \leq x \leq 0. \quad (26)$$

Здесь c_1, c_2, d_1, d_2 – постоянные интегрирования. В соответствии с представлениями (24) усилия $T_x^{(0)}, T_{xz}^{(0)}$ и моменты $M_x^{(0)}$ в закрепленной части стержня будут определяться выражениями

$$T_x^{(0)} = \tilde{T}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad T_{xz}^{(0)} = \tilde{T}_{xz}^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad M_x^{(0)} = \tilde{M}_x^{(0)} e^{i\omega\tau}, \quad (27)$$

в которых величины $\tilde{T}_x^{(0)}, \tilde{T}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{M}_x^{(0)}$ на основании соотношений (7) и полученных решений (26) определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x^{(0)} &= B_{11} k_{u_0} [c_1 \cos(k_{u_0} x) - c_2 \sin(k_{u_0} x)], \\ \tilde{T}_{xz}^{(0)} &= B_{13} (d_1 e^{k_\gamma x} + d_2 e^{-k_\gamma x}), \\ \tilde{M}_x^{(0)} &= D_{11} k_\gamma (d_1 e^{k_\gamma x} - d_2 e^{-k_\gamma x}). \end{aligned} \quad (28)$$

При анализе свободных колебаний стержня во втором уравнении (21) следует принять условие $p_z = 0$. С учетом данного условия вместо (21) получим уравнения

$$B_{11} u_{,xx} - \rho h \ddot{u} = 0, \quad D_{11} w_{,xxxx} + \rho h \ddot{w} = 0. \quad (29)$$

Решения данных уравнений будем искать в виде

$$u = \tilde{u} e^{i\omega\tau}, \quad w = \tilde{w} e^{i\omega\tau}, \quad (30)$$

что при подстановке в (29) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\tilde{u}_{,xx} + k_u^2 \tilde{u} = 0, \quad \tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = 0, \quad (31)$$

в которых $k_u^2 = \rho\omega^2/E_1, k_w^4 = \rho h\omega^2/D_{11}$. Полученные уравнения (31) имеют решения

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= c_3 \sin(k_u x) + c_4 \cos(k_u x), \\ \tilde{w} &= g_1 \sin(k_w x) + g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x}, \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned} \quad (32)$$

где $c_3, c_4, g_1, \dots, g_4$ – постоянные интегрирования. В соответствии с (30) введем необходимые в дальнейшем представления

$$T_x = \tilde{T}_x e^{i\omega\tau}, \quad M_x = \tilde{M}_x e^{i\omega\tau}, \quad Q_z = \tilde{Q}_z e^{i\omega\tau}, \quad (33)$$

в которых величины $\tilde{T}_x, \tilde{M}_x, \tilde{Q}_z$ на основании соотношений (15) и полученных решений (32) будут определяться зависимостями

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x &= B_{11} \tilde{u}_{,x} = B_{11} k_u [c_3 \cos(k_u x) - c_4 \sin(k_u x)], \\ \tilde{M}_x &= -D_{11} k_w^2 (-g_1 \sin(k_w x) - g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x}), \\ \tilde{Q}_z &= -D_{11} k_w^3 (-g_1 \cos(k_w x) + g_2 \sin(k_w x) + g_3 e^{k_w x} - g_4 e^{-k_w x}). \end{aligned} \quad (34)$$

Полученные решения (26) и (32) содержат десять постоянных интегрирования $c_1, \dots, c_4, d_1, d_2$ и g_1, \dots, g_4 , для нахождения которых имеются условия (13), (20), (22) и (23). Используя данные условия с учетом представлений (24), (27), (30) и (33), а также зависимости (28) и (34), приходим к системе десяти алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_2 - c_4 &= 0, \quad g_2 + g_3 + g_4 = 0, \quad d_1 + d_2 + k_w (g_1 + g_3 - g_4) = 0, \\ c_1 \cos(-k_{u0} l) - c_2 \sin(-k_{u0} l) &= 0, \quad d_1 e^{-k_\gamma l} - d_2 e^{k_\gamma l} = 0, \\ c_3 \cos(k_u a) - c_4 \sin(k_u a) &= 0, \quad -g_1 \sin(k_w a) - g_2 \cos(k_w a) + \\ + g_3 e^{k_w a} + g_4 e^{-k_w a} &= 0, \quad -g_1 \cos(k_w a) + g_2 \sin(k_w a) + g_3 e^{k_w a} - g_4 e^{-k_w a} = 0, \\ k_{u0} c_1 - k_u c_3 &= 0, \quad k_\gamma (d_1 - d_2) + k_w^2 (-g_2 + g_3 + g_4) = 0, \end{aligned}$$

которая распадается на две независимые системы: первая система содержит постоянные интегрирования c_1, \dots, c_4 , соответствующие свободным продольным колебаниям стержня, а вторая – только постоянные $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$, соответствующие формам поперечных (изгибных) колебаний. При этом практический интерес представляет последний тип колебаний, происходящих в сравнительно низком диапазоне частот.

Систему однородных уравнений относительно постоянных интегрирования $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$ можно представить в виде

$$[A] \{X\} = \{0\}, \quad (35)$$

где $[A], \{X\}$ – квадратная матрица и столбец соответственно, состоящие из элементов (неотмеченные элементы матрицы $[A]$ имеют нулевые значения)

$$\begin{aligned} a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{21} = a_{22} &= 1, \quad a_{23} = a_{25} = k_w, \quad a_{26} = -k_w, \quad a_{31} = e^{-k_\gamma l}, \\ a_{32} = -e^{k_\gamma l}, \quad a_{43} &= -\sin(k_w a), \quad a_{44} = -\cos(k_w a), \quad a_{45} = e^{k_w a}, \quad a_{46} = e^{-k_w a}, \\ a_{53} &= -\cos(k_w a), \quad a_{54} = \sin(k_w a), \quad a_{55} = e^{k_w a}, \quad a_{56} = -e^{-k_w a}, \quad a_{61} = k_\gamma, \\ a_{61} &= -k_\gamma, \quad a_{64} = -k_w^2, \quad a_{65} = a_{66} = k_w^2, \quad x_1 = d_1, \quad x_2 = d_2, \quad x_3 = g_1, \\ x_4 &= g_2, \quad x_5 = g_3, \quad x_6 = g_4. \end{aligned} \quad (36)$$

Система уравнений (35) имеет нетривиальное решение $\{X\} \neq \{0\}$ при условии равенства нулю определителя матрицы $[A]$ ($\det[A] = 0$), из которого можно найти интересующие нас собственные частоты ω_j ($j = 1, 2, 3, \dots$), каждой из которых соответствует некоторое ненулевое решение $\{X\}_j$. Так как уравнения (35) являются однородными, то данное решение находится с точностью до множителя. Для этого все неизвестные обычно выражают через некоторую одну неизвестную величину, которой впоследствии задают какое-то произвольное значение. Однако данный

прием требует проведения длительных неформальных преобразований структуры исходной системы уравнений, которые трудно поддаются автоматизации вычислений. Наиболее простой способ получения нетривиального решения системы (35) (без преобразования ее структуры) может состоять в применении известного правила Пэйна – Айронса [15,16]. Согласно данному правилу нужно выбрать наибольший по модулю диагональный элемент a_{ii} матрицы $[A]$, который умножить на параметр штрафа $\alpha = 10^{10} \div 10^{12}$, а элементу с номером i правой части системы вместо нуля присвоить значение $a_{ii}\alpha q$, где $q \ll \alpha$ – некоторая произвольная величина. Тогда уравнение с номером i системы (35) становится таким:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}\alpha x_i + \dots + a_{i6}x_6 = a_{ii}\alpha q. \quad (37)$$

Слагаемое $a_{ii}\alpha x_i$ в (37) получается по модулю примерно в α раз выше всех остальных. Это дает $x_i \approx q$ (с точностью до $10^{-10} \div 10^{-12}$), а все остальные неизвестные при решении отмеченной системы получатся выраженными через x_i .

4. Определение динамической реакции при вынужденных изгибных колебаниях стержня

Предположим, что действующая на незакрепленную часть стержня поверхностная нагрузка $p_z = p_z(x, \tau)$ изменяется по гармоническому закону $p_z = \tilde{p}_z(x)e^{i\omega\tau}$. Тогда в соответствии с (21) вместо второго уравнения в (31) будем иметь неоднородное дифференциальное уравнение

$$\tilde{w}_{,xxxx} - k_w^4 \tilde{w} = \tilde{p}_z(x)/D_{11}, \quad (38)$$

общее решение которого имеет вид

$$\tilde{w} = g_1 \sin(k_w x) + g_2 \cos(k_w x) + g_3 e^{k_w x} + g_4 e^{-k_w x} + \hat{w}(x),$$

где g_1, \dots, g_4 – постоянные интегрирования (с обозначениями предыдущего раздела, но имеющие вполне определенные значения), а $\hat{w}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, зависящее от характера зависимости $\tilde{p}_z(x)$. Если величину \tilde{p}_z в простейшем случае считать постоянной по всей длине незакрепленного участка стержня, то из (38) следует решение $\hat{w} = -\tilde{p}_z/(D_{11}k_w^4)$.

Необходимо заметить, что при определении динамической реакции стержня от нагрузки $p_z = \tilde{p}_z(x)e^{i\omega\tau}$ продольные и изгибные колебания стержня будут по-прежнему независимыми. При этом практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие, как уже отмечалось выше, в сравнительно низком диапазоне частот и определяемые постоянными интегрирования $d_1, d_2, g_1, \dots, g_4$ (в обозначениях предыдущего раздела), которые можно найти из системы линейных неоднородных уравнений

$$[A] \{X\} = \{B\}. \quad (39)$$

Матрица $[A]$ и столбец $\{X\}$ по-прежнему состоят из элементов (36), а столбец $\{B\}$ (в случае $\tilde{p}_z = \text{const}$) содержит элементы $b_1 = \tilde{p}_z/(D_{11}k_w^4)$, $b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 0$.

Решение $\{X\} = [A]^{-1} \{B\}$ системы (39) в конечном итоге полностью определяет параметры НДС при изгибных колебаниях стержня. Однако следует заметить, что разработанная методика определения динамической реакции стержня не учитывает демпфирующие свойства его материала и упругих прослоек и поэтому может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали

от резонансной зоны, в то время как наибольшие амплитуды колебаний обычно имеют место в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [17]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [18–20], заменив величины E_1 , G_{13} и G_{13}^0 комплексными модулями упругости

$$\bar{E}_1 = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad \bar{G}_{13} = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi}, \quad \bar{G}_{13}^0 = G_{13}^0 + i \frac{G_{13}^0 \delta_{13}^0}{\pi},$$

где δ_1 – логарифмический декремент колебаний (ЛДК) материала стержня при растяжении-сжатии в направлении оси Ox ; δ_{13} , δ_{13}^0 – то же при поперечном сдвиге стержня и прослойки.

5. Вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов

Эксперимент 1. Проведен модальный анализ рассматриваемого стержня (рис. 1), выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками [21]: $E_1 = 104.7$ ГПа, $G_{13} = 1.0$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³, $\delta_1 = 0.05$, $\delta_{13} = 0.10$. Размеры стержня: $l = 50$ мм, $a = 300$ мм, $h = 3$ мм. Упругие прослойки имеют толщину $t = 0.8$ мм и выполнены из твердого полиуретана PR700 с характеристиками: $G_{13}^0 = 0.77$ ГПа, $\delta_{13}^0 = 0.75$, $\rho_0 = 1240$ кг/м³.

Частотное уравнение $\det[A(\omega)] = 0$ решалось методом половинного деления [22] до выполнения условия $(\omega_{\max}^{(k)} - \omega_{\min}^{(k)})/\omega_{\max}^{(k)} \leq \psi$, где $\omega_{\max}^{(k)}$, $\omega_{\min}^{(k)}$ – границы текущего интервала поиска, в котором расположен корень частотного уравнения, k – номер текущей итерации, ψ – заданная точность. После выполнения данного условия был найден искомый корень $\omega = (\omega_{\max}^{(k)} + \omega_{\min}^{(k)})/2$. Для нахождения интервалов поиска корней уравнения $\det[A(\omega)] = 0$ предварительно была проведена стандартная процедура отделения корней, в результате чего были выделены три интервала частот $f = \omega/(2\pi)$: $20 \leq f \leq 60$ Гц, $260 \leq f \leq 300$ Гц и $740 \leq f \leq 780$ Гц, каждый из которых содержал один корень указанного уравнения.

Таким способом были найдены три низшие собственные частоты $f_1 = 43.374$ Гц, $f_2 = 272.413$ Гц и $f_3 = 764.136$ Гц при заданной точности $\psi = 1 \cdot 10^{-6}$. Для достижения указанной точности определения данных трех частот потребовалось, соответственно, 20, 18 и 16 итераций.

Для сравнения были определены три низшие циклические частоты f_1^* , f_2^* , f_3^* свободных колебаний рассматриваемого стержня в случае жесткого заземления сечения $x = 0$ с использованием известной формулы [23]

$$\omega_j^* = \beta_j^2 \sqrt{EI/(m_0 a^4)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (40)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб, m_0 – погонная масса, $\beta_1 = 1.87510$, $\beta_2 = 4.69409$, $\beta_3 = 7.85476$ (для композитного стержня-полосы в формуле (40) вместо EI и m_0 следует взять величины D_{11} и ρh соответственно). В результате были получены циклические частоты $f_j^* = \omega_j^*/(2\pi)$, $j = 1, 2, 3$: $f_1^* = 44.987$ Гц, $f_2^* = 281.928$ Гц и $f_3^* = 789.409$ Гц. Сравнение частот f_j и f_j^* свидетельствует, что значения f_j , как и следовало ожидать, получились несколько ниже (в среднем на 3.4%) соответствующих значений f_j^* . Отмеченный факт можно объяснить податливостью стержня и упругих прослоек при его двухстороннем закреплении на конечной длине l .

На рис. 2 представлены нормированные формы прогибов $W_1 = \tilde{w}_1/|\tilde{w}_1|_{\max}$ и $W_2 = \tilde{w}_2/|\tilde{w}_2|_{\max}$ незакрепленного участка стержня при свободных его колебаниях на частотах $f_1 = 43.374$ Гц и $f_2 = 272.413$ Гц соответственно. Значения \tilde{w}_1 и \tilde{w}_2 на каждой частоте были определены с использованием зависимости (32) при постоянных g_1, \dots, g_4 , найденных в результате модального анализа стержня.

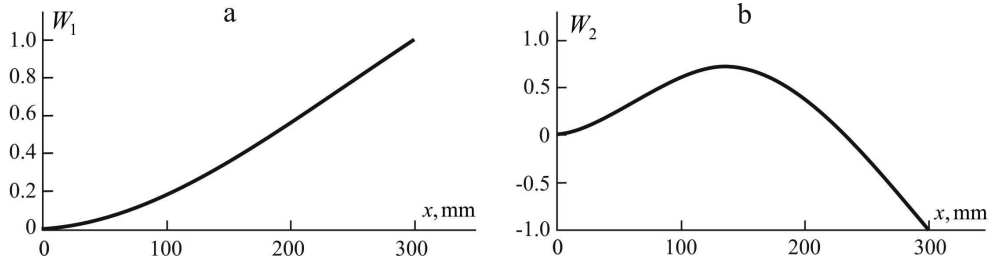


Рис. 2. Нормированные формы прогибов W_1 (a) и W_2 (b) незакрепленного участка стержня

Эксперимент 2. Была определена динамическая реакция прежнего стержня-полосы при резонансных колебаниях, возбуждаемых поверхностной нагрузкой $p_z = \tilde{p}_z e^{i\omega\tau}$ с амплитудой $p_z = 64$ Н/м² и круговой частотой $\omega = \omega_j = 2\pi f_j$, $j = 1, 2$. На рис. 3 приведены амплитуды резонансных колебаний \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 незакрепленного участка стержня на частотах $f_1 = 43.374$ Гц и $f_2 = 272.413$ Гц соответственно, по форме совпадающие (с точностью до множителя) с соответствующими формами W_1 , W_2 свободных колебаний (рис. 2), что находится в соответствии с известным в теории колебаний положением о подобии отмеченных форм.

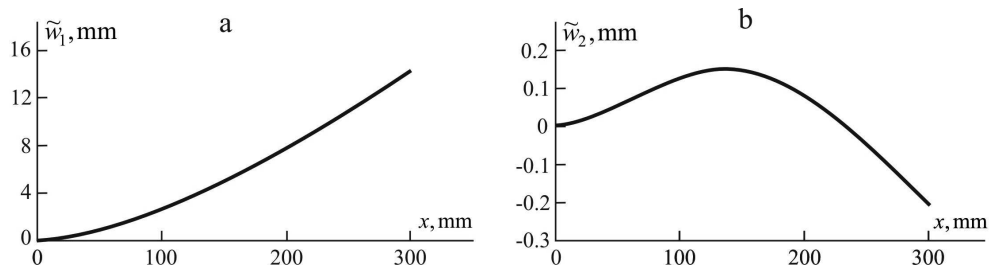


Рис. 3. Амплитуды резонансных колебаний \tilde{w}_1 (a) и \tilde{w}_2 (b) незакрепленного участка стержня

На рис. 4 приведены амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$, $\tilde{\sigma}_x$ на поверхности $z = h/2$, соответственно, закрепленного и незакрепленного участков при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 и f_2 . В обоих случаях наблюдаются ярко выраженная локализация значений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня и их стремление к нулю по мере приближения к сечению $x = -l = -50$ мм. В сечении $x = 0$ при переходе от закрепленного участка к незакрепленному напряжения $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_x$ получаются одинаковыми, что находится в соответствии с силовыми условиями сопряжения (23) отмеченных участков.

На рис. 5 представлены амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}$, соответственно, на закрепленном и незакрепленном участках стержня при его резонансных колебаниях на частотах f_1 и f_2 , а также амплитуды касательных напряжений в упругих прослойках, которые на основании зависимостей (6) получаются

одинаковыми (при $u^{(0)} = 0$) и обозначены как $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$. В обоих случаях наблюдается локализация отмеченных амплитуд напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ вблизи сечения $x = 0$ закрепленного участка стержня и их стремление к нулю по мере удаления от данного сечения. При переходе от закрепленного участка стержня к незакрепленному касательные напряжения в стержне испытывают ярко выраженную трансформацию, обусловленную различием моделей деформирования отмеченных участков стержня. При этом наиболее значительной она является при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 (рис. 5, а), при которой максимальное по модулю значение $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня примерно в пятнадцать раз превышает максимальное значение $\tilde{\sigma}_{xz}$ на незакрепленном участке, что важно при расчете однонаправленно армированных композитных стержней, разрушение которых в основном происходит за счет напряжений поперечного сдвига σ_{xz} .

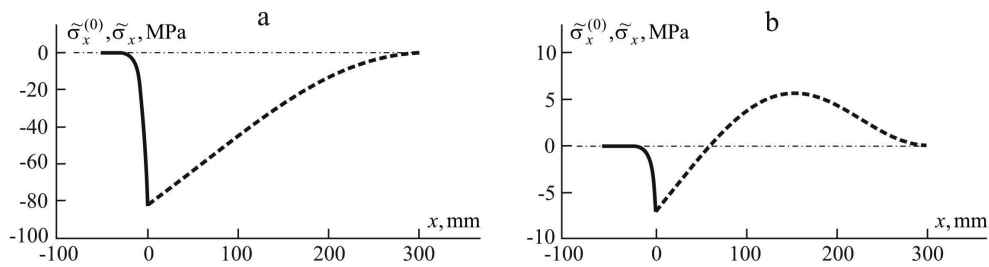


Рис. 4. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (сплошные линии) и $\tilde{\sigma}_x$ (пунктирные линии) на поверхности $z = h/2$ при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 (а) и f_2 (б)

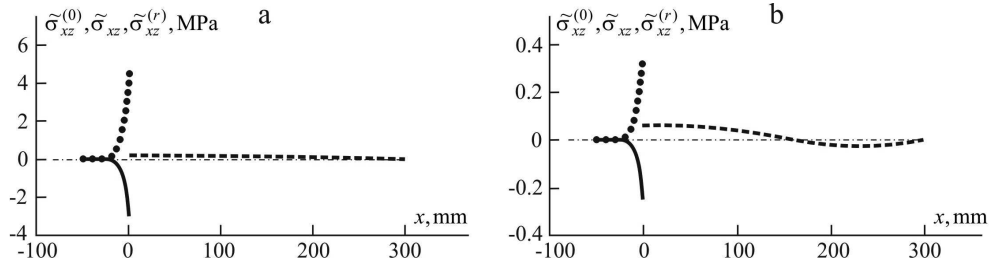


Рис. 5. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ (сплошные линии), $\tilde{\sigma}_{xz}$ (пунктирные линии) и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ (точки) при резонансных колебаниях стержня на частотах f_1 (а) и f_2 (б)

Заключение

Построена простейшая трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе конечной длины через упругие прослойки. При ее построении на участке закрепления прогибы стержня и прослоек считаются нулевыми, а для перемещений в осевом направлении в пределах толщин стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. На незакрепленном участке использована классическая геометрически линейная модель Кирхгофа – Лява.

Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа, получены уравнения движения незакрепленного и закрепленного участков стержня и граничные условия к ним, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков. На основе этих уравнений получены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях рассматриваемого стержня. Показано, что в рамках используемых моделей деформирования задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня разделяются. Из них наибольший практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие в сравнительно низком диапазоне частот.

Проведены вычислительные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показана существенная трансформация напряжений поперечного сдвига в стержне при переходе от закрепленного участка стержня к незакрепленному, обусловленная различием моделей деформирования отмеченных участков стержня. При этом наиболее значительной она является при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 (рис. 5, а), при которой максимальная по модулю амплитуда касательного напряжения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ на закрепленном участке стержня примерно в пятнадцать раз превышает аналогичную амплитуду $\tilde{\sigma}_{xz}$ на незакрепленном участке.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 23-19-00021 и за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, No 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2017. V. 58, No 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., Zakharov V.M., Krysko V.A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2016. V. 57, No 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps // Appl. Math. Modell. 2024. V. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams // J. Appl. Mech. 1991. V. 58, No 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface // J. Sound Vib. 2012. V. 331, No 2. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.

7. *Ferri A.A., Bindemann A.C.* Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions // J. Vib. Acoust. 1992. V. 114, No 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. *Paimushin V.N., Shishkin V.M.* Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2023. V. 64, No 2. P. 308–324. <https://doi.org/10.1134/S0021894423020153>.
9. *Paimushin V.N., Shishkin V.M.* Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2024. V. 65, No 1. P. 161–175. <https://doi.org/10.1134/S0021894424010176>.
10. *Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K.* Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments // Z. Angew. Math. Mech. 2024. V. 104, No 2. Art. e202300214. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
11. *Yankovskii A.P.* Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 56, No 3. P. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
12. *Yankovskii A.P.* Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 56, No 4. P. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
13. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А.* Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния. М.: Машиностроение, 1993. 208 с.
14. *Паймушин В.Н., Шижкин В.М.* Трансформационная модель деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухсторонних скользящих опорах // ППП. 2024. Т. 86, № 2. С. 437–454. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234>.
15. *Norrie D.H., de Vries G.* An Introduction to Finite Element Analysis. New York, NY, San Francisco, CA, London: Acad. Press, 1978. 314 p.
16. *Zienkiewicz O.C.* The Finite Element Method in Engineering Science. Morice P.B. (Ed.). London: McGraw-Hill, 1971. xiv, 521 p.
17. *Цейтлин А.И.* Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений // СМРС. 1981. № 4. С. 33–38.
18. *Сорокин Е.С.* К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Госстройиздат, 1960. 131 с.
19. *Василенко Н.В.* Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей. В кн.: «Рассеяние энергии при колебаниях механических систем». Киев: Наук. думка. 1974. С. 5–12.
20. *Rikards R.B., Barkanov E.N.* Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coating by the finite-element method // Mech. Compos. Mater. 1992. V. 27, No 5. P. 529–534. <https://doi.org/10.1007/BF00613477>.
21. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // Mech. Compos. Mater. 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
22. *Shoup T.E.* A Practical Guide to Computer Methods for Engineers. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1979. 255 p.
23. *Хазанов Х.С.* Механические колебания систем с распределенными параметрами. Учебн. пособие. 1979. Самара: СГАУ, 2002. 82 с.

Поступила в редакцию 22.06.2024

Принята к публикации 6.08.2024

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прочность конструкций»; главный научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н.Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

Шишкин Виктор Михайлович, доктор технических наук, профессор кафедры «Механика и инженерная графика»

Вятский государственный университет

ул. Московская, д. 36, г. Киров, 610000, Россия

E-mail: *vshishkin1951@mail.ru*

Чумакова Софья Федоровна, студент

Государственный университет по землеустройству

ул. Казакова, д. 15, г. Москва, 105064, Россия

E-mail: *sfchumakova@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 407–425

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.407-425

**Mathematical Modeling of the Dynamic Deformation of a Rod-Strip
Fixed on a Double-Sided Support Element through Elastic Interlayers**

V.N. Paimushin^{a,b,}, V.M. Shishkin^{c,**}, S.F. Chumakova^{d***}*

^a*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^c*Vyatka State University, Kirov, 610000 Russia*

^d*State University of Land Use Planning, Moscow, 105064 Russia*

E-mail: **vpajmushin@mail.ru*, ***vshishkin1951@mail.ru*, ****sfchumakova@mail.ru*

Received June 22, 2024; Accepted August 6, 2024

Abstract

The simplest transformation model of the dynamic deformation along the length of a rod-strip consisting of two segments was constructed. The model is based on the classical geometrically linear Kirchhoff–Love model for the unfixed segment, while the fixed segment of finite length is assumed to be connected to a rigid and immovable support element through elastic interlayers. On the fixed segment, the deflections of the rod and interlayers were

considered zero. For axial displacements within the thicknesses of the rod and interlayers, approximations were adopted according to S.P. Timoshenko's shear model, subject to the conditions of continuity at the points where they connect to each other and immobility at the points where the interlayers connect to the support element. The conditions for kinematic coupling of the unfixed and fixed segments of the rod were formulated. Taking them into account and using the D'Alembert–Lagrange variational principle, the equations of motion and boundary conditions for the considered segments were derived, and the conditions for force coupling of the segments were obtained. With the help of the derived equations, exact analytical solutions of the problems of free and forced harmonic vibrations of the rod of the studied type were found. These solutions were employed in the numerical experiments to determine the natural modes and frequencies of bending vibrations, as well as the dynamic response during the resonant vibrations of the rod-strip made of a unidirectional fibrous composite based on ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. The findings show a significant transformation of transverse shear stresses when passing through the boundary from the unfixed segment of the rod to the fixed one, as well as their pronounced localization in the region of the fixed segment near this boundary.

Keywords: vibrations, rod-strip, S.P. Timoshenko's model, unfixed segment, fixed segment, equation of motion, kinematic conditions for coupling of segments, force conditions for coupling of segments, analytical solutions

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-19-00021) and by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030").

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Scheme for fixing the rod-strip in the support element 3 through the elastic interlayers 1 and 2.

Fig. 2. Normalized deflection shapes W_1 (a) and W_2 (b) of the unfixed rod segment.

Fig. 3. Resonant vibration amplitudes \tilde{w}_1 (a) and \tilde{w}_2 (b) of the unfixed rod segment.

Fig. 4. Normal stress amplitudes $\tilde{\sigma}_x^{(0)}$ (solid lines) and $\tilde{\sigma}_x$ (dashed lines) on the surface $z = h/2$ during resonant vibrations of the rod at the frequencies f_1 (a) and f_2 (b).

Fig. 5. Shear stress amplitudes $\tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}$ (solid lines), $\tilde{\sigma}_{xz}$ (dashed lines), and $\tilde{\sigma}_{xz}^{(r)}$ (dots) during resonant vibrations of the rod at the frequencies f_1 (a) and f_2 (b).

References

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, no. 6, pp. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P., Zakharov V.M., Krys'ko V.A. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, no. 4, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Appl. Math. Modell.*, 2024, vol. 128, pp. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.*, 1991, vol. 58, no. 3, pp. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.

6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 2, pp. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibration of beams with various types of frictional support conditions. *J. Vib. Acoust.*, 1992, vol. 114, no. 3, pp. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 308–324. <https://doi.org/10.1134/S0021894423020153>.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2024, vol. 65, no. 1, pp. 161–175. <https://doi.org/10.1134/S0021894424010176>.
10. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2024, vol. 104, no. 2, art. e202300214. <https://doi.org/10.1002/zamm.202300214>.
11. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 56, no. 3, pp. 271–290. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09880-8>.
12. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory. 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 437–454. <https://doi.org/10.1007/s11029-020-09895-1>.
13. Paimushin V.N., Firsov V.A. *Obolochki iz stekla. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya* [Glass Shells. Calculation of the Stress-Strain State]. Moscow, Mashinostroenie, 1993. 208 p. (In Russian)
14. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Transformational model of a plane rod deformation, restrained on double-sided sliding supports. *Probl. Prochn. Plast.*, 2024, vol. 86, no. 2, pp. 437–454. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234>. (In Russian)
15. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. New York, NY, San Francisco, CA, London, Acad. Press, 1978. 314 p.
16. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. Morice P.B. (Ed.). London, McGraw-Hill, 1971. xiv, 521 p.
17. Tseitlin A.I. On considering internal friction in the normative documents for the dynamic design of structures. *Stroit. Mekh. Rascheta Sooruzh.*, 1981, no. 4, pp. 33–38. (In Russian)
18. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [On the Theory of Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]. Moscow, Gosstroizdat, 1960. 131 p. (In Russian)
19. Vasilenko N.V. Considering the imperfect elasticity of materials in mechanical vibrations using the complex modulus method. In: *Rasseyanie energii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem* [Energy Dissipation in Vibrations of Elastic Systems]. Kyiv, Nauk. Dumka, 1974, pp. 5–12. (In Russian)
20. Rikards R.B., Barkanov E.N. Determination of the dynamic characteristics of vibration-absorbing coating by the finite-element method. *Mech. Compos. Mater.*, 1992, vol. 27, no. 5, pp. 529–534. <https://doi.org/10.1007/BF00613477>.
21. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.

22. Shoup T.E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1979. 255 p.
23. Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi paramterami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara, SGAU, 2002. 82 p. (In Russian)

Для цитирования: Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Чумакова С.Ф. Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 407–425.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>.

For citation: Paimushin V.N., Shishkin V.M., Chumakova S.F. Mathematical modeling of the dynamic deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 407–425.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.426-436

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ

Л.У. Султанов^{1,2}, И.Р. Гарифуллин¹

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет,
г. Казань, 420008, Россия

²Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр РАН”,
г. Казань, 420111, Россия

Аннотация

Решена задача о колебании пластин и оболочек с массой, присоединенной в точке. При построении математической модели использована гипотеза недеформируемых нормалей, на основе которой выведена система разрешающихся динамических уравнений оболочки с массой, где неизвестными являются прогиб и функция напряжения. Задача решена численно-аналитически. В соответствии с граничными условиями прогиб оболочки представлен в виде двойных тригонометрических рядов. Переход от исходной динамической системы к решению конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлен с помощью метода Бубнова – Галеркина. Для интегрирования по времени применен метод конечных разностей.

Ключевые слова: пластина, оболочка, присоединенная масса, метод конечных разностей, метод Бубнова – Галеркина

Введение

Тонкостенные конструкции имеют широкое применение в различных областях промышленности, таких как автомобильная, аэрокосмическая, ракетная, машиностроительная, судостроительная и т. п. Такие конструкции обычно подвергаются действию интенсивных динамических нагрузок, что обуславливает появление в них больших циклических напряжений, иногда приводящих к колебательной потере устойчивости, возникновению сложных нестационарных процессов, нежелательных с точки зрения динамической прочности и надежности конструкций [1]. Следует отметить, что колебания всех реальных конструкций, по существу, нелинейны. Кроме того, реальные тонкостенные конструктивные элементы характеризуются различными включениями типа присоединенной массы [2–8]. В результате математическое моделирование динамики пластин и оболочек ведет к решению нелинейных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены различными приближенными методами (Бубнова – Галеркина, Ритца, конечных разностей и др.).

Настоящая работа посвящена анализу геометрически нелинейных колебаний тонкостенных оболочек с массой, присоединенной в точке. Для описания поведения оболочки использована математическая модель с применением гипотезы

недеформируемых нормалей (гипотеза Кирхгофа–Лява). Записана система разрешающихся динамических уравнений оболочки с массой, где неизвестными являются динамический прогиб и функция напряжения. Задача решена численно-аналитически. Переход от исходной динамической системы к конечной системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлен с помощью метода Бубнова–Галеркина. Для решения полученной системы уравнений применен метод центральных разностей.

Приведены результаты численных расчетов: в задаче о нелинейных колебаниях шарнирно опертой по всем краям прямоугольной пластины с массой, присоединенной в точке, и в задаче о нелинейных колебаниях шарнирно опертой по торцам замкнутой круговой цилиндрической оболочки с массой, присоединенной в точке. В соответствии с граничными условиями прогиб оболочки представлен в виде двойных тригонометрических рядов. Получены графики зависимостей от времени прогибов и изгибных форм. Эффект присоединенной массы выражается в появлении качественно новых (по сравнению с незагруженной оболочкой) видов динамических деформаций, которые являются следствием возбуждения и взаимодействия различных изгибных форм совокупной упругой колебательной системы оболочка – масса.

1. Постановка задачи. Метод решения

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях тонких оболочек с включениями типа сосредоточенной массы. Используем гипотезу Кирхгофа–Лява. При выводе уравнений инерцию поворота массы не учитываем, а силу инерции массы считаем направленной по нормали к поверхности. Предполагаем также, что в оболочке отсутствуют упругие волны.

Пусть в некоторой точке к оболочке присоединена масса M , действие которой на срединную поверхность оболочки заменим сосредоточенной силой. Такую же силу, представляющую собой реакцию оболочки, считаем приложенной и к массе.

Запишем уравнение движения пологой оболочки и уравнение совместности деформации [1]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - k_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$L(w, w) = 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right],$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – бигармонический оператор Лапласа; x_0, y_0 – координаты точки присоединения массы к оболочке; k_x, k_y – кривизны оболочки; $\delta(x, y)$ – двумерная δ -функция Дирака; $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ – цилиндрическая жесткость оболочки; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала оболочки; h – толщина оболочки; $w(x, y, t)$ – функция прогиба.

Система уравнений (1) описывает движение оболочки с массой M , присоединенной в точке. К ним должны быть добавлены граничные и начальные условия.

Решения полученной системы нелинейных уравнений будем отыскивать в два шага, интегрирование по пространственным координатам проведем с помощью метода Бубнова – Галеркина, а для интегрирования по времени используем метод конечных разностей.

Запишем систему уравнений (1) в операторном виде, добавив граничные условия:

$$\tilde{L}(w, t) = 0, \quad w|_{\Gamma} = 0,$$

где Γ – граница области. После применения метода Бубнова – Галеркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $f_i(t)$:

$$\left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \phi_j(x, y) \right] \phi_i(x, y) dx dy = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

или

$$\left[\sum_{j=1}^N f_j(t) \phi_j(x, y) \right] \frac{\partial \tilde{w}}{\partial f_i} dx dy = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

где прогиб представлен в виде $\tilde{w} = \sum_{i=1}^N f_i(t) \phi_i(x, y)$, $f_i(t)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от времени t , а $\phi_i(x, y)$ – базисные функции, удовлетворяющие граничным условиям и условию полноты на бесконечном наборе. Полученную систему уравнений решим с помощью метода центральных разностей [9].

2. Вычислительные эксперименты

2.1. Нелинейные колебания шарнирно опертой пластины. Рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами a и b , шарнирно опертую по всем краям. Тогда система уравнений (1), описывающая движение, при $k_x = 0$, $k_y = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w). \end{aligned} \quad (2)$$

Для этого случая граничные условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, a, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b. \quad (3)$$

В соответствии с граничными условиями (3) и линейным решением [1] выберем функцию прогиба в виде

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Из второго уравнения системы (2), имея в виду (4), найдем выражение для функции напряжения

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{mnkj} \Phi_1^{mnkj} \cos \frac{m-k}{a} \pi x \cos \frac{n-j}{b} \pi y + \Phi_2^{mnkj} \cos \frac{m-k}{a} \pi x \cos \frac{n+j}{b} \pi y + \\ &+ \Phi_3^{mnkj} \cos \frac{m+k}{a} \pi x \cos \frac{n-j}{b} \pi y + \Phi_4^{mnkj} \cos \frac{m+k}{a} \pi x \cos \frac{n+j}{b} \pi y, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Phi_1^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn - mj)}{\left[\left(\frac{m-k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-j}{b}\right)^2\right]^2}, \quad \Phi_2^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m-k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+j}{b}\right)^2\right]^2},$$

$$\Phi_3^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m+k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n-j}{b}\right)^2\right]^2}, \quad \Phi_4^{mnkj} = \frac{E}{4a^2b^2} \frac{W_{mn}W_{kj}mj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{m+k}{a}\right)^2 + \left(\frac{n+j}{b}\right)^2\right]^2}.$$

Подставив выражения (4) и (5) в первое уравнение системы (2), применив метод Бубнова – Галеркина и введя безразмерные величины

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \varsigma_{rs} = \frac{W_{rs}}{h}, \quad p_{rs}^* = p_{rs}^2 \frac{\rho h b^4}{D \pi^4}, \quad M^* = \frac{M}{M_p}, \quad \zeta = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b},$$

где $p_{rs}^2 = \pi^4 r^4 \left(\lambda^2 + \frac{s^2}{r^2} \right) c^2 h^2 / 12 \lambda^2 (1 - \mu^2) a^2 b^2$ – квадрат частоты свободных линейных колебаний незагруженной пластины, $c = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных упругих волн в материале пластины [1], M_p – масса пластины, получим

$$p_{rs}^* \varsigma_{rs} = \frac{3}{4} \lambda^4 (1 - \nu^2) \sum_{mnpqkj} \alpha_{mnpqkj}^{rs} \varsigma_{mn} \varsigma_{pq} \varsigma_{kj} - \frac{\rho h b^4}{D \pi^4} \left(\ddot{\varsigma}_{rs} + 4 M^* \sum_{mn} \beta_{mn}^{rs} \ddot{\varsigma}_{mn} \right). \quad (6)$$

Здесь α_{mnpqkj}^{rs} и β_{mn}^{rs} – коэффициенты интегрирования. Уравнение (6) в матричном виде можно записать в форме

$$[B] \{\ddot{\varsigma}\} + [P] \{\varsigma\} = \{R\}. \quad (7)$$

Начальные условия примем следующими:

$$\{\varsigma\} = \{A, 0, 0, \dots, 0\}, \quad \{\dot{\varsigma}\} = \{0, 0, \dots, 0\}. \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (7) совместно с (8) воспользуемся методом центральных разностей [9]. В результате получены следующие результаты при значениях (см. рис. 1): $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0.3$; $E = 200 \text{ ГПа}$; $h = 0.01 \text{ м}$; $\lambda = 1$; $A = 1.5$; $\zeta, \eta = 0.25$; $M, N = 4$. На рис. 1 а)–f) изображены график движения центральной точки пластины $\varsigma = w/h$ и графики зависимостей от времени переменных $\varsigma_{rs} = W_{rs}/h$ соответствующих изгибных форм, определенных в центральной точке пластины. Рис. 1 а)–d) соответствуют случаям $M^* = 0$ (пунктир) и $M^* = 0.2$ (сплошная линия), рис. 1 е), f) – случаям $M^* = 0.6$ (пунктир) и $M^* = 0.8$ (сплошная линия). Из рисунков видно, что в отличие от линейных колебаний для нелинейных при возбуждении только одной из изгибных форм колебаний возбуждаются и другие формы – как в случае незагруженной пластины, так и с присоединенной массой. Эффект присоединения массы заключается в: 1) уменьшении частоты колебаний; 2) изменении форм колебаний; 3) возбуждении новых изгибных форм; 4) увеличении нелинейности колебаний при увеличении массы.

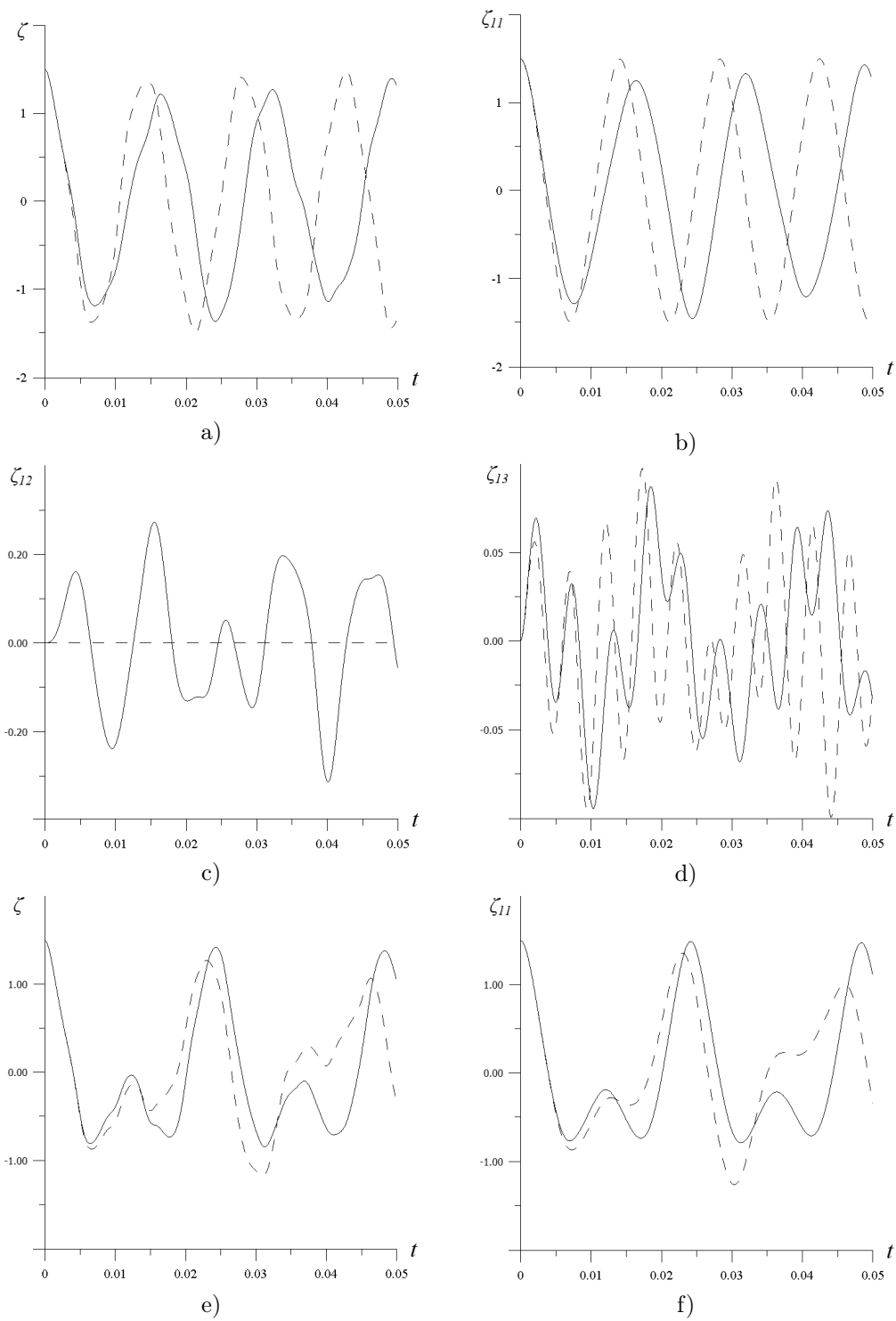


Рис. 1. Графики прогибов и движения основных изгибных форм в центре пластины

2.2. Нелинейные колебания шарнирно опертой замкнутой круговой цилиндрической оболочки. Рассмотрим задачу о колебании шарнирно опертого по торцам замкнутого кругового цилиндра радиуса R и длины l с массой, присоединенной в точке. В этом случае система уравнений (1), описывающая движение, при $k_x = 0$, $k_y = 1/R$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^4 w &= L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{E} \nabla^4 \Phi &= -\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для этого случая граничные условия примут вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, l. \quad (10)$$

В соответствии с граничными условиями (10) и линейным решением [1] выберем функцию прогиба в виде

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_1^{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{ny}{R} + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_2^{mn} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{R}. \quad (11)$$

Здесь следует отметить, что в разложении по изгибным формам (11) для более точного описания движения оболочки учтены и сопряженные изгибные формы.

Подставив соотношение (11) во второе уравнение системы (9), найдем выражение для функции напряжения:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{mnkj} \Phi_1^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_2^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_3^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_4^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_5^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_6^{mnkj} \cos \frac{k-m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_7^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j-n}{R} y + \Phi_8^{mnkj} \cos \frac{k+m}{l} \pi x \cos \frac{j+n}{R} y + \\ &+ \Phi_9^{mnkj} \sin \frac{m}{l} \pi x \cos \frac{n}{R} y + \Phi_{10}^{mnkj} \sin \frac{m}{l} \pi x \sin \frac{n}{R} y, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1^{mnkj} &= G \frac{Amj(kn - mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_2^{mnkj} &= G \frac{Bmj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_3^{mnkj} &= G \frac{Amj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_4^{mnkj} &= G \frac{Bmj(kn + mj)}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_5^{mnkj} &= -G \frac{C(kn - mj)^2}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_6^{mnkj} &= -G \frac{C(kn + mj)^2}{\left[\left(\frac{k-m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \\ \Phi_7^{mnkj} &= G \frac{C(kn + mj)^2}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j-n}{R} \right)^2 \right]^2}, & \Phi_8^{mnkj} &= G \frac{C(kn - mj)^2}{\left[\left(\frac{k+m}{l} \pi \right)^2 + \left(\frac{j+n}{R} \right)^2 \right]^2}, \end{aligned}$$

$$\Phi_9^{mnkj} = 4G \frac{W_1^{mn} m^2}{\left[\left(\frac{m}{l}\pi\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2}, \quad \Phi_{10}^{mnkj} = 4G \frac{W_2^{mn} m^2}{\left[\left(\frac{m}{l}\pi\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2},$$

$$A = W_1^{mn} W_1^{kj} + W_2^{mn} W_2^{kj}, \quad B = W_2^{mn} W_2^{kj} + W_1^{mn} W_1^{kj}, \quad C = W_1^{mn} W_2^{kj}, \quad G = \frac{E\pi^2}{4l^2 R^2}.$$

Введем безразмерные величины

$$\lambda_1 = \frac{l}{R}, \quad \lambda_2 = \frac{l}{h}, \quad M^* = \frac{M}{M_s}, \quad \varsigma_1^{rs} = \frac{W_1^{rs}}{h}, \quad \varsigma_2^{rs} = \frac{W_2^{rs}}{h}, \quad p_{rs}^* = p_{rs}^2 \frac{hl^4 \rho}{D}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{R}.$$

Здесь $p_{rs}^2 = \frac{\pi^4 r}{\vartheta^2 \eta} \frac{T_1 R}{Eh} \left(\frac{h}{l^2}\right) c^2$ – квадрат частоты свободных линейных колебаний незагруженной оболочки, $T_1 = \hat{p}_{кр} Eh/R$ – значение критического усилия для оболочки, $\hat{p}_{кр} = \frac{1}{12(1-\mu)^2} \frac{(1+\vartheta^2)^2}{\vartheta^2} \eta + \frac{\vartheta^2}{(1+\vartheta^2)^2 \eta}$, $\vartheta = r\pi R/sl$, $\eta = s^2 h/R$ – параметры волнообразования, M_s – масса оболочки [1]. Подставив (11) и (12) в первое уравнение системы (9), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} p_{rs}^* \varsigma_1^{rs} = & \sum_{mnpqkj} \varsigma_1^{kj} (\alpha_{mnpqkj}^{1,rs} \varsigma_1^{mn} \varsigma_1^{pq} + \beta_{mnpqkj}^{1,rs} \varsigma_2^{mn} \varsigma_2^{pq}) + \\ & + \sum_{mnpqkj} \varsigma_2^{kj} (\alpha_{mnpqkj}^{2,rs} \varsigma_1^{mn} \varsigma_1^{pq} + \beta_{mnpqkj}^{2,rs} \varsigma_2^{mn} \varsigma_2^{pq}) + \\ & + \frac{hl^4 \rho}{D} \left(\varsigma_1^{rs} + 4M^* \sum_{mn} \gamma_{mn}^{1,rs} \varsigma_1^{mn} + \gamma_{mn}^{2,rs} \varsigma_2^{mn} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\alpha_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$, $\beta_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$ и $\gamma_{mnpqkj}^{1,2,3,4rs}$ – коэффициенты интегрирования. Систему уравнений (13) можно записать в матричном виде

$$[B] \{\ddot{\varsigma}\} + [P] \{\dot{\varsigma}\} = \{R\}$$

и решить ее методом центральных разностей при начальных условиях

$$\{\varsigma\} = \{A, 0, 0, \dots, 0\}, \quad \{\dot{\varsigma}\} = \{0, 0, \dots, 0\}.$$

Задача была решена при следующих значениях параметров: $\rho = 7800$ кг/м³; $\mu = 0.3$; $E = 200$ ГПа; $h = 0.01$; $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 100$; $A = 3$; $\zeta = 0.5$; $\eta = 0.25$; $M, N = 2$.

На рис. 2 а)–f) изображены графики зависимости изменения безразмерных прогибов в центре оболочки (а, d), изменения основных изгибных (b, e) и сопряженных форм (с, f) в центре оболочки соответственно. Рис. 2 а)–с) – результаты для $M^* = 0$ (пунктир) и $M^* = 0.2$ (сплошная линия). Рис. 2 d)–f) – результаты для $M^* = 0.6$ (пунктир) и $M^* = 0.8$ (сплошная линия).

Из этих графиков можно сделать те же выводы, что и для пластины, но с некоторыми оговорками. Из-за наличия кривизны и замкнутости цилиндрической оболочки, в отличие от пластины, нелинейность проявляется менее заметно. Также следует отметить, что при наличии присоединенной массы в колебательный процесс вовлекаются и сопряженные формы (в отличие от незагруженной оболочки, где они не возбуждаются), тем самым увеличивается густота частотного спектра. Количество данных частот будет в два раза больше, чем у незагруженной оболочки. Следовательно, при воздействии внешних периодических сил на оболочку значительно увеличивается вероятность возникновения резонансных режимов.

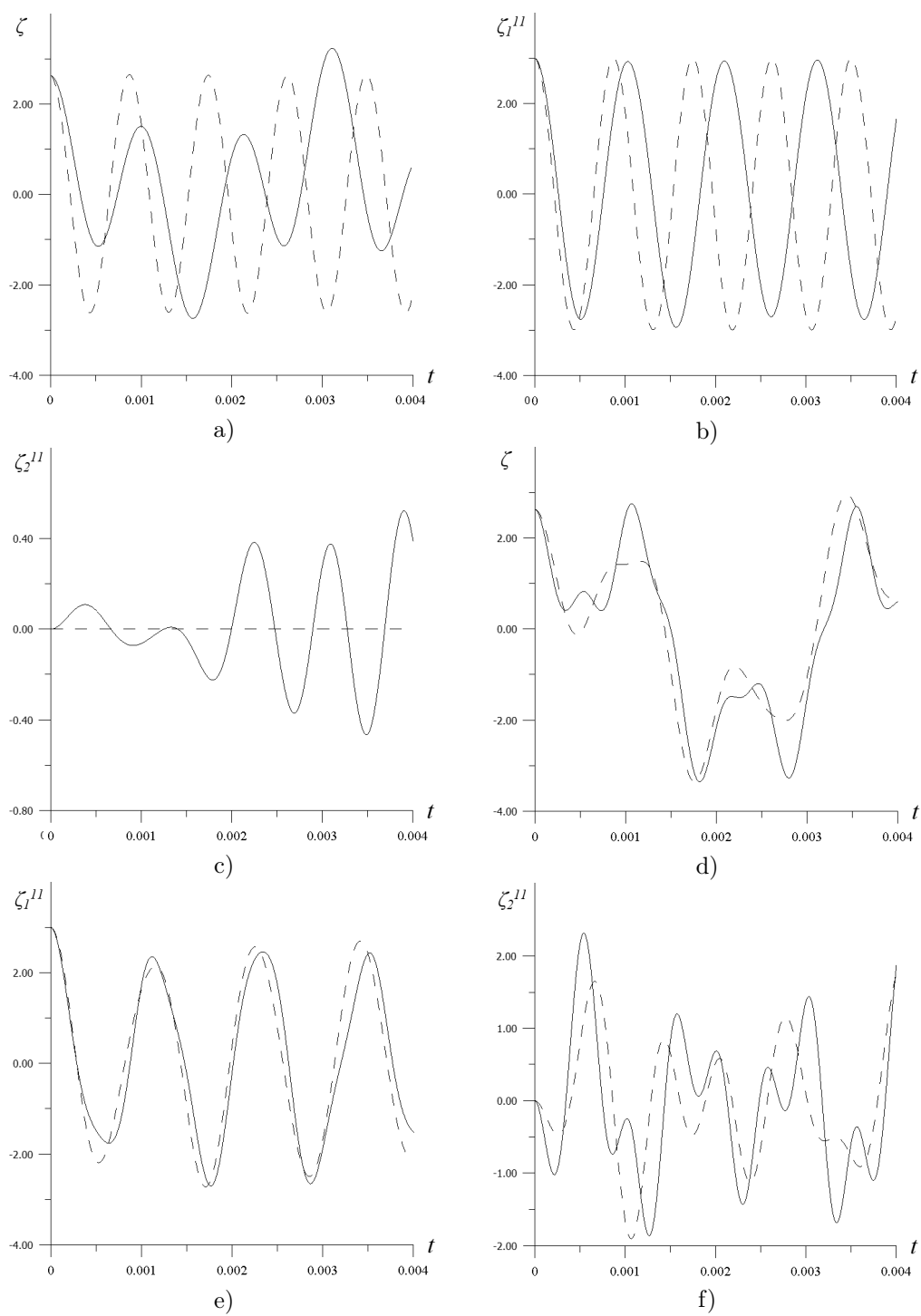


Рис. 2. Графики прогибов и движения основных и сопряженных изгибных форм в центре оболочки

Заключение

При колебаниях пластин влияние геометрической нелинейности весьма существенно уже при прогибах, соизмеримых с толщиной, а при увеличении прогиба нелинейность сказывается все больше. Эффект присоединенной массы (как для круговой цилиндрической оболочки, так и для пластины) выражается в увеличении нелинейности характера колебаний, изменении форм колебаний и уменьшении их частот, причем в случае замкнутой круговой цилиндрической оболочки наблюдаются также увеличение густоты частотного спектра оболочки и возбуждение сопряженных форм, что можно рассматривать как неблагоприятный фактор.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Григоренко А.Я.* Численное решение задачи о нелинейных свободных колебаниях пластин // Прикл. мех. 1983. Т. 9, № 10. С. 87–90.
3. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов Н.П.* Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. К.: Выща шк., 1989. 208 с.
4. *Козлов С.В.* К вопросу об определении собственных частот и форм колебаний ортотропной цилиндрической оболочки с присоединенной массой // Прикл. мех. 1981. Т. 17, № 2. С. 46–52.
5. *Серёгин С.В.* Численное и аналитическое исследование свободных колебаний круговых цилиндрических оболочек, несущих присоединенную массу, линейно распределенную вдоль образующей // Вычисл. механ. сплошн. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 378–384. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.36>.
6. *Коростелева Д.М., Соловьев С.И.* Математическое моделирование собственных колебаний пологой оболочки с присоединённым осциллятором // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>.
7. *Добрышкин А.Ю.* Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу // Тр. МАИ. 2020. № 110. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2>.
8. *Papkova I.V., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A.* A new shear mathematical model of the vibration of porous functionally graded lamellar accelerometers with attached mass in a temperature field // Proc. 2023 30th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS). St. Petersburg, 2023. P. 1–4. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168375>.
9. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел // Казан. гос. ун-т. Казань: ДАС, 2001. 300 с.

Поступила в редакцию 24.06.2024

Принята к публикации 31.07.2024

Султанов Ленар Усманович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой теоретической механики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского; ведущий научный сотрудник Института энергетики и перспективных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр РАН”
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *Lenar.Sultanov@kpfu.ru*

Гарифуллин Ислам Рамилович, магистр Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *IslRGarifullin@stud.kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 426–436

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.426-436

Vibrations of Plates and Shells with Attached Mass

L. U. Sultanov^{a,b,}, I. R. Garifullin^{a,**}*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

^b*FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia*

E-mail: **Lenar.Sultanov@kpfu.ru*, ***IslRGarifullin@stud.kpfu.ru*

Received June 24, 2024; Accepted July 31, 2024

Abstract

The problem of vibrations of plates and shells with a mass attached to the point was solved. A mathematical model was developed based on the hypothesis of nondeformable normals. The latter was used to derive a system of resolvable dynamic equations for the shell with a mass, where the unknowns are the dynamic deflection and stress function. The problem was solved numerically and analytically. In accordance with the boundary conditions, the shell deflection was expressed as double trigonometric series. The transition from the initial dynamic system to the solution of the final system of nonlinear ordinary differential equations was achieved by the Bubnov–Galerkin method. For time integration, the finite difference method was used.

Keywords: plate, shell, attached mass, finite difference method, Bubnov–Galerkin method

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Graphs showing the deflections and movement of the main bending modes at the plate center.

Fig. 2. Graphs showing generalized deflections at the shell center.

References

1. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (In Russian)
2. Grigorenko A.Ya. Numerical solution of the nonlinear free vibrations of a plate. *Sov. Appl. Mech.*, 1983, vol. 19, no. 10, pp. 902–905. <https://doi.org/10.1007/BF00883220>.
3. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S., Podchasov N.P. *Nelineinye kolebaniya tsilindricheskikh obolochek* [Nonlinear Vibrations of Cylindrical Shells]. Kyiv, Vyshch. Shk., 1989. 208 p. (In Russian)
4. Kozlov S.V. Determination of the natural frequencies and mode configurations for small vibrations of an orthotropic cylindrical shell with attached masses. *Sov. Appl. Mech.*, 1981, vol. 17, no. 2, pp. 138–142. <https://doi.org/10.1007/BF00886495>.
5. Seregin S.V. Numerical and analytical investigation of free vibrations of circular cylindrical shells with added mass linearly distributed along generatrix. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 378–384. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.36>. (In Russian)
6. Korosteleva D.M., Solov'ev S.I. Mathematical modeling of eigenvibrations of the shallow shell with an attached oscillator. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 153–166. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>. (In Russian)
7. Dobryshkin A.Yu. Oscillations of a rod carrying a small attached mass. *Tr. MAI*, 2020, no. 110. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-110-2>. (In Russian)
8. Papkova I.V., Krysko A.V., Yakovleva T.V., Krysko V.A. A new shear mathematical model of the vibration of porous functionally graded lamellar accelerometers with attached mass in a temperature field. *Proc. 2023 30th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems (ICINS)*. St. Petersburg, 2023, pp. 1–4. <https://doi.org/10.23919/ICINS51816.2023.10168375>.
9. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel* [The Finite Element Method in the Mechanics of Deformable Solids]. Kazan State Univ. Kazan, DAS, 2001. 300 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Султанов Л.У., Гарифуллин И.Р. Колебания пластин и оболочек с присоединенной массой // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 426–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.426-436>. ⟩

⟨ **For citation:** Sultanov L.U., Garifullin I.R. Vibrations of plates and shells with attached mass. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 426–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.426-436>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.98

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.437-449

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Ю.Х. Эшкабилов¹, Ш.Д. Нодиров²

¹Ташкентский международный университет финансового управления и технологий,
г. Ташкент, 100025, Республика Узбекистан

²Каршинский государственный университет, г. Карши, 180119,
Республика Узбекистан

Аннотация

Исследованы положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром в пространстве непрерывных функций $C[0, 1]$. Задача о количестве положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна сведена к изучению положительных корней многочленов с вещественными коэффициентами. Рассмотрена модель на дереве Кэли с взаимодействиями ближайших соседей и множеством $[0, 1]$ значений спина. Доказана единственность трансляционно-инвариантной меры Гиббса для данной модели.

Ключевые слова: неподвижная точка, интегральный оператор Гаммерштейна, дерево Кэли, мера Гиббса, трансляционно-инвариантная мера Гиббса

Введение

Хорошо известно, что интегральные уравнения имеют широкое применение в технике, механике, физике, экономике, оптимизации, автомобильном движении, биологии, теории массового обслуживания и т. д. (см. [1–5]). Теория интегральных уравнений быстро развивается с помощью инструментов функционального анализа, топологии и теории неподвижной точки. Поэтому для получения решения нелинейного интегрального уравнения используется множество различных методов. Некоторые методы обсуждения и получения решений интегрального уравнения Гаммерштейна можно найти в [6–14]. Существование положительных решений абстрактных интегральных уравнений типа Гаммерштейна обсуждается в [10].

Пусть $C_+[0, 1] = \{f(t) \in C[0, 1] : f(t) \geq 0\}$. Рассмотрим интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k ($k \in \mathbb{N}$), действующий на конусе $C_+[0, 1]$ по правилу

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t, u) f^k(u) du, \quad (1)$$

где ядро $K(t, u)$ – строго положительная непрерывная функция на $[0, 1] \times [0, 1]$.

Существование нетривиальных положительных неподвижных точек оператора типа Гаммерштейна (1) следует из теоремы 44.8, приведенной в работе [4].

Настоящая работа посвящена изучению количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром вида

$$K(t, u) = \varphi_1(t)\psi_1(u) + \varphi_2(t)\psi_2(u), \quad (2)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – попарно линейно независимые и положительные непрерывные функции.

Отметим, что при $k = 2, 3, 4$ получены результаты о количестве положительных неподвижных точек нелинейных интегральных операторов типа Гаммерштейна на H_2, H_3 и H_4 (см. [15–17]).

Краткое содержание этой статьи: в разделе 1 изучена разрешимость интегрального уравнения типа Гаммерштейна с вырожденным ядром (2) на конусе $C_+[0, 1]$

$$H_k f = f, \quad k > 1.$$

В разделе 2 рассмотрена система нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Проблема разрешимости системы нелинейных алгебраических уравнений приведена к исследованию положительных корней полинома порядка $k + 1$. В разделе 3 представлены результаты, применимые к исследованию мер Гиббса для моделей на дереве Кэли Γ^k порядка $k \in \mathbb{N}$.

1. Интегральное уравнение типа Гаммерштейна с вырожденным ядром

В этом разделе обсуждено существование положительного решения интегрального уравнения типа Гаммерштейна с вырожденным ядром.

Обозначим $C_+[0, 1] = C_+[0, 1] \setminus \{\theta\}$, где $\theta(x) \equiv 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Пусть функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ принадлежат $C_+[0, 1]$. Рассмотрим следующий интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k , ($k \in \mathbb{N}$) на конусе $C_+[0, 1]$:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 (\varphi_1(t)\psi_1(u) + \varphi_2(t)\psi_2(u))f^k(u) du. \quad (3)$$

Целью работы является исследование количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна (3).

Определим положительные числа a_i и b_i следующим образом:

$$a_i = \int_0^1 \psi_1(u)\varphi_1^{k-i}(u)\varphi_2^i(u) du, \quad b_i = \int_0^1 \psi_2(u)\varphi_1^{k-i}(u)\varphi_2^i(u) du,$$

где $i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$.

Рассмотрим отображение \mathcal{Q}_k в двумерном вещественном пространстве \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{Q}_k(x, y) = \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x^{k-i} y^i, \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x^{k-i} y^i \right),$$

где $C_k^i = \frac{k!}{(k-i)!i!}$ (биномиальный коэффициент).

Обозначим количество положительных неподвижных точек оператора T через $N_+^{fix}(T)$. Положим

$$\mathbb{R}_{>}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

Лемма 1. Пусть $k \geq 2$. Интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет нетривиальную положительную неподвижную точку тогда и только тогда, когда отображение \mathcal{Q}_k имеет нетривиальную положительную неподвижную точку и справедливо равенство $N_+^{fix}(H_k) = N_+^{fix}(\mathcal{Q}_k)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(t) \in C_+^0[0, 1]$ – нетривиальная положительная неподвижная точка интегрального оператора типа Гаммерштейна (3). Введем следующие обозначения:

$$c_1 = \int_0^1 \psi_1(u) f^k(u) du, \quad (4)$$

$$c_2 = \int_0^1 \psi_2(u) f^k(u) du. \quad (5)$$

Ясно, что $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Тогда неподвижная точка интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) имеет вид

$$f(t) = \phi_1(t)c_1 + \phi_2(t)c_2,$$

и также справедливо равенство $f(t) \in C_{>}[0, 1] = \{f(t) \in C[0, 1] : f(t) > 0, t \in [0, 1]\}$. Таким образом, для параметров c_1, c_2 из равенства (4) и (5) имеем следующие два тождества:

$$c_1 = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i c_1^{k-i} c_2^i, \quad c_2 = \sum_{i=0}^k C_k^i b_i c_1^{k-i} c_2^i.$$

Следовательно, точка $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}_{>}^2$ является неподвижной точкой нелинейного оператора \mathcal{Q}_k .

Достаточность. Предположим, что точка $\omega = (x_0, y_0)$ является нетривиальной положительной неподвижной точкой нелинейного оператора \mathcal{Q}_k и числа x_0, y_0 удовлетворяют равенствам

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i = y_0.$$

Легко проверить, что функция $f_0(t) = \phi_1(t)x_0 + \phi_2(t)y_0$ является неподвижной точкой интегрального оператора H_k (3) и $f_0(t) \in C_{>}[0, 1]$ при $\omega \in \mathbb{R}_{>}^2$.

Лемма доказана. \square

Теорема 1. Пусть $k \geq 2$. Количество положительных неподвижных точек нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) равно количеству положительных корней следующего многочлена

$$P_{k+1}(\xi) = a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0.$$

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 2 и 3 второго раздела. Из теоремы 1 и правила Декарта для количества положительных корней многочленов с вещественными коэффициентами (см. [18], сс. 27–29) следует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $k \geq 2$.

1) Нелинейный интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет как минимум одну положительную неподвижную точку;

2) если для всех индексов $i \in \{1, \dots, k\}$ выполняются неравенства

$$\frac{a_{i-1}}{b_i} \leq \frac{k-i+1}{i} \quad \text{или} \quad \frac{a_{i-1}}{b_i} \geq \frac{k-i+1}{i},$$

то интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет единственную положительную неподвижную точку;

3) для количества $N_+^{fix}(H_k)$ положительных неподвижных точек интегрального оператора (3) выполняются следующие свойства:

а) если k счетно, то $1 \leq N_+^{fix}(H_k) \leq k+1$;

б) если k несчетно, то $1 \leq N_+^{fix}(H_k) \leq k$.

Доказательство. По теореме 1 для количества положительных неподвижных точек интегрального оператора (3) достаточно исследовать количество положительных корней многочлена P_{k+1} .

1) Видно, что $P_{k+1}(0) = -b_0 < 0$ и $P_{k+1}(+\infty) = +\infty$. Тогда по теореме Ролля существует такое $c > 0$, что $P_{k+1}(c) = 0$.

2) Согласно правилу Декарта число положительных корней многочлена P_{k+1} не превосходит числа перемен знака в последовательности коэффициентов

$$a_k, \quad k \left(a_{k-1} - \frac{b_k}{k} \right), \quad \frac{k(k-1)}{2} \left(\frac{a_{k-2}}{2} - \frac{b_{k-1}}{k-2} \right), \dots, -b_0.$$

Учитывая, что $a_k > 0$, $-b_0 < 0$, для единственности смены знака достаточно предположить, что все члены последовательности $\left\{ \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i} \right\}_{i=1}^k$ не изменяют знаки.

3) Ясно, что многочлен P_{k+1} может иметь до $k+1$ положительных корней. Заметим, что если k несчетно, то многочлен P_{k+1} имеет один отрицательный корень. \square

Положим

$$d_i = \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Следствие 1. Пусть $k \geq 2$.

а) Если для чисел d_1, d_2, \dots, d_k справедливы соотношения $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k$, то интегральный оператор типа Гаммерштейна (3) имеет единственную положительную неподвижную точку;

б) если для чисел d_1, d_2, \dots, d_k справедливы соотношения $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k$, то для количества положительных неподвижных точек $N_+^{fix}(H_k)$ нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна (3) выполняется неравенство $N_+^{fix}(H_k) \leq 3$.

Следствие 2. Пусть $k \geq 2$. Если существуют такие два положительных числа ξ_1 , и ξ_2 , что $P_{k+1}(\xi_1)P_{k+1}(\xi_2) \leq 0$, то $N_+^{fix}(H_k) \geq 2$.

2. Система нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

В этом разделе мы изучим разрешимость системы нелинейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим следующую систему нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k C_k^i a_i x^{k-i} y^i = x, \\ \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x^{k-i} y^i = y, \end{cases}$$

где $a_i > 0$, $b_i > 0$ для всех $i = \overline{1, k}$.

Лемма 2. Если $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_>^2$ является неподвижной точкой оператора \mathcal{Q}_k , то $\xi_0 = \frac{y_0}{x_0}$ является корнем уравнения

$$a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0 = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_>^2$ – неподвижная точка оператора \mathcal{Q}_k . Тогда

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i = y_0.$$

Обозначив $y_0 = \xi_0 x_0$, получим следующие равенства

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} \xi_0^i x_0^i = x_0, \quad \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} \xi_0^i x_0^i = \xi_0 x_0.$$

Следовательно, получим

$$x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = x_0, \quad x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i \right) = \xi_0 x_0.$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{\xi_0} = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i / \sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i,$$

или

$$a_k \xi_0^{k+1} + \sum_{i=1}^k (C_k^{i-1} a_{i-1} - C_k^i b_i) \xi_0^i - b_0 = 0.$$

После элементарных преобразований последнее равенство можно переписать в виде

$$a_k \xi_0^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi_0^{k-i} - b_0 = 0.$$

Лемма 2 доказана. \square

Лемма 3. Если ξ_0 является положительным корнем уравнения (6), то точка $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0) \in \mathbb{R}_{>}^2$ является неподвижной точкой оператора Q_k , где

$$x_0 = 1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i}. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\xi_0 > 0$ и ξ_0 является положительным корнем уравнения (6). Положим $y_0 = \xi_0 x_0$ и $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0)$. Из равенств $y_0 = \xi_0 x_0$ и (7) получим

$$\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = \sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} (\xi_0 x_0)^i = x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = 1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i},$$

т. е. $\sum_{i=0}^k C_k^i a_i x_0^{k-i} y_0^i = x_0$. С другой стороны,

$$a_k \xi^{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{(k-i-1)!i!} \left(\frac{a_{k-i-1}}{i+1} - \frac{b_{k-i}}{k-i} \right) \xi^{k-i} - b_0 = 0.$$

Тогда, заменив $j = k - i$, получим

$$\sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} b_j \xi_0^j = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} a_j \xi_0^{j+1} = \xi_0 \left(\sum_{j=0}^k C_k^j a_j \xi_0^j \right).$$

Из последнего равенства имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} y_0^i &= \sum_{i=0}^k C_k^i b_i x_0^{k-i} (x_0 \xi_0)^i = x_0^k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i b_i \xi_0^i \right) = \\ &= \left(1 / \sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i} \right)^k \left(\sum_{i=0}^k \frac{k!}{(k-i)!i!} b_i \xi_0^i \right) = \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i} \right)^k} \xi_0 \left(\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i \right) = \frac{\xi_0}{\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^k C_k^i a_i \xi_0^i}} = \xi_0 x_0 = y_0. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство леммы 3. \square

3. Приложение: трансляционно-инвариантные меры Гиббса для моделей на дереве Кэли Γ^k

Дерево Кэли $\Gamma_k = (V, L)$ порядка $k \in \mathbb{N}$ – это бесконечное дерево, т. е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребро. Здесь V является множеством вершин, а L – множество ребер (дуг). Мы рассмотрим модель, где спинные переменные принимают значения из множества $[0,1]$ и расположены на вершинах дерева Кэли Γ_k . Для $A \subset V$ конфигурация σ_A на A является произвольной функцией $\sigma_A : A \rightarrow [0,1]$. Обозначим через $\Omega_A = [0,1]^A$ множество

всех конфигураций на A . Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in [0, 1]$; множество всех конфигураций совпадает с $[0, 1]^V$.

Рассмотрим модель H на Γ^k по равенству

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x), \sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_V, \quad (8)$$

где $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi : (u, v) \in [0, 1]^2 \rightarrow \xi_{u, v} \in \mathbb{R}$ является ограниченной, измеримой функцией. Как обычно, $\langle x, y \rangle$ представляет ближайшие соседние вершины.

Говорят, что $x < y$, если путь из x^0 в y проходит через x . При этом вершина y называется «прямым потомком» вершины x , если $y > x$ и x, y являются ближайшими соседями. Множество прямых потомков вершин x обозначим как $S(x)$. Заметим, что любая вершина $x \neq x^0$ имеет k прямых потомков, а x^0 имеет $k + 1$ таковых.

Пусть $h : x \in V \mapsto h_x = (h_{t, x}, t \in [0, 1]) \in \mathbb{R}^{[0, 1]}$ является отображением вершины $x \in V \setminus \{x^0\}$.

Теперь рассмотрим следующее уравнение

$$f(t, x) = \prod_{y \in S(x)} \frac{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{tu}) f(u, y) du}{\int_0^1 \exp(J\beta\xi_{0u}) f(u, y) du}, \quad (9)$$

где $f(t, x) = \exp(h_{t, x} - h_{0, x})$, $t \in [0, 1]$, и $du = \lambda(du)$ – мера Лебега.

Известно, что для расщепленной меры Гиббса модели (8) необходимо и достаточно существование решения уравнения (9) для любого $x \in V \setminus \{x^0\}$. Таким образом, мы знаем, что мера Гиббса μ для модели (8) зависит от функции $f(t, x)$ и каждая мера Гиббса соответствует решению $f(t, x)$ уравнения (9).

Подробное определение расщепления меры Гиббса для моделей с взаимодействиями ближайших соседей и континуальным множеством значений спина на дереве Кэли Γ^k приведено в [19–21]. В дальнейшем будем использовать название меры Гиббса вместо расщепления меры Гиббса.

Обратим внимание, что анализировать решения уравнений (9) сложно. Сложность зависит от заданной функции ξ – модели (8). Изучим меры Гиббса модели (9) в случае $f(t, x) = f(t)$ для всех $x \in S(x)$. Такая мера Гиббса называется трансляционно-инвариантной.

Для трансляционно-инвариантных функций уравнение (9) можно записать в виде

$$(R_k f)(t) := \left(\frac{\int_0^1 K(t, u) f(u) du}{\int_0^1 K(0, u) f(u) du} \right)^k = f(t), \quad (10)$$

где $K(t, u) = \exp(J\beta\xi_{tu}) > 0$, $f(t) > 0$, $t, u \in [0, 1]$.

Отметим, что каждое положительное решение уравнения (10) соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса для модели (9) (см. [22], замечание 3.3). Таким образом, количество положительных непрерывных решений уравнения (10) даст нам количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Обобщив результаты работ [19, 22, 23], получим следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $k \geq 2$. Интегральное уравнение (10) имеет нетривиальное положительное решение тогда и только тогда, когда интегральный оператор (1) имеет нетривиальную положительную неподвижную точку и $N_{>}^{fix}(R_k) = N_{>}^{fix}(H_k)$.

Доказательство. Уравнение (10) имеет по крайней мере одно решение на $C_+^0[0, 1]$ (см. [23], теорема 3.5).

Необходимость. Предположим, что $k \geq 2$ и функция $f(t) \in C_+^0[0, 1]$ является решением уравнения (10). Тогда $f(0) = 1$, и также для

$$g(t) = \frac{\sqrt[k]{f(t)}}{\sqrt[k-1]{\lambda}}$$

выполняется

$$(H_k g)(t) = g(t),$$

где $\lambda = \int_0^1 K(0, u)f(u)du > 0$. Это указывает, что если уравнение (10) имеет решение на $C_+^0[0, 1]$, то соответственно найдется неподвижная точка оператора H_k на $C_+^0[0, 1]$.

Достаточность. Пусть $k \geq 2$ и функция $g = g(t) \in C_+^0[0, 1]$ является неподвижной точкой оператора H_k . Из строгой положительности ядер получим соотношение $\int_0^1 K(0, u)g^k(u)du = g(0) > 0$. Тогда для функции

$$f(t) = \left(\frac{g(t)}{g(0)} \right)^k$$

справедливо следующее равенство

$$(R_k f)(t) = \left(\frac{\int_0^1 K(t, u)f(u)du}{\int_0^1 K(0, u)f(u)du} \right)^k = \left(\frac{\int_0^1 K(t, u)g^k(u)du}{\int_0^1 K(0, u)g^k(u)du} \right)^k = \left(\frac{g(t)}{g(0)} \right)^k = f(t).$$

Это показывает, что если оператор H_k (1) имеет неподвижную точку на $C_+^0[0, 1]$, то уравнение (10) имеет решение на $C_+^0[0, 1]$. □

Учитывая теорему 3, имеем следующее следствие.

Следствие 3. Пусть $k \geq 2$. Для количества $N^{tigm}(H)$ трансляционно-инвариантных мер Гиббса модели (8) справедливо равенство

$$N^{tigm}(H) = N_+^{fix}(H_k).$$

Рассмотрим трансляционно-инвариантные меры Гиббса для следующей модели на дереве Кэли Γ^k :

$$H(\sigma) = -\frac{1}{\beta} \sum_{\langle x, y \rangle \in L} \ln(a + b\sigma(x)\sigma(y)), \quad (11)$$

где параметры a и b удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > 0$ и $\beta = T^{-1}$, T – температура, $T > 0$.

Теорема 4. Модель (11) имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса для всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для ядра $K(t, u)$ интегрального оператора Гаммерштейна H_k имеем

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \psi_1(t) = a, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \psi_2(t) = bt.$$

Таким образом, нам необходимо рассмотреть следующий оператор типа Гаммерштейна:

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 (a + btu) f^k(u) du. \quad (12)$$

Следовательно, для a_i и b_i получим (см. раздел 1)

$$a_i = a \int_0^1 u^i du = \frac{a}{i+1}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k\},$$

$$b_i = b \int_0^1 u^{i+1} du = \frac{b}{i+2}, \quad i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}.$$

Положим

$$d_i = \frac{a_{i-1}}{k-i+1} - \frac{b_i}{i} = \frac{1}{i} \left(\frac{a}{k-i+1} - \frac{b}{i+2} \right), \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Определим функцию

$$h(x) = \frac{a}{k-x+1} - \frac{b}{x+2}$$

на $[1, k]$. Тогда имеем

$$h'(x) = \frac{a}{(k-x+1)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}, \quad x \in [1, k].$$

Отсюда получим $h'(x) > 0$ для всех $x \in [1, k]$. Следовательно, функция $h(x)$ возрастает на множестве $[1, k]$. Таким образом, для чисел d_1, d_2, \dots, d_k имеем следующие неравенства

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_k.$$

Тогда по теореме 2 интегральный оператор (12) имеет единственную положительную неподвижную точку. Это означает, что модель (11) имеет единственную трансляционно-инвариантную меру Гиббса для всех $k \in \mathbb{N}$. \square

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Abdou M.A., Badr A.A.* On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem // J. Appl. Math. Comput. 2002. V. 127, No 1. P. 65–78. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(01\)00003-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00003-0).
2. *Grimmer R., Liu J.H.* Singular perturbations in viscoelasticity // Rocky Mt. J. Math. 1994. V. 24, No 1. P. 61–75. <https://doi.org/10.1216/rmj/1181072452>.
3. *Keller J.B., Olmstead W.E.* Temperature of nonlinearly radiating semi-infinite solid // Q. Appl. Math. 1972. V. 29. P. 559–566.

4. *Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P.* Geometrical Methods of Nonlinear Analysis. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 263. Berlin, Heidelberg, New York, NY, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. xx, 412 p.
5. *Olmstead W.E., Handelsman R.A.* Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation // SIAM Rev. 1976. V. 18, No 2. P. 275–291.
<https://doi.org/10.1137/1018044>.
6. *Abdou M.A.* On the solution of linear and nonlinear integral equation. // J. Appl. Math. Comput. 2003. V. 146, No 2–3. P. 857–871.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00643-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00643-4).
7. *Abdou M.A., El-Borai M.M., El-Kojok M.M.* Toeplitz matrix method and nonlinear integral equation of Hammerstein type // J. Comput. Appl. Math. 2009. V. 223, No 2. P. 765–776. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.02.012>.
8. *Abdou M.A., El-Sayed W.G., Deeks E.I.* A solution of nonlinear integral equation // Appl. Math. Comput. 2005. V. 160, No 1. P. 1–14.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00613-1](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00613-1).
9. *Faraci F.* Existence and multiplicity results for a non linear Hammerstein integral equation // Giannessi F., Maugeri A. (Eds.) Variational Analysis and Applications. Ser.: Nonconvex Optimization and Its Applications. V. 79. Boston, MA: Springer, 2005. P. 359–371. https://doi.org/10.1007/0-387-24276-7_23.
10. *Horvat-Marc A.* Positive solutions for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Carpathian J. Math. 2008. V. 24, No 2. P. 54–62.
11. *Appell J.A., De Pascale E., Zabrejko P.P.* On the unique solvability of Hammerstein integral equations with non-symmetric kernels // Appell J. (Ed.) Recent Trends in Nonlinear Analysis. Ser.: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 40. Basel: Birkhäuser, 2000. P. 27–34.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8411-2_3.
12. *Appell J., Kalitvin A.S.* Existence results for integral equations: Spectral methods vs. fixed point theory // Fixed Point Theory. 2006. V. 7, No 2. P. 219–234.
13. *Bugajewski D.* On BV-solutions of some nonlinear integral equations // Integr. Equations Oper. Theory. 2003. V. 46, No 4. P. 387–398. <https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8>.
14. *Milojević P.S.* Solvability and the number of solutions of Hammerstein equations // Electron. J. Differ. Equations. 2004. No 54. P. 1–25.
15. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H.* Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures // Positivity. 2016. V. 20, No 4. P. 929–943.
<https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>.
16. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* Positive fixed points of cubic operators on \mathbb{R}^2 and Gibbs measures // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2019. V. 12, No 6. P. 663–673.
<http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>.
17. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* On the positive fixed points of quartic operators // Bull. Inst. Math. 2020. No 3. P. 27–36.
18. *Prasolov V.V.* Polynomials. Ser.: Algorithms and Computation in Mathematics. V. 11. Springer, 2000. xiii, 301 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5>.
19. *Rozikov U.A., Eshkabilov Yu.Kh.* On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations // Math. Phys., Anal. Geom. 2010. V. 13, No 3. P. 275–286.
<https://doi.org/10.1007/s11040-010-9079-6>.
20. *Rozikov U.A.* Gibbs Measures on Cayley Trees. Singapore: World Sci. Publ., 2013. 404 p.
<https://doi.org/10.1142/8841>.
21. *Georgii H.-O.* Gibbs Measures and Phase Transitions. Ser.: De Gruyter Studies in Mathematics. V. 9. Berlin, New York, NY: De Gruyter, 2011. 545 p.
<https://doi.org/10.1515/9783110250329>.

22. *Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A.* Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // J. Stat. Phys. 2012. V. 147, No 4. P. 779–794. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0494-x>.
23. *Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A.* Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree // Math. Phys., Anal. Geom. 2013. V. 16, No 1. P. 1–17. <https://doi.org/10.1007/s11040-012-9118-6>.

Поступила в редакцию 19.07.2024

Принята к публикации 6.08.2024

Эшкабиллов Юсуп Халбаевич, доктор физико-математических наук, профессор

Ташкентский международный университет финансового управления и технологий
просп. Амира Темура, д. 15, г. Ташкент, 100025, Республика Узбекистан
E-mail: yusup62@mail.ru

Нодиров Шохрух Дилмуродович, доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), доцент, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений

Каршинский государственный университет
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан
E-mail: shoh0809@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 437–449

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.437-449

Positive Fixed Points of Hammerstein Integral Operators with Degenerate Kernel

Yu.Kh. Eshkabilov^{a}, Sh.D. Nodirov^{b**}*

^a*Tashkent International University of Financial Management and Technologies,
Tashkent, 100025 Republic of Uzbekistan*

^b*Karshi State University, Karshi, 180119 Republic of Uzbekistan*

E-mail: *yusup62@mail.ru, **shoh0809@mail.ru

Received July 19, 2024; Accepted August 6, 2024

Abstract

Positive fixed points of the Hammerstein integral operators with a degenerate kernel in the space of continuous functions $C[0, 1]$ were explored. The problem of determining the number of positive fixed points of the Hammerstein integral operator was reduced to analyzing the positive roots of polynomials with real coefficients. A model on a Cayley tree with nearest-neighbor interactions and with the set $[0, 1]$ of spin values was considered. It was proved that a unique translation-invariant Gibbs measure exists for this model.

Keywords: fixed point, Hammerstein integral operator, Cayley tree, Gibbs measure, translation-invariant Gibbs measure

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Abdou M.A., Badr A.A. On a method for solving an integral equation in the displacement contact problem. *J. Appl. Math. Comput.*, 2002, vol. 127, no. 1, pp. 65–78.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(01\)00003-0](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00003-0).
2. Grimmer R., Liu J.H. Singular perturbations in viscoelasticity. *Rocky Mt. J. Math.*, 1994, vol. 24, no. 1, pp. 61–75. <https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072452>.
3. Keller J.B., Olmstead W.E. Temperature of nonlinearly radiating semi-infinite solid. *Q. Appl. Math.*, 1972, vol. 29, pp. 559–566.
4. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P. *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 263. Berlin, Heidelberg, New York, NY, Tokyo, Springer-Verlag, 1984. xx, 412 p.
5. Olmstead W.E., Handelsman R.A. Diffusion in a semi-infinite region with nonlinear surface dissipation. *SIAM Rev.*, 1976, vol. 18, no. 2, pp. 275–291.
<https://doi.org/10.1137/1018044>.
6. Abdou M.A. On the solution of linear and nonlinear integral equation. *J. Appl. Math. Comput.*, 2003, vol. 146, nos. 2–3, pp. 857–871.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(02\)00643-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00643-4).
7. Abdou M.A., El-Borai M.M., El-Kojok M.M. Toeplitz matrix method and nonlinear integral equation of Hammerstein type. *J. Comput. Appl. Math.*, 2009, vol. 223, no. 2, pp. 765–776. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.02.012>.
8. Abdou M.A., El-Sayed W.G., Deeb E.I. A solution of nonlinear integral equation. *Appl. Math. Comput.*, 2005, vol. 160, no. 1, pp. 1–14.
[https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00613-1](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00613-1).
9. Faraci F. Existence and multiplicity results for a non linear Hammerstein integral equation. In: Giannessi F., Maugeri A. (Eds.) *Variational Analysis and Applications*. Ser.: Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 79. Boston, MA, Springer, 2005, pp. 359–371. https://doi.org/10.1007/0-387-24276-7_23.
10. Horvat-Marc A. Positive solutions for nonlinear integral equations of Hammerstein type. *Carpathian J. Math.*, 2008, vol. 24, no. 2, pp. 54–62.
11. Appell J.A., De Pascale E., Zabrejko P.P. On the unique solvability of Hammerstein integral equations with non-symmetric kernels. In: Appell J. (Ed.) *Recent Trends in Nonlinear Analysis*. Ser.: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Vol. 40. Basel, Birkhäuser, 2000, pp. 27–34.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8411-2_3.
12. Appell J., Kalitvin A.S. Existence results for integral equations: Spectral methods vs. fixed point theory. *Fixed Point Theory*, 2006, vol. 7, no. 2, pp. 219–234.
13. Bugajewski D. On BV-solutions of some nonlinear integral equations. *Integr. Equations Oper. Theory*, 2003, vol. 46, no. 4, pp. 387–398.
<https://doi.org/10.1007/s00020-001-1146-8>.
14. Milojević P.S. Solvability and the number of solutions of Hammerstein equations. *Electron. J. Differ. Equations*, 2004, no. 54, pp. 1–25.
15. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. *Positivity*, 2016, vol. 20, no. 4, pp. 929–943.
<https://doi.org/10.1007/s11117-015-0394-9>.
16. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive fixed points of cubic operators on \mathbb{R}^2 and Gibbs measures. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2019, vol. 12, no. 6, pp. 663–673.
<http://dx.doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-6-663-673>.

17. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. On the positive fixed points of quartic operators. *Bull. Inst. Math.*, 2020, no. 3, pp. 27–36.
18. Prasolov V.V. *Polynomials*. Ser.: Algorithms and Computation in Mathematics. Vol. 11. Springer, 2000. xiii, 301 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5>.
19. Rozikov U.A., Eshkabilov Yu.Kh. On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations. *Math. Phys., Anal. Geom.*, 2010, vol. 13, no. 3, pp. 275–286. <https://doi.org/10.1007/s11040-010-9079-6>.
20. Rozikov U.A. *Gibbs Measures on Cayley Trees*. Singapore, World Sci. Publ., 2013. 404 p. <https://doi.org/10.1142/8841>.
21. Georgii H.-O. *Gibbs Measures and Phase Transitions*. Ser.: De Gruyter Studies in Mathematics. Vol. 9. Berlin, New York, NY, De Gruyter, 2011. 545 p. <https://doi.org/10.1515/9783110250329>.
22. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Non-uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. *J. Stat. Phys.*, 2012, vol. 147, no. 4, pp. 779–794. <https://doi.org/10.1007/s10955-012-0494-x>.
23. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. Uniqueness of Gibbs measure for models with uncountable set of spin values on a Cayley tree. *Math. Phys., Anal. Geom.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 1–17. <https://doi.org/10.1007/s11040-012-9118-6>.

⟨ **Для цитирования:** Эшкабиллов Ю.Х., Нодиров Ш.Д. Положительные неподвижные точки интегральных операторов типа Гаммерштейна с вырожденным ядром // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 437–449. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>. ⟩

⟨ **For citation:** Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive fixed points of Hammerstein integral operators with degenerate kernel. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 437–449. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.437-449>. (In Russian) ⟩

Индекс 19423

ISSN 2541-7746 Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3

2024 Ученые записки Казанского университета Т. 166, кн. 3