



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
КАЗАНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

220 - летие КФУ

Том 166

Книга 2

2024

Ученые записки Казанского университета.

Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2024

Т. 166, кн. 2

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Егоров – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

С.Р. Насыров – д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.Х. Салахов – д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстоков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору

в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КибепЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, Российская Федерация,

Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 8.07.2024.
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 13,18. Уч.-изд. л. 10,02.
Тираж 300 экз. Заказ 9/7

Отпечатано в типографии Издательства
Казанского университета
420008, Российская Федерация, Республика
Татарстан, г. Казань, ул. проф. Нужиной, д. 1/37

© Казанский федеральный университет, 2024

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.

Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

[Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]

Peer - Reviewed Scientific Journal

2024

Vol. 166

no. 2

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Andrey G. Egorov – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: July 8, 2024.
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional
printing sheet: 13.18. Publisher's signature: 10.02.
Circulation: 300 copies. Order: 9/7

Printed in KFU Publishing House
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, Republic
of Tatarstan, 420008 Russia

© Kazan Federal University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Брычков Ю.А., Савищенко Н.В.</i> Многомерные распределения Релея, Райса, Накагами и их применение в теории связи	127
<i>Галляутдинов И.Г., Лаврентьева Е.Е.</i> Диофантово уравнение, порожденное подполем кругового поля	147
<i>Едемский В.А.</i> О линейной сложности обобщенных циклотомических последовательностей нечетного периода	162
<i>Задворнов О.А., Трифонова Г.О.</i> Смешанная краевая задача для уравнения монотонного типа с младшим слагаемым при наличии точечных источников в правой части	173
<i>Мурзаханов Ф.Ф., Мамин Г.В., Садовникова М.А., Шуртакова Д.В., Казарова О.П., Мохов Е.Н., Гафуров М.Р.</i> Влияние условий фотовозбуждения на спиновую поляризацию азот-вакансионных центров в изотопно-обогащенном карбиде кремния $6\text{H-}^{28}\text{SiC}$	187
<i>Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В.</i> Экспериментальные и теоретические исследования разрушения трехслойных тест-образцов с накладками при четырехточечном изгибе	200
<i>Попов В.С., Попова А.А.</i> Нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала, заполненного вязким газом и установленного на вибрирующем основании	220
<i>Поташев К.А., Салимьянова Д.Р., Мазо А.Б., Давлетилин А.А., Костерин А.В.</i> Чувствительность интерпретации результатов термометрии изолированного участка нагнетательной скважины к погрешности исходных данных	238
<i>Рогозин С.В., Примачук Л.П., Дубатовская М.В.</i> О задаче $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности в параболическом случае	250
<i>Сафин Д.А., Зарипов Ш.Х., Марданов Р.Ф., Костерина Е.А.</i> Моделирование инерционного осаждения взвешенных частиц в фильтре смешанного типа	262

CONTENTS

Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Multivariate Rayleigh, Rice, and Nakagami distributions and their applications in communication theory	127
Galyautdinov I.G., Lavrentyeva E.E. Diophantine equation generated by the subfield of a circular field	147
Edemskiy V.A. On the linear complexity of generalized cyclotomic sequences with odd period	162
Zadvornov O.A., Trifonova G.O. Mixed boundary value problem for a monotone equation with a lower order term and point sources on the right side	173
Murzakhanov F.F., Mamin G.V., Sadovnikova M.A., Shurtakova D.V., Kazarova O.P., Mokhov E.N., Gafurov M.R. Influence of photoexcitation conditions on the spin polarization of nitrogen-vacancy centers in isotopically enriched silicon carbide 6H- ²⁸ SiC	187
Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V. Experimental and theoretical study on the failure of sandwich specimens with tabs under four-point bending	200
Popov V.S., Popova A.A. Nonlinear aeroelastic oscillations in the wall of a flat channel filled with viscous gas and resting on a vibrating foundation	220
Potashev K.A., Salimyanova D.R., Mazo A.B., Davletshin A.A., Kosterin A.V. Sensitivity to initial data errors in interpreting temperature logging of an isolated injection well segment	238
Rogosin S.V., Primachuk L.P., Dubatovskaya M.V. $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem on the unit circle in the parabolic case	250
Safin D.A., Zaripov Sh.Kh., Mardanov R.F., Kosterina E.A. Modeling the inertial deposition of aerosol particles in a mixed-type filter	262

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.589, 519.231

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.127-146

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЛЕЯ, РАЙСА, НАКАГАМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ СВЯЗИ

Ю.А. Брычков¹, Н.В. Савищенко²

¹*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия*

²*Военная академия связи им. С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия*

Аннотация

Представлена методика вычисления символьной и битовой вероятностей ошибок при когерентном разнесенном приеме многопозиционных сигнальных конструкций в канале связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) и общими замираниями, описываемыми многомерными распределениями Релея, Накагами и двумерным распределением Райса.

Ключевые слова: многомерное распределение Релея, многомерное распределение Накагами, двумерное распределение Райса, замирание, потенциальная помехоустойчивость, специальная функция, функция Оуэна

Введение

Одним из факторов, в значительной мере влияющих на принимаемый сигнал, является многолучевое его распространение. Основная идея борьбы с этим фактором заключается в применении метода разнесения, состоящем в организации нескольких независимых каналов (ветвей) разнесения. В системах с разнесенным приемом обеспечивается параллельная передача одной и той же информации по нескольким каналам: принимается L различных образцов сигнала, каждый из которых соответствует одному и тому же дискретному сообщению с одинаковыми информационными параметрами. В зависимости от характеристик среды распространения радиоволн в системах радиосвязи существует несколько методов построения ветвей разнесения, которые могут быть разбиты на следующие группы: пространственное, угловое, поляризационное, частотное и временное разнесения. Применяют также несколько методов комбинирования сигналов при разнесенном приеме, среди которых можно выделить три основных: оптимального сложения (оптимальность по критерию максимального отношения сигнал/шум), сложения с равными весами, автовыбора.

Ниже предложена методика анализа помехоустойчивости приема сигнальных конструкций в канале связи с общими замираниями Релея, Райса и Накагами. Представляет интерес анализ помехоустойчивости приема сигналов для коррелированных каналов (ветвей), что в большей степени может соответствовать реальной ситуации.

1. Разнесенный прием

Из всех методов разнесенного приема только прием на разнесенные антенны не приводит к потере мощности сигнала и реальной пропускной способности. Снижение скорости передачи информации (например, при разнесении во времени) эквивалентно потере мощности. Для корректного сравнения помехоустойчивости различных систем разнесенного приема необходимо учитывать эту потерю мощности.

Пусть величина γ_0 есть среднее отношение энергии сигнала к эквивалентной спектральной плотности помехи, которое имело бы место, если бы то же передающее устройство использовалось для одиночного приема. В зависимости от вида разнесенного приема справедливо соотношение $\gamma_L = \gamma_0/L^\kappa$, $\kappa \in [0, 2]$ [1].

Для любого $\ell = 1, 2, \dots, L$ помеха $n_\ell(t)$ является аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с односторонней спектральной плотностью мощности шума $N_{0,\ell}$ в каждой ветви с коэффициентом α_ℓ передачи ℓ -го канала. Соответственно, в каждой из ветвей разнесения отношение сигнал/шум есть величина $\gamma_\ell = E_\ell/N_{0,\ell}$, $\ell = 1, 2, \dots, L$.

При использовании оптимального когерентного приема результирующее отношение сигнал/помеха равно сумме всех отношений в ветвях разнесения: $\gamma_\Sigma = \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell = \gamma \sum_{\ell=1}^L \delta_\ell^2$, где $\delta_\ell^2 = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_1}$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ и $\gamma = \gamma_1$. Предположим, что ветви разнесения пронумерованы в порядке убывания интенсивности сигнала $\delta_1^2 = 1 \geq \delta_2^2 \geq \dots \geq \delta_L^2$.

Известно, что вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме двумерных многопозиционных сигналов в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ по правилу максимального правдоподобия равна алгебраической сумме T -функций Оуэна [1]

$$P_{e/b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\sqrt{2g_k \gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (1)$$

где $\gamma_{bc} = E_{bc}/N_0$ – отношение средней энергии E_{bc} , затрачиваемой на передачу одного бита, к односторонней спектральной плотности мощности шума N_0 и $T(z, a)$ – интегральная функция Оуэна, определяемая как [1, 2]

$$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-(1+t^2)z^2/2} \frac{dt}{1+t^2}, \quad |\arg a| < \pi.$$

Анализ помехоустойчивости при разнесенном приеме и использовании метода оптимального сложения (Maximal ratio combining (MRC)) сводится к задаче вычисления математического ожидания вероятности ошибки (1) с учетом того, что коэффициенты передачи в каждой из ветвей разнесения являются случайными величинами и их совместная плотность распределения вероятности $f(\boldsymbol{\alpha}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_L)$. В итоге задача вычисления символьной и битовой вероятностей сводится к вычислению [1, 2]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) &= \int_0^\infty T(a\sqrt{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}^T}, \eta) f(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty T(a\sqrt{p_1\alpha_1^2 + \dots + p_L\alpha_L^2}, \eta) f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) d\alpha_1 \dots d\alpha_L, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $a^2 = 2g$ определяется в зависимости от сигнальной конструкции; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$, $\mathbf{P} = [p_{k\ell}]_1^L$; $p_{k\ell} = \gamma \frac{\delta_\ell^2}{\mathbb{E}\alpha_\ell^2} \delta_{k\ell}$ – диагональная матрица; $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера; $\mathbb{E}\alpha_\ell^2$ – начальный момент второго порядка, $k, \ell = 1, \dots, L$.

2. Релеевские замирания

Двумерная релеевская плотность распределения. Двумерная плотность распределения вероятностей для коррелированных релеевских замираний определяется как [3, (3.9)]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \exp \left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right) I_0 \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right),$$

где ρ – коэффициент корреляции, $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя ν -го порядка.

Математическое ожидание функции Оуэна имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty T \left(a \sqrt{\delta_1^2 \frac{\alpha_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma + \delta_2^2 \frac{\alpha_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma}, \eta \right) f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{a^2 \gamma}{2} (1+x^2) \left(\frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \alpha_1^2 + \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \alpha_2^2 \right) \right) f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Внутренний интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(a^2 p_1 (1+x^2) + \frac{1}{\sigma_1^2 (1 - \rho^2)} \right) \alpha_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(a^2 p_2 (1+x^2) + \frac{1}{\sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \right) \alpha_2^2 \right] I_0 \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned}$$

где $p_1 = \frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma$, $p_2 = \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma$. Используя формулу [4, 3.2.8.5] при $\ell = m = 1$, $n = 0$, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x y e^{-px^2 - qy^2} I_0(axy) dx dy = \frac{1}{4pq - a^2}, \quad p, q, 4pq - a^2 > 0.$$

Тогда интеграл $I(x)$ после преобразований можно свести к виду

$$I(x) = \frac{1}{1 + a^2 (p_1 \sigma_1^2 + p_2 \sigma_2^2) (1+x^2) + a^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) p_1 p_2 (1+x^2)^2},$$

где, учитывая, что $\mathbb{E}\alpha_1^2 = 2\sigma_1^2$, $\mathbb{E}\alpha_2^2 = 2\sigma_2^2$, определим новые коэффициенты

$$\begin{aligned} v &= a^2 (p_1 \sigma_1^2 + p_2 \sigma_2^2) = \frac{1}{2} a^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \gamma = (\delta_1^2 + \delta_2^2) g \gamma, \\ w &= a^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) p_1 p_2 = \frac{1}{4} (1 - \rho^2) a^4 \delta_1^2 \delta_2^2 \gamma^2 = (1 - \rho^2) \delta_1^2 \delta_2^2 g^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

В итоге получим интеграл

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+v(1+x^2)+w(1+x^2)^2} dx. \quad (4)$$

Используя (4) для $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta)$, можно показать, что математическое ожидание функции Оуэна выражается через $\mathcal{H}$ -функцию:

$$\mathcal{H}_{p_1, \dots, p_n}^{(n)}(z_1, \dots, z_n; b_1, \dots, b_n; a) = \frac{(1 - b_1^2)^{p_1} \dots (1 - b_n^2)^{p_n}}{2\pi} \times \int_0^a \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{(1+b_1^2 x^2)^{p_1} \dots (1+b_n^2 x^2)^{p_n}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b_k^2 x^2}\right) dx, \quad (5)$$

где $0 \leq b_k^2 \leq 1$, $k = 1, \dots, n$. Справедливо равенство

$$\mathcal{H}_{1, \dots, 1}^{(n)}(0, \dots, 0; b_1, \dots, b_n; a) = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan a - \sum_{\ell=1}^n b_\ell^{2n-1} \arctan(ab_\ell) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq \ell}}^n \frac{1-b_k^2}{b_\ell^2 - b_k^2} \right]. \quad (6)$$

Действительно,

$$1 + v(1+x^2) + w(1+x^2)^2 = \left(1 + \left[\frac{1}{2}v - \sqrt{D}\right](1+x^2)\right) \left(1 + \left[\frac{1}{2}v + \sqrt{D}\right](1+x^2)\right),$$

где $D = \frac{1}{4}v^2 - w = \frac{1}{4}g^2\gamma^2[(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2] > 0$. В результате после преобразования знаменателя в (4) получим, что $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) = \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta)$, где

$$b_1^2 = \frac{v/2 + \sqrt{D}}{1 + v/2 + \sqrt{D}}, \quad b_2^2 = \frac{v/2 - \sqrt{D}}{1 + v/2 - \sqrt{D}}, \quad D = \frac{1}{4}g^2\gamma^2[(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2].$$

Окончательно найдем, применив (6), что при использовании двоянного разнесенного приема и метода оптимального сложения в канале с релейскими коррелированными замираниями математическое ожидание T -функции Оуэна может быть вычислено на основе формулы

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \eta - \frac{1}{b_1^2 - b_2^2} \left(b_1^3(1 - b_2^2) \arctan(b_1\eta) - b_2^3(1 - b_1^2) \arctan(b_2\eta) \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \frac{g\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}{1 + g\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}, \quad \Omega(\delta_1, \delta_2, \rho) = \frac{1}{2} \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \sqrt{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2} \right], \\ b_2^2 &= \frac{g\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}{1 + g\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}, \quad \Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho) = \frac{1}{2} \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 - \sqrt{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Так как $\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho) = (1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2$, то коэффициент b_2^2 можно представить также в виде

$$b_2^2 = \frac{g(1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2\gamma}{\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho) + g(1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2\gamma}.$$

При $\rho = 1$ из (5) следует, что $\mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, 0; \eta) = \mathcal{H}_1^{(1)}(0; b_1; \eta)$, что соответствует одиночному приему при релейских замираниях для случая полностью коррелированных каналов.

Многомерная релеевская плотность распределения. Известно [5], что многомерная релеевская плотность распределения при экспоненциальной корреляционной матрице имеет вид

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) = \frac{\alpha_1 \dots \alpha_L}{(1 - \rho^2)^{L-1} \sigma^{2L}} \times \quad (7)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma^2} \left(\alpha_1^2 + \alpha_L^2 + (1 + \rho^2) \sum_{k=2}^{L-1} \alpha_k^2\right)\right) \prod_{k=1}^{L-1} I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_k \alpha_{k+1}\right),$$

где ρ – коэффициент корреляции. Тогда (2) можно преобразовать к виду

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \frac{1}{(1 - \rho^2)^{L-1} \sigma^{2L}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \alpha_1 \dots \alpha_L \times$$

$$\times e^{-(1/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_1^2/2 - (1/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_L^2/2 - ((1+\rho^2)/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_2^2/2 - \dots - ((1+\rho^2)/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_{L-1}^2/2} \times$$

$$\times T\left(a\sqrt{p_1\alpha_1^2 + \dots + p_L\alpha_L^2}, \eta\right) I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_1 \alpha_2\right) \dots I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_{L-1} \alpha_L\right) d\alpha_1 \dots d\alpha_L.$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_1 x_2 \dots x_n e^{-(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2)/2} T\left(a\sqrt{p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2}, \eta\right) \times$$

$$\times I_0(c_1 x_1 x_2) I_0(c_2 x_2 x_3) \dots \times I_0(c_{n-1} x_{n-1} x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (8)$$

$$a \geq 0, \quad b_k > 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad c_k > 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Используя определение функции Оуэна и изменив порядок интегрирования, получим, что

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dt}{1+t^2} \int_0^\infty x_n e^{-(b_n + a^2 p_n(1+t^2))x_n^2/2} I_0(c_{n-1} x_{n-1} x_n) dx_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_2 e^{-(b_2 + a^2 p_2(1+t^2))x_2^2/2} I_0(c_2 x_2 x_3) dx_2 \times$$

$$\times \int_0^\infty x_1 e^{-(b_1 + a^2 p_1(1+t^2))x_1^2/2} I_0(c_1 x_1 x_2) dx_1.$$

Последовательно применим [4, 2.15.5.4]:

$$A_\nu^\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px^2} I_\nu(cx) dx = \frac{(c/2)^\nu}{2p^{(\alpha+\nu)/2}} \Gamma\left[\frac{\alpha+\nu}{2}\right] {}_1F_1\left(\frac{\alpha+\nu}{2}; \frac{c^2}{4p}\right),$$

$$\operatorname{Re} p, \operatorname{Re}(\alpha + \nu) > 0; |\arg c| < \pi; \quad A_\nu^{\nu+2} = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}} e^{c^2/(4p)}, \operatorname{Re} \nu > -1,$$

и после преобразований получим, что

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{C} + (1+t^2)\mathbf{P}|} dt, \quad (9)$$

где введены диагональная матрица $\mathbf{P}$ и трехдиагональная $\mathbf{C}$ размерами $n \times n$:

$$\mathbf{P} = a^2 \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Используя свойства определителей, можно представить (9) в виде

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{C} + \mathbf{P}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} t^2|} dt$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{C}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + \mathbf{B} t^2|} dt, \quad (11)$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. В таком виде (11) по структуре является обобщением $\mathcal{H}$ -функции [1], поэтому

$$J = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta), \quad (12)$$

где введена новая специальная функция

$$\mathcal{H}_p(z; b, \mathbf{B}; \eta) = \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|^p}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|^p} \exp\left(\frac{z}{2} \frac{1+bt^2}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|}\right) dt, \quad p > 0.$$

Ввиду того, что при таком определении $\mathcal{H}$ -функции необходимо вычислять обратную матрицу $(\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1}$, для практических расчетов может быть более удобным использовать (9).

Замечание 1. При определении $\mathcal{H}$ -функции необходимо вычислять обратную матрицу. Например, $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. Матрица, для которой нужно найти обратную матрицу, является трехдиагональной [6]. Рассмотрим трехдиагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{A}^{-1} = [\alpha_{ij}]$, то [7]

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} b_i b_{i+1} \dots b_{j-1} f_{i-1} \varphi_{j+1} / f_n, & i < j, \\ f_{i-1} \varphi_{i+1} / f_n, & i = j, \\ (-1)^{i+j} c_{j+1} c_{j+2} \dots c_i f_{j-1} \varphi_{i+1} / f_n, & i > j, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} f_i &= a_i f_{i-1} - b_{i-1} c_{i-1} f_{i-2}, \quad i = 1, \dots, n; \quad f_{-1} = 0, \quad f_0 = 1; \\ \varphi_i &= a_i \varphi_{i+1} - b_i c_i \varphi_{i+2}, \quad i = n-1, \dots, 1; \quad \varphi_{n+1} = 1, \quad \varphi_n = a_n. \end{aligned}$$

С учетом того, что матрица $\mathbf{P}$ является диагональной, итоговую матрицу $\mathbf{B}$ достаточно просто вычислить умножением каждого k -го столбца матрицы $(\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1}$ на p_k , $k = 1, \dots, n$.

В итоге, возвращаясь к искомой задаче и используя (12), получим

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \frac{1}{(1-\rho^2)^{L-1}} \frac{1}{\sigma^{2L} |\mathbf{C}|} \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta),$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$ и матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ (с размерностями $L \times L$) определены в (10). Учитывая, что для начальных моментов второго порядка $\mathbb{E}\alpha_\ell^2 = 2\sigma^2$, $\ell = 1, \dots, L$, матрицу $\mathbf{P}$ можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \frac{a^2\gamma}{2\sigma^2} \begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_L^2 \end{pmatrix} = \frac{a^2\gamma}{2\sigma^2} \mathbf{\Delta}_L,$$

где $\mathbf{\Delta}_L = \text{diag}(\delta_1^2, \dots, \delta_L^2)$ – диагональная матрица, $\delta_\ell^2 = \gamma_\ell/\gamma_1$, $\ell = 1, \dots, L$; $\gamma = \gamma_1$ и γ_ℓ – отношение сигнал/шум в ℓ -й ветви.

Для трехдиагональной матрицы $\mathbf{C}$, с учетом (7), (8), найдем элементы матрицы в виде $b_1 = b_L = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $b_\ell = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $\ell = 2, \dots, L-1$; $c_\ell = \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $\ell = 1, \dots, L-1$:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \rho & 1+\rho^2 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho & 1+\rho^2 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \mathbf{C}'.$$

Нетрудно убедиться, используя рекуррентную формулу для трехдиагональной матрицы, что $\det \mathbf{C}' = 1 - \rho^2$. Из свойств определителей следует, что $\det(\lambda \mathbf{C}') = \lambda^L \det \mathbf{C}'$, следовательно, $\det \mathbf{C} = \frac{1}{(1-\rho^2)^{L-1}\sigma^{2L}}$. Таким образом, $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta)$, где

$$\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} = g\gamma \left(g\gamma \mathbf{\Delta}_L + \frac{1}{1-\rho^2} \mathbf{C}' \right)^{-1} \mathbf{\Delta}_L.$$

В частности, при $L = 2$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{pmatrix} \delta_1^2 g\gamma (\delta_2^2 g\gamma + \frac{1}{1-\rho^2}) & -\delta_2^2 \frac{\rho}{1-\rho^2} g\gamma \\ -\delta_1^2 \frac{\rho}{1-\rho^2} g\gamma & \delta_2^2 g\gamma (\delta_1^2 g\gamma + \frac{1}{1-\rho^2}) \end{pmatrix},$$

где

$$\det \mathbf{G} = \delta_1^2 \delta_2^2 g^2 \gamma^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (\delta_1^2 + \delta_2^2) g\gamma + \frac{\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Замечание 2. Рассмотрим матрицу $\mathbf{B}$ при $L = 2$. Пусть $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, тогда

$$|\mathbf{E} + \mathbf{B}t^2| = \begin{vmatrix} 1 + t^2 b_{11} & t^2 b_{12} \\ t^2 b_{21} & 1 + t^2 b_{22} \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим

$$|\mathbf{E} + \mathbf{B}t^2| = \left(\frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}} t^2 + 1 \right) \times \\ \times \left(\frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}} t^2 + 1 \right).$$

Кроме того, $|\mathbf{E} - \mathbf{B}| = 1 - (b_{11} + b_{22}) + |\mathbf{B}|$. Таким образом, при $L = 2$ для произвольной матрицы $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ имеем $\mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta) = \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta)$, где

$$b_1^2 = \frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}}, \quad b_2^2 = \frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}},$$

причем очевидно, что $(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) = 1 - (b_{11} + b_{22}) + |\mathbf{B}| = |\mathbf{E} - \mathbf{B}|$.

3. Замирания Накагами

Двумерная плотность распределения Накагами имеет вид

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4(\alpha_1 \alpha_2)^m}{(1-\rho) a_1^2 a_2^2 (a_1 a_2 \sqrt{\rho})^{m-1} \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{a_2^2 \alpha_1^2 + a_1^2 \alpha_2^2}{(1-\rho) a_1^2 a_2^2}\right) I_{m-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho} \alpha_1 \alpha_2}{(1-\rho) a_1 a_2}\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $a_1^2 = \frac{\mathbb{E}\alpha_1^2}{m}$, $a_2^2 = \frac{\mathbb{E}\alpha_2^2}{m}$, $m \geq \frac{1}{2}$ и $\rho = \frac{\text{cov}(\alpha_1^2, \alpha_2^2)}{\sqrt{\mathbb{D}\alpha_1^2 \mathbb{D}\alpha_2^2}}$ – коэффициент корреляции.

Вычислив (3) для распределения Накагами, после преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \mathcal{H}_{m,m}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta) = \\ &= \frac{(1 - b_1^2)^m (1 - b_2^2)^m}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{(1+b_1^2 x^2)^m (1+b_2^2 x^2)^m} dx, \end{aligned}$$

где $a^2 = 2g$ и

$$\begin{cases} b_1^2 \\ b_2^2 \end{cases} = \frac{(1 + \delta^2 \pm \sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\rho\delta^2})g\gamma}{2m + (1 + \delta^2 \pm \sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\rho\delta^2})g\gamma}.$$

Многомерная плотность распределения Накагами. Пусть задана корреляционная матрица размера $L \times L$:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ \rho_{ij}, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Многомерное распределение Накагами имеет вид [8, 9] ($\mathbb{E}\alpha_k^2 = 1$, $k = 1, \dots, L$)

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) &= \frac{|\mathbf{P}|^m \alpha_1^{m-1} \alpha_L^m}{2^{m-1} \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{p_{L,L} \alpha_L^2}{2}\right) \times \\ &\times \prod_{k=1}^{L-1} |p_{k,k+1}|^{-(m-1)} \alpha_k \exp\left(-\frac{p_{k,k} \alpha_k^2}{2}\right) I_{m-1}(|p_{k,k+1}| \alpha_k \alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}$ имеет трехдиагональный вид ($p_{i,j} = 0$, $|i - j| > 1$):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & & & 0 \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{2,3} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & p_{L-2,L-1} & p_{L-1,L-1} & p_{L-1,L} & \\ & & p_{L-1,L} & p_{L,L} & \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} J_L &= \mathbb{E}T(\alpha_1, \dots, \alpha_L, \eta) = \frac{|\mathbf{P}|^m}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{P} + (1+x^2)\mathbf{H}|^m} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{P}|^m}{|\mathbf{P} + \mathbf{H}|^m} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + (\mathbf{P} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}x^2|^m} dx, \end{aligned}$$

где матрица $\mathbf{H}$ имеет диагональный вид: $\mathbf{H} = a^2\gamma \operatorname{diag}\left(\frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2}, \dots, \frac{\delta_L^2}{\mathbb{E}\alpha_L^2}\right)$. Пусть $\mathbf{B} = (\mathbf{P} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}$. Тогда выражение для J_L можно выразить через $\mathcal{H}$ -функцию:

$$J_L = \mathcal{H}_m(0; 0, \mathbf{B}; \eta) = \frac{1}{2\pi} |\mathbf{E} - \mathbf{B}|^m \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + \mathbf{B}x^2|^m} dx.$$

Для вычисления матрицы $\mathbf{H}$ необходимо определить начальные моменты второго порядка

$$\mathbb{E}\alpha_\ell^2 = \int_0^\infty \alpha_\ell^2 f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) d\alpha_1 \dots d\alpha_L, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Для определения начального момента второго порядка рассмотрим более общий интеграл

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \dots x_n^{s_n-1} e^{-(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2)/2} I_{\nu_1}(b_1x_1x_2) \dots \\ &\dots I_{\nu_2}(b_2x_2x_3) \dots I_{\nu_{n-1}}(b_{n-1}x_{n-1}x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

Ре $a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$; $b_m \geq 0$, $m = 1, \dots, n-1$. Если использовать разложение в ряд функции Бесселя $I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!(\nu+1)_k}$ и [10, 2.2.1.12], получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_2+\nu_1+\nu_2}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s_{n-1}+\nu_{n-2}+\nu_{n-1}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_n+\nu_{n-1}}{2}\right)}{\Gamma(\nu_1+1) \Gamma(\nu_2+1) \dots \Gamma(\nu_{n-1}+1)} \times \\ &\times \frac{2^{(s_1+\dots+s_n)/2-n}}{a_1^{s_1/2} a_2^{s_2/2} \dots a_n^{s_n/2}} \left(\frac{b_1^2}{a_1 a_2}\right)^{\nu_1/2} \left(\frac{b_2^2}{a_2 a_3}\right)^{\nu_2/2} \dots \left(\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} a_n}\right)^{\nu_{n-1}/2} \times \\ &\times \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^\infty \frac{\left(\frac{s_1+\nu_1}{2}\right)_{k_1} \left(\frac{s_2+\nu_1+\nu_2}{2}\right)_{k_1+k_2} \dots \left(\frac{s_{n-1}+\nu_{n-2}+\nu_{n-1}}{2}\right)_{k_{n-2}+k_{n-1}} \left(\frac{s_n+\nu_{n-1}}{2}\right)_{k_{n-1}}}{(\nu_1+1)_{k_1} (\nu_2+1)_{k_2} \dots (\nu_{n-1}+1)_{k_{n-1}}} \times \\ &\times \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \left(\frac{b_1^2}{a_1 a_2}\right)^{k_1} \left(\frac{b_2^2}{a_2 a_3}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} a_n}\right)^{k_{n-1}}. \end{aligned}$$

Этот ряд может быть записан в виде обобщенной гипергеометрической функции Шриваставы и Доуста [11]. Полученный результат для J позволяет рассчитать как начальные моменты n -го порядка, так и, в частности, начальный момент второго порядка $\mathbb{E}\alpha_\ell^2$, $\ell = 1, \dots, L$.

Пусть $k_0 = 0$, $k_L = 0$, тогда для начальных моментов $\mathbb{E}\alpha_\ell^n$, $\ell = 1, \dots, L$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha_\ell^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} \frac{|\mathbf{P}|^m}{p_{1,1}^m p_{2,2}^m \dots p_{\ell,\ell}^{m+n/2} \dots p_{L,L}^m} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{L-1}=0}^{\infty} (m+k_1)_{k_0} \times \\ &\times (m+k_2)_{k_1} \dots \frac{(m+\frac{n}{2})_{k_{\ell-1}+k_\ell}}{(m)_{k_\ell}} \dots (m+k_{L-1})_{k_{L-2}} (m)_{k_{L-1}+k_L} \times \\ &\times \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{L-1}!} \left(\frac{|p_{1,2}|^2}{p_{1,1} p_{2,2}} \right)^{k_1} \left(\frac{|p_{2,3}|^2}{p_{2,2} p_{3,3}} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{|p_{L-1,L}|^2}{p_{L-1,L-1} p_{L,L}} \right)^{k_{L-1}}, \end{aligned}$$

где $\ell = 1, \dots, L$ и использовано тождество $(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k$.

Пусть $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_p}$ — определитель матрицы порядка $n-p$, получающийся из матрицы $\mathbf{P}$ отбрасыванием строк $i_1, i_2, \dots, i_p$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_p$. В частности, $\Delta_{2,3,\dots,L}^{2,3,\dots,L} = p_{1,1}$, $\Delta_{3,4,\dots,L}^{3,4,\dots,L} = p_{1,1} p_{2,2} - |p_{1,2}|^2$. По определению положим $\Delta_{1,2,3,\dots,L}^{1,2,3,\dots,L} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Последовательно просуммировав по $k_1, k_2, \dots, k_{L-1}$ и используя [4, 5.2.13.16] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu)_k}{k!} x^k = (1-x)^{-\nu}$, $|x| \leq 1$; $x \neq 1$ при $\nu > 0$, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha_1^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{1,1}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{1,2}|^2}{p_{1,1}} \frac{\Delta_{1,2}^{1,2}}{\Delta_1^1} \right)^{-n/2}, \\ \mathbb{E}\alpha_L^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{L,L}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{L-1,L}|^2}{p_{L,L}} \frac{\Delta_{L-1,L}^{L-1,L}}{\Delta_L^L} \right)^{-n/2}. \end{aligned}$$

При $\ell = 2, \dots, L-1$

$$\mathbb{E}\alpha_\ell^n(L) = 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{\ell,\ell}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{\ell-1,\ell}|^2}{p_{\ell,\ell}} \frac{\Delta_{\ell-1,\ell,\dots,L}^{\ell-1,\ell,\dots,L}}{\Delta_{\ell,\ell+1,\dots,L}^{\ell,\ell+1,\dots,L}} - \frac{|p_{\ell,\ell+1}|^2}{p_{\ell,\ell}} \frac{\Delta_{1,2,\dots,\ell+1}^{1,2,\dots,\ell+1}}{\Delta_{1,2,\dots,\ell}^{1,2,\dots,\ell}} \right)^{-n/2}.$$

4. Двумерные райсовские замирания

Двумерная плотность распределения вероятностей для коррелированного райсовского закона. Пусть $\alpha_1 = (\alpha_{c1}, \alpha_{s1})$, $\alpha_2 = (\alpha_{c2}, \alpha_{s2})$ — гауссовские случайные векторы, компонентами которых являются гауссовские случайные величины $\alpha_{c1}, \alpha_{c2}, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}$, в общем случае с ненулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями компонент вектора $D\alpha_{c(s),1} = \sigma_1^2$, $D\alpha_{c(s),2} = \sigma_2^2$. Коррелированные случайные величины, представляющие собой нормы случайных векторов $\alpha_1 = \|\alpha_1\| = \sqrt{\alpha_{c1}^2 + \alpha_{s1}^2}$, $\alpha_2 = \|\alpha_2\| = \sqrt{\alpha_{c2}^2 + \alpha_{s2}^2}$ с математическими ожиданиями $m_1 = \mathbb{E}\alpha_1$ и $m_2 = \mathbb{E}\alpha_2$, имеют ковариационную матрицу $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ [12]. В литературе известны два варианта записи двумерной плотности распределения вероятностей для коррелированного райсовского закона, но с разными характеристиками:

А. Если $m_1 = m_2 = m$ и $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ в общем случае, то [3, (3.13)]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\sigma_2^2} + m^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k \left(\frac{\rho \alpha_1 \alpha_2}{(1-\rho^2) \sigma_1 \sigma_2} \right) I_k \left(\frac{m(1-\rho \sigma_1/\sigma_2)}{(1-\rho^2) \sigma_1^2} \alpha_1 \right) I_k \left(\frac{m(1-\rho \sigma_2/\sigma_1)}{(1-\rho^2) \sigma_2^2} \alpha_2 \right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ и $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$.

В. Если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ и $m_1 \neq m_2$ в общем случае, то [13]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma^4 (1-\rho^2)} \exp \left(-\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \rho}{2\sigma^2 (1-\rho^2)} \right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k \left(\frac{\rho \alpha_1 \alpha_2}{(1-\rho^2) \sigma^2} \right) I_k \left(\frac{m_1 - \rho m_2}{(1-\rho^2) \sigma^2} \alpha_1 \right) I_k \left(\frac{m_2 - \rho m_1}{(1-\rho^2) \sigma^2} \alpha_2 \right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ и $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$.

В результате обобщения этих результатов получим, что двумерная плотность распределения вероятностей Райса с произвольными математическими ожиданиями и дисперсиями может быть представлена в виде

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \Omega e^{-\chi \alpha_1 \alpha_2} e^{-(\beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 \alpha_2^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\lambda \alpha_1 \alpha_2) I_k(\theta_1 \alpha_1) I_k(\theta_2 \alpha_2), \quad (13)$$

где $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$ и

$$\Omega = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)}, \quad \chi = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2} - 2|\rho| \frac{m_1 m_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(1-\rho^2) \sigma_1^2}, \\ \beta_2 = \frac{1}{(1-\rho^2) \sigma_2^2}, \quad \lambda = \frac{|\rho|}{(1-\rho^2) \sigma_1 \sigma_2}, \quad \theta_1 = \frac{m_1 - |\rho| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} m_2}{(1-\rho^2) \sigma_1^2}, \quad \theta_2 = \frac{m_2 - |\rho| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1}{(1-\rho^2) \sigma_2^2}. \quad (14)$$

Отметим некоторые свойства коэффициентов, введенных в (14):

$$\Omega = \beta_1 \beta_2 - \lambda^2, \quad \Omega = (1-\rho^2) \beta_1 \beta_2, \quad \lambda^2 = \rho^2 \beta_1 \beta_2, \quad \chi = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{2}, \\ \beta_1 m_1 - \theta_1 = \lambda m_2, \quad \beta_2 m_2 - \theta_2 = \lambda m_1, \quad \beta_2 \theta_1 + \lambda \theta_2 = m_1 \Omega, \quad \beta_1 \theta_2 + \lambda \theta_1 = m_2 \Omega.$$

Справедливость выполнения приведенных выше тождеств может быть легко установлена непосредственной подстановкой коэффициентов.

Для плотности распределения вероятностей Райса при выборе коэффициентов, определяемых (14), выполняются условия нормировки и согласованности:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = 1, \\ f(\alpha_1) = \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} e^{-(\alpha_1^2 + m_1^2)/(2\sigma_1^2)} I_0 \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} \alpha_1 \right), \\ f(\alpha_2) = \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 = \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} e^{-(\alpha_2^2 + m_2^2)/(2\sigma_2^2)} I_0 \left(\frac{m_2}{\sigma_2^2} \alpha_2 \right),$$

где $f(\alpha_k)$, $k = 1, 2$, – одномерная плотность распределения Райса. Если $\rho = 0$, то двумерная плотность распределения Райса (13), с учетом (14), примет следующий вид

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} e^{-(\alpha_1^2 + m_1^2)/(2\sigma_1^2)} I_0 \left(\frac{m_1 \alpha_1}{\sigma_1^2} \right) \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} e^{-(\alpha_2^2 + m_2^2)/(2\sigma_2^2)} I_0 \left(\frac{m_2 \alpha_2}{\sigma_2^2} \right) = f(\alpha_1) f(\alpha_2).$$

4.1. Метод оптимального сложения. При двукратном приеме и коррелированных райсовских замираниях в каналах связи математическое ожидание определяется формулой (3).

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty T\left(a\sqrt{p_1x_1^2 + p_2x_2^2}, \eta\right) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad a \geq 0; \quad p_1, p_2 > 0, \quad (15)$$

где $g(x_1, x_2)$ имеет вид (13):

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\lambda x_1 x_2) I_k(\theta_1 x_1) I_k(\theta_2 x_2),$$

и $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k \geq 1$. Используя определение функции Оуэна и изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a^2(1+t^2)(p_1x_1^2 + p_2x_2^2)/2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dt}{1+t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \int_0^\infty x_2 e^{-(a^2 p_2(1+t^2) + b_2)x_2^2/2} I_k(\theta_2 x_2) dx_2 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_1 e^{-(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)x_1^2/2} I_k(\lambda x_1 x_2) I_k(\theta_1 x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим интеграл [4, 2.15.20.8]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} I_\nu(bx) I_\nu(cx) dx = \frac{1}{2p} e^{(b^2+c^2)/(4p)} I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right), \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} e^{\theta_1^2/[2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_2 e^{-[(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \lambda^2/(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]x_2^2/2} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\theta_2 x_2) I_k\left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} x_2\right) dx_2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку $I_0(w+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(w) I_k(z)$ в силу формулы [14, 2.4.1],

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} e^{\theta_1^2/[2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_2 e^{-[(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \lambda^2/(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]x_2^2/2} I_0\left(\left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)x_2\right) dx_2 dt. \end{aligned}$$

Этот интеграл известен [4, 2.15.5.4]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx = \frac{1}{2p} e^{c^2/(4p)}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Таким образом,

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}} \times \\ \times \exp\left(\frac{\theta_1^2}{2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)}\right) \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)^2 \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}}\right) dt. \quad (16)$$

Исходя из симметрии $f(x_1, x_2)$ относительно индексов, можно использовать альтернативное представление (16), получаемое соответствующей заменой индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$.

Пусть

$$\mathbf{P} = a^2 \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} b_1 & \lambda \\ \lambda & b_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_2, \theta_1),$$

тогда после вычисления (16) получим

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \exp\left(\frac{\theta_1^2}{2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)^2 \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}}\right) dt.$$

После алгебраических преобразований аргумента экспоненциальной функции найдем

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2 + a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1) t^2}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|}\right) dt \quad (17)$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{\Lambda}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|} \exp\left(\frac{z}{2} \frac{1 + bt^2}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|}\right) dt,$$

где $|\mathbf{\Lambda}| = b_1 b_2 - \lambda^2$,

$$b = \frac{a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1)}{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2}, \quad z = \frac{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2}{(b_1 + a^2 p_1)(b_2 + a^2 p_2) - \lambda^2}$$

и введена матрица $\mathbf{B} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. Тогда $J = |\mathbf{\Lambda}|^{-1} \mathcal{H}_1(z; b, \mathbf{B}; \eta)$.

Так как

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{P} + \mathbf{\Lambda})\boldsymbol{\theta}^T = \theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2, \quad \boldsymbol{\theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\theta}^T = a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1),$$

то можно использовать представление, аналогичное представлению (17):

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\theta} (\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}) \boldsymbol{\theta}^T}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|}\right) dt$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{\Lambda}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\theta} \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}) \boldsymbol{\theta}^T}{|\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}| |\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|}\right) dt.$$

Целесообразно ввести специальную функцию

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{Z}; \mathbf{a}, \mathbf{B}; \eta) = \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|^p}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|^p} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \mathbf{Z} (\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}) \mathbf{a}^T}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|}\right) dt, \quad (18)$$

где $p > 0$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}$ – матрицы размера $n \times n$, а $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор-строка. В этом случае

$$J = \frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|} \mathcal{H}_1\left(\frac{\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}}{|\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}; \eta\right) = \frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|} \mathcal{H}_1\left(\frac{\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}}{|\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}; \eta\right), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}.$$

Специальная функция (18) может быть полезна для систематизации расчета вероятностей ошибки при разнесенном приеме в каналах связи с замираниями, описываемыми многомерными распределениями Релея, Накагами и двумерным распределением Райса.

5. Приложение

Ограничимся рассмотрением райсовских замираний при двояном приеме. Введем коэффициенты, характеризующие глубину райсовских замираний в каждом канале: $K_{\mathcal{RC}1}^2 = \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}$, $K_{\mathcal{RC}2}^2 = \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}$. Каждый из этих коэффициентов представляет собой отношение мощности $m_{1(2)}^2/2$ регулярной составляющей к дисперсии $\sigma_{1(2)}^2$ флуктуирующей составляющей коэффициента передачи $\alpha_{1(2)}$ соответствующего канала (ветви) с райсовскими замираниями. Если $K_{\mathcal{RC}1(2)}^2 = 0$, то для одного или обоих некоррелированных каналов получим каналы с релейскими замираниями. При $K_{\mathcal{RC}1(2)}^2 \rightarrow \infty$ в соответствующей ветви разнесения или в обеих ветвях придем к каналам без замираний. Кроме этого, введем коэффициенты, характеризующие соотношения между дисперсиями и математическими ожиданиями: $q^2 = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, $r = m_1/m_2$. Коэффициенты q^2 и r характеризуют асимметрию ветвей (каналов) соответственно по дисперсиям и математическим ожиданиям. Без ограничения общности можно положить, что $0 \leq q^2 \leq 1$.

При проведении численных расчетов для удобства зададим: коэффициент корреляции ρ , глубину замираний в каждой ветви $K_{\mathcal{RC}1}^2$ и $K_{\mathcal{RC}2}^2$, а также δ_1^2 , δ_2^2 и соотношение между дисперсиями – величину q . Соотношение между математическими ожиданиями имеет вид $r = q \frac{K_{\mathcal{RC}1}}{K_{\mathcal{RC}2}}$. Отметим, что в (15) $b_1 = \beta_1$, $b_2 = \beta_2$,

$$p_1 = \frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma = \frac{1}{2\sigma_1^2} \frac{\delta_1^2}{K_{\mathcal{RC}1}^2 + 1} \gamma, \quad p_2 = \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma = \frac{1}{2\sigma_2^2} \frac{\delta_2^2}{K_{\mathcal{RC}2}^2 + 1} \gamma,$$

$$\theta_1 = \frac{2K_{\mathcal{RC}1}^2}{m_1} \frac{1 - \rho K_{\mathcal{RC}2}/K_{\mathcal{RC}1}}{1 - \rho^2}, \quad \theta_2 = \frac{2K_{\mathcal{RC}2}^2}{m_2} \frac{1 - \rho K_{\mathcal{RC}1}/K_{\mathcal{RC}2}}{1 - \rho^2},$$

и параметры распределения (13) определены в (14). Пусть

$$\chi = \frac{K_{\mathcal{RC}1}^2 + K_{\mathcal{RC}2}^2 - 4|\rho| K_{\mathcal{RC}R,1} K_{\mathcal{RC}R,2}}{1 - \rho^2},$$

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sigma_1^2} \frac{\delta_1^2}{K_{\mathcal{RC}1}^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_2^2} \frac{\delta_2^2}{K_{\mathcal{RC}2}^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & |\rho|q \\ |\rho|q & q^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_k = 2g_k\gamma (\mathbf{\Lambda} + 2g_k\gamma \mathbf{P}')^{-1} \mathbf{P}', \quad \mathbf{P}_k = 2g_k\gamma \mathbf{P}', \quad k = 1, 2, \dots$$

Приведем примеры расчета средней битовой вероятности ошибки при двояном разнесенном приеме многопозиционных сигналов ФМ и КАМ в канале связи с коррелированными райсовскими замираниями и АБГШ. С учетом использования только двух ветвей разнесения $L = 2$ положим $\gamma = \gamma_{bm}/2^\kappa$ или $\gamma = \gamma_{bc}/2^\kappa$.

ФМ-М. Применив формулу для средней вероятности ошибки в канале с АБГШ [1] и приведенные выше результаты, получим, что средняя вероятность битовой ошибки для сигналов ФМ-М, $M = 2^K$, при двояном приеме в канале с райсовскими замираниями может быть представлена в виде

$$\tilde{P}_b(\gamma) = \frac{16}{MK} e^{-\chi} \sum_{j=1}^{M/4} \left[\hat{\omega}_j \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_j; \operatorname{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) + \right. \\ \left. + \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_j; +\infty \right) \right],$$

где $g_j^{PSK} = \log_2 M \gamma_{bm} \sin^2 \frac{(2j-1)\pi}{M}$, $j = 1, \dots, M/4$; $\gamma_m = E_m/N_0 = KE_{bm}/N_0$ – отношение максимальной энергии сигнала E_m к односторонней спектральной плотности мощности шума N_0 для всех $j = 1, \dots, M/4$, $M \geq 8$;

$$\omega_j = \frac{8}{M} \sum_{i=1}^{K-2} (-1)^{[(j-1)\frac{2^{i+1}}{M}]} 2^i = \frac{16}{M} \sum_{i=0}^{K-3} h_{i,j-1}^{(p)} 2^i = \frac{16}{M} \hat{\omega}_j,$$

где $[x]$ – целая часть числа x , $h_{i,j-1}^{(p)}$ – элементы матрицы Уолша $\mathbf{H}_p(K-2)$, упорядоченной по Пэли [15, 14.4].

На рис. 1 представлены результаты расчета средней вероятности ошибки $P_b(\gamma_{bm})$, $\gamma_{bm} = \gamma_m/K$, двояного приема сигналов ФМ-8 в канале без замираний и с коррелированными райсовскими замираниями для статистически однородных каналов при глубине замираний $K_{\mathcal{RC}}^2 = K_{\mathcal{RC}1}^2 = K_{\mathcal{RC}2}^2 \approx 3$ дБ.

КАМ-М. Средняя вероятность битовой ошибки в K -битовом блоке, $K = \log_2 M$, при двояном разнесенном приеме в канале с райсовскими замираниями определяется соотношением

$$\tilde{P}_b(\gamma) = \frac{2}{K} e^{-\chi} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_{2j-1}^{QAM} \gamma \mathbf{P}'_{2j-1}}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_{2j-1}^{QAM} \gamma \mathbf{P}'_{2j-1}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_{2j-1}; +\infty \right),$$

где $g_{2j-1}^{QAM} = \frac{3(2j-1)^2 K}{2(M-1)}$, $j = 1, \dots, \sqrt{M}-1$; $\gamma_{bc} = E_c/(N_0 K)$ и E_c – средняя энергия сигналов, используемых в КАМ-М, а коэффициенты a_{2j-1} , $j = 1, \dots, \sqrt{M}-1$, приведены в [1].

На рис. 2, 3 представлены результаты расчета средней вероятности ошибки $P_b(\gamma_{bc})$ двояного приема сигналов КАМ-16 в канале без замираний и с коррелированными райсовскими замираниями для статистически однородных каналов при глубине замираний $K_{\mathcal{RC}}^2 = K_{\mathcal{RC}1}^2 = K_{\mathcal{RC}2}^2 \approx 3$ дБ.

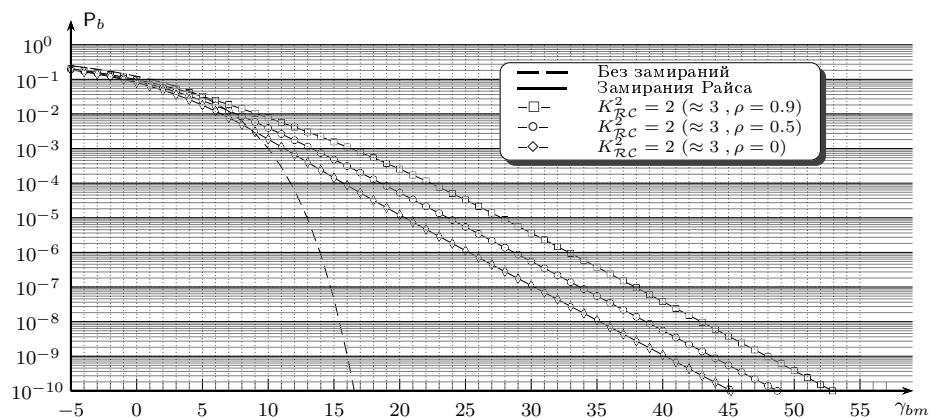


Рис. 1. Графики вероятностей ошибки ФМ-8 $P_b(\gamma_{bm})$ при двукоррелированном приеме и райсовских замираниях

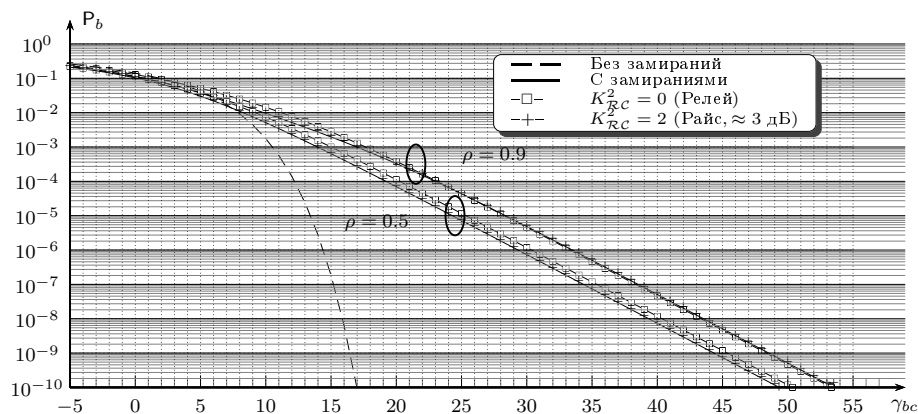


Рис. 2. Графики вероятности ошибки КАМ-16 $P_b(\gamma_{bc})$ при двукоррелированном приеме при релейских и райсовских замираниях

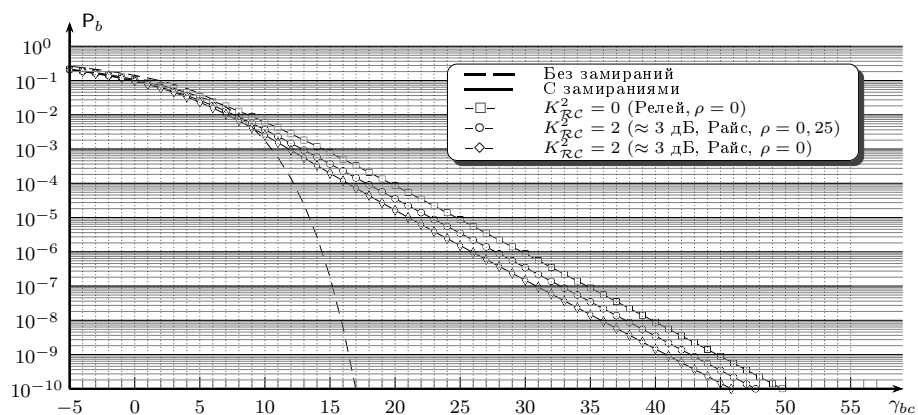


Рис. 3. Графики вероятности ошибки КАМ-16 $P_b(\gamma_{bc})$ при двукоррелированном приеме при релейских и райсовских замираниях

Заключение

Проведен анализ помехоустойчивости при разнесенном приеме многопозиционных сигнальных конструкций и использовании метода оптимального сложения для каналов связи с коррелированными в ветвях разнесения замираниями. В качестве законов, описывающих замирания сигналов, рассмотрены многомерные плотности распределения вероятности Релея, Накагами и двумерный закон Райса. Вычисление вероятности ошибки при разнесенном приеме двумерных многопозиционных сигнальных конструкций для исследуемых законов распределений сведено к применению новой специальной функции. Приведены примеры расчета вероятностей ошибок, корректные во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум, при двукратном коррелированном приеме и райсовских замираниях для многопозиционных сигналов ФМ-М и КАМ-М. Реальные каналы связи описываются в общем случае более сложными, чем Релей и Накагами, законами распределения. Дальнейшим направлением исследований является получение аналитических соотношений для многомерных распределений Райса и определение соответствующих вероятностей ошибок приема сигнальных конструкций.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Savischenko N.V.* Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. Singapore: World Sci., 2014. 640 p. <https://doi.org/10.1142/9168>.
2. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Hypergeometric functions of several variables and evaluation of error probability in fading multichannel system // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, No 1. P. 70–83. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010108>.
3. *Simon M.K.* Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists. Ser.: The Springer International Series in Engineering and Computer Science. New York, NY: Springer, 2006. xxiv, 200 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47694-0>.
4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2003. 664 с.
5. *Mallik R.K.* On multivariate Rayleigh and exponential distributions // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2003. V. 49, No 6. P. 1499–1515. <https://doi.org/10.1109/TIT.2003.811910>.
6. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.
7. *Usmani R.A.* Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix // *Linear Algebra Its Appl.* 1994. V. 212–213. P. 413–414. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90414-6](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90414-6).
8. *Blumenson L.E., Miller K.S.* Properties of generalized Rayleigh distributions // *Ann. Math. Stat.* 1963. V. 34, No 3. P. 903–910. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704013>.
9. *Karagiannidis G.K., Zogas D.A., Kotsopoulos S.A.* An efficient approach to multivariate Nakagami- m distribution using Green's matrix approximation // *IEEE Trans. Wireless Commun.* 2003. V. 2, No 5. P. 883–889. <https://doi.org/10.1109/TWC.2003.816792>.
10. *Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Savischenko N.V.* Handbook of Mellin Transforms. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2018. 607 p. <https://doi.org/10.1201/9780429434259>.
11. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Ser. in Mathematics and Its Applications: Statistics and Operational Research. Chichester: Ellis Horwood Ltd.; New York, NY: Halsted Press, 1985. 425 p.

12. *Simon M.K., Alouini M.-S.* Digital Communications over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. 2nd ed. New York, NY: Wiley, 2005. 936 p.
<https://doi.org/10.1002/0471715220>.
13. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
14. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
15. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. 5-е изд., испр. и доп. М.: Дрофа, 2006. 719 с.

Поступила в редакцию 5.04.2024

Принята к публикации 15.05.2024

Брычков Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

ул. Вавилова, д. 40, г. Москва, 119333, Россия

E-mail: yua@rambler.ru

Савищенко Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин

Военная академия связи им. С.М. Будённого

Тихорецкий просп., д. 3, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

E-mail: snikaspb@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 127–146

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.127-146

Multivariate Rayleigh, Rice, and Nakagami Distributions and Their Applications in Communication Theory

Yu.A. Brychkov^{a}, N.V. Savischenko^{b**}*

^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*

^b*Military Telecommunications Academy, St. Petersburg, 194064 Russia*

E-mail: ^{*}yua@rambler.ru, ^{**}snikaspb@mail.ru

Received April 5, 2024; Accepted May 15, 2024

Abstract

A method was developed to calculate the symbol and bit error probabilities for coherent diversity reception of multi-position signal structures in a communication channel with additive white Gaussian noise (AWGN) and general fading described by the multivariate Rayleigh and Nakagami distributions, as well as the bivariate Rice distribution.

Keywords: multivariate Rayleigh distribution, multivariate Nakagami distribution, bivariate Rice distribution, fading, potential noise immunity, special function, Owen function

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. PM-8 error probability graphs $P_b(\gamma_{bm})$ at dual correlated reception and Rice fading.

Fig. 2. QAM-16 error probability graphs $P_b(\gamma_{bc})$ at dual correlated reception and Rayleigh and Rice fading.

Fig. 3. QAM-16 error probability graphs $P_b(\gamma_{bc})$ at dual correlated reception and Rayleigh and Rice fading.

References

1. Savischenko N.V. *Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory*. Singapore, World Sci., 2014. 640 p. <https://doi.org/10.1142/9168>.
2. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Hypergeometric functions of several variables and evaluation of error probability in fading multichannel system. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 1, pp. 70–83. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010108>.
3. Simon M.K. *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists*. Ser.: The Springer International Series in Engineering and Computer Science. New York, NY, Springer, 2006. xxiv, 200 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47694-0>.
4. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Vol. 2: Special functions. 2nd ed., rev. Moscow, Fizmatlit, 2003. 664 p. (In Russian)
5. Mallik R.K. On multivariate Rayleigh and exponential distributions. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2003, vol. 49, no. 6, pp. 1499–1515. <https://doi.org/10.1109/TIT.2003.811910>.
6. Il'in V.P., Kuznetsov Yu.I. *Trekhdiagonal'nye matritsy i ikh prilozheniya* [Tridiagonal Matrices and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1985. 208 p. (In Russian)
7. Usmani R.A. Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix. *Linear Algebra Its Appl.*, 1994, vols. 212–213, pp. 413–414. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90414-6](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90414-6).
8. Blumenson L.E., Miller K.S. Properties of generalized Rayleigh distributions. *Ann. Math. Stat.*, 1963, vol. 34, no. 3, pp. 903–910. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704013>.
9. Karagiannidis G.K., Zogas D.A., Kotsopoulos S.A. An efficient approach to multivariate Nakagami- m distribution using Green's matrix approximation. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 5, pp. 883–889. <https://doi.org/10.1109/TWC.2003.816792>.
10. Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Savischenko N.V. *Handbook of Mellin Transforms*. Ser.: Advances in Applied Mathematics. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2018. 607 p. <https://doi.org/10.1201/9780429434259>.
11. Srivastava H.M., Karlsson P.W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*. Ellis Horwood Ser. in Mathematics and Its Applications: Statistics and Operational Research. Chichester, Ellis Horwood Ltd.; New York, NY, Halsted Press, 1985. 425 p.
12. Simon M.K., Alouini M.-S. *Digital Communications over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*. 2nd ed. New York, NY, Wiley, 2005. 936 p. <https://doi.org/10.1002/0471715220>.
13. Levin B.R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical Basics of Statistical Radio Engineering]. 3rd ed., rev. and enl. Moscow, Radio Svyaz', 1989. 656 p. (In Russian)

14. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funktsii* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions]. Pt. 1. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1949. 799 p. (In Russian)
 15. Gonorovskii I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. 5th ed., rev. and enl. Moscow, Drofa, 2006. 719 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Брычков Ю.А., Савищенко Н.В. Многомерные распределения Релея, Райса, Накагами и их применение в теории связи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 127–146.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.127-146>.

For citation: Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Multivariate Rayleigh, Rice, and Nakagami distributions and their applications in communication theory. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 127–146. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.127-146>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 511.61

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.147-161

ДИОФАНТОВО УРАВНЕНИЕ, ПОРОЖДЕННОЕ ПОДПОЛЕМ КРУГОВОГО ПОЛЯ

*И.Г. Галляутдинов, Е.Е. Лаврентьева*¹

¹*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Построены две формы $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ третьей степени, значения которых являются нормами чисел подполей степени три круговых полей K_{13} и K_{19} соответственно. С использованием закона разложения в круговом поле решены диофантовы уравнения $f(x, y, z) = a$ и $g(x, y, z) = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Доказаны утверждения, позволяющие по каноническому разложению на простые множители чисел a и b определить, имеют ли решения собственно уравнения $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$.

Ключевые слова: целое алгебраическое число, группа Галуа, норма алгебраического числа, главный идеал, фундаментальный базис, закон разложения в круговом поле, диофантово уравнение

Введение

Нахождение решений диофантовых уравнений является одной из востребованных задач математики, в частности, теории чисел [1]. С помощью диофантовых уравнений могут быть описаны различные научные процессы. Диофантовы уравнения встречаются не только в математике, но и в молекулярной физике, органической химии, компьютерных алгоритмах, экономике, теории вероятностей и др. Исходя из этого, вопрос нахождения решений диофантовых уравнений актуален с древних времен и остается таковым на сегодняшний день. Часто рассматриваются диофантовы уравнения первой степени, или линейные. При этом особый интерес вызывают различные способы, в том числе частные, нахождения решений таких уравнений. Так, один из них над евклидовым кольцом рассмотрен в [2]. Поиску решения некоторого класса диофантовых уравнений, основанному на глобальном обобщении цепной дроби, посвящена работа [3].

В настоящей статье мы рассмотрим поиск решений диофантовых уравнений, используя закон разложения в круговых полях.

Ранее мы рассмотрели решение диофантовых уравнений, используя однозначность разложения на множители в круговых полях K_7 и K_9 . В настоящей работе мы продолжили начатое исследование [4], работая с круговыми полями K_{13} и K_{19} . Отметим, что этой статьей завершается применение метода решения диофантовых уравнений с использованием круговых полей 3-й степени.

В [5, гл. 2] З.И. Борович и И.Р. Шафаревич изучили диофантовы уравнения, представимые в виде

$$f(x) = N(\gamma) = a, \quad (1)$$

где f – форма от переменных $x = (x_1, \dots, x_k)$, $\gamma = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$ – число из алгебраического поля P степени k . В случае, когда $f(x)$ – полная форма [5, с. 99], ими доказано, что за конечное число действий можно описать множество решений уравнения (1).

В [4] уравнение (1) изучено в случае, когда в качестве P использовано подполе степени 3 круговых полей K_7 или K_9 . В данной работе в качестве P взято подполе степени 3 круговых полей K_{13} или K_{19} .

Отметим, что в случае круговых полей с однозначным разложением на простые множители уравнение третьей степени порождается подполем только четырех круговых полей K_7, K_9, K_{13}, K_{19} .

Действительно, имеются всего 29 круговых полей с однозначным разложением на простые множители [5, с. 485]. Из них кроме указанных четырех полей по одному подполю степени 3 имеют следующие поля: $K_{21}, K_{27}, K_{28}, K_{35}, K_{36}, K_{45}, K_{84}$. Во всех этих полях в качестве подполя содержится поле K_7 или K_9 . Поэтому эти поля порождают то же самое (с точностью до эквивалентности) уравнение третьей степени, что и поле K_7 или K_9 .

Пусть n – положительное целое число и $\nu_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Многочлен $\Phi_n = \prod_{(s,n)=1} (x - \nu_n^s)$ называют n -круговым многочленом, а расширение $K_n = \mathbb{Q}(\nu_n)$ – n -круговым полем. K_n – нормальное расширение поля $\mathbb{Q}$, его степень $[K_n : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ и его группа Галуа $G(K_n/\mathbb{Q})$ изоморфна мультипликативной группе $U\mathbb{Z}_n$ классов вычетов, взаимно простых с n [6, с. 213].

Используем определение нормы элемента [7, с. 174]:

$$N_{E/P}(x) = \sigma_1(x)\sigma_2(x)\dots\sigma_k(x),$$

а также равенство, которое следует из приведенного определения:

$$N_{E/P}(xy) = N_{E/P}(x) N_{E/P}(y). \quad (2)$$

Элемент $N_{E/P}(x)$ неподвижен относительно $G(E/P)$, следовательно, содержится в P .

Пусть E – расширение Галуа конечной степени n поля K , F – расширение Галуа поля E конечной степени m . Для каждого элемента $x \in E$ справедливо равенство [7, с. 176]:

$$N_{F/K}(x) = (N_{E/K}(x))^m.$$

Комплексное число θ называется целым алгебраическим числом, если оно является корнем некоторого многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$.

Если E – расширение Галуа конечной степени k поля $\mathbb{Q}$, то все целые алгебраические числа θ , принадлежащие полю E , образуют кольцо.

Воспользуемся определением фундаментального базиса $\theta_1, \dots, \theta_k$ поля E над $\mathbb{Q}$ [5, с. 287].

Пусть E – расширение Галуа степени $[E : \mathbb{Q}] = k$, $G(E/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ и $\theta_1, \dots, \theta_k$ – фундаментальный базис E . Для произвольного целого числа $\gamma \in E$

$$\gamma = x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \dots + x_n \theta_n$$

вычислим его норму $N_E(\gamma)$. Имеем

$$N(\gamma) = \sigma_1(\gamma)\sigma_2(\gamma)\dots\sigma_k(\gamma) = \prod_{i=1}^k (\sigma_i(x_1\theta_1 + \dots + x_k\theta_k)).$$

Это равенство определяет некоторую форму $f(x_1, \dots, x_k)$, коэффициенты которой – симметрические многочлены относительно θ_i . Значит, коэффициенты этой формы будут целыми рациональными числами. Если $N_E(\gamma) = a \in \mathbb{Z}$, то получится уравнение

$$N_E(\gamma) = f(x_1, x_2, \dots, x_k) = a. \quad (3)$$

Равенство (3) означает, что решение уравнения $f(x_1, \dots, x_k) = a$ равносильно нахождению множества целых чисел поля E , норма которых в поле E равна a . Равенство (2) означает, что функция нормы обладает свойством мультипликативности. Поэтому, если $\gamma \in E$ – решение уравнения (3) и $\varepsilon \in E$ – целое число со свойством $N_E(\varepsilon) = 1$, то число $\delta = \varepsilon\gamma$ также решение уравнения (3).

Целые числа $\varepsilon \in E$ со свойством $N_E(\varepsilon) = 1$ содержатся во множестве целых чисел, для которых ε^{-1} также целое число. Такие числа ε называют единицами поля E .

Целое число $\varepsilon \in E$ является единицей поля E тогда и только тогда, когда $N_E(\varepsilon) = \pm 1$ [5, с. 106].

Единицы поля E образуют группу по умножению. Структуру этой группы описывает теорема Дирихле о единицах [5, с. 131]. Согласно этой теореме в поле E имеется конечное число единиц (их называют основными единицами поля E), через которые единственным образом выражается каждая единица поля E .

Два целых числа μ_1 и μ_2 поля E называются ассоциированными, если их отношение $\mu_1/\mu_2 = \varepsilon$ – единица поля E .

Отношение ассоциированности, примененное лишь решением уравнения (3), обладает свойством эквивалентности. Это означает, что все решения уравнения (3) разбиваются на классы ассоциированных решений. Отсюда следует, что все решения из одного класса получаются из одного решения умножением на единицы с нормой 1. Число таких классов решений конечно [5, с. 107].

Таким образом, задача о нахождении всех решений уравнения (3) разбивается на две следующие задачи:

- 1) найти основные единицы поля E ;
- 2) в поле E найти числа $\mu_1, \dots, \mu_s$ с нормой a так, чтобы они были попарно не ассоциированы и в то же время чтобы всякое $\mu \in E$ с нормой a было ассоциировано с одним из них, т.е. имело вид $\mu = \mu_i\varepsilon$, где $0 \leq i \leq s$ и ε – единица поля E .

1. Круговое поле K_{13} и его подполя

Приняты обозначения

$$u_k = \cos \frac{2k\pi}{13} + i \sin \frac{2k\pi}{13}, \quad u = u_1, \quad K_{13} = \mathbb{Q}(u), \quad \alpha_k = u_k + u_{13-k} \quad (k = 1, 3, 5, 7, 9, 11),$$

$$t_1 = \alpha_1 + \alpha_5, \quad t_3 = \alpha_3 + \alpha_{11}, \quad t_7 = \alpha_7 + \alpha_9.$$

Группа Галуа $G(K_{13}/\mathbb{Q})$ изоморфна мультипликативной группе $U\mathbb{Z}_{13}$ классов вычетов, взаимно простых с модулем 13. Автоморфизм, соответствующий классу $\overline{s}$,

обозначим через τ_s . Он действует по формуле $\tau_s(u_k) = u_{sk}$, $u_{13} = 1$. Группа $G(K_{13}/\mathbb{Q})$ циклическая и $G(K_{13}/\mathbb{Q}) = \langle \tau_2 \rangle$.

Подгруппу порядка s обозначим через H_s , а поле, инвариантное относительно этой подгруппы, – через F_l , где s и l связаны равенством $sl = \varphi(13) = 12$. В частности,

$$H_2 = \{\tau_1, \tau_{12}\}, \quad F_6 = \mathbb{Q}(u_1 + u_{12}) = \mathbb{Q}\left(2 \cos \frac{2\pi}{13}\right), \quad H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\},$$

$$F_3 = \mathbb{Q}(u_1 + u_5 + u_8 + u_{12}) = \mathbb{Q}(\alpha_1 + \alpha_5) = \mathbb{Q}(t_1).$$

Из включений $H_2 \subset H_4 \subset G(K_{13}/\mathbb{Q})$ следует включение полей $\mathbb{Q} \subset F_3 \subset F_6$.

Найдем группу Галуа $G(F_3/\mathbb{Q})$. Она изоморфна фактор-группе $G(K_{13}/\mathbb{Q})/H_4$ [6, с. 210]. Автоморфизм, соответствующий смежному классу $\tau_i H_4$, обозначим через σ_i и выясним, как действует этот автоморфизм. Смежные классы группы $G(K_{13}/\mathbb{Q})$ по подгруппе H_4 имеют вид

$$\tau_1 H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}, \quad \tau_3 H_4 = \{\tau_3, \tau_2, \tau_{11}, \tau_{10}\}, \quad \tau_7 H_4 = \{\tau_7, \tau_9, \tau_4, \tau_6\}.$$

Из того, что F_3 инвариантно относительно H_4 , следует, что для любого $\lambda \in F_3$ имеют место равенства: $\lambda = \tau_1(\lambda) = \tau_5(\lambda) = \tau_8(\lambda) = \tau_{12}(\lambda)$. Действуя на эти равенства автоморфизмами τ_3 и τ_7 соответственно, найдем $\tau_3(\lambda) = \tau_2(\lambda) = \tau_{11}(\lambda) = \tau_{10}(\lambda)$ и $\tau_7(\lambda) = \tau_9(\lambda) = \tau_4(\lambda) = \tau_6(\lambda)$. Эти равенства показывают, что все автоморфизмы из одного и того же смежного класса переводят всякий элемент $\lambda \in F_3$ в один и тот же элемент. Поэтому можно считать, что

$$\sigma_1(\lambda) = \tau_1(\lambda) = \tau_5(\lambda) = \tau_8(\lambda) = \tau_{12}(\lambda), \quad \sigma_3(\lambda) = \tau_3(\lambda) = \tau_2(\lambda) = \tau_{11}(\lambda) = \tau_{10}(\lambda),$$

$$\sigma_7(\lambda) = \tau_7(\lambda) = \tau_9(\lambda) = \tau_4(\lambda) = \tau_6(\lambda) \quad \forall \lambda \in F_3.$$

Таким образом, $G(F_3/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_7\}$.

Аналогичным образом можно построить группу автоморфизмов $G(F_k/\mathbb{Q})$ для любого подполя $F_k \subset K_{13}$. В частности, $G(F_6/\mathbb{Q}) = \{\tau_1, \tau_3, \tau_5, \tau_7, \tau_9, \tau_{11}\}$.

Нужно иметь в виду, что выполняются равенства $\tau_1(\lambda) = \tau_{12}(\lambda)$, $\tau_3(\lambda) = \tau_{10}(\lambda)$, $\tau_5(\lambda) = \tau_8(\lambda)$, $\tau_7(\lambda) = \tau_6(\lambda)$, $\tau_9(\lambda) = \tau_4(\lambda)$, $\tau_{11}(\lambda) = \tau_2(\lambda) \quad \forall \lambda \in F_6$.

Необходимо построить форму $f(x, y, z)$, каждое значение которой является нормой некоторого целого алгебраического числа из поля $F_3 = \mathbb{Q}(u_1 + u_5 + u_8 + u_{12})$. Для этого следует найти какой-нибудь фундаментальный базис поля F_3 .

Теорема 1. Числа $t_1 = \alpha_1 + \alpha_5$, $t_3 = \alpha_3 + \alpha_{11}$, $t_7 = \alpha_7 + \alpha_9$ составляют фундаментальный базис поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$.

Доказательство. Построим многочлен $\varphi(x) = (x - t_1)(x - t_3)(x - t_7)$. Так как $t_1 + t_3 + t_7 = -1$, $t_1 t_3 + t_1 t_7 + t_3 t_7 = -4$, $t_1 t_3 t_7 = -1$, то имеем $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$.

Так как $\varphi(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, то он – минимальный многочлен числа t_1 . Найдем дискриминант этого многочлена и поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$. Имеем $D(\varphi) = D(F_3) = 169 = 13^2$. Равенство дискриминантов минимального многочлена числа $t_1 \in F_3$ и поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$, в силу теоремы 7.1.7 работы [8, с. 146], означает, что числа $(1, t_1, t_1^2)$ составляют фундаментальный базис поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$.

Из равенств $t_1 + t_3 + t_7 = -1$ и $t_1^2 = -4t_1 - 3t_3 - 2t_7$ получим

$$(1, t_1, t_1^2) = (t_1, t_3, t_7)T, \quad T = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Так как $\det T = -1$ и $(1, t_1, t_1^2)$ – фундаментальный базис, то (t_1, t_3, t_7) также фундаментальный базис поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$. Теорема 1 доказана.

2. Диофантово уравнение, порожденное подполем $F_3 \subset K_{13}$

Пусть $\gamma \in F_3$ – целое число и $\gamma = xt_1 + yt_3 + zt_7$. Так как (t_1, t_3, t_7) также фундаментальный базис поля F_3 , то x, y, z – целые рациональные числа. Найдем норму $N_{F_3}(\gamma)$. Имеем

$$N_{F_3}(\gamma) = \tau_1(\gamma)\tau_3(\gamma)\tau_7(\gamma) = (xt_1 + yt_3 + zt_7)(xt_3 + yt_7 + zt_1)(xt_7 + yt_1 + zt_3).$$

Это равенство определяет норму $f(x, y, z)$, коэффициенты которой – симметрические многочлены относительно t_1, t_3, t_7 , и их можно вычислить. Найдем

$$f(x, y, z) = -(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x^2y + y^2z + z^2x) + 10(x^2z + y^2x + z^2y) - 19xyz. \quad (4)$$

Таким образом, в случае $E = F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$ уравнение (3) примет вид

$$N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = a, \quad (5)$$

где $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4).

Решение уравнения (5) нужно начинать с описания множества единиц с нормой 1 поля F_3 . Базисные элементы t_1, t_3, t_7 являются корнями многочлена $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$ и имеют норму $N_{F_3}(t_i) = -1$ ($i = 1, 3, 7$).

По теореме Дирихле о единицах в поле F_3 должны быть две основные единицы. В работе [8, с. 377] приведена таблица основных единиц тридцати вполне вещественных полей степени 3. Среди них имеется и поле F_3 с дискриминантом $D(F_3) = 169$. Согласно этой таблице основными единицами поля F_3 являются числа $\delta_1 = 2 + 2\theta - \theta^2$ и $\delta_2 = -\theta$, где θ – корень многочлена $\varphi_1(x) = -\varphi(-x) = x^3 - x^2 - 4x - 1$. Если перейти к нашим обозначениям, то $\delta_2 = -\theta = t_1 = \alpha_1 + \alpha_5$ и $\delta_1 = t_3 = \alpha_3 + \alpha_{11}$. Нормы этих единиц равны (-1) . При решении диофантовых уравнений нужны единицы с нормой $+1$. Поэтому будем считать, что основными единицами поля F_3 являются числа $\varepsilon_1 = -t_1$, $\varepsilon_2 = -t_3$.

Далее, нужно найти полный набор неассоциированных решений уравнения (5) в зависимости от правой части a .

Сначала предположим, что $a = p$ – простое число. В этом случае наличие решения уравнения (5) зависит от порядка числа p по модулю 13. Порядок s числа p по модулю 13 является делителем $\varphi(13) = 12$. Значит, порядок s числа p по модулю 13 равен одному из чисел 1, 2, 3, 4, 6, 12. Рассмотрим все эти случаи.

Случай 1. Порядок простого числа p по модулю 13 равен 1, т. е. $p \equiv 1 \pmod{13}$ и p имеет вид $p = 13k + 1$.

K_{13} – круговое поле с однозначным разложением на множители, и все идеалы его кольца целых чисел главные. Поэтому согласно закону разложения в круговом поле [5, с. 358] или [1, с. 241] имеем $(p) = (\gamma_1)(\gamma_2) \dots (\gamma_{12})$, где γ_i – попарно неассоциированные элементы поля K_{13} и норма $N_{K_{13}}((\gamma_i)) = p$ ($1 \leq i \leq 12$). Но норма главного идеала с точностью до знака равна норме порождающего элемента [1, с. 250]. Поэтому для любого $\gamma_i = \gamma$ имеем

$$N_{K_{13}}((\gamma)) = |N_{K_{13}}(\gamma)| = |\tau_1(\gamma)\tau_2(\gamma) \dots \tau_{12}(\gamma)| = p. \quad (6)$$

Положим $\lambda_1 = \tau_1(\gamma)\tau_5(\gamma)\tau_8(\gamma)\tau_{12}(\gamma)$, $\lambda_3 = \tau_3(\gamma)\tau_2(\gamma)\tau_{11}(\gamma)\tau_{10}(\gamma)$, $\lambda_7 = \tau_7(\gamma)\tau_9(\gamma)\tau_4(\gamma)\tau_6(\gamma)$. Можно убедиться, что автоморфизмы подгруппы $H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}$ оставляют числа $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_7$ на месте. Значит, $\lambda_i \in F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$, $i = 1, 3, 7$.

Так как $G(F_3/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_3, \sigma_7\}$ и $\sigma_1(\lambda_1) = \tau_1(\gamma)\tau_5(\gamma)\tau_8(\gamma)\tau_{12}(\gamma) = \lambda_1$, $\sigma_3(\lambda_1) = \tau_3(\gamma)\tau_2(\gamma)\tau_{11}(\gamma)\tau_{10}(\gamma) = \lambda_3$, $\sigma_7(\lambda_1) = \tau_7(\gamma)\tau_9(\gamma)\tau_4(\gamma)\tau_6(\gamma) = \lambda_7$, то равенство (6) примет вид

$$N_{K_{13}}((\gamma)) = |N_{K_{13}}(\gamma)| = |\lambda_1\lambda_3\lambda_7| = |\sigma_1(\lambda_1)\sigma_3(\lambda_1)\sigma_7(\lambda_1)| = |N_{F_3}(\lambda_1)| = p.$$

Аналогично получим равенства $|N_{F_3}(\lambda_3)| = p$ и $|N_{F_3}(\lambda_7)| = p$. При этом из того, что γ_i ($1 \leq i \leq 12$) попарно не ассоциированы, следует, что $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_7$ также попарно не ассоциированы. Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4) и $p = 13k + 1$ – простое число. Тогда уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = p$ имеет решение $\lambda \in F_3$. Полный набор его неассоциированных решений состоит из чисел $\sigma_1(\lambda), \sigma_3(\lambda), \sigma_7(\lambda)$.

Случай 2. Порядок простого числа p по модулю 13 равен 2, т.е. $p^2 \equiv 1 \pmod{13}$. Это означает, что p имеет вид $p = 13k + 12$. По закону разложения в круговом поле имеем $(p) = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ и $N_{K_{13}}(A_i) = p^2$, $1 \leq i \leq 6$.

Попарно различные простые идеалы $A_i \in K_{13}$, согласно следствию 2 работы [9, с. 72], являются идеалами кольца целых чисел подполя степени $\frac{1}{2}(\varphi(13)) = 6$, т.е. поля F_6 . Из того, что K_{13} – поле с однозначным разложением на множители, следует, что эти идеалы A_i являются главными. Значит, имеются такие попарно неассоциированные целые числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ поля F_6 , что $(p) = (\gamma_1)(\gamma_2)(\gamma_3)(\gamma_4)(\gamma_5)(\gamma_6)$ и $N_{K_{13}}((\gamma_i)) = p^2$, $1 \leq i \leq 6$.

Из предложения 14.1.3 [1, с. 250] следует, что норма главного идеала с точностью до знака совпадает с нормой порождающего элемента. Поэтому, если (γ) – любой идеал из разложения (p) , то $N_{K_{13}}((\gamma)) = |N_{K_{13}}(\gamma)| = p^2$. Но $\gamma \in F_6$. Поэтому согласно предложению [7, с. 176] имеем $|N_{K_{13}}(\gamma)| = (N_{F_6}(\gamma))^2 = p^2$ или

$$|N_{F_6}(\gamma)| = |\tau_1(\gamma)\tau_3(\gamma)\tau_5(\gamma)\tau_7(\gamma)\tau_9(\gamma)\tau_{11}(\gamma)| = p. \quad (7)$$

Введем обозначения $\delta_1 = \tau_1(\gamma)\tau_5(\gamma)$, $\delta_3 = \tau_3(\gamma)\tau_{11}(\gamma)$, $\delta_7 = \tau_7(\gamma)\tau_9(\gamma)$ и вычислим $N_{F_3}(\delta_1)$. Так как

$$\sigma_1(\delta_1) = \tau_1(\gamma)\tau_5(\gamma) = \delta_1, \quad \sigma_3(\delta_1) = \tau_3(\gamma)\tau_{11}(\gamma) = \delta_3, \quad \sigma_7(\delta_1) = \tau_7(\gamma)\tau_9(\gamma) = \delta_7,$$

то равенство (7) примет вид $|N_{F_6}(\gamma)| = |N_{F_3}(\delta_1)| = p$. Аналогично можно получить равенства $|N_{F_3}(\delta_3)| = p$ и $|N_{F_3}(\delta_7)| = p$. Из того, что множители p из разложения (7) попарно не ассоциированы, следует, что числа $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_7$ также попарно не ассоциированы. Таким образом, доказана

Теорема 3. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4) и $p = 13k + 12$ – простое число. Тогда уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = p$ имеет решение $\delta \in F_3$ и числа $\sigma_1(\delta), \sigma_3(\delta), \sigma_7(\delta)$ составляют полный набор его неассоциированных решений.

Случай 3. Порядок простого числа p по модулю 13 равен 4, т.е. $p^4 \equiv 1 \pmod{13}$.

Этому условию удовлетворяют простые числа видов $p = 13k + 5$ и $p = 13k + 8$. По закону разложения в круговом поле [5, с. 358] или [1, с. 241] имеем $(p) = A_1 A_2 A_3$, где A_i – попарно различные простые идеалы и $N_{K_{13}}(A_i) = p^4$, $i = 1, 2, 3$. По следствию 2 работы [9, с. 72] A_1, A_2, A_3 являются идеалами кольца целых чисел поля степени $\frac{1}{4}(\varphi(13)) = 3$, т.е. поля $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$. Из того, что K_{13} – поле с однозначным разложением, следует, что эти идеалы A_i являются главными. Это означает, что имеются такие попарно неассоциированные целые числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F_3$, что $(p) = (\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3)$ и $N_{K_{13}}((\lambda_i)) = p^4$, $i = 1, 2, 3$.

Но норма главного идеала с точностью до знака совпадает с нормой порождаемого элемента [1, с. 250], поэтому, если (λ) – любой из идеалов $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3)$, то $N_{K_{13}}((\lambda)) = |N_{K_{13}}(\lambda)| = p^4$. Так как $\lambda \in F_3$, то согласно предложению [7, с. 176] имеем $|N_{K_{13}}(\lambda)| = (N_{F_5}(\lambda))^4 = p^4$. Отсюда $|N_{F_3}(\lambda)| = |\sigma_1(\lambda)\sigma_3(\lambda)\sigma_7(\lambda)| = p$. Так как λ – любое из попарно неассоциированных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, то доказана

Теорема 4. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4) и $p = 13k + 5$ или $p = 13k + 8$ – простое число. Тогда уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = p$ имеет решение $\delta \in F_3$ и числа $\delta_1 = \sigma_1(\delta)$, $\delta_2 = \sigma_3(\delta)$, $\delta_3 = \sigma_7(\delta)$ составляют полный набор его неассоциированных решений.

Случай 4. Порядок простого числа p по модулю 13 равен 3, т.е. $p^3 \equiv 1 \pmod{13}$. Такие числа имеют вид $p = 13k + 3$ или $p = 13k + 9$. Можно установить, что простые числа порядка 3 разлагаются на 4 простых множителя в подполе F_4 степени 4. Но $F_4 \cap F_3 = \mathbb{Q}$. Это означает, что простые числа видов $p = 13k + 3$ или $p = 13k + 9$ в поле $F_3 = \mathbb{Q}(t)$ остаются простыми и уравнение $F_3(\gamma) = f(x, y, z) = p$ не имеет решения.

Случай 5. Простое число p имеет порядок 6, т.е. $p^6 \equiv 1 \pmod{13}$. Это означает, что p имеет вид $p = 13k + 4$ или $p = 13k + 10$. Повторив рассуждения для случая 4, убедимся, что и в случае 5 в поле F_3 нет числа с нормой p .

Случай 6. Порядок простого числа p равен 12, т.е. $p^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Такие числа имеют вид $p = 13k + t$, $t = 2, 6, 7, 11$. По закону разложения такие числа остаются простыми в поле K_{13} и всех его подполях.

Объединив итоги случаев 4, 5, 6, убедимся, что имеет место

Теорема 5. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4) и p – простое число вида $p = 13k + t$, $t = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$. Тогда уравнение $N_{K_{13}}(\gamma) = f(x, y, z) = p$ не имеет решения.

Теорема 6. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4), p – простое число вида $p = 13k + s$ ($1 \leq s \leq 12$), $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$ и $H_4 \subset G(K_{13}/\mathbb{Q})$ – подгруппа автоморфизмов, относительно которой инвариантно поле F_3 . Уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = p$ имеет решение тогда и только тогда, когда автоморфизм $\tau_s \in H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}$, т.е. $s \in \{1, 5, 8, 12\}$.

Доказательство. Если $p = 13k + 1$, то утверждение следует из теоремы 2, если $p = 13k + 5$ или $p = 13k + 8$, то – из теоремы 4, если $p = 13k + 12$, то – из теоремы 3. Если же $p = 13k + t$, $t = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$, то в силу теоремы 5 наше уравнение не имеет решения. Теорема 6 доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда в правой части уравнения стоит простое число $p = 13$. В этом случае согласно предложению 13.2.7 работы [1, с. 242] имеется главный идеал (λ) такой, что $(13) = (\lambda)^{12}$ и $N_{K_{13}}((\lambda)) = 13$. Отсюда по предложению 14.1.2 работы [1, с. 250] получим

$$N_{K_{13}}((\lambda)) = |N_{K_{13}}(\lambda)| = |\tau_1(\lambda)\tau_2(\lambda) \dots \tau_{12}(\lambda)| = 13.$$

Введем обозначения

$$\sigma_1(\lambda) = \tau_1(\lambda)\tau_5(\lambda)\tau_8(\lambda)\tau_{12}(\lambda), \quad \sigma_3(\lambda) = \tau_3(\lambda)\tau_{11}(\lambda)\tau_2(\lambda)\tau_{10}(\lambda),$$

$$\sigma_7(\lambda) = \tau_7(\lambda)\tau_9(\lambda)\tau_4(\lambda)\tau_6(\lambda).$$

Отсюда, повторив рассуждения, проведенные при изучении случая 1, найдем

$$|\delta_1 \delta_3 \delta_7| = |\sigma_1(\delta_1) \sigma_3(\delta_1) \sigma_7(\delta_1)| = |N_{F_3}(\delta_1)| = 13.$$

Числа $\sigma_1(\delta_1), \sigma_3(\delta_1), \sigma_7(\delta_1)$ порождают один и тот же идеал (δ_1) . Поэтому имеем $(13) = (\delta_1)^3$. Это означает, что доказана

Теорема 7. Пусть $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4). Тогда уравнение

$$N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = 13 \quad (8)$$

имеет решение $\delta \in F_3$ и полный набор неассоциированных решений состоит из одного числа δ .

Запишем формулу общего решения уравнения (8). Из равенства $f(x, -1, 0) = -x^3 + 3x^2 + 10x + 1$ найдем $f(1, -1, 0) = 13$. Значит, $\delta = t_1 - t_3$ – решение и $N_{F_3}(\delta) = (t_1 - t_3)(t_3 - t_7)(t_7 - t_1) = 13$. Указанные три делителя числа 13 должны быть ассоциированы. Действительно, если $\delta_1 = t_1 - t_3$, $\delta_2 = t_3 - t_7$, $\delta_3 = t_7 - t_1$, $\varepsilon_1 = -t_1$, $\varepsilon_2 = -t_3$, то $\delta_1 = \delta_2 \varepsilon_1$, $\delta_2 = \delta_3 \varepsilon_2$. Отсюда следует, что $(\delta_1) = (\delta_2) = (\delta_3)$ и $(13) = (\delta_1)^3$. Общее решение уравнения (8) имеет вид $\gamma_{k,l} = (t_1 - t_3) \varepsilon_1^k \varepsilon_2^l$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_1 = -t_1$, $\varepsilon_2 = -t_3$.

Перейдем к изучению общего случая, когда в правой части уравнения (5) стоит произвольное целое рациональное число $a \neq 0$.

Определение 1. Целое рациональное число $a \neq 0$ будем называть нормой, если уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = a$ имеет решение.

Лемма 1. Если a_1 и a_2 являются нормами, то $a_1 a_2$ – также норма.

Доказательство. Из условий следует, что имеются такие $\delta_1 \in F_3$, $\delta_2 \in F_3$, что $N_{F_3}(\delta_1) = a_1$, $N_{F_3}(\delta_2) = a_2$. Тогда $N_{F_3}(\delta_1 \delta_2) = N_{F_3}(\delta_1) N_{F_3}(\delta_2) = a_1 a_2$. Это означает, что уравнение $f(x, y, z) = a_1 a_2$ имеет решение $\gamma = \delta_1 \delta_2$, которое находится как произведение решений уравнений $f(x, y, z) = a_1$ и $f(x, y, z) = a_2$. Лемма 1 доказана.

Определение 2. Норму a назовем первичной, если она является нормой простого элемента поля F_3 .

Лемма 2. Первичными нормами являются: – все простые числа видов $p = 13k + t$, $t = 1, 5, 8, 12$; – простое число 13; – числа p^3 , где p – инертное в F_3 простое число, т. е. $p = 13k + t$, $t = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$.

Доказательство. То, что простые числа вида $p = 13k + t$, $t = 1, 5, 8, 12$, – первичные нормы, вытекает из теорем 2, 4, 3 соответственно. Из теоремы 7 следует, что простое число $p = 13$ также первичная норма. Пусть теперь p – инертное в F_3 простое число, т. е. $p = 13k + t$, $t = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11$. Тогда в силу теоремы 5 число p нормой не является. Вычислим норму самого простого в F_3 числа p . Имеем $N_{F_3}(p) = \sigma_1(p) \sigma_3(p) \sigma_7(p) = p^3$.

Таким образом, p^3 – первичная норма. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть a – норма, а p – инертное в F_3 простое число. Тогда, если a делится на p , то a делится на p^3 .

Доказательство. По условию леммы простое число p остается простым и в поле $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$. Так как a – норма, то имеется такое целое число $\lambda \in F_3$, что $N_{F_3}(\lambda) = \sigma_1(\lambda) \sigma_3(\lambda) \sigma_7(\lambda) = a$. Так как a и p – простые числа, то, по крайней

мере, один из трех множителей $\sigma_i(\lambda)$ делится на p . Пусть $\sigma_3(\lambda) = p$ и $\sigma_3(\lambda) = p\mu$, $\mu \in F_3$ – целое число. Применив к равенству $\sigma_3(\lambda) = p\mu$ автоморфизм $\sigma_3^{-1} = \sigma_7$, найдем $\lambda = p\sigma_7(\mu)$. Здесь $\sigma_7(\mu)$ – целое число, поэтому λ делится на p . Тогда получим $N_{F_3}(\lambda) = p^3\sigma_1(\mu)\sigma_3(\mu)\sigma_7(\mu) = a$, т. е. a делится на p^3 . Лемма 3 доказана.

Объединив леммы 1–3, получим следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$, $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4) и $a \neq 0$ – целое рациональное число. Диофантово уравнение $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = a$ имеет решение тогда и только тогда, когда степень инертного в F_3 простого числа, входящего в каноническое разложение числа a , делится на 3.

Приведем примеры уравнений вида $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = a$, где $f(x, y, z)$ – форма из равенства (4). Требуется установить, имеет ли данное уравнение решение в поле $F_3 = \mathbb{Q}(t_1)$. Если имеет, то нужно указать полный набор его неассоциированных решений.

Примеры уравнений.

2.1. $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = 5$.

2.2. $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = 29$.

2.3. $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = 53$.

2.4. $N_{F_3}(\gamma) = f(x, y, z) = 200$.

Решения.

Пример 2.1. В правой части этого уравнения простое число $p = 5 = 13 \cdot 0 + 5$. Автоморфизм $\tau_5 \in H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}$. Согласно теореме 6 данное уравнение имеет решение. Действительно, $f(x, 1, 0) = -x^3 - 3x^2 + 10x - 1$ и $f(1, 1, 0) = 5$. Значит, $\delta = t_1 + t_3$ – решение этого уравнения и числа $\delta_1 = \sigma_1(\delta) = t_1 + t_3$, $\delta_2 = \sigma_3(\delta) = t_3 + t_7$, $\delta_3 = \sigma_7(\delta) = t_7 + t_1$ составляют полный набор его неассоциированных решений.

Пример 2.2. В правой части уравнения простое число $p = 29 = 13 \cdot 2 + 3$. Автоморфизм τ_3 не входит в подгруппу $H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}$. По теореме 6 данное уравнение решения не имеет.

Пример 2.3. В правой части уравнения простое число $p = 53 = 13 \cdot 4 + 1$. Автоморфизм $\tau_1 \in H_4 = \{\tau_1, \tau_5, \tau_8, \tau_{12}\}$, и уравнение имеет решение. Действительно, $f(x, -2, 0) = -x^3 + 6x^2 + 40x + 8$ и $f(1, -2, 0) = 53$, т. е. $\lambda = t_1 - 2t_3$ – решение, а числа $\lambda_1 = \sigma_1(\lambda) = t_1 - 2t_3$, $\lambda_2 = \sigma_2(\lambda) = t_3 - 2t_7$, $\lambda_3 = \sigma_7(\lambda) = t_7 - 2t_1$ составляют полный набор его неассоциированных решений.

Пример 2.4. В правой части уравнения составное число $a = 200 = 2^3 \cdot 5^2$. В его разложение входит инертное в поле F_3 простое число $p = 2$, и его степень делится на 3. По теореме 8 данное уравнение имеет решение.

Число $a = 2^3 \cdot 5 \cdot 5$ представляется в виде произведения трех первичных норм 2^3 , 5 и 5. Полный набор неассоциированных решений нашего уравнения находится как произведение полных наборов соответствующих уравнений. В примере 2.1 показано, что полный набор неассоциированных решений уравнения $f(x, y, z) = 5$ состоит из чисел $\delta_1 = t_1 + t_3$, $\delta_2 = t_3 + t_7$, $\delta_3 = t_7 + t_1$, а все решения уравнения $f(x, y, z) = 2^3$ ассоциированы с числом $p = 2$. Поэтому полный набор неассоциированных решений уравнения $f(x, y, z) = 200$ состоит из следующих шести чисел: $\lambda_1 = 2\delta_1^2 = -8t_1 - 6t_3 - 6t_7$, $\lambda_2 = 2\delta_2^2 = -6t_1 - 8t_3 - 6t_7$, $\lambda_3 = 2\delta_3^2 = -6t_1 - 6t_3 - 8t_7$, $\lambda_4 = 2\delta_1\delta_2 = 4t_1 + 2t_7$, $\lambda_5 = 2\delta_1\delta_3 = 2t_3 + 4t_7$, $\lambda_6 = 2\delta_2\delta_3 = 2t_1 + 4t_3$.

3. Круговое поле K_{19} и его подполя

Приняты обозначения

$$\nu_k = \cos \frac{2k\pi}{19} + i \sin \frac{2k\pi}{19}, \quad \nu = \nu_1, \quad K_{19} = \mathbb{Q}(\nu), \quad \beta_k = \nu_k + \nu_{19-k} \quad (k - \text{нечетно}),$$

$$s_1 = \beta_1 + \beta_7 + \beta_{11}, \quad s_3 = \beta_3 + \beta_5 + \beta_{17}, \quad s_9 = \beta_9 + \beta_{13} + \beta_{15}.$$

Группа Галуа $G(K_{19}/\mathbb{Q})$ изоморфна мультипликативной группе $U\mathbb{Z}_{19}$ классов вычетов, взаимно простых с модулем 19. Автоморфизм, соответствующий классу $\bar{s}$, обозначим через τ_s . Он действует по формуле $\tau_s(\nu_k) = \nu_{sk}$, $\nu_{19} = 1$. Группа $U\mathbb{Z}_{19}$ циклическая, и $U\mathbb{Z}_{19} = (\mathbb{Z})$. Отсюда следует, что $G(K_{19}/\mathbb{Q}) = (\tau_2)$.

Подгруппу порядка s обозначим через M_s , а поле, инвариантное относительно этой подгруппы, — через E_l , где s и l связаны равенством $sl = \varphi(19) = 18$.

В частности, имеем $M_2 = (\tau_{18}) = \{\tau_{18}, \tau_1\}$, $M_3 = (\tau_7) = \{\tau_7, \tau_{11}, \tau_1\}$, $M_6 = (\tau_8) = \{\tau_8, \tau_7, \tau_{18}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_1\}$.

Из включений $M_2 \subset M_6$ и $M_3 \subset M_6$ по теории Галуа следуют включения $E_3 \subset E_9$ и $E_3 \subset E_6$.

Группа Галуа $G(E_3/\mathbb{Q})$ изоморфна фактор-группе $G(K_{19}/\mathbb{Q})/M_6$, смежные классы которой имеют вид

$$\tau_1 M_6 = \{\tau_1, \tau_7, \tau_8, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{18}\}, \quad \tau_3 M_6 = \{\tau_3, \tau_2, \tau_5, \tau_{14}, \tau_{17}, \tau_{16}\},$$

$$\tau_9 M_6 = \{\tau_9, \tau_6, \tau_{15}, \tau_4, \tau_{13}, \tau_{10}\}.$$

Повторив рассуждения, приведенные в п. 1 при изучении подполей поля K_{13} , можно убедиться, что все автоморфизмы смежного класса $\tau_i M_6$ ($i = 1, 3, 9$) любой элемент $\gamma \in E_3$ переводят в один и тот же элемент. Имея в виду этот факт, можно считать, что $G(E_3/\mathbb{Q}) \cong \{\tau_1, \tau_3, \tau_6\}$.

Найдем теперь минимальный многочлен числа $s_1 = \beta_1 + \beta_7 + \beta_{11}$. Сопряженными к s_1 являются числа

$$\tau_1(s_1) = s_1 = \beta_1 + \beta_7 + \beta_{11}, \quad \tau_3(s_1) = \beta_3 + \beta_{17} + \beta_5 = s_3,$$

$$\tau_9(s_1) = \beta_9 + \beta_{13} + \beta_{15} = s_9.$$

Многочлен минимальной степени с рациональными коэффициентами с корнем s_1 имеет вид $\psi(x) = (x - s_1)(x - s_3)(x - s_9)$. Так как $s_1 + s_3 + s_9 = -1$, $s_1 s_3 + s_1 s_9 + s_3 s_9 = -6$, $s_1 s_3 s_9 = 7$, то $\psi(x) = x^3 + x^2 - 6x - 7$.

Многочлен $\psi(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, и он — минимальный многочлен числа $s_1 = \beta_1 + \beta_7 + \beta_{11}$. Это означает, что s_1 — алгебраическое число степени 3. Можно убедиться, что все автоморфизмы подгруппы M_6 оставляют на месте число $s_1 = \beta_1 + \beta_7 + \beta_{11} = \nu_1 + \nu_7 + \nu_8 + \nu_{11} + \nu_{12} + \nu_{18}$, поэтому $s_1 \in E_3$ и s_1 можно принять в качестве примитивного элемента поля E_3 .

Таким образом, установлено, что поле, инвариантное относительно группы $M_6 = \{\tau_1, \tau_7, \tau_8, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{18}\}$, — это $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$.

Теорема 9. *Корни многочлена $\psi(x)$, т. е. числа s_1, s_3, s_9 , составляют фундаментальный базис поля $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$.*

Доказательство. Дискриминант $D(\psi)$ многочлена $\psi(x)$ равен дискриминанту $D(E_3)$ поля E_3 ; $D(\psi) = D(E_3) = 361 = 19^2$. Отсюда в силу теоремы 7.1.7 работы [8, с. 146] получим, что числа $(1, s_1, s_1^2)$ составляют фундаментальный базис поля

$E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$. Имеют место равенства $1 = -s_1 - s_3 - s_9$, $s_1 = s_1$, $s_1^2 = -4s_1 - 5s_3 - 4s_9$ или в матричной форме $(1, s_1, s_1^2) = (s_1, s_3, s_9)T$, где

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \det T = 1.$$

Значит, (s_1, s_3, s_9) наряду с базисом $(1, s_1, s_1^2)$ также является фундаментальным базисом поля $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$. Теорема 9 доказана.

4. Диофантово уравнение, порожденное подполем $E_3 \subset K_{19}$

Пусть $\gamma \in E_3$ – целое число и $\gamma = xs_1 + ys_3 + zs_9$. Так как (s_1, s_3, s_9) – фундаментальный базис поля E_3 , то x, y, z – целые рациональные числа. Вычислим норму $N_{E_3}(\gamma)$. Имеем $N_{E_3}(\gamma) = \tau_1(\gamma)\tau_3(\gamma)\tau_9(\gamma) = (xs_1 + ys_3 + zs_9)(xs_3 + ys_9 + zs_1)(xs_9 + ys_1 + zs_3)$. Учитывая, что s_1, s_3, s_9 – корни многочлена $\psi(x) = x^3 + x^2 - 6x - 7$, найдем

$$g(x, y, z) = 7(x^3 + y^3 + z^3) - 17(x^2y + y^2z + z^2x) + 2(x^2z + y^2x + z^2y) + 23xyz. \quad (9)$$

Таким образом, в случае $E = E_3$ уравнение (3) примет вид

$$N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = a, \quad (10)$$

где $g(x, y, z)$ – форма из равенства (9).

Для решения уравнения (10) нужны основные единицы поля E_3 с нормой $+1$.

В работе [8, с. 377] приведена таблица основных единиц тридцати вполне вещественных полей степени 3. Среди них имеется и поле E_3 с дискриминантом 361. Примитивный элемент этого поля в таблице обозначен через θ , и он является корнем многочлена $\psi(x) = x^3 + x^2 - 6x - 7$. У нас корни этого многочлена обозначены через s_1, s_3, s_9 . Поэтому имеем $\theta = t_1$. В таблице первая основная единица имеет вид $e_1 = 4 + \theta - \theta^2$. В наших обозначениях $e = t_1 + t_3$. Норма $N_{E_3}(e_1) = -1$. Поэтому нужно считать, что первая основная единица поля E_3 имеет вид $\varepsilon = -e_1 = -t_1 - t_3$.

Вторая основная единица по упомянутой таблице имеет вид $e_2 = 5 - \theta^2 = -s_1 - s_9$. Норма $N_{E_3}(e_2) = 1$. Поэтому вторая основная единица поля E_3 имеет вид $\varepsilon_2 = e_2 = -t_1 - t_9$.

Основные единицы поля E_3 выбраны: $\varepsilon_1 = -t_1 - t_3$, $\varepsilon_2 = -t_1 - t_9$. Далее нужно найти полный набор неассоциированных решений уравнения (10) в зависимости от правой части a . Это делается в точности по той же схеме, что и при решении уравнения (5) в поле $F_3 \subset K_{13}$. Поэтому ограничимся тем, что сформулируем две итоговые теоремы и приведем примеры.

Теорема 10. Пусть $g(x, y, z)$ – форма из равенства (9), p – простое число вида $p = 19k + t$ ($1 \leq t \leq 18$), $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$ и $M_6 \subset G(K_{19}/\mathbb{Q})$ – подгруппа автоморфизмов, относительно которой инвариантно поле E_3 . Уравнение

$$N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = p \quad (11)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда автоморфизм $\tau_t \in M_6 = \{\tau_1, \tau_7, \tau_8, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{18}\}$, т. е. $t = 1, 7, 8, 11, 12, 18$.

По этой теореме, если простое число p имеет вид

$$p = 19k + t, \quad t = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, \quad (12)$$

то уравнение (11) не имеет решений. Это означает, что простые числа вида (12) остаются простыми и в поле $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$. Поэтому их называют инертными в поле E_3 .

Теорема 11. Пусть $g(x, y, z)$ – форма из равенства (9) и $a \neq 0$ – целое рациональное число. Уравнение $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = a$ имеет решение тогда и только тогда, когда степень инертного в E_3 простого числа, входящего в разложение числа a , делится на 3.

Приведем примеры уравнений вида $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = a$, где $g(x, y, z)$ – форма из равенства (9). Требуется установить, имеет ли данное уравнение решение в поле $E_3 = \mathbb{Q}(s_1)$. Если имеет, то нужно указать полный набор его неассоциированных решений.

Примеры уравнений.

4.1. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 7$.

4.2. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 37$.

4.3. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 3$.

4.4. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 999$.

4.5. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 49$.

4.6. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 259$.

Решения.

Пример 4.1. В правой части этого уравнения простое число $7 = 19 \cdot 0 + 7$ и автоморфизм $\tau_7 \in M_6 = \{\tau_1, \tau_7, \tau_8, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{18}\}$. Согласно теореме 10 данное уравнение имеет решение. Действительно, $g(x, 0, 0) = 7x^3$ и $g(1, 0, 0) = 7$. Значит, $\delta = s_1$ – решение уравнения 4.1, а числа $\delta_1 = \tau_1(\delta) = s_1$, $\delta_2 = \tau_3(\delta) = s_3$, $\delta_3 = \tau_9(\delta) = s_9$ – полный набор его неассоциированных решений. Умножив эти решения на любую степень основной единицы, можно получить другие решения, ассоциированные с ними. Например,

$$\delta_1 \varepsilon_1 = s_1(-s_1 - s_3) = 3s_1 + 3s_3 + s_9, \quad g(3, 3, 1) = 7 \text{ или}$$

$$\delta_2 \varepsilon_1 = s_3(-s_1 - s_3) = 3s_1 + 2s_3 + 2s_9, \quad g(3, 2, 2) = 7 \text{ и т. д.}$$

Пример 4.2. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 37$. Из $37 = 19 \cdot 1 + 18$ и $\tau_{18} \in M_6$ следует, что решение имеется. Действительно, $f(x, 2, 0) = 7x^3 - 34x^2 + 8x + 56$ и $f(1, 2, 0) = 37$. Решением является число $\lambda = s_1 + 2s_3$, а числа $\lambda_1 = \tau_1(\lambda) = s_1 + 2s_3$, $\lambda_2 = \tau_3(\lambda) = s_3 + 2s_9$, $\lambda_3 = \tau_9(\lambda) = s_9 + 2s_1$ составляют полный набор неассоциированных решений.

Пример 4.3. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 3$.

Из теоремы 10 следует, что это уравнение не имеет решений.

Пример 4.4. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 999$.

В разложение числа $a = 999 = 3^3 \cdot 37$ входит одно инертное в E_3 простое число $p = 3$, и его степень делится на 3. По теореме 11 это уравнение имеет решение, и полный набор его неассоциированных решений находится как произведение решений уравнений $g(x, y, z) = 3^3$ и $g(x, y, z) = 37$. В примере 4.2 указано, что числа $\lambda_1 = s_1 + 2s_3$, $\lambda_2 = s_3 + 2s_9$, $\lambda_3 = s_9 + 2s_1$ составляют полный набор неассоциированных решений уравнения $g(x, y, z) = 37$. Значит, числа $3\lambda_1 = 3s_1 + 6s_3$, $3\lambda_2 = 3s_3 + 6s_9$, $3\lambda_3 = 3s_9 + 6s_1$ составляют полный набор неассоциированных решений уравнения $g(x, y, z) = 999$.

Пример 4.5. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 49$.

В разложении числа $a = 49 = 7^2$ нет инертного в E_3 простого числа. По теореме 11 это уравнение имеет решение, и это решение находится как произведение двух решений уравнения 4.1, т. е. чисел $\delta_1 = s_1$, $\delta_2 = s_3$, $\delta_3 = s_9$. Поэтому полный

набор неассоциированных решений уравнения $g(x, y, z) = 49$ состоит из следующих шести чисел:

$$s_1^2 = -4s_1 - 5s_3 - 4s_9, \quad s_3^2 = -4s_1 - 4s_3 - 5s_9, \quad s_9^2 = -5s_1 - 4s_3 - 4s_9,$$

$$s_1s_3 = s_1 + 2s_3 + 3s_9, \quad s_1s_9 = 2s_1 + 3s_3 + s_9, \quad s_3s_9 = 3s_1 + s_3 + 2s_9.$$

Пример 4.6. $N_{E_3}(\gamma) = g(x, y, z) = 259$.

В разложении числа $a = 259 = 7 \cdot 37$ нет инертного в поле E_3 простого числа. По теореме 11 это уравнение имеет решение, которое находится как произведение решений уравнения 4.1 и 4.2, т.е. чисел $\delta_1 = s_1$, $\delta_2 = s_3$, $\delta_3 = s_9$ и $\lambda_1 = s_1 + 2s_3$, $\lambda_2 = s_3 + 2s_9$, $\lambda_3 = s_9 + 2s_1$. Отсюда следует, что полный набор неассоциированных решений уравнения 4.6 состоит из следующих девяти чисел:

$$\delta_1\lambda_1 = -2s_1 - s_3 + 2s_9, \quad \delta_2\lambda_2 = 2s_1 - 2s_3 - s_9, \quad \delta_3\lambda_3 = -s_1 + 2s_3 - 2s_9,$$

$$\delta_1\lambda_2 = 5s_1 + 8s_3 + 5s_9, \quad \delta_2\lambda_3 = 5s_1 + 5s_3 + 8s_9, \quad \delta_3\lambda_1 = 8s_1 + 5s_3 + 5s_9,$$

$$\delta_1\lambda_3 = -6s_1 - 7s_3 - 7s_9, \quad \delta_2\lambda_1 = -7s_1 - 6s_3 - 7s_9, \quad \delta_3\lambda_2 = -7s_1 - 7s_3 - 6s_9.$$

Заключение

Итак, мы получили полное описание случаев решения диофантовых уравнений с помощью однозначного разложения на множители в круговых полях, работая с уравнениями третьей степени.

Отметим, что в случае круговых полей с однозначным разложением на простые множители уравнение третьей степени порождается подполем только четырех круговых полей: K_7, K_9, K_{13}, K_{19} .

Таким образом, мы завершили исследование, начатое в статье [4], и подвели общий итог работы с диофантовыми уравнениями третьей степени, решая их с помощью однозначности разложения в круговых полях.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 416 с.
2. Пачев У.М., Кодзоков А.Х., Езаова А.Г., Токбаева А.А., Гучаева З.Х. Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46, № 1. С. 9–21.
<https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21>.
3. Брюно А.Д. От диофантовых приближений до диофантовых уравнений // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 1. 20 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-1>.
4. Галляутдинов И.Г., Лаврентьева Е.Е. Диофантово уравнение, порожденное максимальным подполем кругового поля // Изв. вузов. Матем. 2020. № 7. С. 45–55.
5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985. 504 с.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. М.: Физматлит, 2001. 272 с.
7. Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965. 300 с.

8. *Alaca S., Williams K.S.* Introductory Algebraic Number Theory. New York, NY: Cambridge Univ. Press, 2004. 428 p.
9. *Marcus D.A.* Number Fields. 2nd ed. Ser.: Universitext. Cham: Springer, 2018. xviii, 203 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-90233-3>.

Поступила в редакцию 10.05.2024

Принята к публикации 18.06.2024

Галютдинов Ильдархан Галютдинович, кандидат физико-математических наук

E-mail: *gmarat_68@mail.ru*

Лаврентьева Елена Евгеньевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных систем

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *ialee-4@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 147–161

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.147-161

Diophantine Equation Generated by the Subfield of a Circular Field

*I.G. Galyautdinov**, *E.E. Lavrentyeva***

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **gmarat_68@mail.ru*, ***ialee-4@mail.ru*

Received May 10, 2024; Accepted June 18, 2024

Abstract

Two forms $f(x, y, z)$ and $g(x, y, z)$ of degree 3 were constructed, with their values being the norms of numbers in the subfields of degree 3 of the circular fields K_{13} and K_{19} , respectively. Using the decomposition law in a circular field, Diophantine equations $f(x, y, z) = a$ and $g(x, y, z) = b$, where $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ were solved. The assertions that, based on the canonical decomposition of the numbers a и b into prime factors, make it possible to determine whether the equations $f(x, y, z) = a$ and $g(x, y, z) = b$ have solutions were proved.

Keywords: algebraic integer, Galois group, norm of algebraic number, principal ideal, fundamental basis, decomposition law in circular field, Diophantine equation

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Ireland K., Rosen M. *Klassicheskoe vvedenie v sovremennuyu teoriyu chisel* [A Classical Introduction to Modern Number Theory]. Moscow, Mir, 1987. 416 p. (In Russian)
2. Pachev U.M., Kodzokov A.Kh., Ezaova A.G., Tokbaeva A.A., Guchaeva Z.Kh. On one way to solve linear equations over a Euclidean ring. *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2024, vol. 46, no. 1, pp. 9–21. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21>. (In Russian)

3. Buno A.D. From Diophantine approximations to Diophantine equations. *Prepr. IPM im. M. V. Keldysha*, 2016, no. 1. 20 p. <https://doi.org/10.20948/prepr-2016-1>. (In Russian)
4. Galyautdinov I.G., Lavrentyeva E.E. Diophantine equation generated by the maximal subfield of a circular field. *Russ. Math.*, 2020, vol. 64, no. 7, pp. 38–47. <https://doi.org/10.3103/S1066369X20070051>.
5. Borevich Z.I., Shafarevich I.R. *Teoriya chisel* [Number Theory]. Moscow, Nauka, 1985. 504 p. (In Russian)
6. Kostrikin A.I. *Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra]. Pt. III. Moscow, Fizmatlit, 2001. 272 p. (In Russian)
7. Bourbaki N. *Algebra. Mnogochleny i polya. Uporyadochennye gruppy* [Algebra. Polynomials and Fields. Ordered Groups]. Moscow, Nauka, 1965. 300 p. (In Russian)
8. Alaca S., Williams K.S. *Introductory Algebraic Number Theory*. New York, NY, Cambridge Univ. Press, 2004. 428 p.
9. Marcus D.A. *Number Fields*. 2nd ed. Ser.: Universitext. Cham, Springer, 2018. xviii, 203 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-90233-3>.

Для цитирования: Галютдинов И.Г., Лаврентьева Е.Е. Диофантово уравнение, порожденное подполем кругового поля // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 147–161.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.147-161>.

For citation: Galyautdinov I.G., Lavrentyeva E.E. Diophantine equation generated by the subfield of a circular field. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 147–161.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.147-161>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.7

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.162-172

О ЛИНЕЙНОЙ СЛОЖНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ЦИКЛОТОМИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕЧЕТНОГО ПЕРИОДА

В.А. Едемский

*Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого,
г. Великий Новгород, 173003, Россия*

Аннотация

Оценена линейная сложность новых обобщенных циклотомических последовательностей с нечетным периодом. Для определения последовательностей применены обобщенные циклотомические классы по составному модулю. Получены достаточные условия существования бинарных и небинарных последовательностей с высокой линейной сложностью. Обобщены результаты о линейной сложности, полученные ранее для последовательностей, период которых равен степени простого числа.

Ключевые слова: обобщенная циклотомическая последовательность, линейная сложность

Введение

Псевдослучайные последовательности широко применяются в различных областях и имеют множество характеристик, таких как период, сбалансированность, автокорреляция, сложность и др. Одной из важных характеристик непредсказуемости последовательности является её линейная сложность. Для синтеза последовательностей с высокой линейной сложностью применяют различные методы, в том числе основанные на использовании математического аппарата алгебры и теории чисел. Один из таких методов заключается в использовании циклотомических и обобщенных циклотомических классов для определения последовательностей [1]. Многочисленные семейства последовательностей с высокой линейной сложностью получены с использованием классической циклотомии, обобщенных циклотомий Уитмена и Динга – Хеллесета [2–4]. Новая обобщенная циклотомия была разработана в [5] при поиске последовательностей скачкообразной перестройки частоты. В отличие от циклотомий, известных ранее, здесь число циклотомических классов является функцией модуля. Далее, эта новая циклотомия применена в [6] для построения бинарных последовательностей с периодом p^n , при этом была изучена линейная сложность таких последовательностей с периодом p^2 . Эти результаты обобщены в [7, 8] для бинарных последовательностей с таким периодом и в [9] – для последовательностей с периодом $2p^n$. Известны также отдельные результаты для бинарных последовательностей с другими периодами (см. [10]). Таким образом, линейная сложность последовательностей на основе новых обобщенных циклотомических классов исследована не в полной мере.

В настоящей статье обобщены результаты предыдущих исследований и получена оценка линейной сложности таких последовательностей с произвольным нечетным периодом без ограничений на число множителей в его разложении на простые числа. Результаты, полученные для бинарных последовательностей, обобщены на q -ичные последовательности.

1. Обобщенная циклотомия и новые бинарные последовательности

Напомним определение обобщенных циклотомических классов, предложенное в [5]. Применяя эти классы, определим новые бинарные последовательности.

1.1. Обобщенные циклотомические классы. Пусть e – натуральное число, большее единицы, и $p_1, p_2, \dots, p_m$ – попарно различные простые числа, такие что $p_i = 1 + f_i e$, $f_i \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Определим $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, $k_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Как обычно, через $\mathbb{Z}_v$ обозначим кольцо классов вычетов по модулю v , а через $\mathbb{Z}_v^*$ – группу его обратимых элементов. Тогда порядок $|\mathbb{Z}_v^*| = \varphi(v)$, где $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера.

Для каждого простого числа p_i существует примитивный корень g_i по модулю p_i^2 , при этом g_i – также примитивный корень по модулям p_i^j для всех $j \geq 1$ [11]. Это означает, что порядок g_i по модулю p_i^j равен $\varphi(p_i^j) = p_i^{j-1}(p_i - 1)$. Далее, согласно китайской теореме об остатках существует натуральное число $g_{(v)}$, удовлетворяющее сравнениям

$$g_{(v)} \equiv g_i^{f_i p_i^{k_i-1}} \pmod{p_i^{k_i}}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

а также существуют целые числа $h_1, h_2, \dots, h_m$ такие, что $1 \leq h_i \leq v - 1$ и

$$h_i \equiv \begin{cases} g_i & \pmod{p_i^{k_i}}, \\ 1 & \pmod{p_j^{k_j}}, \end{cases} \quad 1 \leq i \neq j \leq m. \quad (1)$$

Определим $D^{(v)} = \{g_{(v)}^t \pmod{v} \mid t = 0, 1, \dots, e - 1\}$, тогда $D^{(v)}$ – циклическая подгруппа $\mathbb{Z}_v^*$ порядка e [5]. Зададим её классы смежности $D_I^{(v)}$ следующим образом: $\{h_1^{j_1} h_2^{j_2} \dots h_m^{j_m} z \pmod{v} \mid z \in D^{(v)}\}$, где $I = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, $0 \leq j_i < (p_i - 1)p_i^{k_i-1}$. Иногда $D_I^{(v)}$ называют обобщенными циклотомическими классами Zeng–Cai–Tang–Yang.

Пусть

$$\Psi^{(v)} = \{i \in \mathbb{Z}_{(p_1-1)p_1^{k_1}} \mid 0 \leq i < f_1 p_1^{k_1}\} \times \mathbb{Z}_{(p_2-1)p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_m-1)p_m^{k_m}}.$$

Согласно [5] справедливы разбиения

$$\mathbb{Z}_v^* = \bigcup_{I \in \Psi^{(v)}} D_I^{(v)} \text{ и } \mathbb{Z}_v \setminus \{0\} = \bigcup_{1 \leq u, u|v} \left(\frac{v}{u} \bigcup_{I \in \Psi^{(u)}} D_I^{(u)} \right). \quad (2)$$

При определении обобщенной циклотомии в [5] использовано условие $p_1 < p_2 < \dots < p_m$, при котором обобщенные циклотомические классы $D_I^{(v)}$ по модулю v определяются однозначно. Но в общем случае для определения классов и последовательностей, рассмотренных далее, достаточно только зафиксировать порядок множителей в разложении $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Тогда при изменении порядка множителей p_i множества $D_I^{(v)}$ также изменятся.

1.2. Определение новых бинарных последовательностей. Пусть f_i – четное число для каждого $i = 1, 2, \dots, m$. Отметим, что все f_i заведомо будут четными, если изначально выбрать нечетное e . Определим дополнительно

$$\Psi_1^{(v)} = \{i \in \mathbb{Z}_{(p_1-1)p_1^{k_1}} \mid 0 \leq i < f_1 p_1^{k_1}/2\} \times \mathbb{Z}_{(p_2-1)p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_m-1)p_m^{k_m}}$$

и $\Psi_0^{(v)} = \Psi^{(v)} \setminus \Psi_1^{(v)}$. Тогда согласно определениям имеем

$$\Psi_j^{(v)} = \Psi_j^{(p_1^{k_1})} \times \mathbb{Z}_{(p_2-1)p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_m-1)p_m^{k_m}}, \quad j = 0, 1. \quad (3)$$

Обозначим через $C_j^{(v)}$ объединение множеств $\bigcup_{I \in \Psi_j^{(v)}} D_I^{(v)}$, $j = 0, 1$. Применив формулу (2), получим

$$\mathbb{Z}_v^* = C_0^{(v)} \cup C_1^{(v)} \text{ и } \mathbb{Z}_v \setminus \{0\} = \bigcup_{1 \leq u, u|v} \frac{v}{u} (C_0^{(u)} \cup C_1^{(u)}).$$

Положим $\mathcal{F}_j = \bigcup_{1 \leq u, u|v} \frac{v}{u} C_j^{(u)}$, $j = 0, 1$, и определим сбалансированную бинарную последовательность $s^\infty = (s_0, s_1, \dots)$ с периодом v по следующей формуле:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \bmod v \in \mathcal{F}_1 \cup \{0\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Здесь важно отметить, что в частном случае, когда $v = p^n$, подгруппа $D^{(v)} = \{g^{t f p^{n-1}} \mid 0 \leq t < e\}$, где g – примитивный корень по модулю p^n ,

$$C_1^{(v)} = \bigcup_{i=0}^{f p^{n-1}/2-1} \{g^{i+t f p^{n-1}} \mid 0 \leq t < e\} \text{ и } \mathcal{F}_1 = \bigcup_{k=1}^n p^{n-k} C^{(p^k)}.$$

Следовательно, бинарная последовательность с периодом p^n , рассмотренная в [6], является частным случаем s^∞ . Линейная сложность этих последовательностей с периодом p^2 исследована в [6]. Эти результаты обобщены в [7–10] для последовательностей с периодами $p^n, 2p^n, p^n q^m$. Таким образом, в настоящей статье продолжено исследование линейной сложности бинарных последовательностей, определяемых посредством новой обобщенной циклотомии, начатое в [6].

1.3. Линейная сложность и многочлен последовательности. Сначала напомним несколько основных фактов о линейной сложности периодических последовательностей.

Пусть $\mathbb{F}_r$ – конечное поле порядка r и s^∞ – последовательность периода v над $\mathbb{F}_r$. Тогда линейная сложность последовательности s^∞ над полем $\mathbb{F}_r$ определяется как наименьший порядок L линейного рекуррентного соотношения, которому удовлетворяют члены последовательности

$$s_{n+L} = c_{L-1} s_{n+L-1} + \dots + c_1 s_{n+1} + c_0 s_n \quad \text{для } n \geq 0,$$

где $c_0 \neq 0, c_1, \dots, c_{L-1} \in \mathbb{F}_r$. Далее линейную сложность последовательности будем обозначать $L(s^\infty)$.

Пусть $S(x)$ – порождающий многочлен этой последовательности, то есть $S(x) = \sum_{i=0}^{v-1} s_i x^i$. Хорошо известно, что линейную сложность последовательности s^∞ можно найти по формуле

$$L(s^\infty) = v - |\{i = 0, 1, \dots, v-1 \mid S(\alpha^i) = 0\}|, \quad (5)$$

где α – примитивный корень степени v из единицы в расширении конечного поля $\mathbb{F}_r$. Следовательно, для нахождения линейной сложности последовательности достаточно изучить корни её порождающего многочлена. С этой целью напомним несколько свойств многочлена последовательности, полученных ранее в [7] для $v = p^n$.

Пусть $T^{(p^n)}(x)$ – многочлен последовательности s^∞ , когда $v = p^n$, то есть

$$T^{(p^n)}(x) = \sum_{i \in C_1^{(p^n)}} x^i + \sum_{i \in C_1^{(p^{n-1})}} x^{p^i} + \dots + \sum_{i \in C_1^{(p)}} x^{p^{n-1}i} + 1.$$

Обозначим через β примитивный корень p^n степени из единицы в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{F}_2$. Как обычно, под $\mathbb{F}_2(\beta)$ понимаем простое расширение поля $\mathbb{F}_2$, полученное присоединением алгебраического элемента β . Свойства многочлена $T^{(p^n)}(x)$, представленные в следующей лемме, получены в [7].

Лемма 1. Пусть $T^{(p^n)}(x)$ – многочлен последовательности s^∞ , определенной по формуле (4) для $v = p^n$, $p = 1 + ef$. Тогда

A. Если $T^{(p^n)}(\beta^a) \in \mathbb{F}_2(\beta^{p^{n-1}})$, то $a \equiv 0 \pmod{p^{n-1}}$;

B. $T^{(p^n)}(\beta^a) + T^{(p^n)}(\beta^{g^{ap^{n-1}f/2}}) = 1$ для всех $a \in \mathbb{Z}_{p^n}^*$.

2. Свойства многочлена последовательности

Докажем несколько свойств многочлена последовательности.

Пусть α – примитивный корень v -ой степени из единицы в алгебраическом замыкании $\mathbb{F}_2$. Обозначим через v_i целое число $v/p_i^{k_i}$, $i = 0, 1, \dots, m$. По определению $\text{НОД}(v_1, \dots, v_m) = 1$, где НОД – наибольший общий делитель чисел. Следовательно, существуют такие целые числа $a_1, a_2, \dots, a_m$, что $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 1$.

Пусть $\alpha_i = \alpha^{a_i v_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, тогда $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ и α_i – примитивный корень $p_i^{k_i}$ -ой степени из единицы в расширении поля $\mathbb{F}_2$, так как p_i не делит a_i для всех $i = 0, 1, \dots, m$. Значит, $\alpha_i^{p_i^{k_i-1}}$ – примитивный корень p_i -ой степени из единицы. Обозначим через $\mathbb{K}_i$ простое расширение поля $\mathbb{F}_2$, полученное присоединением элемента $\alpha_i^{p_i^{n_i-1}}$.

Лемма 2. Пусть $2^{p_i-1} \not\equiv 1 \pmod{p_i^2}$ и $\text{НОД}(p_i, p_j - 1) = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Тогда, если $i \neq j$, то

$$\mathbb{F}_2(\alpha_i) \cap \mathbb{F}_2(\alpha_j) = \mathbb{K}_i \cap \mathbb{K}_j.$$

Доказательство. Ясно, что $\mathbb{K}_i \cap \mathbb{K}_j \subset \mathbb{F}_2(\alpha_i) \cap \mathbb{F}_2(\alpha_j)$. Обозначим через $[\mathbb{F}_2(\alpha_i) : \mathbb{F}_2]$ степень расширения $\mathbb{F}_2(\alpha_i)$ над $\mathbb{F}_2$. Если $2^{p_i-1} \not\equiv 1 \pmod{p_i^2}$, то $[\mathbb{F}_2(\alpha_i) : \mathbb{F}_2] = p_i^{n_i-1}[\mathbb{K}_i : \mathbb{F}_2]$ для каждого $i : 1 \leq i \leq m$ по лемме 3 из [7]. Так как $[\mathbb{F}_2(\alpha_i) \cap \mathbb{F}_2(\alpha_j) : \mathbb{F}_2]$ делит $[\mathbb{F}_2(\alpha_i) : \mathbb{F}_2]$, $[\mathbb{F}_2(\alpha_j) : \mathbb{F}_2]$ и $\text{НОД}(p_i, p_j - 1) = 1$, то $[\mathbb{F}_2(\alpha_i) \cap \mathbb{F}_2(\alpha_j) : \mathbb{F}_2]$ делит $[\mathbb{K}_i : \mathbb{F}_2]$ и $[\mathbb{K}_j : \mathbb{F}_2]$. Последнее замечание завершает доказательство леммы. $\square$

Отметим, что простые числа p такие, что $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, встречаются редко.

Лемма 3. Пусть $u|v$, $u = p_{j_1}^{n_1} \dots p_{j_t}^{n_t}$ для $j_i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $1 \leq n_i \leq k_{j_i}$, $t > 1$ и $S^{(u)}(x) = \sum_{i \in C_1^{(u)}} x^{vi/u}$. Тогда $S^{(u)}(\alpha^a) \in \{0, S^{(p_{j_1}^{n_1})}(\alpha_{j_1}^{ua/v})\}$.

Доказательство. По определению имеем $S^{(u)}(\alpha^a) = \sum_{i \in C_1^{(u)}} \alpha^{via/u}$ и $C_1^{(u)} = \bigcup_{I \in \Psi_1^{(u)}} D_I^{(u)}$. Тогда в силу формулы (3)

$$\Psi_1^{(u)} = \Psi_1^{(p_{j_1}^{n_1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{j_2}-1)p_{j_2}^{n_2-1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_{j_t}-1)p_{j_t}^{n_{j_t}-1}}.$$

Пусть, как и ранее, $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$. Согласно сравнению (1) имеем $h_i \equiv 1 \pmod{p_j^{k_j}}$ для $j \neq i$. Следовательно, $\alpha_i^{h_1 h_2 \dots h_m} = \alpha_i^{h_i}$. Значит,

$$S^{(u)}(\alpha^a) = \sum_{i \in C_1^{(p_{j_1}^{n_1})}} \alpha_{j_1}^{via/u} \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}_{p_{j_2}^{n_2}}^*} \alpha_{j_2}^{via/u} \dots \sum_{i \in \mathbb{Z}_{p_{j_t}^{n_t}}^*} \alpha_{j_t}^{via/u}. \quad (6)$$

Сумма $\sum_{i \in \mathbb{Z}_{p_j^{n_j}}^*} \alpha_j^{via/u}$ равна 0 или 1 для всех значений $j, a \in \mathbb{Z}$, и

$$\sum_{i \in C_1^{(p_{j_1}^{n_1})}} \alpha_{j_1}^{via/u} = S^{(p_{j_1}^{n_1})}(\alpha_{j_1}^{ua/v}).$$

Таким образом, утверждение леммы следует из формулы (6). $\square$

3. Линейная сложность бинарных последовательностей

Получим оценку линейной сложности рассматриваемых бинарных последовательностей. Следующее утверждение является главным результатом статьи для бинарных последовательностей.

Теорема 1. Пусть $2^{p_i-1} \not\equiv 1 \pmod{p_i^2}$, $\text{НОД}(p_i, p_j - 1) = 1$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, и последовательность s^∞ определена по формуле (4), когда $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Тогда справедливы следующие оценки её линейной сложности:

$$A. L(s^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} p_m (p_m^{k_m-1} - 1), \text{ если } k_m > 1;$$

$$B. L(s^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m - 1)/2, \text{ если } k_m = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая

(i) Сначала предположим, что $k_m > 1$. Пусть

$$U_0 = \{u > 1 \mid u|v, u \neq p_m^j \text{ для } j = 1, 2, \dots, k_m\}$$

и $U_1 = \{p_m, p_m^2, \dots, p_m^{k_m}\}$. Согласно определению $\{1 \leq u, u|v\} = U_0 \cup U_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S(\alpha^a) &= 1 + \sum_{i \in \mathcal{F}_1} \alpha^{ai} = 1 + \sum_{u \in U_0} \sum_{i \in \frac{v}{u} C_1^{(u)}} \alpha^{ai} + \sum_{u \in U_1} \sum_{i \in \frac{v}{u} C_1^{(u)}} \alpha^{ai} = \\ &= 1 + \sum_{u \in U_0} S^{(u)}(\alpha^a) + \sum_{u \in U_1} S^{(u)}(\alpha^a), \end{aligned}$$

где $S^{(u)}(x) = \sum_{i \in C_1^{(u)}} x^{vi/u}$, как и в лемме 3.

Ясно, что

$$1 + \sum_{u \in U_1} S^{(u)}(x^i) = \sum_{i \in C_1^{(p_m^{k_m})}} x^{iv/p_m^{k_m}} + \sum_{i \in C_1^{(p_m^{k_m-1})}} x^{iv/p_m^{k_m-1}} + \dots + \sum_{i \in C_1^{(p)}} x^{iv/p_m} + 1,$$

то есть $\sum_{u \in U_1} S^{(u)}(\alpha^a) = T^{(p_m^{k_m})}(\alpha^{av/p_m^{k_m}})$, где $T^{(p_m^{k_m})}(x)$ – многочлен последовательности, определенной по формуле (4) для $v = p_m^{k_m}$.

Пусть $S(\alpha^a) = 0$. Тогда

$$T^{(p_m^{k_m})}(\alpha^{va/p_m^{k_m}}) = 1 + \sum_{u \in U_0} S^{(u)}(\alpha^a).$$

По лемме 3

$$\sum_{u \in U_0} S^{(u)}(\alpha^a) \in \mathbb{F}_2(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m-1}) \quad \text{и} \quad T^{(p_m^{k_m})}(\alpha^{va/u}) = T^{(p_m^{k_m})}(\alpha_m^{va/p_m^{k_m}}).$$

Следовательно, согласно лемме 2 в этом случае $T^{(p_m^{k_m})}(\alpha_m^{va/p_m^{k_m}}) \in \mathbb{K}_1$. Тогда по лемме 1 имеем $a \equiv 0 \pmod{p_m^{k_m-1}}$. Так как

$$|\{a \mid a \equiv 0 \pmod{p_m^{k_m-1}}, 0 \leq a < v\}| = v/p_m^{k_m-1},$$

то

$$|\{a \mid S(\alpha^a) = 0, 0 \leq a < v\}| \leq v/p_m^{k_m-1}.$$

В результате из формулы (5) следует, что $L(s^\infty) \geq v - v/p_m^{k_m-1}$.

(ii) Пусть $k_m = 1$. Согласно китайской теореме об остатках существует такое целое число b , что $b \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i}}$, $1 \leq i \leq m-1$ и $b \equiv g_m^{f_m/2} \pmod{p_m}$.

Предположим, что $S(\alpha^a) = 0$, $a \not\equiv 0 \pmod{p_m}$. Сумма $\sum_{i=1}^{p_m-1} \alpha_m^{ai}$ будет равна единице, когда $k_m = 1$. В силу лемм 1, 3 и выбора b заключаем, что справедливо равенство

$$S(\alpha^a) + S(\alpha^{ab}) = S^{(p_m)}(\alpha_m^{va/p_m}) + S^{(p_m)}(\alpha_m^{g_m^{f_m/2} va/p_m}) = 1.$$

Следовательно, хотя бы одно из этих значений не равно нулю. Далее,

$$|\{a \mid a \not\equiv 0 \pmod{p_m}, 1 \leq a \leq v-1\}| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m - 1)$$

и

$$|\{a \mid a \equiv 0 \pmod{p_m}, 0 \leq a \leq v-1\}| = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}}.$$

Таким образом,

$$|\{a \mid S(\alpha^a) = 0, 1 \leq a < v\}| \leq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m + 1)/2$$

и $L(s^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m - 1)/2$. $\square$

Отметим, что согласно теореме 1 всегда можно получить бинарную последовательность с периодом v и высокой линейной сложностью, если $k_1 + k_2 + \dots + k_m > m$.

4. Небинарные последовательности

Бинарные последовательности относятся к наиболее изучаемым и используемым, тем не менее исследование линейной сложности других последовательностей также представляет интерес.

Рассмотрим линейную сложность q -ичных последовательностей, определяемых на новых обобщенных циклотомических классах, когда q делит f_i для каждого значения $i = 1, 2, \dots, m$. Здесь определим

$$\Psi_j^{(v)} = \{i \in \mathbb{Z}_{(p_1-1)p_1^{k_1}} \mid j f_1 p_1^{k_1}/q \leq i < (j+1) f_1 p_1^{k_1}/q\} \times \mathbb{Z}_{(p_2-1)p_2^{k_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_m-1)p_m^{k_m}}$$

для $j = 0, 1, \dots, q-1$.

Обозначим через $C_j^{(v)}$ множество $\bigcup_{I \in \Psi_j^{(v)}} D_I^{(v)}$, $j = 0, 1, \dots, q-1$. Справедливы разбиения

$$\mathbb{Z}_v^* = \bigcup_{j=0}^{q-1} C_j^{(v)} \text{ и } \mathbb{Z}_v \setminus \{0\} = \bigcup_{1 < u, u|v} \bigcup_{j=0}^{q-1} \frac{v}{u} C_j^{(u)}.$$

Пусть $\mathcal{F}_j = \bigcup_{1 < u, u|v} \frac{v}{u} C_j^{(u)}$, $j = 0, 1, \dots, q-1$.

Определим сбалансированную q -ичную последовательность $u^\infty = (u_0, u_1, \dots)$ с периодом v по правилу

$$u_i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \bmod v \in \mathcal{F}_0 \cup \{0\}, \\ j, & \text{если } i \bmod v \in \mathcal{F}_j, j = 1, \dots, q-1. \end{cases} \quad (7)$$

Если q – простое число, то u^∞ – последовательность над конечным полем $\mathbb{F}_q$, иначе, над кольцом классов вычетов $\mathbb{Z}_q$.

Лемма 4. Пусть q – нечетное простое число, $q^{p_i-1} \not\equiv 1 \pmod{p_i^2}$, $i = 1, 2, \dots, m$, и последовательность u^∞ определена по формуле (7) для $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Тогда $L(u^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m - 1)(q - 1)/q$.

Доказательство. Обозначим через $U(x)$ образующий многочлен последовательности u^∞ и для удобства через $U^{(p^j)}(x)$ – этот же многочлен, когда $v = p^j$. Пусть здесь α – примитивный корень v -ой степени из единицы в алгебраическом замыкании конечного поля $\mathbb{F}_q$.

Сначала рассмотрим частный случай, когда $v = p^n$. Обозначим через g примитивный корень по модулю p . Тогда

$$C_j^{(v)} = \bigcup_{i=jfp^{n-1}/q}^{(j+1)fp^{n-1}/q-1} \{g^{i+tfp^{n-1}} \mid 0 \leq t < e\}$$

и $\mathcal{F}_j = \bigcup_{k=1}^n p^{n-k} C_j^{(p^k)}$, $j = 0, 1, \dots, q-1$. Следовательно,

$$p^{n-k} C_{(j+1) \bmod q}^{(p^k)} = g^{fp^{n-1}/q} p^{n-k} C_j^{(p^k)}.$$

Таким образом, в этом случае

$$\sum_{j=0}^{n-1} U^{(p^{n-j})}(\alpha^{ag^{fp^{n-1}/q}}) = \sum_{j=0}^{n-1} U^{(p^{n-j})}(\alpha^a) + 1$$

для $a \in \mathbb{Z}_{p^n}^*$.

Пусть $c \equiv 1 \pmod{p_i^{k_i}}$, $1 \leq i \leq m-1$, и $c \equiv g_m^{fp^{n-1}/q} \pmod{p_m^{k_m}}$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{n-1} U^{(p^{n-j})}(\alpha^c) = \sum_{j=0}^{n-1} U^{(p^{n-j})}(\alpha) + t.$$

Далее, применив тот же самый метод, что и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что и в общем случае $U(\alpha^{ac^t}) = U(\alpha^a) + t$ для $t = 1, 2, \dots, q-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\{a \mid U(\alpha^a) = 0, 1 \leq a < v\}| &\leq |\{a \mid a \not\equiv 0 \pmod{p_m}, 1 \leq a < v\}|/q + \\ &+ |\{a \mid a \equiv 0 \pmod{p_m}, 1 \leq a < v\}| \end{aligned}$$

или

$$|\{a \mid U(\alpha^a) = 0, 1 \leq a < v\}| \leq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m-1} (p_m - 1)/q + p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m-1}.$$

Окончательно получим, что

$$L(s^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} - p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m-1} (p_m - 1)(q - 1)/q.$$

□

Теперь рассмотрим эти последовательности над кольцом классов вычетов.

Лемма 5. Пусть $q = r^k$, где r – простое число, $k > 1$, $r^{p_i-1} \not\equiv 1 \pmod{p_i^2}$, $i = 1, 2, \dots, m$, и последовательность u^∞ определена по формуле (7) для $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Тогда имеют место следующие оценки её линейной сложности:

$$A. L(u^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m (p_m^{k_m-1} - 1), \text{ когда } r = 2 \text{ и } k_m > 1;$$

$$B. L(u^\infty) \geq p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_{m-1}^{k_{m-1}} (p_m - 1)(r - 1)/r, \text{ если } r = 2 \text{ и } k_m = 1 \text{ или } r > 2.$$

Доказательство. По условию последовательность определена над конечным кольцом $\mathbb{Z}_{r^k}$. Значит, имеется естественный эпиморфизм $\psi(n) = n \bmod r$ из $\mathbb{Z}_{r^k}$ в $\mathbb{F}_r$. Применив этот эпиморфизм, получим последовательность $\psi(u^\infty) = (\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(u_3), \dots)$ над $\mathbb{F}_r$. Для этой последовательности $\psi(u_i) = j$, если

$$i \bmod v \in \{\mathcal{F}_j, \mathcal{F}_{j+r}, \mathcal{F}_{j+2r}, \dots, \mathcal{F}_{j+(r^{k-1}-1)r}\}.$$

Значит, $\psi(u^\infty)$ – последовательность, определяемая по формуле (7) при замене e на er^{k-1} и замене q на r . Тогда теорема 1 и лемма 4 справедливы для $\psi(u^\infty)$. Отсюда получим оценку линейной сложности u^∞ , так как $L(\psi(u^\infty)) \leq L(u^\infty)$, и завершим доказательство леммы. □

Если q не является степенью простого числа, то можно получить оценку линейной сложности для каждого простого числа, входящего в разложение q , и воспользоваться китайской теоремой об остатках для оценки линейной сложности последовательности над $\mathbb{Z}_q$ в этом случае.

Заключение

Получены оценки линейной сложности как бинарных обобщенных циклотомических последовательностей, так и небинарных. Рассмотренные последовательности сформированы с применением обобщенных циклотомических классов по произвольному нечетному модулю $v = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$. Обобщены предыдущие результаты, полученные для $m = 1, 2$.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24–21–00442.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Cusick T.W., Ding C., Renvall A.* Stream Ciphers and Number Theory. Ser.: North-Holland Mathematical Library. V. 55, Suppl. C. Amsterdam: Elsevier Sci., 1998. 431 p. URL: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/north-holland-mathematical-library/vol/55/suppl/C>.
2. *Chen X., Chen Z., Liu H.* A family of pseudorandom binary sequences derived from generalized cyclotomic classes modulo $p^{m+1}q^{n+1}$ // *Int. J. Network Secur.* 2020. V. 22, No 4. P. 610–620. [https://doi.org/10.6633/IJNS.202007_22\(4\).09](https://doi.org/10.6633/IJNS.202007_22(4).09).
3. *Fan C., Ge G.* A unified approach to Whiteman's and Ding–Helleseth's generalized cyclotomy over residue class rings // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2014. V. 60, No 2. P. 1326–1336. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2290694>.
4. *Hu L., Yue Q., Wang M.* The linear complexity of Whiteman's generalized cyclotomic sequences of period $p^{m+1}q^{n+1}$ // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2012. V. 58, No 8. P. 5534–5543. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2196254>.
5. *Zeng X., Cai H., Tang X., Yang Y.* Optimal frequency hopping sequences of odd length // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2013. V. 59, No 5. P. 3237–3248. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2237754>.
6. *Xiao Z., Zeng X., Li C., Helleseth T.* New generalized cyclotomic binary sequences of period p^2 // *Des. Codes Cryptogr.* 2018. V. 86, No 7. P. 1483–1497. <https://doi.org/10.1007/s12095-022-00569-4>.
7. *Edemskiy V., Li C., Zeng X., Helleseth T.* The linear complexity of generalized cyclotomic binary sequences of period p^n // *Des. Codes Cryptogr.* 2019. V. 87, No 5. P. 1183–1197. <https://doi.org/10.1007/s10623-018-0513-2>.
8. *Ye Z., Ke P., Wu C.* A further study of the linear complexity of new binary cyclotomic sequence of length p^r // *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* 2019. V. 30, No 3. P. 217–231. <https://doi.org/10.1007/s00200-018-0368-9>.
9. *Ouyang Y., Xie X.* Linear complexity of generalized cyclotomic sequences of period $2p^m$ // *Des. Codes Cryptogr.* 2019. V. 87, No 11. P. 2585–2596. <https://doi.org/10.1007/s10623-019-00638-5>.
10. *Edemskiy V., Wu C.* Linear complexity of generalized cyclotomic sequences with period p^nq^m // *Arithmetic of Finite Fields: 9th International Workshop, WAIFI 2022, Chengdu, China, August 29 – September 2, 2022, Revised Selected Papers* / Mesnager S., Zhou Z. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 13638. Cham: Springer, 2023. P. 320–333. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22944-2_21.
11. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 416 с.

Поступила в редакцию 5.05.2024

Принята к публикации 11.05.2024

Едемский Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Прикладной математики и информатики»

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

ул. Большая Санкт-Петербургская, д. 41, г. Великий Новгород, 173003, Россия

E-mail: vladimir.edemsky@novsu.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 2, pp. 162–172

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.162-172

On the Linear Complexity of Generalized Cyclotomic Sequences with Odd Period

V.A. Edemskiy

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, 173003 Russia

E-mail: vladimir.edemsky@novsu.ru

Received May 5, 2024; Accepted May 11, 2024

Abstract

The linear complexity of new generalized cyclotomic sequences with odd period was estimated. The sequences were defined using generalized cyclotomic classes composite modulo. Conditions sufficient for the existence of binary and non-binary sequences with high linear complexity were obtained. The earlier results on the linear complexity of sequences with the period equal to the power of a prime were generalized.

Keywords: generalized cyclotomic sequences, linear complexity

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00442).

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

References

1. Cusick T.W., Ding C., Renvall A. *Stream Ciphers and Number Theory*. Ser.: North-Holland Mathematical Library. Vol. 55, Suppl. C. Amsterdam, Elsevier Sci., 1998. 431 p. URL: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/north-holland-mathematical-library/vol/55/suppl/C>.
2. Chen X., Chen Z., Liu H. A family of pseudorandom binary sequences derived from generalized cyclotomic classes modulo $p^{m+1}q^{n+1}$. *Int. J. Network Secur.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 610–620. [https://doi.org/10.6633/IJNS.202007_22\(4\).09](https://doi.org/10.6633/IJNS.202007_22(4).09).
3. Fan C., Ge G. A unified approach to Whiteman's and Ding–Hellese's generalized cyclotomy over residue class rings. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, no. 2, pp. 1326–1336. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2290694>.
4. Hu L., Yue Q., Wang M. The linear complexity of Whiteman's generalized cyclotomic sequences of period $p^{m+1}q^{n+1}$. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2012, vol. 58, no. 8, pp. 5534–5543. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2196254>.
5. Zeng X., Cai H., Tang X., Yang Y. Optimal frequency hopping sequences of odd length. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2013, vol. 59, no. 5, pp. 3237–3248. <https://doi.org/10.1109/TIT.2013.2237754>.

6. Xiao Z., Zeng X., Li C., Helleseht T. New generalized cyclotomic binary sequences of period p^2 . *Des. Codes Cryptogr.*, 2018, vol. 86, no. 7, pp. 1483–1497. <https://doi.org/10.1007/s10623-017-0408-7>.
7. Edemskiy V., Li C., Zeng X., Helleseht T. The linear complexity of generalized cyclotomic binary sequences of period p^n . *Des. Codes Cryptogr.*, 2019, vol. 87, no. 5, pp. 1183–1197. <https://doi.org/10.1007/s10623-018-0513-2>.
8. Ye Z., Ke P., Wu C. A further study of the linear complexity of new binary cyclotomic sequence of length p^r . *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.*, 2019, vol. 30, no. 3, pp. 217–231. <https://doi.org/10.1007/s00200-018-0368-9>.
9. Ouyang Y., Xie X. Linear complexity of generalized cyclotomic sequences of period $2p^m$. *Des. Codes Cryptogr.*, 2019, vol. 87, no. 11, pp. 2585–2596. <https://doi.org/10.1007/s10623-019-00638-5>.
10. Edemskiy V., Wu C. Linear complexity of generalized cyclotomic sequences with period $p^n q^m$. In: Mesnager S., Zhou Z. (Eds.) *Arithmetic of Finite Fields: 9th International Workshop, WAIFI 2022, Chengdu, China, August 29 – September 2, 2022, Revised Selected Papers*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 13638. Cham, Springer, 2023, pp. 320–333. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22944-2_21.
11. Ireland K., Rosen M. *Klassicheskoe vvedenie v sovremennuyu teoriyu chisel* [A Classical Introduction to Modern Number Theory]. Moscow, Mir, 1987. 416 p. (In Russian)

Для цитирования: Едемский В.А. О линейной сложности обобщенных циклотомических последовательностей нечетного периода // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 162–172.
 URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.162-172>.

For citation: Edemskiy V.A. On the linear complexity of generalized cyclotomic sequences with odd period. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 162–172.
 URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.162-172>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.173-186

**СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
МОНОТОННОГО ТИПА С МЛАДШИМ СЛАГАЕМОМ
ПРИ НАЛИЧИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ
В ПРАВОЙ ЧАСТИ**

О.А. Задворнов, Г.О. Трифонова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Доказано существование решения смешанной краевой задачи для квазилинейного уравнения с младшим слагаемым и точечными источниками в правой части. Решение получено в аддитивной форме с выделением в явном виде слагаемого с особенностью, порожденной сингулярностью правой части. Подход, примененный при доказательстве основного результата, можно использовать как схему для численного метода решения рассмотренной задачи.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, точечный источник, аддитивное выделение

Введение

Рассмотрена смешанная краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка при наличии локальной нагрузки (суммы точечных источников в правой части). Левая часть нелинейного уравнения состоит из суммы дивергентного и младшего слагаемых. Подобные задачи возникают в теории фильтрации (например, [1]) при моделировании стационарных процессов, когда нелинейность задачи связана с нелинейностью определяющего соотношения, задающего поток по градиенту давления (искомая функция в задаче – давление). Уравнения с нелинейной зависимостью от градиента решения коэффициентов в их дивергентной части появляются при моделировании в задачах магнитостатики (см., например, [2]). Рассмотрен случай, когда зависимость от градиента решения имеет линейный рост по градиенту на бесконечности, моделируемая среда изотропная и неоднородная (в нелинейный закон может входить и зависимость от пространственной переменной).

В первом разделе статьи сформулированы условия, в рамках которых исследована рассматриваемая краевая задача. Из них условие II является нестандартным, но пример, приведенный в заключительной части статьи, подтверждает естественность такого условия. Сформулирована вариационная задача для нахождения обобщенного решения (выбрано пространство, способное содержать решение с особенностью, порождаемой сингулярной правой частью).

Второй раздел содержит исследование линейной краевой задачи с переменными коэффициентами и точечными источниками. С одной стороны, такая задача –

частный вариант нелинейной задачи (тем не менее представляющий интерес и сам по себе). С другой стороны, эта задача важна в исследовании общего случая. Введены дополнительные ограничения на коэффициент дивергентной части уравнения в окрестности точек сосредоточения источников (принадлежность коэффициента весовому пространству – условия III), и в рамках этих условий (на базе известной теории [3]) доказано существование единственного решения линейной задачи. В этом решении аддитивно и в явном виде (как линейная комбинация фундаментальных решений для оператора Лапласа [4]) выделена особенность, порождаемая точечными источниками.

В третьем разделе исходная нелинейная задача преобразована, с опорой на уже рассмотренную линейную задачу, во вспомогательную нелинейную, но без сингулярностей. Установлены свойства преобразованной задачи.

В четвертом разделе сформулирован и доказан средствами теории монотонных операторов [5–7] основной результат – о существовании решения и форме его представления. Далее рассмотрен пример из теории нелинейной фильтрации (закон с предельным градиентом). В заключении обсуждена возможность применения изложенного доказательства существования решения как схемы для поиска численного решения нелинейной задачи с точечными источниками.

Постановки задач и методы их исследования, представленные в настоящей работе, близки к использованным в работах [8–10], посвященных нелинейной задаче, но без младшего слагаемого.

1. Формулировка вариационной задачи

Рассмотрим смешанную краевую задачу для нелинейного уравнения монотонного типа при наличии нескольких точечных источников известной интенсивности $q^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, сосредоточенных в узлах $x^{(i)}$, внутренних для области решения $\Omega \subset R^n$. Границу $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{mes } \Gamma_1 \neq 0$ области Ω считаем Липшиц-непрерывной (значит, Ω – ограниченное множество). Краевая задача имеет вид

$$-\text{div } G(x, \nabla w(x)) + g_0(x, w(x)) = \sum_{i=1}^k q^{(i)} \delta(x - x^{(i)}), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$w(x) = w_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$(G(x, \nabla w(x)), \nu(x)) + \sigma(x)w(x) = w_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (3)$$

Здесь функция $w_{\gamma_1} : \Gamma_1 \rightarrow R^1$ является следом функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$, функция $\nu : \Gamma_2 \rightarrow R^1$ – внешняя нормаль, $w_{\gamma_2} \in L_2(\Gamma_2)$, функция $\sigma : \Gamma_2 \rightarrow R^1$ почти всюду неотрицательна и ограничена:

$$0 \leq \sigma(x) \leq \bar{\sigma}. \quad (4)$$

Предположим, что функция $G \equiv G(x, \lambda) : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$ измерима по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$ и непрерывна по λ для почти всех $x \in \Omega$ (условия Каратеодори [5, с. 196]). Считаем также, что выполнены следующие условия (здесь и далее $(\cdot, \cdot)$ и $|\cdot|$ – скалярное произведение и норма в пространстве R^n).

I. Монотонность по λ :

$$(G(x, \lambda) - G(x, \mu), \lambda - \mu) \geq 0 \quad \forall \lambda, \mu \in R^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (5)$$

II. Существование измеримой функции $a \equiv a(x) : \Omega \rightarrow R^1$, почти всюду отделенной от нуля и ограниченной

$$0 < a_{\min} \leq a(x) \leq a_{\max}, \quad (6)$$

а также функции $b \equiv b(x) : \Omega \rightarrow R^1$ из пространства $L_2(\Omega)$, с которыми выполнено неравенство (моделируемая среда изотропная и неоднородная):

$$|G(x, \lambda) - a(x)\lambda| \leq b(x) \quad \forall \lambda \in R^n, \quad \forall x \in \Omega. \quad (7)$$

Предположим также измеримость по $x \in \Omega$ функции $g_0 \equiv g_0(x, s) : \Omega \times R^1 \rightarrow R^1$, ее непрерывность по s и существование неотрицательной и ограниченной функции $a_0 : \Omega \rightarrow R^1$:

$$0 \leq a_0(x) \leq a_{max} \quad (8)$$

и функции b_0 из пространства $L_2(\Omega)$, с которыми выполнено неравенство

$$|g_0(x, s) - a_0(x)s| \leq b_0(x) \quad \forall s \in R^1, \quad \forall x \in \Omega. \quad (9)$$

Условие II обеспечивает линейный рост $G(x, \lambda)$ по λ на бесконечности:

$$|G(x, \lambda)| \leq |G(x, \lambda) - a(x)\lambda| + a(x)|\lambda| \leq b(x) + a_{max}|\lambda| \quad (10)$$

и коэрцитивность функции $G(x, \lambda)$:

$$(G(x, \lambda), \lambda) \geq -|G(x, \lambda) - a(x)\lambda||\lambda| + a(x)|\lambda|^2 \geq -b(x)|\lambda| + a_{min}|\lambda|^2. \quad (11)$$

Условия I и II, вместе взятые, позволяют установить монотонность, деминепрерывность и коэрцитивность оператора, порождаемого дивергентной частью уравнения (1).

В качестве характерного примера рассмотрим краевую задачу (2), (3) для уравнения (1) без точечных источников и с линейным младшим слагаемым $g_0(x, s) \equiv c_0 s - f(x)$ ($c_0 > 0$ и $f \in L_2(\Omega)$ – некоторые постоянная и функция. Тогда в условии (9) $a_0(x) \equiv c_0$ и $b_0(x) \equiv |f(x)|$):

$$-\operatorname{div} G(x, \nabla w(x)) + c_0 w(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Из теории монотонных операторов [7] и условий (5), (10) и (11) следует существование обобщенного решения этой краевой задачи из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ (его выбор является естественным при линейном росте (10)).

Присутствие в правой части уравнения (1) точечных источников не позволяет непосредственно воспользоваться результатами теории монотонных операторов, поскольку такая правая часть определяет линейный функционал, не принадлежащий пространству, сопряженному к $W_2^{(1)}(\Omega)$. Но для задачи с оператором Лапласа (частный случай (1) при $G(x, \lambda) \equiv \lambda$, $g_0(x, v) \equiv 0$) и точечным источником

$$-\Delta w^*(x) = q^* \delta(x - x^*) \quad (12)$$

решение известно (см., например, [4]) и имеет вид

$$w^*(x) = q^* \phi_n(x - x^*) : \int_{\Omega} (\nabla w^*(x), \nabla \eta(x)) dx = q^* \eta(x - x^*) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(R^n). \quad (13)$$

Здесь функция ϕ_n – фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|), \quad \phi_n(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n |x|^{n-2}}, \quad n \geq 3, \quad (14)$$

где $\sigma_n = \operatorname{mes} S$ – площадь единичной сферы $S = \{x \in R^n : |x| = 1\}$.

Очевидно, что фундаментальное решение ϕ_n принадлежит пространству $W_1^{(1)}(\Omega)$. Для поиска решения исходной задачи на данном этапе ограничимся этим пространством и сформулируем вариационную постановку задачи (1)–(3) следующим образом: найти функцию $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую краевому условию (2) и вариационному равенству (здесь $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2)$ – пространство функций из $C^\infty(\overline{\Omega})$, равных нулю в окрестности множества Γ_1)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (G(x, \nabla w(x)), \nabla \eta(x)) + g_0(x, w(x))\eta(x)dx + \int_{\Gamma_2} \sigma(x)w(x)\eta(x)dx = \\ = \int_{\Gamma_2} w_{\gamma_2}(x)\eta(x)dx + \sum_{i=1}^k q_i \eta(x - x^{(i)}) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2). \end{aligned} \quad (15)$$

Для исследования общего случая потребуется рассмотреть частный случай – линейную краевую задачу, которая представляет интерес и сама по себе.

2. Линейная краевая задача с точечными источниками

Рассмотрим задачу поиска функции $\tilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению и граничным условиям:

$$-\operatorname{div}(a(x)\nabla \tilde{w}(x)) = \sum_{i=1}^k q^{(i)} \delta(x - x^{(i)}), \quad x \in \Omega, \quad (16)$$

$$\tilde{w}(x) = w_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (17)$$

$$(a(x)\nabla \tilde{w}(x), \nu(x)) + \sigma(x)\tilde{w}(x) = w_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (18)$$

Считаем, что все функции и множества удовлетворяют условиям, введенным в предыдущем разделе статьи. Таким образом, линейная краевая задача – частный случай задачи (1)–(3), если выбрать $G(x, \lambda) \equiv a(x)\lambda$ и $g_0(x, v) \equiv 0$. Необходимо найти функцию $\tilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющую краевому условию (17) и вариационному равенству

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x)\nabla \tilde{w}(x), \nabla \eta(x)) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma(x)\tilde{w}(x)\eta(x)dx = \\ = \int_{\Gamma_2} w_{\gamma_2}(x)\eta(x)dx + \sum_{i=1}^k q_i \eta(x - x^{(i)}) \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2). \end{aligned} \quad (19)$$

Предположим дополнительно к введенным условиям, что функция a принадлежит некоторому весовому пространству в точках сосредоточения источников, а именно, выполнено следующее условие:

III. Существуют такие числа $a^{(i)}$, $i = 1, \dots, k$, что имеют место включения

$$\alpha_i \in L_2(\Omega) : \alpha_i(x) \equiv |x - x^{(i)}|^{1-n}(a(x) - a^{(i)}). \quad (20)$$

Из неравенства (6) следует, что $a^{(i)} \geq a_{\min} > 0$, иначе выполнена оценка

$$|\alpha_i(x)| = |x - x^{(i)}|^{1-n}(a(x) - a^{(i)}) \geq |x - x^{(i)}|^{1-n}(a_{\min} - a^{(i)}) \quad \forall x \in \Omega,$$

и понятно, что функция α_i не попадает в пространство $L_2(\Omega)$.

Далее понадобится функция (очевидно, из пространства $W_1^{(1)}(\Omega)$):

$$\Phi(x) \equiv \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) : \varphi_i(x) \equiv \frac{q^{(i)}}{a^{(i)}} \phi_n(x - x^{(i)}). \quad (21)$$

Непосредственно из определения вытекает неравенство

$$|\nabla \varphi_i(x)| = \left| \frac{q^{(i)}(x - x^{(i)})}{a^{(i)} \sigma_n |x - x^{(i)}|^n} \right| \leq C |x - x^{(i)}|^{1-n} \quad \forall x \in \Omega. \quad (22)$$

Из свойств фундаментального решения (14) и введенного условия на расположение точек сосредоточения источников $x^{(i)}$ (они – внутренние для области решения Ω) следует гладкость функции Φ на границе Γ .

Решение задачи (16)–(18) будем искать в виде $\tilde{w} = u + \Phi$. Подставим это представление в (19) и переформулируем задачу относительно функции u . Правую часть, соответствующую точечным источникам, эквивалентно заменим, используя фундаментальное решение оператора Лапласа (12)–(14):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (a(x) \nabla u(x), \nabla \eta(x)) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma(x) u(x) \eta(x) dx &= \int_{\Gamma_2} (w_{\gamma_2}(x) - \sigma(x) \Phi(x)) \eta(x) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\nabla \left[\sum_{i=1}^k q_i \phi_n(x - x^{(i)}) \right], \nabla \eta(x) \right) dx - \int_{\Omega} (a(x) \nabla \Phi(x), \nabla \eta(x)) dx. \end{aligned} \quad (23)$$

По сравнению с (19) изменились краевые условия и правая часть. Чтобы выполнялось условие (17), функция u должна удовлетворять условию Дирихле

$$u(x) = \tilde{w}_{\gamma_1}(x) (\equiv w_{\gamma_1}(x) - \Phi(x)), \quad x \in \Gamma_1, \quad (24)$$

где в силу гладкости функции Φ на границе Γ и свойства w_{γ_1} правая часть $\tilde{w}_{\gamma_1}$ является следом функции из пространства Соболева $W_2^{(1)}(\Omega)$. Из гладкости функции Φ на Γ и условия (4) получим, что функция $\tilde{w}_{\gamma_2} \equiv w_{\gamma_2} - \sigma \Phi$ принадлежит пространству $L_2(\Gamma_2)$.

С учетом (21) рассмотрим более подробно образовавшуюся дивергентную правую часть:

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \nabla \left[\sum_{i=1}^k q_i \phi_n(x - x^{(i)}) \right] - a(x) \nabla \Phi(x) = \\ &= \sum_{i=1}^k a^{(i)} \nabla \left[\frac{q^{(i)}}{a^{(i)}} \phi_n(x - x^{(i)}) \right] - \sum_{i=1}^k a(x) \nabla \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^k (a^{(i)} - a(x)) \nabla \varphi_i(x). \end{aligned}$$

Из неравенства (22) и условия (20) следует, что вектор-функции $F : \Omega \rightarrow R^n$ принадлежит пространству $[L_2(\Omega)]^n$:

$$|F(x)| \leq C \sum_{i=1}^k |a^{(i)} - a(x)| |x - x^{(i)}|^{1-n} = C \sum_{i=1}^k |\alpha_i(x)|, \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, вариационная задача (23), (24) соответствует краевой задаче для функции u с дивергентной правой частью F из $[L_2(\Omega)]^n$:

$$-\operatorname{div}(a(x) \nabla u(x)) = -\nabla F(x), \quad x \in \Omega, \quad (25)$$

$$u(x) = \tilde{w}_{\gamma_1}(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (26)$$

$$(a(x)\nabla u(x), \nu(x)) + \sigma(x)u(x) = \tilde{w}_{\gamma_2}(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (27)$$

Теперь, опираясь на известные результаты о линейных краевых задачах (см., например, [3, § 5, с. 191; § 6, с. 200]), можно утверждать, что задача (23), (24) имеет единственное решение u из пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ (более того, $u \in W_1^{(1)}(\Omega)$). Следовательно, имеет место

Лемма 1. Пусть выполнены (6), (20) (условия II и III), тогда задача (16)–(18), понимаемая как вариационная задача (19), (17), имеет единственное решение $\tilde{w} \in W_1^{(1)}(\Omega)$, которое может быть представлено в виде суммы $\tilde{w} = u + \Phi$, где функция u удовлетворяет (25)–(27), а Φ определена равенством (21).

Далее рассмотрим общий случай.

3. Нелинейная краевая задача с точечными источниками

Рассмотрим нелинейную вариационную задачу (2), (15). Предположим выполненными условия (4)–(9) и (20) (условие III). По данным исходной нелинейной краевой задачи сформулируем линейную задачу (17), (19). Для решения $\tilde{w}$ линейной задачи выше доказано (лемма 1) аддитивное представление $\tilde{w} = u + \Phi$, в котором $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – решение (23), (24), а функция $\Phi \in W_1^{(1)}(\Omega)$ определена в (21).

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде суммы $w = v + \tilde{w} (= v + u + \Phi)$. Подставим это представление в (15) и сформулируем задачу для функции v . Учтем при этом выполненные для $\tilde{w}$ равенства (17) и (19). Получим, что для v должны выполняться однородное условие Дирихле

$$v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (28)$$

и вариационное равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (G(x, \nabla(v(x) + \tilde{w}(x))) - a(x)\nabla\tilde{w}(x), \nabla\eta(x)) dx + \\ & + \int_{\Omega} g_0(x, v(x) + \tilde{w}(x))\eta(x) dx + \int_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x) dx = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Задачу (28), (29) исследуем методами теории монотонных и псевдомонотонных операторов (см. [5]–[7]).

Введем гильбертово пространство $V = \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \Gamma_1\}$ со скалярным произведением и нормой

$$(v, \eta)_V = \int_{\Omega} (\nabla v, \nabla \eta) dx, \quad \|v\|_V^2 = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v, \eta \in V. \quad (30)$$

Для первого из интегралов, входящих в равенство (29), используя предположения (7), (6) (условие II), получим оценку

$$\left| \int_{\Omega} (G(x, \nabla(v + \tilde{w})) - a(x)\nabla\tilde{w}, \nabla\eta) dx \right| = \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\Omega} (G(x, \nabla(v + \tilde{w})) - a(x) \nabla(v + \tilde{w}), \nabla \eta) dx + \int_{\Omega} (a(x) \nabla v, \nabla \eta) dx \right| \leq \\
&\leq \int_{\Omega} |G(x, \nabla(v + \tilde{w})) - a(x) \nabla(v + \tilde{w})| |\nabla \eta| dx + \int_{\Omega} a(x) |\nabla v| |\nabla \eta| dx \leq \\
&\leq \int_{\Omega} b(x) |\nabla \eta| dx + a_{\max} \int_{\Omega} |\nabla v| |\nabla \eta| dx \leq (\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{\max} \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}) \|\nabla \eta\|_{L_2(\Omega)} = \\
&= (\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{\max} \|v\|_V) \|\eta\|_V \quad \forall v, \eta \in V.
\end{aligned}$$

В силу (31) можем определить нелинейный и ограниченный оператор $B : V \rightarrow V$ следующим правилом:

$$(Bv, \eta)_V \equiv \int_{\Omega} (\tilde{G}(x, \nabla v), \nabla \eta) dx \quad \forall v, \eta \in V, \quad (32)$$

где функция $\tilde{G}(x, \lambda) \equiv G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - a(x) \nabla \tilde{w}(x) : \Omega \times R^n \rightarrow R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по $x \in \Omega$ для каждого $\lambda \in R^n$ и непрерывна по λ для почти всех $x \in \Omega$ (поскольку эти условия выполнены для G).

Для функции $\tilde{G}$ из (5) следует монотонность по λ :

$$\begin{aligned}
&(\tilde{G}(x, \lambda) - \tilde{G}(x, \mu), \lambda - \mu) = \\
&= (G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - G(x, \mu + \nabla \tilde{w}(x)), (\lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - (\mu + \nabla \tilde{w}(x))) \geq 0,
\end{aligned} \quad (33)$$

а из (7), (6) – линейная оценка роста

$$\begin{aligned}
&|\tilde{G}(x, \lambda)| = |G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - a(x) \nabla \tilde{w}(x) \mp a(x) \lambda| \leq \\
&\leq |G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - a(x)(\lambda + \nabla \tilde{w}(x))| + a(x) |\lambda| \leq b(x) + a_{\max} |\lambda|
\end{aligned} \quad (34)$$

и неравенство (коэрцитивность)

$$\begin{aligned}
&(\tilde{G}(x, \lambda), \lambda) = (G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - a(x) \nabla \tilde{w}(x) \mp a(x) \lambda, \lambda) \geq \\
&\geq -|G(x, \lambda + \nabla \tilde{w}(x)) - a(x)(\lambda + \nabla \tilde{w}(x))| |\lambda| + a(x) |\lambda|^2 \geq -b(x) |\lambda| + a_{\min} |\lambda|^2.
\end{aligned} \quad (35)$$

Используя свойства функции $\tilde{G}$, получим из (33) монотонность

$$(Bv - B\eta, v - \eta)_V = \int_{\Omega} (\tilde{G}(x, \nabla v) - \tilde{G}(x, \nabla \eta), \nabla v - \nabla \eta) dx \geq 0$$

и из (35) коэрцитивность оператора $B : V \rightarrow V$ (см. [7, с. 80])

$$\begin{aligned}
(Bv, v)_V &= \int_{\Omega} (\tilde{G}(x, \nabla v), \nabla v) dx \geq \int_{\Omega} -b(x) |\nabla v| + a_{\min} |\nabla v|^2 dx \geq \\
&\geq (-\|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{\min} \|v\|_V) \|v\|_V \quad \forall v \in V.
\end{aligned} \quad (36)$$

Линейный рост (34) и свойства Каратеодори функции $\tilde{G}$ обеспечивают (см. [5, с. 204], [7, с. 57]) деминепрерывность оператора B :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i - v\|_V = 0 \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} (Bv_i - Bv, \eta)_V = 0 \quad \forall \eta \in V.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Оператор $B : V \rightarrow V$, определенный в (32), является ограниченным, деминепрерывным, монотонным и коэрцитивным.*

Далее рассмотрим второй интеграл в равенстве (29). Введем функцию $\tilde{g}_0(x, s) \equiv g_0(x, s + \tilde{w}(x)) : \Omega \times R^1 \rightarrow R^1$. Функция g_0 удовлетворяет условиям Каратеодори, значит, $\tilde{g}_0$ измерима по $x \in \Omega$ и непрерывна по s при почти всех x . Из неравенств (8) и (9) следует оценка

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_0(x, s)| &= |g_0(x, s + \tilde{w}(x)) \mp a_0(x)(s + \tilde{w}(x))| \leq \\ &\leq |g_0(x, s + \tilde{w}(x)) - a_0(x)(s + \tilde{w}(x))| + a_0(x)|s + \tilde{w}(x)| \leq \\ &\leq b_0(x) + a_{\max}|s| + a_{\max}|\tilde{w}(x)| \leq \\ &\leq (b_0(x) + a_{\max}|u(x)| + a_{\max}|\Phi(x)|) + a_{\max}|s|. \end{aligned} \quad (37)$$

Из определения (21) и (14) следует, что при $n \geq 3$ функция Φ принадлежит пространству $L_r(\Omega)$ для любого $1 \leq r < r^* \equiv n/(n-2)$. Поскольку область Ω ограниченная, а функции b_0 и u – из пространства $L_2(\Omega)$, то функция $(b_0 + a_{\max}|u| + a_{\max}|\Phi|)$ принадлежит пространству $L_r(\Omega)$. Тогда функция $\tilde{g}_0$, в силу неравенства (37), порождает непрерывный оператор $hv \equiv \tilde{g}_0(x, v(x)) : L_r(\Omega) \rightarrow L_r(\Omega)$ (оператор Немыцкого, см. [5, с. 204, теорема 19.1 (основная)]). При $n = 2$ функция Φ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, и $\tilde{g}_0$ порождает непрерывный оператор $hv \equiv \tilde{g}_0(x, v(x)) : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$.

Для оценки второго интеграла из равенства (29) воспользуемся теоремой вложения Соболева (результат хорошо известен, формулировку см., например, в [7, с. 47, теорема 1.2]): в случае $n \geq 3$ из включения $|\nabla \eta| \in L_2(\Omega)$ следует, что сама функция η – из пространства $L_p(\Omega)$, где показатель p удовлетворяет равенству $1/p = 1/2 - 1/n$, а в случае $n = 2$ можно взять любой показатель $p \geq 1$.

Показатель p^* , сопряженный к p (выполнено равенство $1/p + 1/p^* = 1$, следовательно, $p^* = 2n/(n+2)$), при $n \leq 5$ удовлетворяет неравенству $1 \leq p^* < r^*$. Тогда для любой функции $v \in V$ (тем более, $v \in L_{p^*}(\Omega)$) выполнено включение $hv \equiv \tilde{g}_0(x, v(x)) \in L_{p^*}(\Omega)$. Используя неравенство Гёльдера, получим следующее неравенство (C^* – постоянная из неравенства вложения Соболева):

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{g}_0(x, v(x)) \eta dx \right| \leq \|hv\|_{L_{p^*}(\Omega)} \|\eta\|_{L_p(\Omega)} \leq \|hv\|_{L_{p^*}(\Omega)} C^* \|\eta\|_V. \quad (38)$$

В силу (38) при $n \leq 5$ нелинейный и ограниченный оператор $T : V \rightarrow V$ определен следующим правилом

$$(Tv, \eta)_V \equiv \int_{\Omega} g_0(x, v + \tilde{w}) \eta dx \quad \forall v, \eta \in V. \quad (39)$$

Поскольку из слабой сходимости последовательности $\{v_i\}$ к v в пространстве V (по теореме Реллиха–Кондрашова о компактном вложении, формулировку см., например, в [7, с. 47, лемма 1.28]) следует сильная сходимость этой последовательности в пространстве $L_{p^*}(\Omega)$, а в силу непрерывности оператора Немыцкого – сходимость последовательности $\{hv_i\}$ к hv в $L_{p^*}(\Omega)$, получим сходимость последовательности $\{(Tv_i, \eta)_V\}$ к $(Tv, \eta)_V$, или слабую непрерывность оператора T в пространстве V .

Далее, для оператора $T : V \rightarrow V$ из неравенств (8) и (9) следует оценка

$$\begin{aligned}
 (Tv, v)_V &= \int_{\Omega} g_0(x, v + \tilde{w}) v dx = \int_{\Omega} (g_0(x, v + \tilde{w}) \mp a_0(x)(v + \tilde{w})) v dx = \\
 &= \int_{\Omega} (g_0(x, v + \tilde{w}) - a_0(x)(v + \tilde{w})) v + a_0(x)v^2 + a_0(x)\tilde{w}v dx \geq \\
 &\geq \int_{\Omega} -b_0(x)|v| - |a_0(x)uv| - |a_0(x)\Phi v| dx \geq \\
 &\geq -\|b\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} - a_{\max}(\|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} + \|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)}\|v\|_{L_p(\Omega)}) \geq \\
 &\geq (-\|b\|_{L_2(\Omega)} - a_{\max}(\|u\|_{L_2(\Omega)} + C^*\|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)}))\|v\|_V = -C\|v\|_V \quad \forall v \in V.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь величина $C = \|b\|_{L_2(\Omega)} + a_{\max}(\|u\|_{L_2(\Omega)} + C^*\|\Phi\|_{L_{p^*}(\Omega)})$ (постоянная C^* та же, что и в неравенстве (38)) остается неизменной для произвольной функции $v \in V$.

Таким образом, доказана следующая

Лемма 3. Пусть размерность пространства удовлетворяет неравенству $n \leq 5$, тогда правилом (39) определен ограниченный, слабо непрерывный оператор $T : V \rightarrow V$, и для него выполнено неравенство (40).

Для третьего (последнего) из интегралов, входящих в равенство (29), с учетом (4), выполнено очевидное неравенство

$$\left| \int_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x)dx \right| \leq \bar{\sigma}\|v\|_{L_2(\Gamma_2)}\|\eta\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C\|v\|_V\|\eta\|_V \quad \forall v, \eta \in V,$$

позволяющее определить линейный ограниченный оператор $L : V \rightarrow V$ следующим правилом:

$$(Lv, \eta)_V \equiv \int_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)\eta(x)dx \quad \forall v, \eta \in V. \tag{41}$$

В силу (4) оператор L является неотрицательным:

$$(Lv, \eta)_V = \int_{\Gamma_2} \sigma(x)v(x)v(x)dx \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{42}$$

Итак, имеет место

Лемма 4. Оператор $L : V \rightarrow V$, определенный в (41), линеен, ограничен и неотрицателен.

Перейдем теперь к доказательству основного результата настоящей работы.

4. Основной результат и примеры

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4)–(9) и (20), размерность пространства удовлетворяет неравенству $n \leq 5$. Тогда функция $w = v + u + \Phi$, где функция Φ задана равенством (21), функция $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – единственное решение линейной задачи (25)–(27), а функция $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ – любое решение нелинейной вариационной задачи (28), (29), будет решением вариационной задачи (2), (15) (краевой задачи (1)–(3)).

Множество решений задачи (28), (29) непусто и слабо замкнуто в гильбертовом пространстве V ($V \equiv \{v \in W_2^{(1)}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \Gamma_1\}$, с нормой (30)).

Доказательство. Первая часть теоремы уже доказана в предыдущих разделах статьи. Осталось установить существование решения вариационной задачи (28), (29), которая, в силу лемм 2–4, сводится к поиску функции $v \in V$, удовлетворяющей вариационному условию

$$(Bv, \eta)_V + (Tv, \eta)_V + (Lv, \eta)_V = 0 \quad \forall \eta \in V. \quad (43)$$

Задача (43) эквивалентна операторному уравнению

$$Av = 0, \quad A \equiv B + T + L : V \rightarrow V. \quad (44)$$

Из неравенств (36), (40) и (42) следует коэрцитивность оператора $A : V \rightarrow V$ (см., например, [7, с. 80, определение 1.3]):

$$(Av, v)_V \geq (a_{\min} \|v\|_V - \|b\|_{L_2(\Omega)}) \|v\|_V - C \|v\|_V = \gamma(\|v\|_V) \|v\|_V \quad \forall v \in V, \quad (45)$$

$$\gamma(s) \equiv a_{\min} s - \|b\|_{L_2(\Omega)} - C, \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \gamma(s) = +\infty.$$

Оператор L , в силу леммы 4, линеен, ограничен и неотрицателен. Тогда, используя лемму 2, получим, что оператор $B + L$ является ограниченным, деминепрерывным и монотонным. По лемме 3 (размерность пространства $n \leq 5$) оператор T ограниченный и слабо непрерывный. Значит, оператор $A = (B + L) + T$ (как сумма деминепрерывного монотонного и слабо непрерывного операторов, см. [7, с. 96, замечание 2.1]) обладает свойством (М) [6, с. 184] (см. также [7, с. 84, условие с) леммы 1.3]):

$$[v_i \rightharpoonup v] \& [Av_i \rightharpoonup f] \& [\overline{\lim}(Av_i, v_i)_V \leq (f, v)_V] \Rightarrow Av = f \quad (46)$$

и является ограниченным и деминепрерывным.

Из полученного свойства (46), деминепрерывности, ограниченности и коэрцитивности (45) оператора A следует (см. [7, с. 96, следствие 2.1], [6, с. 184, теорема 2.1]), что множество решений операторного уравнения (44) непусто и слабо замкнуто в пространстве V . Теорема доказана. $\square$

Приведем пример функции G (из теории нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости в двух- и трехмерном пространствах, среда неоднородная и изотропная), для которой выполнены предположения I–III:

$$G(x, \lambda) \equiv \frac{h(x, |\lambda|)}{|\lambda|} \lambda; \quad h(x, s) \equiv \kappa(x) [s - \mu(x)]_+; \quad [s]_+ \equiv \begin{cases} 0, & s < 0, \\ s, & s \geq 0, \end{cases} \quad (47)$$

где функции $\mu, \kappa : \Omega \rightarrow R$ измеримы и ограничены:

$$0 \leq \mu(x) \leq \bar{\mu}, \quad 0 < \underline{\kappa} \leq \kappa(x) \leq \bar{\kappa}. \quad (48)$$

Очевидно, что для функции G , определенной в (47), выполнено условие Каратеодори, и легко проверить монотонность (5) (условие I).

Воспользовавшись неравенствами (48) и определением (47), получим оценку

$$\begin{aligned} |G(x, \lambda) - \kappa(x)\lambda| &= \left| \kappa(x) \frac{[|\lambda| - \mu(x)]_+}{|\lambda|} \lambda - \kappa(x) \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \lambda \right| = \\ &= \kappa(x) |[|\lambda| - \mu(x)]_+ - |\lambda|| \leq \bar{\kappa} \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Значит, при $a(x) \equiv \kappa(x)$, $a_{\min} = \underline{\kappa}$, $a_{\max} = \bar{\kappa}$ и $b(x) \equiv \bar{\kappa} \bar{\mu}$ выполнено условие II.

Будем считать, что в рассматриваемой задаче имеется один источник, находящийся в начале координат ($x^{(1)} = 0$ – внутренняя точка области Ω), для функции κ существуют положительные постоянные κ_0, r, c , для случая $n = 2$ – постоянная $\beta > 0$, а для случая $n = 3$ – постоянная $\beta > 0.5$, и выполнено условие

$$|\kappa(x) - \kappa_0| \leq c|x|^\beta \quad \forall x \in B_r(0) \subset \Omega,$$

т. е. функция κ непрерывна по Гёльдеру в начале координат (в точке сосредоточения источника) с показателем β . Тогда справедливо неравенство

$$[|x|^{1-n}|\kappa(x) - \kappa_0|]^2 \leq \frac{c}{|x|^{n-(2\beta+2-n)}} = \frac{c}{|x|^{n-\varepsilon}} \quad \forall x \in B_r(0), \quad (49)$$

где $\varepsilon = (2\beta + 2 - n) > 0$ при $n = 2$ ($\beta > 0$) или $n = 3$ ($\beta > 0.5$).

Положим теперь $a^{(1)} = \kappa_0$. Тогда из оценки (49) следует, что функция

$$\alpha_1(x) \equiv |x - x^{(1)}|^{1-n}(a(x) - a^{(1)}) = |x|^{1-n}|\kappa(x) - \kappa_0|$$

принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, т. е. выполнено условие III.

Функция G , определенная в (47), моделирует закон фильтрации с предельным градиентом (в той части области, где $\mu > 0$) и линейный закон (Дарси) фильтрации в подобласти, где $\mu \equiv 0$.

Заключение

Изложенные выше рассуждения и основной результат (теорема 1) могут быть использованы для построения метода приближенного решения задачи (1)–(3). Алгоритм нахождения обобщенного решения состоит в следующем: по данным нелинейной задачи (1)–(3) равенством (21) определим функцию Φ , найдем решение u линейной задачи (25)–(27), а затем решим нелинейную вариационную задачу (28), (29).

Для решения задач (25)–(27) и (28), (29) могут быть использованы известные методы, применяемые для решения классических линейных и нелинейных задач (монотонного типа). В частности, при аппроксимации указанных выше краевых задач можно использовать регулярные сетки (без сгущения в окрестности точечного источника) в конечно-элементных и конечно-разностных методах.

Отметим, что для уравнения с сильно монотонной дивергентной частью и без младшего слагаемого в работах [11], [12] рассмотрен итерационный метод, установлена сходимость в пространстве Соболева и в равномерной норме.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
2. *Ильин В.П.* Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985. 336 с.
3. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
4. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.
5. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: Гостехиздат, 1956. 344 с.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захарьас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
8. *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации // Изв. вузов. Матем. 1975. № 6. С. 73–81.
9. *Задворнов О.А.* Исследование нелинейной стационарной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Изв. вузов. Матем. 2005. № 1. С. 58–63.
10. *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 1. С. 155–163.
11. *Задворнов О.А., Задворнова Г.О.* О решении нелинейной стационарной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 7. С. 984–988.
12. *Задворнов О.А., Трифонова Г.О.* Итерационный метод решения нелинейной краевой задачи с точечным источником // Изв. вузов. Матем. 2022. № 5. С. 74–79.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-5-74-79>.

Поступила в редакцию 15.05.2024

Принята к публикации 23.05.2024

Задворнов Олег Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: olzad@mail.ru

Трифопова Галина Олеговна, ассистент Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: gaozadvornova@kpfu.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 2, pp. 173–186

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.173-186

**Mixed Boundary Value Problem for a Monotone Equation
with a Lower Order Term and Point Sources on the Right Side**

*O.A. Zadvornov**, *G.O. Trifonova***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *olzad@mail.ru, **gaozadvornova@kpfu.ru

Received May 15, 2024; Accepted May 23, 2024

Abstract

The existence of a solution to the mixed boundary value problem for a quasilinear equation with a lower order term and point sources on the right side was proved. The solution was obtained in an additive form, and the features associated with point sources were clearly highlighted. The approach used in the proof can serve as a basis for a method of solving this type of problem.

Keywords: nonlinear boundary value problem, point source, additive extraction

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [The Motion of Fluids and Gases in Natural Strata]. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)
2. Ilyin V.P. *Chislennyye metody resheniya zadach elektrofiziki* [Numerical Methods for Solving Problems of Electrophysics]. Moscow, Nauka, 1985. 336 p. (In Russian)
3. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (In Russian)
4. Vladimirov V.S. *Obobshchennyye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979. 320 p. (In Russian)
5. Vainberg M.M. *Variatsionnyye metody issledovaniya nelineynykh operatorov* [Variational Methods for Studying Nonlinear Operators]. Moscow, Gostekhizdat, 1956. 344 p. (In Russian)
6. Lions J.-L. *Nekotoryye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Mir, 1972. 587 p. (In Russian)
7. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations]. Moscow, Mir, 1978. 336 p. (In Russian)
8. Lyashko A.D., Karchevskii M.M. The solution of certain nonlinear problems of filtration theory. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1975, vol. 19, no. 6, pp. 60–66.

9. Zadvornov O.A. Investigation of a nonlinear stationary filtration problem in the presence of a point source. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 1, pp. 53–59.
10. Zadvornov O.A. Existence of solutions for quasilinear elliptic boundary value problem in the presence of point sources. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 1, pp. 155–163. (In Russian)
11. Zadvornov O.A., Zadvornova G.O. On the solution of a nonlinear stationary inhomogeneous filtration problem with a point source. *Differ. Equations*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 976–980. <https://doi.org/10.1134/S0012266114070131>.
12. Zadvornov O.A., Trifonova G.O. Iteration method for solving a nonlinear boundary value problem with a point source. *Russ. Math.*, 2022, vol. 66, no. 5, pp. 60–64. <https://doi.org/10.3103/S1066369X22050085>.

Для цитирования: Задворнов О.А., Трифонова Г.О. Смешанная краевая задача для уравнения монотонного типа с младшим слагаемым при наличии точечных источников в правой части // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 173–186. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.173-186>.

For citation: Zadvornov O.A., Trifonova G.O. Mixed boundary value problem for a monotone equation with a lower order term and point sources on the right side. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 173–186. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.173-186>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 543.429.22+544.022.341

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.187-199

**ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ ФОТОВОЗБУЖДЕНИЯ
НА СПИНОВУЮ ПОЛЯРИЗАЦИЮ
АЗОТ-ВАКАНСИОННЫХ ЦЕНТРОВ
В ИЗОТОПНО-ОБОГАЩЕННОМ
КАРБИДЕ КРЕМНИЯ 6H-²⁸SiC**

*Ф.Ф. Мурзаханов¹, Г.В. Мамин¹, М.А. Садовникова¹,
Д.В. Шуртакова¹, О.П. Казарова², Е.Н. Мохов², М.Р. Гафуров¹*

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
г. Санкт-Петербург, 194021, Россия

Аннотация

Спиновые дефекты в полупроводниках привлекают интерес как материальная основа для реализации квантово-информационных и вычислительных технологий. В данной работе исследованы спиновые свойства отрицательно заряженных азот-вакансионных (NV^-) центров в обогащенном изотопом ²⁸Si кристалле карбида кремния 6H-SiC методами высокочастотного (94 ГГц) электронного парамагнитного резонанса (ЭПР). Благодаря наличию у NV^- -центров оптического канала возбуждения удается произвести инициализацию электронного спина дефекта лазерным источником, многократно повысив интенсивность регистрируемого сигнала ЭПР. Исследованы зависимости наблюдаемой спиновой поляризации при различных длинах волн оптического возбуждения ($\lambda = 640 - 1064$ нм), выходной мощности (от 0 до 500 мВт) и температуры (50 – 300 К) кристалла. Полученные результаты позволяют определить оптимальные экспериментальные условия для достижения наибольшей эффективности передачи энергии оптического кванта в спиновую систему. Это открывает новые возможности для создания мультикубитных спин-фотонных интерфейсов, оперирующих в инфракрасной области, на основе NV^- -центров в 6H-SiC.

Ключевые слова: спин-оптическое свойство, спиновая инициализация, спиновая поляризация, электронный парамагнитный резонанс, карбид кремния, NV^- -центр

Введение

Развитие современных информационно-вычислительных технологий способствует более глубокому пониманию различных экспериментальных явлений или процессов практически во всех научных сферах и дисциплинах, включая физику конденсированного состояния и материаловедение. При этом на текущий момент вычислительная мощность современных процессоров уже достигает своего предела из-за физического ограничения наноразмерных транзисторов и конечной величины скорости света. На стыке тысячелетий был предложен принципиально новый

подход, предлагающий использовать логические операции на основе явлений из теории квантовой механики [1]. В роли элементарной единицы информации предлагается использовать квантовый бит или кубит, физическая реализация которого может быть основана на использовании электронного или ядерного спина атома, поляризации фотона и энергетических состояний сверхпроводящего джозефсоновского контакта или ультрахолодных ридберговских атомов [2]. Данные системы характеризуются двумя основополагающими свойствами – суперпозиция и квантовая запутанность, или скоррелированность двух и более кубитов. Сочетание данных свойств позволит квантовому компьютеру находить решение не методом «перебора» и «поиска минимума», как в классическом случае, а практически мгновенно при считывании состояния кубита, который может занимать любое положение в сфере Блоха между условными уровнями (волновыми функциями) 0 и 1 [3].

С одной стороны, кубит должен быть хорошо изолирован от внешних шумов в виде тепловых или иных флуктационных воздействий, которые неконтролируемо изменяют его исходное состояние или приводят к нежелательным фазовым сдвигам, что в конечном итоге нарушает когерентную эволюцию системы. С другой стороны, реализация квантового алгоритма в течение времени фазовой когерентности (памяти) подразумевает проведение ряда контролируемых воздействий оптически, микроволновыми или радиочастотными импульсами на кубиты, называемые квантовые ворота или вентили, с последующим считыванием финального (конечного) состояния. На практике точность работы (операций) с физическими кубитами неидеальна, требуется проведение квантовой коррекции ошибок. При этом, несмотря на продемонстрированное вычислительное превосходство квантовых симуляторов над классическими аналогами при решении одной и той же модельной задачи, квантовые технологии по-прежнему находятся в зачаточном состоянии, требуя существенного развития как материальной базы, так и знаний об алгоритмах квантовой обработки информации [4].

Одним из направлений для развития современных квантовых технологий является поиск и апробация новых твердотельных платформ, в которых могут быть реализованы надежные, соответствующие основным критериям кубиты. Растущую популярность приобретают дефекты в полупроводниковых материалах [5]. К наиболее известным примерам можно отнести азот-вакансионный (NV^-) центр в алмазе [6], вакансионные центры в семействе карбидов кремния (SiC) [7] и вакансию бора в двумерном кристалле гексагонального нитрида бора (hBN) [8]. Все указанные выше системы характеризуются наличием уровня энергии в запрещенной зоне полупроводника, высокоспиновым состоянием (электронный спин $S = 1$) с расщеплением в нулевом магнитном поле D , возможностью спиновой инициализации при помощи оптического кванта и спектром люминесценции в видимом и ближнем инфракрасном (ИК) диапазонах, что дало название соответствующим дефектам – центры окраски. Высокоспиновые центры окраски привлекают к себе внимание благодаря эффективному взаимодействию с оптическим квантом, который может выступать в качестве канала для скоростной передачи энергии (данных), а центр окраски необходим для хранения и обработки квантовой информации. Квантовые устройства, основанные на когерентной связи между импульсом поляризованного света («летающий» кубит) и спиновым состоянием кубита (стационарный тип) получили название «спин-фотонные интерфейсы». Сочетание двух принципиально различающихся кубитных систем с возможностью преобразования микроволновой энергии в свет для обмена и распространения информации на большие расстояния позволяет расширить функциональные возможности квантовых технологий для более широкого класса фундаментальных и прикладных задач [9].

Среди перечисленных выше центров окраски наиболее изученным является NV^- -центр в алмазе. Другие дефекты и матрицы изучены в гораздо меньшей степени. В данной работе методом фотоиндуцированного электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) была исследована спиновая поляризация NV^- -центров в кристалле SiC гексагонального поли типа 6H в зависимости от длины волны возбуждающего оптического импульса, мощности лазерного источника и температуры исследуемого кристалла с целями демонстрации возможности «конвертирования» оптического кванта энергии в микроволновую с образованием спинового выстраивания и инверсии заселенности.

1. Материал

Полупроводниковые кристаллы 6H-SiC с изотопным обогащением ядрами ^{28}Si (ядерный спин $I = 0$) для уменьшения влияния ядерной подсистемы на процессы фазовой когерентности ансамбля электронных спинов были выращены путем высокотемпературной сублимации из газовой фазы (physical vapor transport) с предварительным использованием прекурсора, обогащенного изотопом ^{28}Si (до $\approx 99\%$). Содержание изотопа ^{29}Si ($I = 1/2$) в выращенных образцах было определено методом ЭПР и составило порядка 1%, что более чем в четыре раза меньше относительно его естественной распространенности (4.67%) [10]. Концентрация примесного азота в кристалле была равна $C \approx 10^{17} \text{ см}^{-3}$. С целью создания вакансионных центров образцы 6H- ^{28}SiC были облучены электронами с энергией 2 МэВ и номинальной дозой $4 \times 10^{18} \text{ см}^{-2}$. Для образования стабильных отрицательно заряженных азот-вакансионных комплексов кристаллы после облучения отжигались при температуре $T = 900^\circ \text{C}$ в атмосфере аргона в течение 2 часов. Для дальнейшего исследования NV^- -центров методами спектроскопии ЭПР были подготовлены образцы размером $0.45 \times 0.45 \times 0.67 \text{ мм}^3$.

2. Метод

Спектры ЭПР в W-диапазоне (94 ГГц) были получены на коммерческом спектрометре Bruker Eleksys E680 (Карлсруэ, ФРГ), оснащенном гелиевым продувным криостатом и сверхпроводящим магнитом для создания магнитной индукции на образце вплоть до значений $B_0 = 6 \text{ Тл}$. В импульсном режиме использовалась последовательность Хана ($\pi/2 - \tau - \pi$) с длительностью микроволнового (сверхвысокочастотного, СВЧ) импульса $\pi/2 = 40 \text{ нс}$ и временем задержки между импульсами $\tau = 1.2 \text{ мкс}$. При этом регистрировалась интегральная интенсивность электронного спинового эха (ЭСЭ) в зависимости от величины магнитного поля B_0 . Эксперименты по фотоиндуцированному ЭПР были проведены с использованием непрерывных твердотельных лазеров с длинами волн λ : 640 нм, 785 нм, 808 нм, 980 нм и 1064 нм и выходной мощностью P вплоть до 500 мВт.

3. Результаты и обсуждения

Несмотря на кажущуюся простоту химической формулы кристаллов карбида кремния (SiC состоит из двух ковалентно связанных атомов углерода C и кремния Si с равным атомарным соотношением), их особенностью является наличие множества структурных модификаций (более 250), называемое поли типизмом, которое обусловлено вариативностью положения атомов вдоль кристаллографической оси c [11]. На рис. 1а) показана структура SiC гексагонального поли типа 6H, которая содержит три структурно-неэквивалентных позиции для каждого

из атомов, отмеченных как $k1$, h и $k2$. Данные позиции отличаются локальным межатомным расстоянием и симметрией во второй координационной сфере, где h – гексагональная, а k – квазикубическая симметрия. При внедрении примеси азот занимает позицию углерода N_C . Облучение кристалла потоком высокоэнергетических частиц приводит к выбиванию с приблизительно равной вероятностью атомов кремния и углерода с соответствующим образованием дефектов по Френкелю [12]. Вакансионные центры подвержены диффузии даже при комнатной температуре, поэтому указанный выше температурный отжиг (раздел 1) приводит к появлению в SiC прочно связанной пары дефектов N_C и V_{Si} , микроскопическая структура которых уже не разрушается даже при 2000°C .

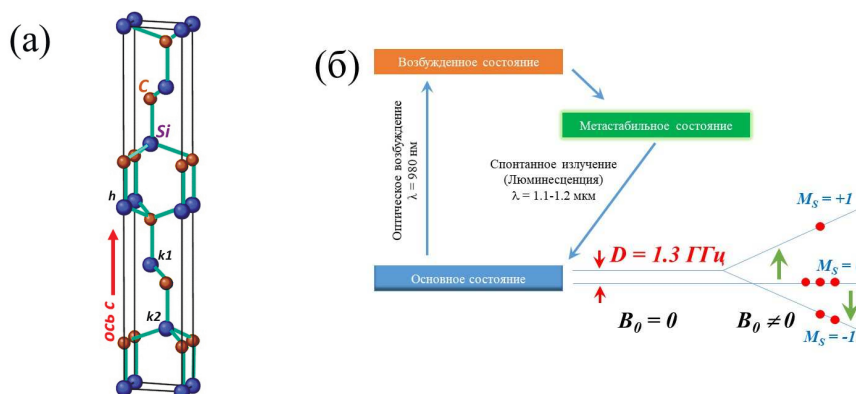


Рис. 1. а) Структура объемного кристалла карбида кремния SiC гексагонального политипа 6H, состоящего из атомов углерода (коричневый шарик) и кремния (синий). Символами h , $k1$ и $k2$ обозначены чередующиеся структурно-неэквивалентные позиции атомов [13]; б) схема оптической поляризации азот-вакансионных состояний лазерным источником. Благодаря механизму интеркомбинационной конверсии при переходе дефекта с возбужденного орбитального (3E) состояния на основное (3A) происходит заселение спинового подуровня с $M_S = 0$. Стрелками показаны переходы ЭПР, образующие сигнал поглощения и излучения (инверсия населенности) микроволновой энергии

Образование примесного уровня дефекта в запрещенной зоне SiC обеспечивает внутрицентровые оптические переходы с сохранением зарядового состояния. Особенностью высокоспиновых центров окраски в широкозонных полупроводниках алмаза и карбида кремния при фотоиндуцировании является наличие спин-зависимого цикла «возбуждение-рекомбинация», показанного на рис. 1 б). Как правило, механизм интеркомбинационной конверсии, участвующий при излучательном переходе с метастабильного состояния в основное, приводит к заселению немагнитного уровня с $M_S = 0$. Данный эффект получил название оптической спиновой инициализации центров окраски. Спектры ЭПР исследуемых в данной работе центров окраски в 6H-SiC в зависимости от длины волны лазерного возбуждения показаны на рис. 2. Наблюдается группа линий в области спектроскопического g -фактора $g = 2.003$ и дублетные структуры с расщеплением около 1300 МГц и $\approx 2600\text{ МГц}$. Выявлено, что интенсивность резонансного поглощения при $g = 2.003$ (зеленая линия) не зависит от наличия оптического возбуждения, и поэтому их природа и свойства не исследовались в данной работе. На основе ранее полученных результатов методом стационарного ЭПР в X-диапазоне ($9,4\text{ ГГц}$) [13] две оставшиеся структуры были отнесены к отрицательно заряженным азот-вакансионным центрам. Стоит сказать, что разбиение линии и соответствующее образование низ-

кополевой и высокополевой компонент связано с так называемым расщеплением спиновых уровней величинами D и E в нулевом магнитном поле (англ. zero-field splitting), или тонкой структурой. Такой вид спектра характерен для высокоспиновых центров ($S \geq 1$), взаимодействующих с локальным градиентом электрического поля через спин-орбитальную связь. Для описания NV^- -центров с электронным спином $S = 1$ принято использовать следующий полный спиновый гамильтониан:

$$H = g\mu_B \mathbf{BS} + D \left(S_z^2 - \frac{2}{3} \right) + E(S_x^2 - S_y^2) + A_{\parallel} S_z I_z + A_{\perp} (S_x I_x + S_y I_y) + P \left(I_z^2 - \frac{2}{3} \right), \quad (1)$$

где μ_B – магнетон бора, $S_{x,y,z}$ и $I_{x,y,z}$ – проекции электронного и ядерного спина, A и P – величины сверхтонкого и квадрупольного взаимодействий.

Во многих политапах SiC (3C, 4H, 6H, 15R) можно выделить две точечные группы симметрии для центров окраски: аксиальные центры с симметрией C_{3v} и базальные центры с симметрией C_{1h} [14]. На рис. 2 а) в спектрах ЭПР аксиальные NV^- -центры обладают тонкой структурой D , приблизительно равной 1,3 ГГц, и, соответственно, расщеплением в параллельной ориентации кристалла относительно B_0 величиной $2D = 93$ мТл (≈ 2600 МГц). Меньшая величина связана с тем, что основная z -ось микроскопической структуры базального центра отклонена на $\approx 70^\circ$ C относительно кристаллографической оси c кристалла. Ранее было показано, что базальные центры при оптимальных экспериментальных условиях имеют величину D примерно такого же порядка (1.25 ГГц), что и аксиальные [13]. Также на спектрах ЭПР можно заметить, что каждая компонента тонкой структуры содержит по три линии, которые связаны с тремя NV^- -центрами в разных позициях кристалла ($k1k2$, hh и $k2k1$), но с одинаковой точечной группой симметрии. Каждая из этих трех структурно-неэквивалентных позиций NV^- -центров немного отличается локальным окружением во вторых координационных сферах и расстоянием между вакансией кремния и атомом азота, что в спектрах ЭПР сказывается на величине D .

Как видно на рис. 2 а), компоненты тонкой структуры NV^- -центров инвертированы по фазе относительно друг друга, что, как упоминалось выше для аналогичных дефектов, связано с оптически индуцируемым нарушением термодинамического бальмановского равновесия спиновой системы с преимущественным заселением состояния с $M_S = 0$. Таким образом, низкополевого компонента соответствует сигналу поглощения микроволновой энергии, а высокополевого – излучению между состояниями с $M_S = 0$ и $M_S = -1$ с инверсией населенности. Эффективная спиновая поляризация наблюдается для длин волн от 785 нм до 1064 нм, и ниже данного диапазона (от 640 нм) отклик спиновых дефектов на свет полностью пропадает. Рис. 1 б) демонстрирует, что оптическое возбуждение с $\lambda = 1064$ нм образует существенное перераспределение интенсивностей между NV_{k1k2} и NV_{k2k1} . Спектры фотоиндуцированного ЭПР с $\lambda = 808$ нм и 785 нм содержат только слабо интенсивные аксиальные центры. Отсутствие сигналов ЭПР от базальных центров при оптическом возбуждении с данными длинами волн, возможно, связано с вероятностью переходов между орбитальными (оптическими) уровнями, существенно меньшими из-за разницы в симметрии [15]. Использование лазера с $\lambda = 640$ нм благодаря большему кванту энергии (1,94 эВ) приводит к «переносу» центра в более высокие возбужденные уровни, близкие к зоне проводимости, находящиеся вне оптимальной полосы оптического поглощения материала.

Преимуществом возбуждения центров окраски длинами волн 980 нм и 1064 нм является близость данного диапазона к инфракрасной области, вместе со спектром люминесценции с 1,1 – 1,2 мкм данных дефектов [7]. Подобный результат открывает новые возможности и перспективы интегрирования кубитных структур для

квантовых технологий на основе NV^- -центров в 6H-SiC с существующей оптоволоконной электроникой для конечного сочетания квантовых, электрических и оптических способов высокоскоростной обработки, передачи и хранения информации. Данные длины волн могут быть пригодными для изучения биологических объектов (полоса пропускания также в области ближнего ИК-диапазона), где NV^- -центры в 6H-SiC могут выступать в качестве высокочувствительных биосенсоров.

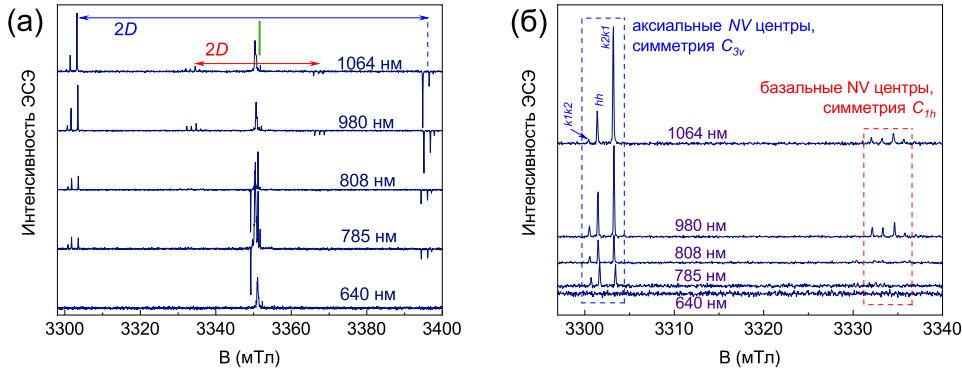


Рис. 2. а) Спектры ЭПР центров окраски в 6H-SiC с полной разверткой по магнитному полю; б) детальный вид низкополевых компонент тонкой структуры в зависимости от длины волны оптического возбуждения. Эксперименты проведены при $T = 297$ K

В качестве источника оптического возбуждения для дальнейших исследований был выбран лазер с $\lambda = 980$ нм. На рис. 3 показана зависимость сигнала ЭПР от величины выходной мощности лазерного источника. Выявлено, что в приведенных экспериментальных условиях значения $P = 25$ и 125 мВт являются граничными значениями для наблюдения фотоиндуцированных спектров ЭПР (при $P = 25$ мВт сигнал от NV^- -центров практически сравним с уровнем шума и только существенно большее количество накоплений позволяет обнаружить дефекты). Дальнейшее уменьшение мощности приводит к полной потере сигнала от исследуемых центров. Увеличение мощности лазера приводит также к линейному отклику NV^- -центров по спиновой поляризации, что ранее было обнаружено для вакансии бора в hBN [16]. Данный эффект полезен для предварительной «настройки» кубитов, когда определенным оптическим импульсом задается его начальное состояние перед реализацией квантового алгоритма, описываемого диагональными элементами матрицы плотности. При дальнейшем увеличении P от 125 мВт наступает насыщение спиновой системы и интенсивность сигнала ЭПР резко падает. Негативным последствием использования большой оптической мощности является локальный нагрев кристалла, что ведет к уменьшению времен электронной релаксации. Длинное время релаксации (время фазовой когерентности) NV^- -центров играет критически важную роль, т. к. данные динамические характеристики определяют временные рамки, в пределах которых можно применять импульсные последовательности и манипулировать спиновой намагниченностью.

На рис. 3б) для каждого NV^- -центра можно наблюдать дополнительные структуры из трех линий, расщепление между которыми приблизительно равно 1 МГц. Данные расщепления обусловлены слабым электрон-ядерным взаимодействием между электронным спином вакансии кремния и магнитным моментом ядра ^{14}N с ядерным спином $I = 1$ и природной распространённостью $99,69\%$. На основе ранее полученных результатов в спектрах двойного электрон-ядерного ре-

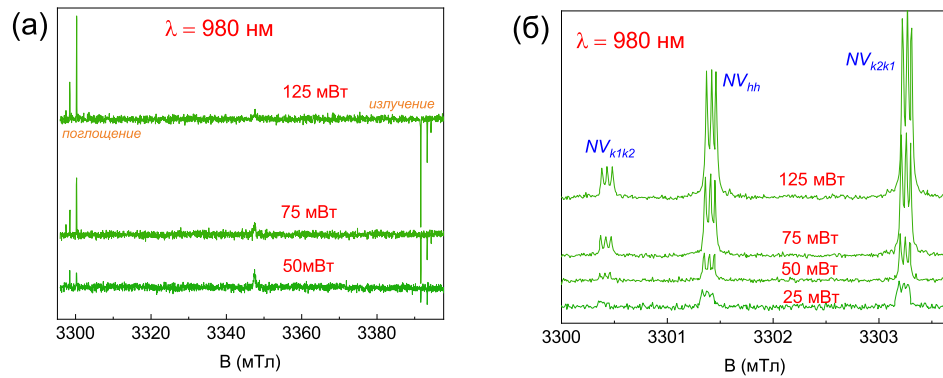


Рис. 3. Спектры ЭПР в зависимости от мощности лазерного источника с $\lambda = 980$ нм: а) полная развертка; б) для демонстрации спиновой поляризации детально прописанные низкополевые компоненты с наблюдением сверхтонких структур от ядер азота ^{14}N . Эксперименты проведены при $T = 297$ К

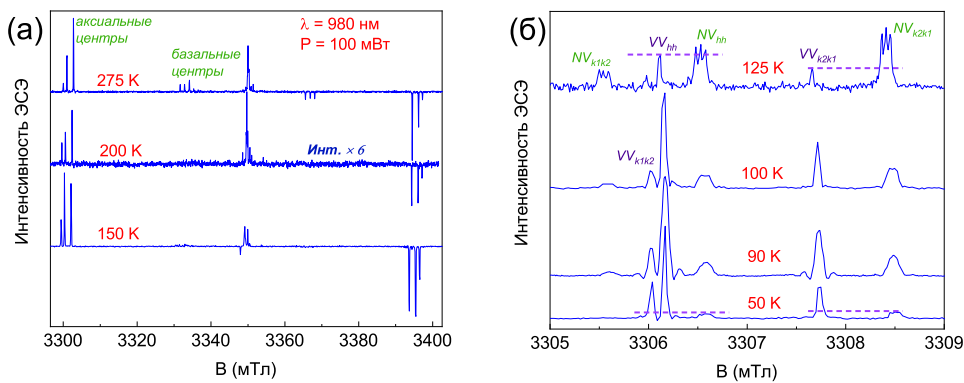


Рис. 4. Спектры ЭПР в зависимости от температуры кристалла 6H-SiC при непрерывном возбуждении лазерным источником с $\lambda = 980$ нм и выходной мощностью 50 мВт: а) полная развертка; б) для демонстрации спиновой поляризации детально прописанные низкополевые компоненты с наблюдением двух типов центров окраски

зонанса (ДЭЯР) NV^- -центров было обнаружено квадрупольное взаимодействие, которое в спектрах ЭПР не наблюдается (неразрешенная структура). Сверхтонкое и квадрупольное расщепление описывается тремя последними слагаемыми в спиновом гамильтониане (1) и для детального анализа требует использования ДЭЯР спектроскопии, что выходит за рамки представленного исследования.

Рис. 4, на котором приведены температурные зависимости спектров фотоиндуцированного ЭПР ($\lambda = 980$ нм, $P = 100$ мВт), демонстрирует, что спиновая поляризация возможна в широком диапазоне температур. Сигнал ЭПР наблюдается вплоть до $T = 297$ К, что является важной частью будущих исследований спиновых кубитов для квантовых технологий при комнатной температуре [17]. Интенсивность спектров ЭПР возрастала обратно пропорционально уменьшению температуры кристалла до 150 К в силу закона Больцмана. Однако начиная со 125 К методом ЭПР были зарегистрированы дополнительные сигналы, которые были отнесены к центрам, состоящим из вакансии кремния и вакансии углерода, называемые дивакансиями [18]. При возникновении дивакансий интенсивность

NV^- -центров существенно уменьшалась и при $T = 50$ К сигнал практически не наблюдался. Данный эффект может быть связан с переносом заряда между близко локализованными центрами окраски, который изменяет зарядовое состояние NV^- -центра и, как следствие, «переводит» дефект в немагнитное синглетное состояние с $S = 0$. Таким образом, температурный диапазон 297 – 150 К является оптимальным для обнаружения оптически поляризованных NV^- -центров методами ЭПР спектроскопии.

Заключение

В данной работе приведены результаты по изучению спиновой поляризации NV^- -центров в кристалле карбида кремния $6H-^{28}SiC$ методами высокочастотного электронного парамагнитного резонанса в импульсном режиме. Показана зависимость спинового выстраивания NV^- от длины волны оптического возбуждения, мощности лазерного источника и температуры исследуемого кристалла. Наиболее оптимальной длиной волны для резонансного возбуждения дефектов всех типов симметрии (C_{3v} и C_{1h}) и позиций ($k1k2$, hh , $k2k1$) NV^- -центра является 980 нм в диапазоне мощностей от 50 до 125 мВт. При данных условиях были зарегистрированы сигналы при $T = 297$ К, что является важным результатом для реализации квантовых технологий при комнатной температуре без использования вакуумных и криогенных установок, существенно понижая стоимость исследований. Эффективная спиновая поляризация NV^- -центров обеспечивается в широком температурном интервале 150 – 300 К. При температурах ниже 125 К происходит образование новых спиновых дефектов – дивакансий, концентрация которых существенно больше, чем NV^- -центров. Это отрицательно сказывается на интенсивности сигнала и, соответственно, спиновой поляризации NV^- -центров из-за зарядового изменения электронной конфигурации в синглетное немагнитное состояние. Полученные в ходе данного исследования результаты могут послужить отправной точкой в области практической реализации квантово-вычислительных алгоритмов и создания спин-фотонных интерфейсов на базе азот-вакансионных дефектов в карбиде кремния.

Благодарности. Работа была поддержана грантом Российского Научного Фонда № 24-22-00448.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Ladd T.D., Jelezko F., Laflamme R., Nakamura Y., Monroe C., O'Brien J. Quantum computers // Nature. 2010. V. 464, No 7285. P. 45–53. <https://doi.org/10.1038/nature08812>.
2. Weber J.R., Koehl W.F., Varley J.B., Janotti A., Buckley B.B., Van de Walle C.G., Awschalom D.D. Quantum computing with defects // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 2010. V. 107, No 19. P. 8513–8518. <https://doi.org/10.1073/pnas.1003052107>.
3. Nandhini S., Singh H., Akash U.N. An extensive review on quantum computers // Adv. Eng. Software. 2022. V. 174. Art. 103337. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2022.103337>.
4. Zhang G., Cheng Y., Chou J.-P., Gali A. Material platforms for defect qubits and single-photon emitters // Appl. Phys. Rev. 2020. V. 7, No 3. Art. 031308. <https://doi.org/10.1063/5.0006075>

5. *Heremans F.J., Yale C.G., Awschalom D.D.* Control of spin defects in wide-bandgap semiconductors for quantum technologies // *Proc. IEEE*. 2016. V. 104, No 10. P. 2009–2023. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2016.2561274>.
6. *Doherty M.W., Manson N.B., Delaney P., Jelezko F., Wrachtrup J., Hollenberg L.C.L.* The nitrogen-vacancy colour centre in diamond // *Phys. Rep.* 2013. V. 528, No 1. P. 1–45. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.02.001>.
7. *von Bardeleben H.J., Cantin J.L., Cs  r   A., Gali A., Rauls E., Gerstmann U.* NV centers in 3C, 4H, and 6H silicon carbide: A variable platform for solid-state qubits and nanosensors // *Phys. Rev. B*. 2016. V. 94, No 12. Art. 121202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.121202>.
8. *Murzakhanov F.F., Yavkin B.V., Mamin G.V., Orlinskii S.B., Mumdzhi I.E., Gracheva I.N., Gabbasov B.F., Smirnov A.N., Davydov V.Yu., Soltamov V.A.* Creation of negatively charged boron vacancies in hexagonal boron nitride crystal by electron irradiation and mechanism of inhomogeneous broadening of boron vacancy-related spin resonance lines // *Nanomaterials*. 2021. V. 11, No 6. Art. 1373. <https://doi.org/10.3390/nano11061373>.
9. *Mi X., Benito M., Putz S., Zajac D.M., Taylor J.M., Burkard G., Petta J.R.* A coherent spin–photon interface in silicon // *Nature*. 2018. V. 555, No 7698. P. 599–603. <https://doi.org/10.1038/nature25769>.
10. *Soltamov V.A., Kasper C., Poshakinskiy A.V., Anisimov A.N., Mokhov E.N., Sperlich A., Tarasenko S.A., Baranov P.G., Astakhov G.V., Dyakonov V.* Excitation and coherent control of spin qubit modes in silicon carbide at room temperature // *Nat. Commun.* 2019. V. 10, No 1. Art. 1678. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-09429-x>.
11. *Bechstedt F., K  ckell P., Zywietz A., Karch K., Adolph B., Tenelsen K., Furthm  ller J.* Polyttypism and properties of silicon carbide // *Phys. Status Solidi B*. 1997. V. 202, No 1. P. 35–62. [https://doi.org/10.1002/1521-3951\(199707\)202:1<35::AID-PSSB35>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/1521-3951(199707)202:1<35::AID-PSSB35>3.0.CO;2-8).
12. *Weber W.J., Gao F., Devanathan R., Jiang W., Wang C.M.* Ion-beam induced defects and nanoscale amorphous clusters in silicon carbide // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B*. 2004. V. 216. P. 25–35. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2003.11.016>.
13. *Khazen K., von Bardeleben H.J., Zargaleh S.A., Cantin J.L., Mu Z., Weibo G., Biktagirov T., Gerstmann U.* High-resolution resonant excitation of NV centers in 6H – SiC: A matrix for quantum technology applications // *Phys. Rev. B*. 2019. V. 100, No 20. Art. 205202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.205202>.
14. *Murzakhanov F.F., Sadovnikova M.A., Mamin G.V., Nagalyuk S.S., von Bardeleben H.J., Schmidt W.G., Biktagirov T., Gerstmann U., Soltamov V.A.* ¹⁴N Hyperfine and nuclear interactions of axial and basal NV centers in 4H-SiC: A high frequency (94 GHz) ENDOR study // *J. Appl. Phys.* 2023. V. 134, No 12. Art. 123906. <https://doi.org/10.1063/5.0170099>.
15. *Singh L.R.* Site symmetry dependence on luminescence emission of Y₂O₃:Eu³⁺ dispersed in silica matrix // *Mater. Technol.* 2022. V. 37, No 11. P. 1906–1913. <https://doi.org/10.1080/10667857.2021.2005983>.
16. *Murzakhanov F.F., Sadovnikova M.A., Gracheva I.N., Mamin G.V., Baibekov E.I., Mokhov E.N.* Exploring the properties of the V_B[–] defect in hBN: Optical spin polarization, Rabi oscillations, and coherent nuclei modulation // *Nanotechnology*. 2024. V. 35, No 15. Art. 155001. <https://doi.org/10.1088/1361-6528/ad1940>.

17. Murzakhanov F., Sadovnikova M., Mamin G., Sannikov K., Shakirov A., von Bardeleben H.J., Mokhov E., Nagalyuk S. Room temperature coherence properties and ^{14}N nuclear spin readout of NV centers in 4H-SiC // Appl. Phys. Lett. 2024. V. 124, No 3. <https://doi.org/10.1063/5.0186997>.
18. Son N.T., Ivanov I.G. Charge state control of the silicon vacancy and divacancy in silicon carbide // Appl. Phys. Lett. 2021. V. 129, No 21. Art. 215702. <https://doi.org/10.1063/5.0052131>.

Поступила в редакцию 11.04.2024

Принята к публикации 4.06.2024

Мурзаханов Фадис Фанилович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник НИЛ «Многофункциональные материалы для квантовых сенсоров»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: murzakhanov.fadis@yandex.ru

Мамин Георгий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры квантовой электроники и радиоспектроскопии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: georgemamin@gmail.com

Садовникова Маргарита Александровна, аспирант, младший научный сотрудник НИЛ «Многофункциональные материалы для квантовых сенсоров»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: margaritaasadov@gmail.com

Шуртакова Дарья Владимировна, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник НИЛ «Многофункциональные материалы для квантовых сенсоров»

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: darja-shurtakva@mail.ru

Казарова Ольга Петровна, старший инженер

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
ул. Политехническая, д. 26, г. Санкт-Петербург, 194021, Россия

E-mail: mokhov@mail.ioffe.ru

Мохов Евгений Николаевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией физики диэлектриков и полупроводников

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН
ул. Политехническая, д. 26, г. Санкт-Петербург, 194021, Россия

E-mail: evgenymokhov@yandex.ru

Гафуров Марат Ревгерович, доктор физико-математических наук, директор Института физики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: mgafurov@gmail.com

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 187–199

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.187-199

**Influence of Photoexcitation Conditions
on the Spin Polarization of Nitrogen-Vacancy Centers
in Isotopically Enriched Silicon Carbide 6H-²⁸SiC**

F.F. Murzakhanov^{a}, G.V. Mamin^a, M.A. Sadovnikova^{a**}, D.V. Shurtakova^{a***},
O.P. Kazarova^{b****}, E.N. Mokhov^{b*****}, M.R. Gafurov^{a*****}*

^aKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

^bIoffe Institute, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 194021 Russia

E-mail: *murzakhanov.fadis@yandex.ru, **margaritaasadov@gmail.com, ***darja-shurtakva@mail.ru,
****mokhov@mail.ioffe.ru, *****evgenymokhov@yandex.ru, *****mgafurov@gmail.com

Received April 11, 2024; Accepted June 4, 2024

Abstract

Spin defects in semiconductors are attracting interest as a material basis for quantum information and computing technologies. In this work, the spin properties of negatively charged nitrogen-vacancy (NV^-) centers in a 6H-SiC silicon carbide crystal enriched with the ²⁸Si isotope were studied by high-frequency (94 GHz) electron paramagnetic resonance (EPR) methods. Due to an optical excitation channel at the NV^- centers, it was possible to initialize the electron spin of the defect using a laser source, which led to a significant increase in the intensity of the recorded EPR signal. The dependences of the observed spin polarization were analyzed at different optical excitation wavelengths ($\lambda = 640 - 1064$ nm), output power (0 – 500 mW), and temperature (50 – 300 K) of the crystal. The results obtained reveal the optimal experimental conditions for maximizing the efficiency of optical quantum energy transfer to the spin system. This opens up new possibilities for using NV^- centers in 6H-SiC to create multi-qubit spin-photon interfaces operating in the infrared region.

Keywords: spin-optical property, spin initialization, spin polarization, electron paramagnetic resonance, silicon carbide, NV^- center

Acknowledgements. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-22-00448).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. a) The structure of a SiC bulk crystal of the hexagonal 6H polytype consisting of carbon atoms (brown ball) and silicon (blue ball). h , $k1$, and $k2$ are alternating structurally nonequivalent atomic positions [13]; b) the scheme of optical polarization of nitrogen-vacancy states by a laser source. Due to the mechanism of intersystem crossing during the transition of a defect from the excited orbital ($3E$) state to the ground ($3A$) state, the spin sublevel is populated with $M_S = 0$. The arrows indicate EPR transitions that form the signal of absorption and emission (population inversion) of microwave energy.

Fig. 2. a) EPR spectra of the color centers in 6H-SiC with full magnetic field sweep; b) detailed view of low-field components of the fine structure depending on the optical excitation wavelength. Experiments were carried out at $T = 297$ K.

Fig. 3. EPR spectra depending on the power of the laser source with $\lambda = 980$ nm: a) full sweep; b) to demonstrate spin polarization and detailed low-field components with the observation of hyperfine structures from nitrogen nuclei ^{14}N . Experiments were carried out at $T = 297$ K.

Fig. 4. EPR spectra depending on the temperature of the 6H-SiC crystal under the continuous excitation by a laser source with $\lambda = 980$ nm and output power 50 mW: a) full sweep; b) to demonstrate spin polarization and detailed low-field components with the observation of two types of color centers.

References

1. Ladd T.D., Jelezko F., Laflamme R., Nakamura Y., Monroe C., O'Brien J. Quantum computers. *Nature*, 2010, vol. 464, no. 7285, pp. 45–53. <https://doi.org/10.1038/nature08812>.
2. Weber J.R., Koehl W.F., Varley J.B., Janotti A., Buckley B.B., Van de Walle C.G., Awschalom D.D. Quantum computing with defects. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2010, vol. 107, no. 19, pp. 8513–8518. <https://doi.org/10.1073/pnas.1003052107>.
3. Nandhini S., Singh H., Akash U.N. An extensive review on quantum computers. *Adv. Eng. Software*, 2022, vol. 174, art. 103337. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2022.103337>.
4. Zhang G., Cheng Y., Chou J.-P., Gali A. Material platforms for defect qubits and single-photon emitters. *Appl. Phys. Rev.*, 2020, vol. 7, no. 3, art. 031308. <https://doi.org/10.1063/5.0006075>.
5. Heremans F.J., Yale C.G., Awschalom D.D. Control of spin defects in wide-bandgap semiconductors for quantum technologies. *Proc. IEEE*, 2016, vol. 104, no. 10, pp. 2009–2023. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2016.2561274>.
6. Doherty M.W., Manson N.B., Delaney P., Jelezko F., Wrachtrup J., Hollenberg L.C.L. The nitrogen-vacancy colour centre in diamond. *Phys. Rep.*, 2013, vol. 528, no. 1, pp. 1–45. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.02.001>.
7. von Bardeleben H.J., Cantin J.L., Cs  r   A., Gali A., Rauls E., Gerstmann U. NV centers in 3C, 4H, and 6H silicon carbide: A variable platform for solid-state qubits and nanosensors. *Phys. Rev. B*, 2016, vol. 94, no. 12, art. 121202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.121202>.
8. Murzakhanov F.F., Yavkin B.V., Mamin G.V., Orlinskii S.B., Mumdzhi I.E., Gracheva I.N., Gabbasov B.F., Smirnov A.N., Davydov V.Yu., Soltamov V.A. Creation of negatively charged boron vacancies in hexagonal boron nitride crystal by electron irradiation and mechanism of inhomogeneous broadening of boron vacancy-related spin resonance lines. *Nanomaterials*, 2021, vol. 11, no. 6, art. 1373. <https://doi.org/10.3390/nano11061373>.
9. Mi X., Benito M., Putz S., Zajac D.M., Taylor J.M., Burkard G., Petta J.R. A coherent spin–photon interface in silicon. *Nature*, 2018, vol. 555, no. 7698, pp. 599–603. <https://doi.org/10.1038/nature25769>.
10. Soltamov V.A., Kasper C., Poshakinskiy A.V., Anisimov A.N., Mokhov E.N., Sperlich A., Tarasenko S.A., Baranov P.G., Astakhov G.V., Dyakonov V. Excitation and coherent control of spin qubit modes in silicon carbide at room temperature. *Nat. Commun.*, 2019, vol. 10, no. 1, art. 1678. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-09429-x>.

11. Bechstedt F., Käckell P., Zywiec A., Karch K., Adolph B., Tenelsen K., Furthmüller J. Polytypism and properties of silicon carbide. *Phys. Status Solidi B*, 1997, vol. 202, no. 1, pp. 35–62.
[https://doi.org/10.1002/1521-3951\(199707\)202:1<35::AID-PSSB35>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/1521-3951(199707)202:1<35::AID-PSSB35>3.0.CO;2-8).
12. Weber W.J., Gao F., Devanathan R., Jiang W., Wang C.M. Ion-beam induced defects and nanoscale amorphous clusters in silicon carbide. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B*, 2004, vol. 216, pp. 25–35. <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2003.11.016>.
13. Khazen K., von Bardeleben H.J., Zargaleh S.A., Cantin J.L., Zhao M., Gao W., Biktagirov T., Gerstmann U. High-resolution resonant excitation of NV centers in 6H – SiC: A matrix for quantum technology applications. *Phys. Rev. B*, 2019, vol. 100, no. 20, art. 205202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.205202>.
14. Murzakhanov F.F., Sadovnikova M.A., Mamin G.V., Nagalyuk S.S., von Bardeleben H.J., Schmidt W.G., Biktagirov T., Gerstmann U., Soltamov V.A. ^{14}N Hyperfine and nuclear interactions of axial and basal NV centers in 4H-SiC: A high frequency (94 GHz) ENDOR study. *J. Appl. Phys.*, 2023, vol. 134, no. 12, art. 123906.
<https://doi.org/10.1063/5.0170099>.
15. Singh L.R. Site symmetry dependence on luminescence emission of $\text{Y}_2\text{O}_3:\text{Eu}^{3+}$ dispersed in silica matrix. *Mater. Technol.*, 2022, vol. 37, no. 11, pp. 1906–1913.
<https://doi.org/10.1080/10667857.2021.2005983>.
16. Murzakhanov F.F., Sadovnikova M.A., Gracheva I.N., Mamin G.V., Baibekov E.I., Mokhov E.N. Exploring the properties of the V_{B}^- defect in hBN: Optical spin polarization, Rabi oscillations, and coherent nuclei modulation. *Nanotechnology*, 2024, vol. 35, no. 15, art. 155001. <https://doi.org/10.1088/1361-6528/ad1940>.
17. Murzakhanov F., Sadovnikova M., Mamin G., Sannikov K., Shakirov A., von Bardeleben H.J., Mokhov E., Nagalyuk S. Room temperature coherence properties and ^{14}N nuclear spin readout of NV centers in 4H-SiC. *Appl. Phys. Lett.*, 2024, vol. 124, no. 3, art. 034001. <https://doi.org/10.1063/5.0186997>.
18. Son N.T., Ivanov I.G. Charge state control of the silicon vacancy and divacancy in silicon carbide. *J. Appl. Phys.*, 2021, vol. 129, no. 21, art. 215702.
<https://doi.org/10.1063/5.0052131>.

Для цитирования: Мурзаханов Ф.Ф., Мамин Г.В., Садовникова М.А., Шуртакoва Д.В., Казарова О.П., Мохoв Е.Н., Гафурoв М.Р. Влияние условий фoтoвoзбуждения на спиновую поляризацию азoт-вакансионных центров в изoтoпнo-обoгaщеннoм карбиде кремния 6H- ^{28}SiC // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 187–199. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.187-199>.

For citation: Murzakhanov F.F., Mamin G.V., Sadovnikova M.A., Shurtakova D.V., Kazarova O.P., Mokhov E.N., Gafurov M.R. Influence of photoexcitation conditions on the spin polarization of nitrogen-vacancy centers in isotopically enriched silicon carbide 6H- ^{28}SiC . *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 187–199.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.187-199>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.200-219

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ
ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ С НАКЛАДКАМИ
ПРИ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ**

*В.Н. Паймушин^{1,2}, С.А. Холмогоров¹, М.В. Макаров^{1,2},
Н.В. Левшонкова¹*

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Сформулирована задача об испытаниях трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями и трансверсально-мягким заполнителем на четырёхточечный изгиб. Предполагается, что локализованная внешняя нагрузка от нагружающих роликов на несущий слой тест-образца передаётся через композитные накладки, позволяющие уменьшить концентрацию напряжений в сжатом несущем слое. Механика деформирования внешних несущих слоёв описана кинематической моделью С.П. Тимошенко с учётом поперечного обжатия, а накладок – без учёта обжатия. Заполнитель отнесён к классу трансверсально-мягких, в котором тангенциальные напряжения приняты равными нулю. Накладки сопрягаются с несущими слоями через клеевые прослойки, а векторы перемещений лицевых поверхностей накладок подчинены условиям кинематического сопряжения с векторами перемещений лицевых поверхностей несущих слоёв. Зависимости между поперечными касательными напряжениями и поперечными сдвиговыми деформациями в несущих слоях приняты физически нелинейными, в которые модуль сдвига входит как функция от сдвиговых деформаций.

На основе обобщенного вариационного принципа возможных перемещений получена система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия несущих слоёв и накладок, которая замыкается еще тремя уравнениями, представляющими собой условия кинематического сопряжения несущих слоёв с заполнителями по тангенциальным перемещениям. Для численного решения сформулированной задачи использован метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц), в соответствии с которым исходная краевая задача сведена к интегро-алгебраическим уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Алгоритм разработанного метода реализован в виде прикладного программного обеспечения, с помощью которого проведён ряд вычислительных экспериментов. Полученные результаты верифицированы с результатами экспериментальных исследований на четырёхточечный изгиб трёхслойных тест-образцов с несущими слоями, изготовленными из однонаправленного волокнистого композита с заданными геометрическими и физико-механическими характеристиками,

при наличии накладок под нагружающими роликами. Показано, что использование накладок значительно повышает значения предельных разрушающих напряжений сжатия в несущих слоях.

Ключевые слова: трёхслойная пластина, тест-образец, четырёхточечный изгиб, волокнистый композит, метод конечных сумм, предельные напряжения сжатия, физическая и геометрическая нелинейность

Введение

Трёхслойные конструкции имеют широкое применение в судостроительной и аэрокосмической отраслях. Как правило, такие конструкции состоят из двух жёстких несущих слоёв, воспринимающих тангенциальные напряжения, и относительно маложесткого заполнителя, воспринимающего напряжения поперечного обжатия и поперечные касательные напряжения. Выбор материалов для несущих слоёв и заполнителя зависит от специфики работы трёхслойных конструкций. В аэрокосмической отрасли, как правило, применяется сотовый заполнитель на основе лёгких алюминиевых сплавов или полимерной бумаги. Такие заполнители обладают наиболее высокими удельными жесткостными и прочностными характеристиками при малом удельном весе. В трёхслойных конструкциях, применяющихся в кораблестроении, используется пористый металлический заполнитель. От таких заполнителей требуются высокая удельная ударная вязкость и высокая способность поглощать энергию удара. В качестве материалов для несущих слоёв используются как металлы, так и композитные материалы на основе стекло- и углепластиков.

Разрушение трёхслойных конструкций может быть обусловлено реализацией разных механизмов деформирования и разрушения их составных элементов в процессе их нагружения [1–4]: разрушение заполнителя по причине достижения предельных значений формирующимися в них поперечными касательными напряжениями [5,6], усталостные разрушения заполнителя [3,7], отслоение несущих слоёв от заполнителя [8,9], достижение предельных поперечных напряжений обжатия в заполнителе [10], потеря устойчивости несущих слоёв [11,12].

В сверхлёгких трёхслойных конструкциях несущие слои, как правило, изготавливаются из волокнистых композитов на основе углепластиков. Однонаправленные углепластики могут обладать даже большей прочностью при растяжении, чем высокопрочные стали. Поэтому основной причиной разрушения таких конструкций может являться потеря устойчивости несущих слоёв по той или иной форме в условиях формирующихся сжимающих напряжений. В частности, при формировании таких напряжений возможна реализация поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости. Как известно [13,14], при сжатии в направлении волокон тест-образцов из однонаправленных волокнистых композитов за предельные сжимающие напряжения могут быть приняты значения модуля поперечного сдвига. В цикле работ [15,16] было показано, что теоретическое выявление сдвиговой формы потери устойчивости композитных тест-образцов при трёхточечном изгибе возможно при использовании уравнений, основанных на простейшей кинематической модели С.П. Тимошенко.

Настоящая работа является продолжением исследований [15,16] и посвящена теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов деформирования и разрушения трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями при четырёхточечном изгибе с целью выявления возможности реализации сдвиговой формы потери устойчивости в несущих слоях из однонаправленного композита.

1. Уточненная модель деформирования и уравнения равновесия трёхслойного тест-образца с накладками

На рис. 1 представлена схема испытаний на четырехточечный изгиб трехслойной пластины с трансверсально-мягким заполнителем, в которой кроме внешних слоев и заполнителя в окрестностях нагружающих роликов введены в рассмотрение упругие накладки, соединяемые с внешними слоями через адгезионные (клеевые) слои, моделируемые трансверсально-мягкими заполнителями. Для моделирования процесса четырехточечного изгиба образцов рассматриваемого класса предложен редуцированный вариант уравнений равновесия, построенных ранее в статье [17] для многослойной оболочки с чередующимися жесткими слоями, которые в дальнейшем именуются несущими, и маложесткими слоями, называемыми заполнителями.

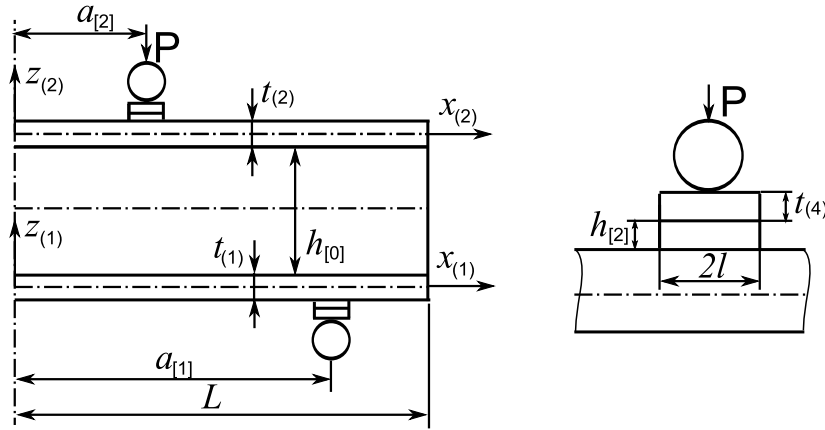


Рис. 1. Схема нагружения на четырехточечный изгиб трехслойного тест-образца с накладками

В рамках использования описанной схемы испытаний при разработке математической модели деформирования трехслойного образца для описания механики деформирования несущих слоев ($k = 1, 2$) и накладок ($k = 3, 4$) принята уточненная кинематическая модель С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для векторов перемещений приняты представления

$$\mathbf{U}^{(k)} = u^{(k)} \mathbf{e}^1 + w^{(k)} \mathbf{e}^3 + z_{(k)} (\gamma^{(k)} \mathbf{e}^1 + \varphi^{(k)} \mathbf{e}^3). \quad (1)$$

В рамках принятой модели (1) при слабом и среднем изгибах рассматриваемой конструкции компоненты тензоров деформаций в несущих слоях ($k = 1, 2$) будут определяться по формулам [18]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(w_{,x}^{(k)} \right)^2 \right) + z_{(k)} \gamma_{,x}^{(k)}, \\ \varepsilon_{33}^{(k)} &= \varphi^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(k)} = \left(\gamma^{(k)} + w_{,x}^{(k)} \right) + z_{(k)} \varphi_{,x}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2)$$

а в накладках ($j = 3, 4$) компоненты деформации будут описаны упрощенными кинематическими соотношениями

$$\varepsilon_{11}^{(j)} = u_{,x}^{(j)} + z_{(j)} \gamma_{,x}^{(j)}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(j)} = \left(\gamma^{(j)} + w_{,x}^{(j)} \right), \quad (3)$$

следующими из (2) при $\varphi^{(3)} = \varphi^{(4)} = 0$ и соответствующими использованию простейшей сдвиговой модели С.П. Тимошенко без учета поперечного обжатия.

При использовании (2), (3) для усилий и моментов, формирующихся в несущих слоях ($k = 1, 2$) и накладках ($j = 3, 4$) будут иметь место соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{11} &= B_1^{(k)} \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2} (w_{,x}^{(k)})^2 + \nu_{31} \varphi^{(k)} \right), \\ T_{(k)}^{33} &= B_3^{(k)} \left(\nu_{13} \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2} (w_{,x}^{(k)})^2 \right) + \varphi^{(k)} \right), \\ T_{(k)}^{13} &= B_{13}^{(k)} \left(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_1^{(k)} \gamma_{,x}^{(k)}, \quad M_{(k)}^{13} = D_{13}^{(k)} \varphi_{,x}^{(k)}, \\ T_{(j)}^{11} &= B_1^{(j)} u_{,x}^{(j)}, \quad T_{(j)}^{13} = B_{13}^{(j)} \left(w_{,x}^{(j)} + \gamma^{(j)} \right), \\ M_{(j)}^{11} &= D_1^{(j)} \gamma_{,x}^{(j)}, \quad T_{(j)}^{33} = M_{(j)}^{13} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения: $B_1^{(k)} = t_{(k)} E_1^{(k)} / (1 - \nu_{13}^{(k)} \nu_{31}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение-сжатие, $D_1^{(k)} = B_{(k)} t_{(k)}^2 / 12$ – изгибная жесткость, $B_3^{(k)} = t_{(k)} E_3^{(k)} / (1 - \nu_{13}^{(k)} \nu_{31}^{(k)})$, $B_{13}^{(k)} = G_{13}^{(k)} t_{(k)}$, $D_{13}^{(k)} = B_{13}^{(k)} t_{(k)}^2 / 12$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Исходя из результатов, полученных ранее [17], для описания плоского равновесного состояния исследуемого тест-образца относительно введенных в рассмотрение усилий и моментов (4), а также неизвестных касательных напряжений $q^{[k]}$ и напряжений обжатия $\tilde{\sigma}_{33}^{[k]}$ в заполнителе (при $k = 0$) и адгезионных (клеевых) слоях накладок (при $k = 1, 2$) может быть составлена система четырнадцати дифференциальных уравнений равновесия следующего вида

$$\begin{cases} T_{11,x}^{(k)} + \delta_{(k)} (q^{[0]} - q^{[k]}) = 0, \quad M_{11,x}^{(k)} - T_{13}^{(k)} + \frac{t_{(k)}}{2} (q^{[0]} + q^{[k]}) = 0, \\ \left(T_{13}^{(k)} + T_{11}^{(k)} w_{,x}^{(k)} + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]} + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]} \right)_{,x} + \delta_{(k)} (\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \\ \left(M_{13}^{(k)} + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]} t_{(k)}}{4} q^{[0]} - \frac{h_{[k]} t_{(k)}}{4} q^{[k]} \right) \right)_x - T_{33}^{(k)} + \\ + \frac{t_{(k)}}{2} (\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2; \quad (5)$$

$$\begin{cases} T_{11,x}^{(j)} + \delta_{(j-2)} q^{[j-2]} = 0, \quad M_{11,x}^{(j)} - T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} q^{[j-2]} = 0, \\ \left(T_{13}^{(j)} + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]} \right)_{,x} + \delta_{(j-2)} \tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + X_3^{(j)} = 0, \end{cases} \quad j = 3, 4; \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} q^{[k]}(x) &\neq 0, \quad \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}(x) \neq 0 \quad \text{при } x \in [a_{[k]} - l, a_{[k]} + l], \\ q^{[k]}(x) &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}(x) = 0 \quad \text{при } x \notin [a_{[k]} - l, a_{[k]} + l], \end{aligned}$$

а также введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33}^{[0]} &= \sigma_{33}^{[0]}(x, 0) = E_3 \left(\frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{h} - \frac{t_{(1)}}{2h} \varphi^{(1)} - \frac{t_{(2)}}{2h} \varphi^{(2)} \right), \\ \tilde{\sigma}_{33}^{[1]} &= \sigma_{33}^{[1]}(x, 0) = E_3^{[1]} \left(\frac{w^{(1)} - w^{(3)}}{h} - \frac{t_{(1)}}{2h} \varphi^{(1)} \right), \\ \tilde{\sigma}_{33}^{[2]} &= \sigma_{33}^{[2]}(x, 0) = E_3^{[2]} \left(\frac{w^{(4)} - w^{(2)}}{h} - \frac{t_{(2)}}{2h} \varphi^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Система уравнений (5), (6) замыкается тремя уравнениями, представляющими собой условия кинематического сопряжения несущих слоев с заполнителями по тангенциальным перемещениям

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(1)} - u^{(2)} - \frac{h_{[0]}}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \frac{1}{2} (t_{(1)} \gamma^{(1)} + t_{(2)} \gamma^{(2)}) + \frac{h_{[0]}}{G_{13}^{[0]}} q^{[0]} - \\ - \frac{h_{[0]}^3}{12E_3^{[0]}} q_{,xx}^{[0]} - \frac{h_{[0]}}{4} (t_{(1)} \varphi_{,x}^{(1)} - t_{(2)} \varphi_{,x}^{(2)}) = 0, \\ u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{h_{[1]}}{2} (w_{,x}^{(3)} + w_{,x}^{(1)}) + \frac{1}{2} (t_{(3)} \gamma^{(3)} + t_{(1)} \gamma^{(1)}) + \frac{h_{[1]}}{G_{13}^{[1]}} q^{[1]} - \\ - \frac{h_{[1]}^3}{12E_3^{[1]}} q_{,xx}^{[1]} + \frac{h_{[1]} t_{(1)}}{4} \varphi_{,x}^{(1)} = 0, \\ u^{(2)} - u^{(4)} - \frac{h_{[2]}}{2} (w_{,x}^{(2)} + w_{,x}^{(4)}) + \frac{1}{2} (t_{(2)} \gamma^{(2)} + t_{(4)} \gamma^{(4)}) + \frac{h_{[2]}}{G_{13}^{[2]}} q^{[2]} - \\ - \frac{h_{[2]}^3}{12E_3^{[2]}} q_{,xx}^{[2]} - \frac{h_{[2]} t_{(2)}}{4} \varphi_{,x}^{(2)} = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

В силу симметрии задачи относительно центрального сечения $x = 0$ граничные условия и условия симметрии будут сформулированы относительно правой части трехслойного тест-образца (рис. 1). Граничные условия в сечениях $x = L$ при испытаниях по схеме рис. 1 сформулированы в виде условий для свободных краев ($2L$ – длина пластины)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}^{(k)}(L) = 0, \quad M_{11}^{(k)}(L) = 0, \\ T_{13}^{(k)}(L) + T_{11}^{(k)}(L) w_{,x}^{(k)}(L) + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]}(L) + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]}(L) = 0, \quad k = 1, 2; \\ M_{13}^{(k)}(L) + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]} t_{(k)}}{4} q^{[0]}(L) - \frac{h_{[k]} t_{(k)}}{4} q^{[k]}(L) \right) = 0, \\ q^{[0]}(L) = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

а при $x = 0$ – условий симметрии относительно центрального сечения

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(k)}(0) = 0, \quad \gamma^{(k)}(0) = 0, \\ T_{13}^{(k)}(0) + T_{11}^{(k)}(0) w_{,x}^{(k)}(0) + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]}(0) + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]}(0) = 0, \quad k = 1, 2; \\ M_{13}^{(k)}(0) + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]} t_{(k)}}{4} q^{[0]}(0) - \frac{h_{[k]} t_{(k)}}{4} q^{[k]}(0) \right) = 0, \\ q^{[0]}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Пусть $a_{[1]}, a_{[2]}$ – координаты центров накладок по оси x , отсчитываемые от центра пластины. В сечениях $x = (a_{[1]} - l), (a_{[1]} + l), (a_{[2]} - l), (a_{[2]} + l)$ сформулированы условия в виде свободных краев накладок

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}^{(j)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(j)}(x) = 0, \quad T_{13}^{(j)}(x) + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]}(x) = 0, \\ q^{[j-2]}(x) = 0, \end{array} \quad j = 3, 4. \right. \quad (10)$$

К сформулированным условиям (8)–(10) необходимо добавить условия равенства нулю прогибов (перемещений в направлении оси z) опорных накладок в центрах опорных роликов

$$w^{(3)}(\pm a_{[1]}) = 0. \quad (11)$$

Для моделирования внешнего нагружения распределенная нагрузка $X_3^{(4)}$, приложенная к нижнему слою, на участке контакта нагружающего ролика с внешним слоем длины $2R$ задается функцией косинуса с амплитудным значением p .

Для моделирования контактного взаимодействия опор и верхнего несущего слоя в опорном сечении $x = a_{[1]}$ задавались условия вида (10), а неизвестные реакции от опорных роликов $X_3^{(3)}$ аппроксимировались функцией косинуса с амплитудным значением p_z , которое подлежит определению из решения задачи:

$$X_3^{(4)}(x) = \begin{cases} p \left(1/2 \cos(\pi(x - a_{[4]}/2)/R) + 1/2 \right), & x \in (a_{[2]} - R, a_{[2]} + R), \\ 0, & x \notin (a_{[2]} - R, a_{[2]} + R). \end{cases}$$

$$X_3^{(3)}(x) = \begin{cases} p_z \left(1/2 \cos(\pi(x - a_{[3]}/2)/R) + 1/2 \right), & x \in (a_{[1]} - R, a_{[1]} + R), \\ 0, & x \notin (a_{[1]} - R, a_{[1]} + R). \end{cases}$$

2. Метод конечных сумм для решения краевой задачи

Для приближенного решения краевой задачи будем использовать метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц [19]). В соответствии с этим методом исходную краевую задачу (5)–(11) сведем к интегро-алгебраическим уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Заметим, что исходная краевая задача имеет вид дифференциальной задачи второго порядка, в то время как интегро-алгебраические уравнения будут содержать лишь первые производные искомых функций, т. е. сведение задачи к интегральному виду осуществим таким образом, чтобы искомой неизвестной в интегральной постановке задачи стала вектор-функция $U = (U^{(1)}, U^{(2)}, q^{[0]})$, $U^{(k)} = (u_{,x}^{(k)}, w_{,x}^{(k)}, \gamma_{,x}^{(k)}, \varphi_{,x}^{(k)}, u_{,x}^{(k+2)}, w_{,x}^{(k+2)}, \gamma_{,x}^{(k+2)}, q^{[k]})$. Такое сведение выполнено путем интегрирования уравнений (5)–(7) и удовлетворения условиям (8)–(11).

Сначала введем интегральные операторы вида

$$L(f) = \int_0^x f(\xi) d\xi, \quad R(f) = \int_x^L f(\xi) d\xi, \quad D(f) = \int_0^L f(\xi) d\xi,$$

$$L^{[j]}(f) = \begin{cases} \int_{a_{[j]}-l}^x f(\xi) d\xi, & x \in (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \\ 0, & x \notin (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \end{cases}$$

$$R^{[j]}(f) = \begin{cases} \int_x^{a_{[j]}+l} f(\xi) d\xi, & x \in (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \\ 0, & x \notin (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \end{cases} \quad (12)$$

$$D(f) = \int_0^{a_{[1]}-l} f(\xi) d\xi + \int_{a_{[1]}-l}^{a_{[1]}+l} f(\xi) d\xi + \int_{a_{[1]}+l}^{a_{[2]}-l} f(\xi) d\xi + \int_{a_{[2]}-l}^{a_{[2]}+l} f(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_{a_{[2]}+l}^a f(\xi) d\xi = D_1(f) + D^{[3]}(f) + D_2(f) + D^{[4]}(f) + D_5(f),$$

$$D^{[j]}(f) = \int_{a_{[j-2]}-l}^{a_{[j-2]}+l} f(\xi) d\xi, \quad j = 3, 4.$$

Затем, проинтегрировав производные от искомым функций и удовлетворив граничным условиям первого рода в (9), выразим искомые функции следующим образом

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= Lu_{,x}^{(k)}, \quad \gamma^{(k)} = L\gamma_{,x}^{(k)}, \quad w^{(k)} = Lw_{,x}^{(k)} + w_0^{(k)}, \\ \varphi^{(k)} &= L\varphi_{,x}^{(k)} + \varphi_0^{(k)}, \quad q^{[0]} = Lq_{,x}^{[0]}, \quad k = 1, 2, \\ u^{(j)} &= L^{[j]}u_{,x}^{(j)} + u_0^{(j)}, \quad \gamma^{(j)} = L^{[j]}\gamma_{,x}^{(j)} + \gamma_0^{(j)}, \quad w^{(j)} = L^{[j]}w_{,x}^{(j)} + w_0^{(j)}, \\ \varphi^{(j)} &= L^{[j]}\varphi_{,x}^{(j)} + \varphi_0^{(j)}, \quad q^{[j-2]} = L^{[j]}q_{,x}^{[j-2]}, \quad j = 3, 4; \end{aligned} \quad (13)$$

где $w_0^{(k)} = w^{(k)}(0)$, $\varphi_0^{(k)} = \varphi^{(k)}(0)$, $u_0^{(j)} = u^{(j)}(0)$, $w_0^{(j)} = w^{(j)}(0)$, $\gamma_0^{(j)} = \gamma^{(j)}(0)$ – константы интегрирования, входящие в разрешающую систему в виде неизвестных.

Проинтегрируем уравнения системы (5)–(7) от x до L и удовлетворим граничным условиям (8)

$$\begin{cases} \begin{aligned} & -T_{11}^{(k)} + \delta_{(k)} (Rq^{[0]} - R^{[k+2]}q^{[k]}) = 0, \quad -M_{11}^{(k)} - RT_{13}^{(k)} + \\ & + \frac{t_{(k)}}{2} (Rq^{[0]} + R^{[k+2]}q^{[k]}) = 0, \\ & \left(-T_{13}^{(k)} + R \left(T_{11}^{(k)} w_{,x}^{(k)} \right) + \frac{h_{[0]}}{2} Rq^{[0]} + \frac{h_{[k]}}{2} R^{[k+2]}q^{[k]} \right)_{,x} + \\ & + \delta_{(k)} (R\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - R^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \\ & \left(-M_{13}^{(k)} + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]}t_{(k)}}{4} Rq^{[0]} - \frac{h_{[k]}t_{(k)}}{4} R^{[k+2]}q^{[k]} \right) \right)_x - RT_{33}^{(k)} + \\ & + \frac{t_{(k)}}{2} (R\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + R^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \end{aligned} & k = 1, 2; \\ \begin{aligned} & -T_{11}^{(j)} + \delta_{(j-2)} R^{[j]}q^{[j-2]} = 0, \\ & -M_{11}^{(j)} - R^{[j]}T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} R^{[j]}q^{[j-2]} = 0, \\ & - \left(T_{13}^{(j)} + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]} \right) + \delta_{(j-2)} R^{[j]}\tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + R^{[j]}X_3^{(j)} = 0, \end{aligned} & j = 3, 4; \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \begin{aligned} & \frac{h_{[0]}^3}{12E_3^{[0]}} (q_{,x}^{[0]} - q_{,x}^{[0]}(L)) + R \left[u^{(1)} - u^{(2)} - \frac{h_{[0]}}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (t_{(1)}\gamma^{(1)} + t_{(2)}\gamma^{(2)}) + \frac{h_{[0]}}{G_{13}^{[0]}} q^{[0]} - \frac{h_{[0]}}{4} (t_{(1)}\varphi_{,x}^{(1)} - t_{(2)}\varphi_{,x}^{(2)}) \right] = 0, \\ & \frac{h_{[1]}^3}{12E_3^{[1]}} (q_{,x}^{[1]} - q_{,x}^{[1]}(L)) + R^{[3]} \left[u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{h_{[1]}}{2} (w_{,x}^{(3)} + w_{,x}^{(1)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (t_{(3)}\gamma^{(3)} + t_{(1)}\gamma^{(1)}) + \frac{h_{[1]}}{G_{13}^{[1]}} q^{[1]} + \frac{h_{[1]}t_{(1)}}{4} \varphi_{,x}^{(1)} \right] = 0, \\ & \frac{h_{[2]}^3}{12E_3^{[2]}} (q_{,x}^{[2]} - q_{,x}^{[2]}(L)) + R^{[4]} \left[u^{(2)} - u^{(4)} - \frac{h_{[2]}}{2} (w_{,x}^{(2)} + w_{,x}^{(4)}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (t_{(2)}\gamma^{(2)} + t_{(4)}\gamma^{(4)}) + \frac{h_{[2]}}{G_{13}^{[2]}} q^{[2]} - \frac{h_{[2]}t_{(2)}}{4} \varphi_{,x}^{(2)} \right] = 0. \end{aligned} \end{cases}$$

При подстановке в полученную систему уравнений соотношений (13) система дифференциальных уравнений (5)–(7) сведется к интегральным уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода относительно вектор-функции неизвестных U и неизвестных констант интегрирования $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, q_{,x}^{[0]}(L))$, где $v^{(k)} = (w_0^{(k)}, \varphi_0^{(k)}, u_0^{(k+2)}, \gamma_0^{(k+2)}, w_0^{(k+2)}, \varphi_0^{(k+2)}, q_{,x}^{[k]}(L))$, $k = 1, 2$. Построенную систему (14) относительно вектора неизвестных (U, v) замкнем дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования путем удовлетворения

оставшимся в (8)–(10) граничным условиям второго рода

$$\begin{cases} \delta_{(k)} \left(D\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - D^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \\ -DT_{33}^{(k)} + \frac{t_{(k)}}{2} \left(D\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + D^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2; \\ \begin{cases} \delta_{(j-2)} D^{[j]} q^{[j-2]} = 0, \quad -D^{[j]} T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} D^{[j]} q^{[j-2]} = 0, \\ \delta_{(j-2)} D^{[j]} \tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + D^{[j]} X_3^{(j)} = 0, \end{cases} \quad j = 3, 4; \\ Dq_{,x}^{[0]} = 0, \quad D^{[3]} q_{,x}^{[1]} = 0, \quad D^{[4]} q_{,x}^{[2]} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

и уравнением (11), которое в соответствии с введенным вектором неизвестных будет иметь вид

$$\int_0^{a_{[3]}} w_{,x}^{(3)}(x) dx + w_0^{(3)} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, имеем задачу, эквивалентную задаче (5)–(11): найти вектор-функцию (U, v) , которая удовлетворяет разрешающей системе интегро-алгебраических уравнений (14)–(16).

В работе [19] для реализации метода конечных сумм предложены метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц. В соответствии с результатами этой работы интегральные операторы (12) заменим их конечномерными аналогами в виде интегрирующих матриц. Для построения интегрирующих матриц была проведена декомпозиция области с применением кусочно-лагранжевой интерполяции. С этой целью область интегрирования $[0, L]$ разбита на пять отрезков: $e_1 = [0, a_{[2]} - l]$, $e_2 = [a_{[2]} - l, a_{[2]} + l]$, $e_3 = [a_{[2]} + l, a_{[1]} - l]$, $e_4 = [a_{[1]} - l, a_{[1]} + l]$, $e_5 = [a_{[1]} + l, L]$ с введением глобальной сетки $\omega_h = \{x_i : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < L\}$ на отрезке $[0, L]$ следующим образом: на каждом отрезке e_i введены независимые узлы Гаусса, связанные с корнями полинома Лежандра; количество узлов на указанных отрезках было принято равным $N_1 = N_3 = N_5 = 30$, $N_2 = N_4 = 45$ соответственно.

В работе [20] были проведены натурные эксперименты с целью определения модуля сдвига волокнистых композитных материалов, используемых для несущих слоев трехслойной пластины. В результате были получены осредненные экспериментальные зависимости $\sigma_{13} = G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})2\varepsilon_{13}^{(k)}$ касательных напряжений от сдвиговых деформаций (рис. 2), на основе которых построены зависимости секущего модуля поперечного сдвига от соответствующих деформаций сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})$ (рис. 3). Последние зависимости в используемой математической модели деформирования входят как слагаемые, учитываемые в виде физически нелинейной зависимости $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)}) = G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$.

Для учета в решении задачи физической нелинейности на основе зависимостей, полученных в [20], предварительно была построена кусочно-линейная интерполяция $G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$ и модифицирован итерационный процесс:

$$A'_{(n)}(U^{(n)}) (U^{(n+1)} - U^{(n)}) + (A_1^{(n)} + A_2^{(n)}) U^{(n)} = F.$$

Нелинейная зависимость модуля поперечного сдвига G_{13} от величины сдвиговой деформации $2\varepsilon_{13}^{(k)} = w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}$, полученная экспериментальным методом в работе [21], входит при решении задачи как зависимость операторов $A'_{(n)}$, $A_1^{(n)}$,

$A_2^{(n)}$ от $U^{(n)}$, где $A_1^{(0)} U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, то есть на каждом n -ом итерационном шаге приходится заново вычислять матрицу жесткости в зависимости от n -го приближения решения $(U^{(n)}, (2\varepsilon_{13}^{(k)})^{(n)})$.

В работах [11, 16, 22] подробно описано конструктивное применение метода интегрирующих матриц в варианте [19] для решения линейных и нелинейных задач теории пластин и оболочек. В этих работах также предложены итерационные алгоритмы, такие как метод Ньютона – Рафсона, которые используются для учета как физических, так и геометрических нелинейностей. Эти алгоритмы применяются и в данной работе.

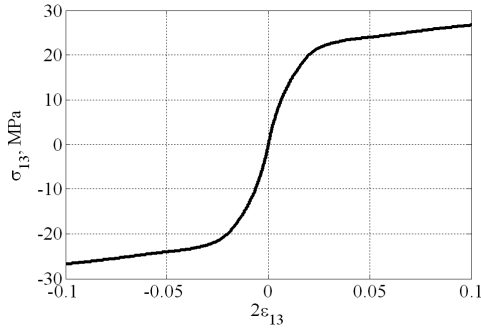


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформаций сдвига

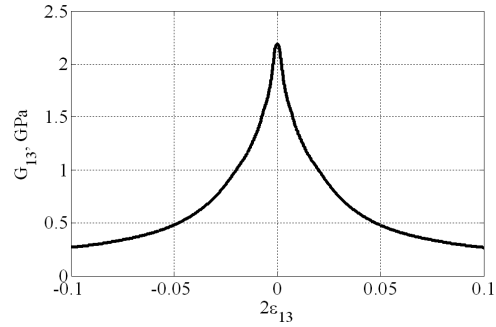


Рис. 3. Зависимость модуля сдвига от деформаций сдвига

3. Результаты вычислительных экспериментов

Для численного решения упругие характеристики внешних несущих слоев ($k = 1, 2$) приняты равными $E_1^{(k)} = 103$ ГПа, $E_3^{(k)} = 5.9$ ГПа, $\nu_{13}^{(k)} = 0.3$, $\nu_{31}^{(k)} = 0.0172$; трансверсально-мягкого заполнителя: $E_3^{[0]} = 690$ МПа, $G_{13}^{[0]} = 780$ МПа; накладок: $E_1^{[j]} = 40$ ГПа, $G_{13}^{[j]} = 1.5$ ГПа, $\nu_{13}^{(j)} = 0.3$, $\nu_{31}^{(j)} = 0.0172$ ($j = 1, 2$); клеевого слоя в виде эпоксидной смолы ХТ-118: $E_3^{[n]} = 2.5$ ГПа, $G_{13}^{[n]} = 960$ МПа ($n = 1, 2$). Толщина накладок $t^{(j)} = 4$ мм, толщина адгезионных слоев $h^{[n]} = 0.4$ мм, общая длина $2L = 270$ мм, длина рабочей части $2a_{[2]} = 70$ мм, расстояние между опорными роликами $2a_{[1]} = 250$ мм, ширина пластины $b = 25$ мм, средняя толщина несущих слоёв $t^{(k)} = 0.75$ мм, толщина заполнителя $h^{[0]} = 5$ мм.

Диаграмма нагружения в виде зависимости прикладываемой нагрузки от максимальных значений поперечных сдвиговых деформаций $2\varepsilon_{13}$ в верхнем сжатом несущем слое представлена на рис. 4. Важно отметить, что эта зависимость является сильно нелинейной и имеет чётко выраженное на диаграмме бифуркационное значение при $P = 1.08$ кН, в то время как зависимость « $P - w^{(2)}$ » с высокой степенью точности является линейной. На рис. 5 представлены максимальные значения нормальных сжимающих напряжений $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ и модуля сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ в несущем слое.

Пересечение двух кривых на графиках рис. 5 при значении $2\varepsilon_{13} \approx 0.014$ указывает на реализацию поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости несущего

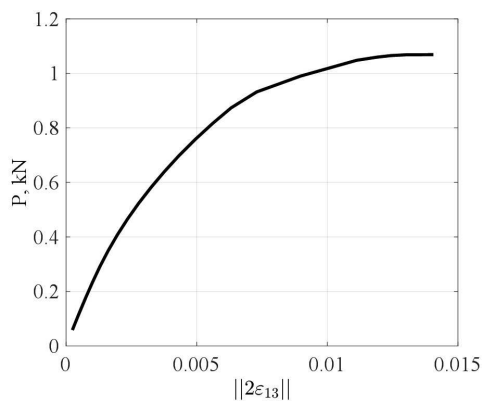


Рис. 4. Диаграмма «нагрузка – касательные деформации»

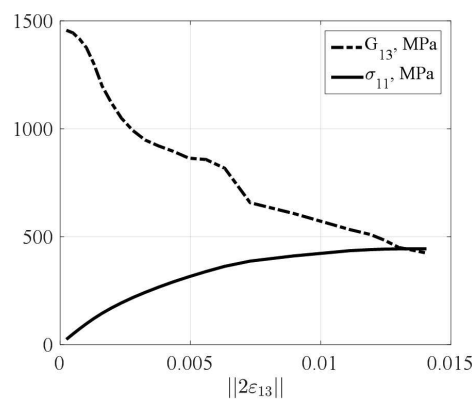


Рис. 5. Зависимости касательного модуля сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ и нормальных напряжений $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ от деформаций сдвига, МПа

слоя, при которой $\sigma_{11} = G_{13}$. Распределение нормальных сжимающих напряжений вдоль оси тест-образца в верхнем несущем слое при максимальной нагрузке можно видеть на рис. 6. Между нагружающими роликами значения нормальных сжимающих напряжений остаются постоянными на уровне 444 МПа.

На основе разработанной методики проведены также вычислительные эксперименты в задаче изгиба тест-образца без накладок, когда ролик контактно нагружал непосредственно несущий слой. С целью сравнения результатов, соответствующих двум расчетным схемам, на рис. 7, 8 представлено распределение поперечных усилий T_{33} и поперечных касательных напряжений σ_{13} от накладок (красная линия) и непосредственно от нагружающих роликов (синяя линия). Отметим лишь небольшое отличие в величине обжимающих усилий T_{33} при двух вариантах реализации передачи нагрузки. Однако пиковые величины поперечных касательных напряжений, как видно из рис. 8, при использовании накладок уменьшаются в 2.5 раза.

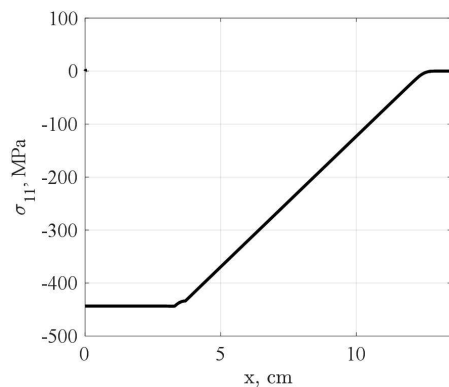


Рис. 6. Распределение по длине нормальных напряжений в несущем слое σ_{11}

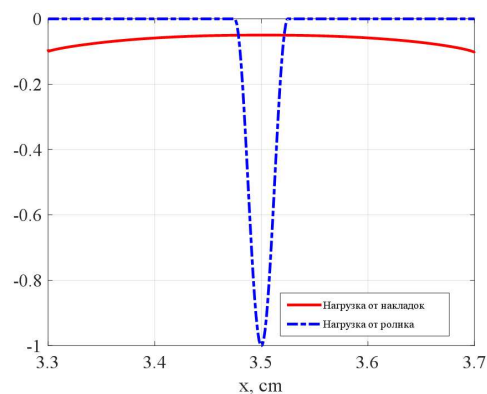


Рис. 7. Распределение поперечных усилий T_{33} в зоне нагружения (синяя линия – без накладки, красная линия – с накладкой)

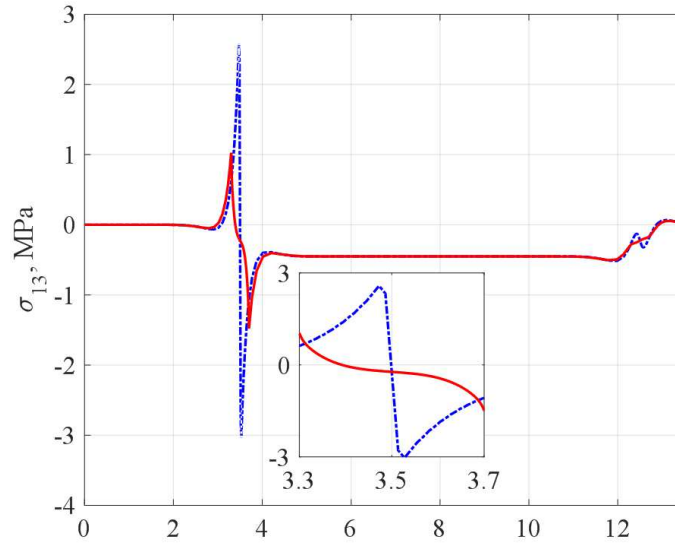


Рис. 8. Распределение касательных напряжений σ_{13} в несущих слоях (синяя линия – без накладки, красная линия – с накладкой)

4. Экспериментальные исследования на четырехточечный изгиб трёхслойных тест-образцов с жестким заполнителем

4.1. Трёхслойные тест-образцы без накладок. Для испытаний были изготовлены тест-образцы с жёстким заполнителем из древесины породы липа ($E_3^{[0]} = 690$ МПа, $G_{13}^{[0]} = 780$ МПа) по всей длине образца. Внешние несущие слои тест-образцов изготовлены из углероды ЭЛУР-П и эпоксидного связующего холодного отверждения ХТ-118 методом вакуумного формования. Общая длина тест-образцов составила $2L = 270$ мм, ширина $b = 25$ мм, толщина заполнителя $H = h^{[0]} = 5$ мм, толщина несущих слоёв $t = t^{(1)} = t^{(2)} = 1$ мм, расстояние между опорными роликами равно $2a_{[1]} = 250$ мм, а между нагружающими – $2a_{[2]} = 70$ мм. Направление укладки волокон в несущих слоях составляет 0° к продольной оси образца Ox . Несущие слои состоят из восьми монослоёв толщиной 0.10 мм. Эскиз образца с основными геометрическими характеристиками, направлением осей образца и направлением осей ортотропии несущих слоёв представлен на рис. 1.

Диаграммы нагружения трёх тест-образцов с заполнителем приведены на рис. 9 и 10. Нормальные напряжения при изгибе $\sigma_{\max}^{bend}$ вычислялись по формуле

$$\sigma_{\max}^{bend} = M_z^{\max} / W_z, \quad M_z^{\max} = P_{\max} (a_{[1]} - a_{[2]}), \quad (17)$$

в которой значение момента сопротивления W_z определяется выражением

$$W_z = [(b(H + 2t)^3 - bH^3)/12] / [(H + 2t)/2]. \quad (18)$$

Касательные напряжения вычислены по формуле $\tau_{\max} = P_{\max} / (Hb)$ из условия постоянного их распределения по высоте тест-образца. Найденные значения $\sigma_{\max}^{bend}$ и $\tau_{\max}$ также приведены в таблице 1 для каждого образца.

Табл. 1

Результаты испытаний тест-образцов без накладок

№ образца	$2P_{\max}$, кН	$\sigma_{\max}^{bend}$, МПа	$\tau_{\max}$, МПа
1	1.043	292.436	2.980
2	0.943	269.012	2.694
3	0.999	284.847	2.854
Среднее	0.995	282.098	2.843

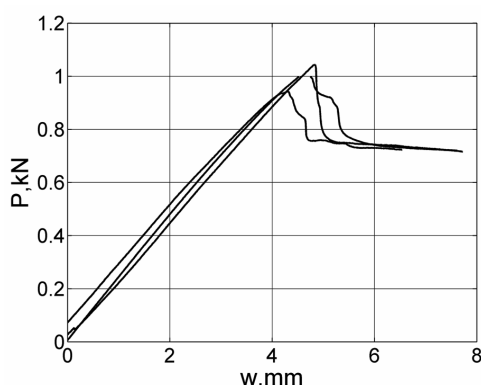


Рис. 9. Диаграмма «нагрузка–прогиб»

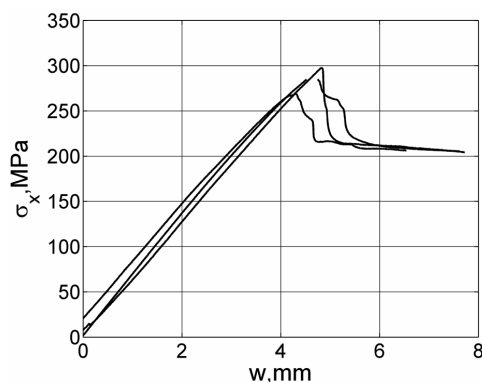


Рис. 10. Диаграмма «напряжение–прогиб»

4.2. Трёхслойные тест-образцы с накладками. Осреднённые по результатам испытаний трёх тест-образцов значения осевых сжимающих напряжений при изгибе без накладок оказались равными $\sigma_{\max}^{bend} = 282$ МПа, что существенно меньше, чем значение, полученное в работе [21] при сжатии $\sigma_1^- = 529$ МПа для композита на основе углеленты ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Разрушение при изгибе без накладок также преимущественно происходит в районе нагружающих роликов, что косвенно свидетельствует о разрушении по причине концентрации в этой области касательных напряжений [23].

Для уменьшения концентрации напряжений в окрестности нагружающих роликов проведены те же испытания на четырехточечный изгиб с приклеенными накладками из текстолита, через которые нагрузка передавалась от нагружающего ролика к верхнему несущему слою (рис. 11 и 12). Тест-образцы были идентичны тест-образцам, описанным в п. 4.1.

В результате серии из трех экспериментов по формулам (17), (18) определены разрушающие напряжения σ_x^- в сжатом несущем слое, которые получились равными $\sigma_x^- \approx 466$ МПа (см. таблицу 2).

Табл. 2

Результаты испытаний тест-образцов с накладками

№ образца	$2P_{\max}$, кН	$\sigma_{\max}^{bend}$, МПа	$\tau_{\max}$, МПа
1	0.897	420.907	2.760
2	1.075	504.439	3.3082
3	1.005	471.690	3.093
Среднее	0.992	465.679	3.054

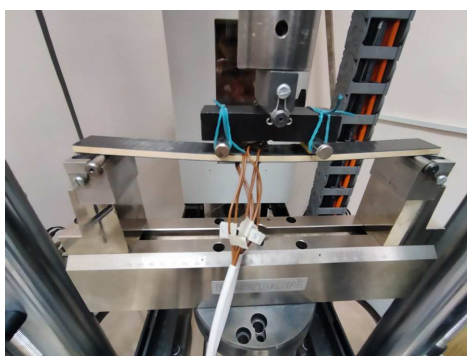


Рис. 11. Испытания на четырёхточечный изгиб тест-образца со структурой несущих слоёв [0°]

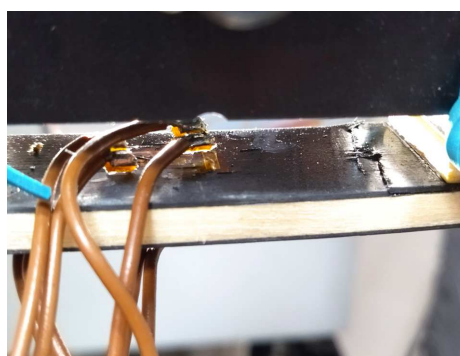


Рис. 12. Характер разрушения сжатого несущего слоя

В таблице 3 для сравнения приведены значения предельных сжимающих напряжений для трёхслойных тест-образцов с накладками и без них, полученные при испытаниях, а также на основе вычислительных экспериментов при четырёхточечном изгибе. В последнюю строку таблицы внесены значения напряжений, полученных при осевом сжатии сплошных образцов в соответствии с методом испытаний ASTM D3410. Видно, что передача поперечной изгибающей нагрузки через накладки позволяет значительно увеличить предельные напряжения в сжатом несущем слое трёхслойного тест-образца, которые при этом приближаются к предельным напряжениям при сжатии сплошных тест-образцов. Определение предельных сжимающих напряжений с помощью эксперимента на четырёхточечный изгиб, рассмотренного в данной статье, в отличие от экспериментов на сжатие сплошных тест-образцов, позволяет определять механические характеристики довольно тонких пластин в составе трёхслойных тест-образцов. Такие тонкие пластины при сжатии теряют устойчивость по изгибной форме, что делает вовсе невозможным трактовку экспериментальных данных и искажает определяемые на основе них механические характеристики.

Табл. 3

Сравнение результатов физических и численных экспериментов

	Вид эксперимента	σ_1^* (МПа)
Четырёхточечный изгиб с накладками	Физический	466
	Численный	444
Четырёхточечный изгиб без накладок	Физический	282
	Численный	341
ASTM D3410 Сжатие	Физический	529

Заключение

Проведенные в работе исследования показали, что передача поперечной нагрузки через накладки из текстолита при четырёхточечном изгибе трёхслойных тест-образцов позволяет значительно уменьшить концентрацию поперечных касательных и напряжений обжатия в окрестности нагружающих роликов и повысить осевые предельные напряжения сжатия в несущих слоях. При этом предельные

напряжения в сжатом несущем слое приближаются к предельным напряжениям, определяемым при сжатии сплошных тест-образцов значительно большей толщины по методике ASTM D3410.

Величины разрушающей экспериментальной нагрузки и нагрузки, полученной в ходе численных экспериментов, показали хорошее согласование, подтверждая эффективность применяемого для решения задачи численного метода конечных сумм. Метод может быть применим в задачах, где искомые функции имеют большие градиенты на коротких участках. Реализованный в работе итерационный алгоритм на основе метода Ньютона–Рафсона показал свою эффективность при решении физически и геометрически нелинейной задачи.

Результаты исследования, полученные в работе, подтверждают возможность применения предложенной экспериментальной методики для определения механических характеристик композитных материалов сравнительно малой толщины в составе трёхслойных пластин.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-79-10018, постановка задачи, эксперименты), Программы стратегического академического лидерства КФУ ("ПРИОРИТЕТ-2030"), а также в рамках госзадания FZSU-2024-0010 Министерства науки и высшего образования (численное решение).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels // Compos. Struct. 1999. V. 44, No 4. P. 237–252. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00123-8](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00123-8).
2. Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process // J. Sandwich Struct. Mater. 2019. V. 21, No 8. P. 2654–2679. <https://doi.org/10.1177/1099636217722052>.
3. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // Composites, Part A. 2018. V. 109. P. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.04.005>.
4. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams // Compos. Struct. 2003. V. 60, No 2. P. 219–229. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00293-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00293-3).
5. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending // Compos. Struct. 2015. V. 133. P. 739–745. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.056>.
6. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options // J. Sandwich Struct. Mater. 2013. V. 15, No 5. P. 487–508. <https://doi.org/10.1177/1099636213487004>.
7. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich // J. Sandwich Struct. Mater. 2020. V. 22, No 6. P. 2049–2074. <https://doi.org/10.1177/1099636218792729>.

8. *Piovár S., Kormaníková E.* Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models // *Adv. Mater. Res.* 2014. V. 969. P. 316–319.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316>.
9. *Russo A., Zuccarello B.* Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels // *Compos. Struct.* 2007. V. 81, No 4. P. 575–586. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.10.007>.
10. *Crupi V., Epasto G., Guglielmino E.* Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam // *Mar. Struct.* 2013. V. 30. P. 74–96.
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.11.002>.
11. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A.* Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge // *Shell Structures: Theory and Applications*. V. 4 / Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (Eds.). Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), Oct. 11–13, 2017, Gdansk, Poland. Leiden: CRC Press/Balkema, 2018. P. 267–270.
<http://dx.doi.org/10.1201/9781315166605-59>.
12. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // *Russ. Math.* 2015. V. 59, No 10. P. 57–60. <https://doi.org/10.3103/S1066369X15100072>.
13. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. V. 41, No 1. P. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).
14. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* 2010. V. 92, No 2. P. 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
15. *Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В., Холмогоров С.А.* О неклассической форме потери устойчивости и разрушении композитных тестобразцов в условиях трёхточечного изгиба // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2016. Т. 158, кн. 3. С. 350–375.
16. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* 2019. V. 99, No 1. Art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
17. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Levshonkova N.V.* Refined equations of the theory of composite multilayered shells with transversally soft core under medium bending // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 7. P. 2845–2855.
<https://doi.org/10.1134/S1995080223070338>.
18. *Галимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. 326 с.
19. *Dautov R.Z., Paimushin V.N.* On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations // *Russ. Math.* 1996. V. 40, No 10. P. 11–23.
20. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
21. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2015. Т. 157, кн. 4. С. 112–132.

22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // *Appl. Math. Sci.* 2015. V. 9, No 78. P. 3887–3895. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.54354>.
23. *Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В.* Численное исследование напряженно-деформированного состояния слоистого композитного тест-образца при трехточечном изгибе // *Тр. второй междунаро. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”*, 18–20 октября 2016 г., Москва / Под ред. А.М. Думанского, А.Н. Романова, М.А. Алимова, А.Н. Русланцева. М.: Столица, 2016. С. 126–128.

Поступила в редакцию 26.04.2024

Принята к публикации 3.05.2024

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: vpajmushin@mail.ru

Холмогоров Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева-КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: hkazan@yandex.ru

Макаров Максим Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

Левшонкова Наталья Витальевна, ведущий инженер

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.200-219

Experimental and Theoretical Study on the Failure
of Sandwich Specimens with Tabs under Four-Point Bending

V.N. Paimushin^{a,b*}, S.A. Kholmogorov^{a**}, M.V. Makarov^{a,b***}, N.V. Levshonkova^{a****}

^aKazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia

^bKazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: *vpajmushin@mail.ru, **hkazan@yandex.ru, ***makarovmaksim@mail.ru,
****dsm@dsm.kstu-kai.ru

Received April 26, 2024; Accepted May 3, 2024

Abstract

The problem of testing sandwich specimens with composite facing layers and a transversally soft core for four-point bending was formulated. The localized external load from the loading rollers to the facing layer of the specimen was assumed to be transmitted through composite tabs, which reduced the stress concentration in the compressed facing layer. The external facing layers and tabs were analyzed for deformation mechanics using S.P. Timoshenko's kinematic model. The model considered compression in the facing layers but not in the tabs. The core was classified as transversally soft with zero tangential stresses. The tabs were connected to the facing layers through adhesive interlayers, and the displacement vectors of the front surfaces of the tabs were coupled kinematically with the displacement vectors of the front surfaces of the facing layers. The relationships between the transverse shear stresses and strain in the facing layers were assumed to be physically nonlinear, with the shear modulus being a function of the shear strain.

Using the generalized variational principle of virtual displacements, a system of nonlinear differential equilibrium equations for the facing layers and tabs was derived. The system was closed by three more equations, which were the conditions for the kinematic coupling of the facing layers with the core based on tangential displacements. To numerically solve the formulated problem, the finite sum method, also known as the method of integrating matrices, was employed. This method involved reducing the original boundary value problem to integro-algebraic equations with Volterra-type operators of the second kind and additional relations for determining the unknown integration constants. The algorithm of the developed method was implemented as an application software, which facilitated a series of computational experiments. The results obtained were compared with the experimental data on the four-point bending of sandwich specimens with the facing layers made of a unidirectional fiber-reinforced composite characterized by specific geometric and physico-mechanical properties, as well as with tabs under the loading rollers. It was shown that the use of tabs significantly increases the ultimate compressive failure stresses in the facing layers.

Keywords: sandwich plate, specimen, four-point bending, fiber-reinforced composite, finite sum method, ultimate compressive stress, physical and geometric nonlinearity

Acknowledgements. The work was supported by the RSF (project No. 19-79-10018, problem statement, experiments), the KFU Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030"), and within the framework of the state assignment FZSU-2024-0010 of the Ministry of Science and Higher Education (numerical solution).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

- Fig. 1. Schematic diagram of loading a sandwich specimen with tabs for four-point bending.
 Fig. 2. Shear stress dependence on shear strain.
 Fig. 3. Shear modulus dependence on shear strain.
 Fig. 4. "Load–shear strain" curve.
 Fig. 5. Shear modulus $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ and normal stress $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ dependence on shear strain, MPa.
 Fig. 6. Normal stress distribution along the length of the facing layer σ_{11} .
 Fig. 7. Transverse stress distribution T_{33} in the loading zone (blue line – without tab, red line – with tab).
 Fig. 8. Shear stress distribution σ_{13} in the facing layers (blue line – without tab, red line – with tab).
 Fig. 9. "Load–deflection" curve.
 Fig. 10. "Stress–deflection" curve.
 Fig. 11. Four-point bending test of a specimen with the facing layer structure of $[0^\circ]$.
 Fig. 12. Failure of the compressed facing layer.

References

1. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 44, no. 4, pp. 237–252. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00123-8](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00123-8).
2. Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2019, vol. 21, no. 8, pp. 2654–2679. <https://doi.org/10.1177/1099636217722052>.
3. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Composites, Part A*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.04.005>.
4. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Compos. Struct.*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 219–229. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00293-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00293-3).
5. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 133, pp. 739–745. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.056>.
6. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, vol. 15, no. 5, pp. 487–508. <https://doi.org/10.1177/1099636213487004>.
7. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2020, vol. 22, no. 6, pp. 2049–2074. <https://doi.org/10.1177/1099636218792729>.

8. Piovár S., Kormaníková E. Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 969, pp. 316–319.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316>.
9. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, no. 4, pp. 575–586. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.10.007>.
10. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam. *Mar. Struct.*, 2013, vol. 30, pp. 74–96.
<https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.11.002>.
11. Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge. In: Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (Eds.) *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), Oct. 11–13, 2017, Gdansk, Poland. Leiden, CRC Press/Balkema, 2018, pp. 267–270.
<http://dx.doi.org/10.1201/9781315166605-59>.
12. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. <https://doi.org/10.3103/S1066369X15100072>.
13. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).
14. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
15. Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. On non-classical buckling mode and failure of composite laminated specimens under the three-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 350–375. (In Russian)
16. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
17. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Levshonkova N.V. Refined equations of the theory of composite multilayered shells with transversally soft core under medium bending. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 7, pp. 2845–2855.
<https://doi.org/10.1134/S1995080223070338>.
18. Galimov K.Z. *Osnovy nelineinoi teorii tonkikh obolochek* [Principles of the Nonlinear Theory of Thin Shells]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1975. 326 p. (In Russian)
19. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations. *Russ. Math.*, 1996, vol. 40, no. 10, pp. 11–23.
20. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
21. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)

22. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 78, pp. 3887–3895. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.54354>.
23. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V. Numerical investigation of the stress-strain state of a layered composite specimen under three-point bending. *Tr. vtoroi mezhdunarod. konf. "Deformirovanie i razrushenie kompozitsionnykh materialov i konstruktsii", 18–20 oktyabrya 2016 g., Moskva* [Proc. 2nd Int. Conf. "Deformation and Failure of Composite Materials and Structures (DFCMS-2016)", Oct. 18–20, 2016, Moscow]. Dumanskii A.M., Romanov A.N., Alimov M.A., Ruslantsev A.N. (Eds.). Moscow, Stolitsa, 2016, pp. 126–128. (In Russian)

Для цитирования: Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова

Н.В. Экспериментальные и теоретические исследования разрушения трехслойных
тест-образцов с накладками при четырехточечном изгибе // Учен. зап. Казан. ун-та.
Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 200–219.

URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.200-219>.

For citation: Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V.

Experimental and theoretical study on the failure of sandwich specimens with tabs under
four-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matemati-*
cheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 200–219.

URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.200-219>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5: 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.220-237

**НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕНКИ
ПЛОСКОГО КАНАЛА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКИМ
ГАЗОМ И УСТАНОВЛЕННОГО НА ВИБРИРУЮЩЕМ
ОСНОВАНИИ**

В.С. Попов^{1,2}, А.А. Попова¹

¹*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
г. Саратов, 410054, Россия*

²*Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, 410028, Россия*

Аннотация

Рассмотрена задача аэроупругих колебаний стенки канала, имеющей подвес с жесткой кубической нелинейностью, возбуждаемых вибрацией основания, на котором установлен канал. Исследован плоский узкий канал, заполненный пульсирующим вязким газом, с параллельными жесткими стенками, одна из которых неподвижна, а вторая имеет нелинейно-упругий подвес. Дана постановка задачи аэроупругости для случая изотермического состояния газа и стенок канала. В предположении узости канала осуществлен переход к уравнениям динамики тонкого слоя вязкого газа с учетом инерции его движения и проведен асимптотический анализ поставленной задачи методом возмущений. С использованием метода итераций определен закон распределения давления вязкого газа в канале и получено уравнение аэроупругих колебаний стенки в виде обобщения уравнения Дуффинга. Уравнение решено методом гармонического баланса и найдены в виде неявных функций: основной нелинейный аэроупругий отклик стенки канала и нелинейная характеристика фазового сдвига на вибрацию основания. Проведено численное исследование названных характеристик с целью оценки влияния нелинейно-упругого подвеса стенки канала, инерции движения вязкого газа и его сжимаемости на нелинейные колебания стенки канала.

Ключевые слова: нелинейное аэроупругое колебание, упруго закрепленная стенка, вязкий газ, нелинейно-упругий подвес, жесткая кубическая нелинейность, метод возмущений, метод гармонического баланса, аэроупругий отклик, фазовый сдвиг

Введение

Изучение взаимодействия упруго податливых стенок канала с пульсирующей жидкостью или газом, заполняющими канал, связано с постановкой и исследованием начально-краевых задач аэрогидроупругости [1, 2]. Первоначально рассматривались задачи в линейной постановке – одним из первых было исследование И.С. Громеки [3], в котором сделана попытка оценить влияние инерции движения упругой круглой трубки на скорость волны давления в пульсирующей вязкой жидкости, заполняющей ее. В рамках модели идеальной жидкости Н.Е. Жуковским [4] решена задача о гидроударе в трубе круглого сечения с учетом упругой

деформации ее стенок. Движение вязкой жидкости в упругой трубе за счет гармонически пульсирующего перепада давления исследовано Дж.Р. Уомерсли [5] с использованием метода изучения такого движения, предложенного им в [6], и параметра подобия – числа Уомерсли. Современное состояние исследований проблем гидроупругости цилиндрических конструкций отражено в [7, 8].

Среди работ по исследованию гидроупругих колебаний пластин отметим следующие.

Собственные колебания круглой пластины, жестко защемленной по контуру и с одной ее стороны контактирующей с неограниченным объемом идеальной жидкости, исследованы энергетическим методом в [9]. Рассмотрена основная форма колебаний пластины и установлено уменьшение ее собственной частоты по сравнению со случаем колебаний пластины в вакууме за счет увеличения инерционных свойств колебательной системы, оцениваемого так называемой присоединенной массой.

В [10] осуществлено обобщение исследования [9]: решена связанная задача гидроупругости пластины и рассмотрены последующие формы колебаний, а также шарнирное и свободное опирания пластины на контуре.

В [11] предложено дальнейшее развитие исследования [9] за счет учета вязкости жидкости и показано увеличение присоединенной массы по сравнению со случаем идеальной жидкости. Такое увеличение оказалось пропорциональным введенному автором безразмерному параметру, который фактически является обратным значением числа Уомерсли.

Гидроупругие колебания круглой пластины, защемленной по контуру на торце жесткой трубы конечного размера, заполненной пульсирующей идеальной несжимаемой жидкостью, исследованы в [12]. На основе рассмотрения связанной задачи гидроупругости получено интегро-дифференциальное уравнение колебаний пластины и проведено его численно-аналитическое исследование.

Колебания стенок канала, образованного двумя параллельными прямоугольными пластинами и заполненного идеальной сжимаемой жидкостью, исследованы численно методом конечных элементов в [13]. Авторами смоделирована возможность демпфирования таких колебаний путем воздействия на пластины посредством электромагнитной катушки; на основе этих расчетов были также проведены натурные эксперименты.

С другой стороны, известен ряд работ, в которых исследовано взаимодействие жестких элементов конструкций, образующих подвижные стенки каналов, с заполняющими их жидкостью или газом.

В [14] рассмотрен мелкий безнапорный канал с идеальной несжимаемой жидкостью, часть дна которого образована штампом на линейно-упругом подвесе. Установлено, что на поверхности жидкости вблизи штампа возникают бегущие и стоячие волны, а амплитуда последних может быть сведена к нулю изменением частоты колебаний штампа. В [15] предложена модель газового демпфера в виде узкого плоского канала, заполненного вязким газом и имеющего параллельные жесткие стенки, поперек которого с постоянной скоростью движется жесткая пластина, параллельная стенкам канала. Рассмотрено взаимодействие пластины со сжимаемым вязким газом в канале с учетом его теплопроводности и дана оценка демпфирующих свойств указанной конструкции для микромеханических приборов.

Динамика взаимодействия газового заполнения динамически настраиваемого гироскопа с элементами его конструкции исследована в [16]. Движение газа рассмотрено в рамках модели ползущей вязкой несжимаемой жидкости в изотермическом состоянии, определены возмущающие моменты от взаимодействия газа с

элементами гироскопа, образующими торцевые и радиальные зазоры, и дана оценка их влияния на характеристики прибора.

В [17] исследована динамика взаимодействия смазочного слоя вязкой несжимаемой жидкости с направляющей и ползуном упорного подшипника. Динамика смазочного слоя изучена в рамках ползущего движения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрен случай ползуна с адаптированным профилем для повышения несущей способности подшипника при задании экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от давления и температуры.

Приближенный подход к учету влияния упругой деформации стенки газодинамического подшипника при ее взаимодействии со слоем газовой смазки предложен в [18]. Авторами осуществлен переход от кольцевого бесконечно длинного смазочного слоя сжимаемого газа к плоской задаче, а учет упругой деформации стенки подшипника осуществлен добавлением к толщине смазочного слоя дополнительного члена, пропорционального давлению, с коэффициентом пропорциональности, определяемым модулем упругости материала стенки.

В работах [19, 20] рассмотрены вопросы численного моделирования взаимодействия вязкого теплопроводного газа с запорным элементом предохранительного клапана. Запорный элемент в виде жесткого диска на линейно-упругом подвесе рассмотрен в рамках модели массы на пружине, а численное моделирование движения газа реализовано модифицированным методом Годунова. Дано сравнение вычислительных экспериментов с данными натурных испытаний.

В [21, 22] исследованы гидроупругие колебания стенок узких каналов, имеющих упругий подвес с кубической нелинейностью и взаимодействующих с пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью, заполняющей каналы. Нелинейные колебания торцевой стенки, возбуждаемые вибрацией верхней стенки канала в виде жесткого штампа, исследованы в [21], а в [22] изучены нелинейные колебания жесткого дна канала за счет пульсации давления на торцах канала. В этих работах рассмотрено ползущее движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном параллельными стенками, получены уравнения гидроупругих колебаний стенок в виде обобщения уравнения Дуффинга, решение которого проведено методом гармонического баланса.

В работе [23] проведено исследование, аналогичное [22], для случая заполнения канала вязким сжимаемым газом при его изотермическом состоянии. Определен и численно исследован нелинейный аэроупругий отклик нижней стенки канала на подвесе с жесткой кубической нелинейностью.

В настоящей работе, в отличие от исследований, указанных выше, изучены нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала с вязким газом, обусловленные вибрацией основания, на котором он установлен.

1. Постановка задачи аэроупругости для плоского канала

Рассмотрим узкий канал, заполненный вязким газом и образованный двумя параллельными стенками, схематически представленный на рис. 1. Стенки канала считаются абсолютно жесткими и заключенными в единый жесткий корпус, установленный на вибрирующем основании, совершающем гармонические колебания по вертикали. В корпусе предполагается наличие торцевых полостей достаточно большого объема, примыкающих слева и справа к торцевым сечениям канала и заполненных тем же газом. Поверхности стенок канала, контактирующие с газом, являются прямоугольниками со сторонами $2l$ и b .

Рассмотрим плоскую задачу, считая, что $2l \ll b$, и пренебрегая силой тяжести. Верхняя стенка имеет нелинейно-упругий подвес и может перемещаться в вертикальном направлении, не испытывая сил трения со стороны корпуса, а нижняя стенка жестко закреплена и совершает колебания вместе с основанием и корпусом. Положим, что подвес – с нелинейной характеристикой жесткости, а именно, его восстанавливающая сила имеет две составляющие: линейную и нелинейную с жесткой кубической нелинейностью [24]. Свяжем начало декартовой системы координат Oxz с центром внутренней поверхности нижней пластины. В невозмущенном состоянии основание неподвижно, в канале и торцевых полостях поддерживается постоянное давление газа p_0 , принимаемое за начало отсчета давления в вязком газе ($p_0 = 0$); газ находится в равновесии, а зазор между стенками канала $\delta_0 \ll l$. В возмущенном состоянии верхняя стенка совершает нелинейные установившиеся колебания, т. к. переходные процессы за счет вязкости газа быстро затухают.

Положим амплитуду колебаний $z_m \ll \delta_0$, а состояние газа и стенок канала изотермическим и рассмотрим газ как баротропную среду. В рассматриваемой постановке вязкость газа примем постоянной и независимой от давления, как традиционно принято при изучении динамики вязкого газа [25, 26]. Считаем, что при вибрации основания в торцевых полостях над уровнем давления p_0 также поддерживается гармонически пульсирующее давление p_1 , частота пульсации которого совпадает с частотой вибрации основания. Влиянием на газ объемной силы за счет виброускорения основания будем пренебрегать в силу незначительной плотности газа, малых вертикальных размеров торцевых полостей и узости канала.

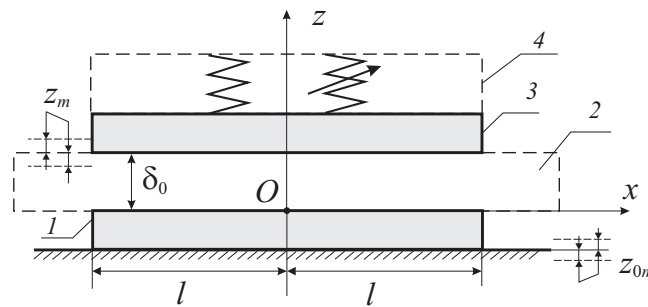


Рис. 1. Узкий плоский канал, установленный на вибрирующем основании: 1 – нижняя стенка (дно канала), установленная на вибрирующем основании; 2 – вязкий газ, заполняющий канал и торцевые полости, примыкающие к торцам канала; 3 – верхняя стенка канала, имеющая нелинейно-упругий подвес; 4 – корпус канала

Положим, что закон пульсации давления в торцевых полостях задан в виде

$$p_1 = p_m \sin(\omega t), \quad (1)$$

а закон вибрации основания определен как

$$z_0 = z_{0m} f_0(\omega t) = z_{0m} \sin(\omega t). \quad (2)$$

Тогда виброускорение основания

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = -z_{0m} \omega^2 f_0(\omega t) = -z_{0m} \omega^2 \sin(\omega t) = -k g \sin(\omega t), \quad (3)$$

здесь p_m – амплитуда пульсации давления, z_{0m} – амплитуда колебаний основания, ω – заданная частота, t – время, k – коэффициент виброперегрузки, а амплитуда виброускорения задается в единицах g (ускорение свободного падения), т. е. $z_{0m} \omega^2 = g$.

Закон движения верхней стенки в подходе Лагранжа представим в форме $z = z_m f(\theta t)$, где z_m – амплитуда колебаний верхней стенки, θ – характерная частота нелинейных колебаний верхней стенки. Динамика газа в канале в подходе Эйлера описана уравнениями Навье – Стокса для сжимаемой вязкой жидкости [26]

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right).$$

Эту систему уравнений замкнем следующими уравнениями неразрывности и состояния для баротропной сжимаемой среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{p}{\rho} = c^2, \quad (6)$$

здесь p – давление газа, V_z – проекция скорости газа на ось Oz , V_x – проекция скорости газа на ось Ox , μ – коэффициент динамической вязкости газа, μ' – вторая или объемная вязкость газа, ρ – плотность газа, c – изотермическая скорость звука в газе.

Уравнения (3)–(6) дополним следующими граничными условиями: – условиями прилипания газа к ограничивающим его подвижной и неподвижной стенкам, записанными в лагранжево-эйлеровом подходе [26, 27]

$$V_x = 0, \quad V_z + z_m f(\theta t) \frac{\partial V_z}{\partial z} = z_m \frac{df(\theta t)}{dt} \quad \text{при } z = \delta_0 + z_m f(\theta t), \quad V_x = V_z = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (7)$$

– условиями совпадения давлений в сечениях на концах канала слева и справа с давлением в торцевых полостях

$$p = p_1(\omega t) \quad \text{при } x = -l, \quad p = p_1(\omega t) \quad \text{при } x = l. \quad (8)$$

Совместно с (1)–(8) запишем в подходе Лагранжа уравнение движения верхней стенки как массы, подвешенной на пружине, с нелинейно-упругой характеристикой жесткости [24, 28]

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) + n_1 z + n_3 z^3 = F_g, \quad (9)$$

здесь m – масса верхней стенки канала, F_g – сила со стороны вязкого газа в канале, n_1 – коэффициент при линейной составляющей характеристики жесткости подвеса, n_3 – коэффициент при кубической составляющей характеристики жесткости подвеса (т. к. рассматривается жесткая кубическая нелинейность, $n_3 > 0$).

Возмущающая сила F_g определяется нормальным напряжением газа q_n на внутренней поверхности верхней стенки и может быть представлена как [23]

$$F_g = - \int_0^b \int_{-l}^l \left(q_n + z \frac{\partial q_n}{\partial z} \right)_{z=\delta_0+z_m f(\theta t)} dx dy = \\ = b \int_{-l}^l \left(1 + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(p - 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu' \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right)_{z=\delta_0+z_m f(\theta t)} dx. \quad (10)$$

2. Асимптотический анализ сформулированной задачи

Согласно рассматриваемой постановке можно выделить два независимых малых параметра: относительный зазор канала в невозмущенном состоянии $\psi = \delta_0/l \ll 1$ и относительную амплитуду колебаний стенки канала $\lambda = z_m/\delta_0 \ll 1$. Положим $\psi/\lambda = O(1)$, $\mu'/\mu = O(1)$ и введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_0}, \quad \tau = \theta t, \quad V_x = \frac{z_m \theta}{\psi} U_\xi, \quad V_z = z_m \theta U_\zeta, \quad p = \frac{\lambda \mu \theta}{\psi} P. \quad (11)$$

Примем во внимание, что плотность газа может быть представлена как $\rho = \rho_0 + \rho^*$, где ρ_0 – плотность, соответствующая постоянному давлению p_0 в невозмущенном состоянии, ρ^* – плотность газа в возмущенном состоянии (ниже индекс * опущен). С учетом (11) давление в торцевых полостях будет иметь вид $p_1 = \lambda \mu \theta \psi^{-2} P_1(\tau \omega/\theta)$. Тогда в безразмерных переменных (11) задача (4)–(10) примет вид

$$\begin{aligned} & (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \\ & + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right), \\ & \psi^2 (\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P) \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \\ & + \psi^2 \left(\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\zeta^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right), \\ & \text{Mo}^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda \text{Mo}^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + [\text{Wo}^2 + \lambda \text{Mo}^2 P] \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0, \\ & \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau \omega/\theta)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 = \frac{bl\mu}{mz_m\theta\psi} \int_{-1}^1 \left(1 + \right. \\ & \left. + \lambda f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left[\frac{\lambda}{\psi} P + \lambda \psi \left(\left(\frac{2}{3} - \frac{\mu'}{\mu} \right) \left(\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right]_{\zeta=1+\lambda f(\tau)} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta + \lambda f(\tau) \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f(\tau), \quad U_\xi = V_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (14)$$

$$P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = -1, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = 1. \quad (15)$$

Здесь выделены параметры подобия: $Wo = \delta_0 \sqrt{\rho_0 \theta / \mu}$ – число Уомерсли [5, 6], $Mo = \theta l / c$ – число подобия, предложенное Л.И. Могилевичем в [23] и представляющее собой произведение чисел Струхалия и Маха.

В уравнениях (12), (13), аналогично теории гидродинамической смазки [26], пренебрежем членами порядка ψ^2 , однако удержим инерционные члены. В результате получим систему уравнений

$$(Wo^2 + \lambda Mo^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Mo^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda Mo^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + [Wo^2 + \lambda Mo^2 P] \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau\omega/\theta)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 &= \\ = \frac{\lambda}{\psi} \frac{bl\mu}{mz_m\theta} \frac{1}{\psi} \int_{-1}^1 \left(P + \lambda f(\tau) \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1+\lambda f(\tau)} d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Применим к (16), (17) с граничными условиями (14), (15) метод возмущений [29]. Для этого рассмотрим следующие асимптотические разложения искомых функций по малому параметру λ

$$U_\xi = U_\xi^{(0)} + \lambda U_\xi^{(1)} + \dots, \quad U_\zeta = U_\zeta^{(0)} + \lambda U_\zeta^{(1)} + \dots, \quad P = P^{(0)} + \lambda P^{(1)} + \dots \quad (18)$$

Ограничившись в (18) первым членом (опустив индекс (0)) и учитывая, что согласно (16) давление P не зависит от ζ , окончательно получим следующую задачу аэроупругости

$$Wo^2 \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{bl\mu}{mz_m\theta} \frac{1}{\psi} \int_{-1}^1 P d\xi = -\frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau\omega/\theta)}{d\tau^2} \quad (20)$$

с граничными условиями

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = V_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (21)$$

3. Закон распределения давления газа в канале и нелинейный аэроупругий отклик стенки на вибрацию основания канала

Решим уравнение (19) с граничными условиями (21), используя метод итераций [23]. Проведя первую итерацию, рассмотрим ползущее движение несжимаемого вязкого газа, т. е. считаем, что $Wo^2 \rightarrow 0$ и $Mo^2/Wo^2 \rightarrow 0$, и исключаем из (19) члены при параметрах подобия. В этом случае решение имеет вид

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) + 6(\zeta^2 - 1) \frac{df(\tau)}{d\tau}. \quad (22)$$

Проведя вторую итерацию, определим члены, исключенные из рассмотрения на первой итерации при использовании (22), и найдем решение полученных уравнений. В результате определим закон распределения давления вязкого газа вдоль

канала в виде

$$P = P_1(\omega\tau/\theta) + 6\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2}(\xi^2 - 1)\frac{dP_1(\omega\tau/\theta)}{d\tau} + \frac{(\xi^2 - 1)}{2}\left(12\frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{5}{6}\text{Wo}^2\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}\right) + \quad (23)$$

$$+ 6\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2}(5 + \xi^4 - \xi^6)\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}.$$

Подставив (23) в уравнение движения стенки (20), запишем его в размерном виде

$$(m + M_{g1} - M_{g2})\frac{d^2z}{dt^2} + K_g\frac{dz}{dt} + n_1z + n_3z^3 = 2lb\left(p_1 - T_g\frac{dp_1}{dt}\right) - \frac{d^2z_0}{dt^2}, \quad (24)$$

$$\text{где } M_{g1} = \frac{12}{15}\frac{b\mu}{\theta}\frac{l^3}{\delta_0^3}\text{Wo}^2 = \frac{12}{15}\frac{b}{\delta_0}l^3\rho_0, \quad M_{g2} = \frac{192}{5}\frac{b\mu}{\theta}\frac{l^3}{\delta_0^3}\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = \frac{192}{5}\frac{l^5}{\delta_0^5}\frac{b\mu^2}{c^2\rho_0},$$

$$K_g = 8\frac{\mu bl^3}{\delta_0^3}, \quad T_g = \frac{4}{\theta}\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = 4\frac{\mu l^2}{c^2\rho_0\delta_0^3}.$$

Уравнение (24) – это уравнение аэроупругих колебаний стенки канала, установленного на вибрирующее основание, и его можно рассматривать как обобщение уравнения Дуффинга [24, 28]. Учитывая (1) и (3), запишем (24) в виде

$$(m + M_{g1} - M_{g2})\frac{d^2z}{dt^2} + K_g\frac{dz}{dt} + n_1z + n_3z^3 = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega)), \quad (25)$$

здесь

$$A(\omega) = \sqrt{(mkg)^2 + 4lbp_m mkg + 4(1 + (T_g\omega)^2)(lbp_m)^2}, \quad \text{tg } \varphi(\omega) = \frac{2lbp_m T_g\omega}{mkg + 2lbp_m}.$$

Неоднородное уравнение Дуффинга с гармонической возмущающей силой в правой части допускает периодическое решение [28]. Получим такое решение для основной частоты, т. е. для частоты переносного виброускорения основания, используя метод гармонического баланса [24, 30]. В этом случае вид искомого решения определим в виде $z = z_m \sin(\omega t - \varphi)$. Вязкость газа обуславливает в (25) член с вязким трением и ведет к фазовому сдвигу ϕ в отклике стенки на возмущение – вибрацию основания. Сдвиг учтем в правой части (25), т. е. представим правую часть (25) в виде $A(\omega)\sin(\omega t - \varphi + \phi)$ [24]. Проведя после этого процедуру метода гармонического баланса, получим систему двух алгебраических уравнений

$$\left[n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2 + (m + M_{g1} - M_{g2})\omega^2\right]z_m = A(\omega)\cos\phi, \quad K_g\omega z_m = A(\omega)\sin\phi. \quad (26)$$

Из (26) найдем выражения основного аэроупругого отклика и фазового сдвига для стенки канала, установленного на вибрирующем основании:

$$z_m = \frac{A(\omega)}{\sqrt{\left[n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2 + (m + M_{g1} - M_{g2})\omega^2\right]^2 + K_g^2\omega^2}}, \quad (27)$$

$$\text{tg } \phi(\omega) = \frac{K_g\omega/(m + M_{g1} - M_{g2})}{(n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2)/(m + M_{g1} - M_{g2}) - \omega^2}. \quad (28)$$

Введя в рассмотрение безразмерную частоту $\eta = \omega / \sqrt{n_1(m + M_{g1} - M_{g2})}$ и обозначение $B = \frac{K_g}{\sqrt{n_1(m + M_{g1} - M_{g2})}}$, представим (27) и (28) в виде

$$z_m = \frac{mkg}{n_1} \frac{\sqrt{1 + 4\frac{lbpm}{mkg} + 4(1 + \frac{n_1}{m + M_{g1} - M_{g2}}(T_g\eta)^2)(\frac{lbpm}{mkg})^2}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + B^2\eta^2}}, \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \phi(\omega) = \frac{B\eta}{\eta_*^2 - \eta^2}. \quad (30)$$

Здесь выделена безразмерная скелетная кривая $\eta_*^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{n_3}{n_1} z_m^2$. Эта кривая представляет характеристику изменения собственных безразмерных частот рассматриваемой нелинейной колебательной системы без демпфирования при $K_g = 0$, т. е. нелинейной консервативной колебательной системы.

4. Результаты вычислений

Выражения (29) и (30) являются неявными функциями, что затрудняет их непосредственное использование, однако они могут быть исследованы численно. Заметим, что полученные выражения для аэроупругого отклика и фазового сдвига допускают переходы к следующим частным случаям.

Если положить $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$, что эквивалентно $\text{Mo}^2/\text{Wo}^2 \rightarrow 0$, то исключим сжимаемость пульсирующего вязкого газа и осуществим переход к рассмотрению несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости).

Если положить $M_{1g} = 0$, что эквивалентно $\text{Wo}^2 \rightarrow 0$, то исключим из рассмотрения силы инерции пульсирующего газа и осуществим переход к ползущему движению вязкого газа.

При $M_{1g} = 0$ и $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$ осуществим переход к рассмотрению ползущего движения несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости). Кроме того, если принять $n_3 = 0$, то осуществим переход к случаю, когда подвес стенки канала имеет линейную характеристику жесткости, а выражения (29), (30) являются явными функциями.

Приведем пример численного исследования аэроупругого отклика стенки канала по выражениям (29), (30) для канала с параметрами: $l = 0.12$ м, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $b = 2l$, $m = 3$ кг, $\rho_{g0} = 1.2$ кг/м³, $\mu = 18.1 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $c = 290$ м/с, $n_1 = 8 \cdot 10^6$ Н/м, $n_3 = 7 \cdot 10^{14}$ Н/м³, $p_m = 2.4 \cdot 10^4$ Па. Были рассмотрены случаи:

- 1) канал заполнен вязким газом при учете сжимаемости и инерции его движения;
- 2) ползущее движение сжимаемого вязкого газа, т. е. случай, когда $M_{1g} = 0$;
- 3) канал заполнен несжимаемым вязким газом (вязкой жидкостью) при учете инерции его движения, т. е. случай, когда $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$;
- 4) ползущее движение несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости), т. е. случай, когда $M_{1g} = 0$ и $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$.

Результаты расчетов кривых нелинейного аэроупругого отклика и фазового сдвига представлены на рис. 2–5. На рис. 6 для примера приведены кривые линейного аэроупругого отклика, т. е. отклика (29) при $n_3 = 0$. Кривые фазового сдвига (30) для этого случая совпадают друг с другом и имеют классический вид фазовых характеристик гармонического осциллятора [24].

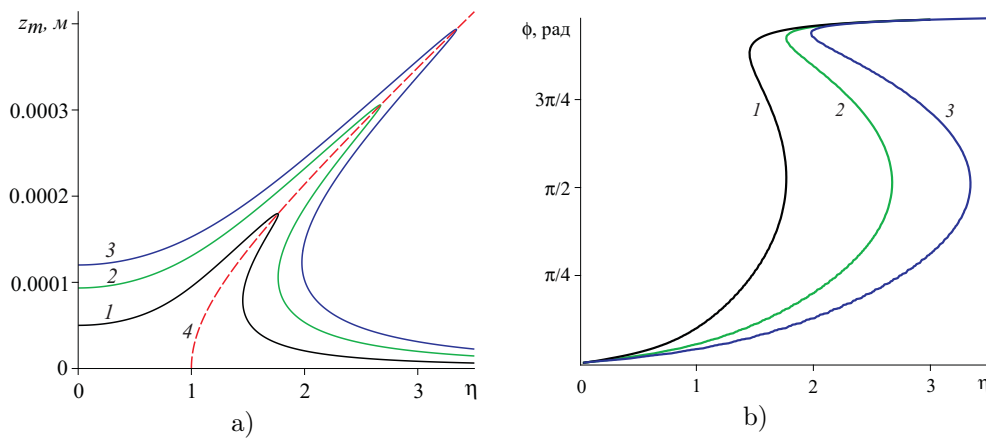


Рис. 2. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при учете инерции движения и сжимаемости газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1273.72$ рад/с)

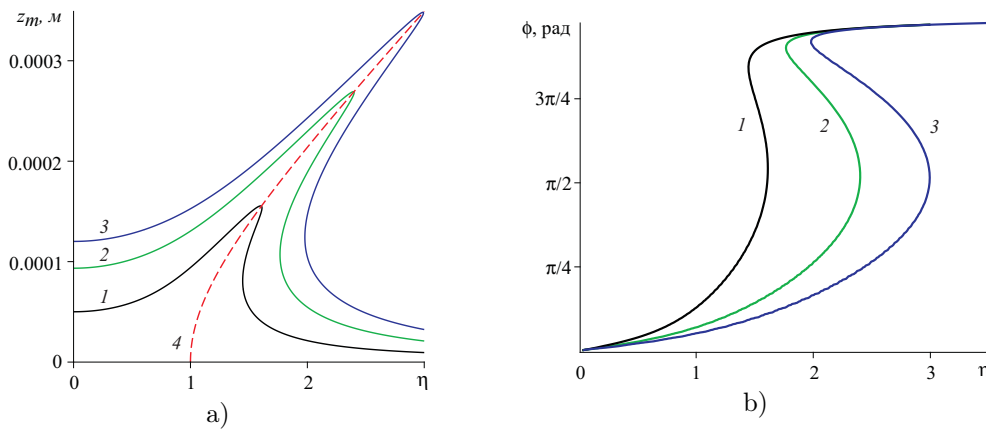


Рис. 3. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при ползущем движении сжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1649.45$ рад/с)

5. Выводы и заключение

Для рассматриваемого канала сформулирована плоская связанная задача аэроупругости. Проведенный асимптотический анализ поставленной задачи позволил получить уравнение аэроупругих колебаний стенки канала (24) в виде обобщения уравнения Дуффинга. Анализ уравнения показал, что учет инерции движения вязкого газа ведет к появлению дополнительной инерционной силы, которая пропорциональна так называемой присоединенной массе M_{g1} . Следовательно, учет влияния инерции движения вязкого газа ведет к увеличению инерционных свойств рассматриваемой колебательной системы. С другой стороны, учет сжимаемости газа обуславливает появление силы, пропорциональной дополнительной массе M_{g2} , направленной в противоположную силам инерции движения стенки канала и вязкого газа сторону. Эта сила обусловлена изменением плотности сжимаемого вязкого газа при его торможении/ускорении и ведет к уменьшению инерционных свойств рассматриваемой аэроупругой колебательной системы. Найденные основной аэро-

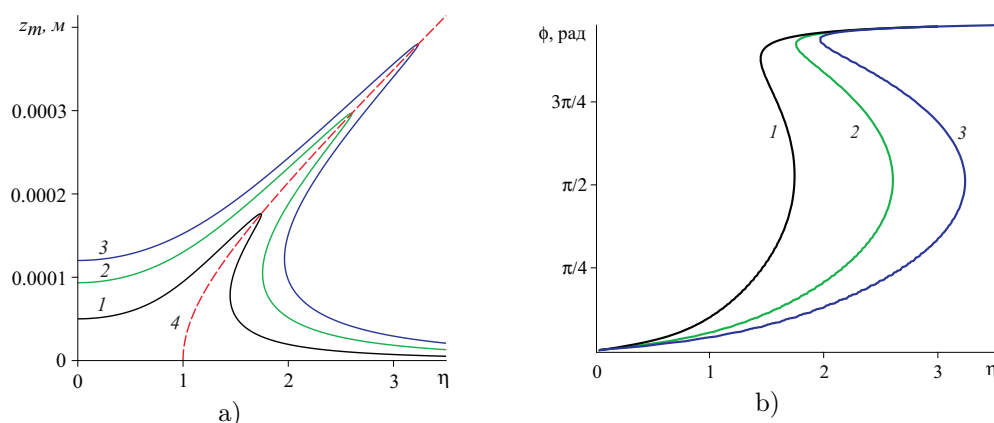


Рис. 4. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при учете инерции движения несжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1266.09$ рад/с)

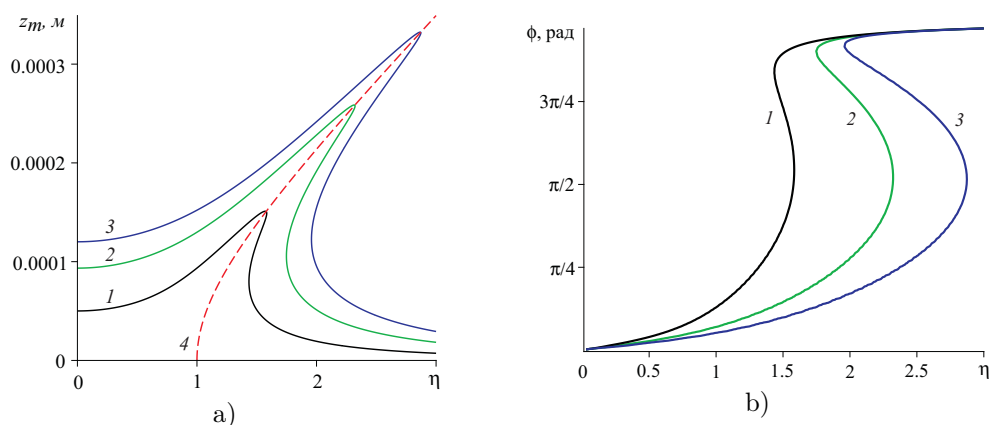


Рис. 5. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при ползущем движении несжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1632.99$ рад/с)

упругий отклик стенки канала (29) и фазовый сдвиг (30) позволяют численно исследовать влияние указанных факторов, а также нелинейности подвеса стенки канала.

Расчеты указанных характеристик, представленные на рис. 2–5, показали важность учета сжимаемости и инерции движения вязкого газа в канале. Принятие во внимание инерции движения газа ведет к возрастанию инерционных свойств и уменьшению резонансных частот, сопровождаемые возрастанием амплитуд колебаний. Учет изменения плотности газа обуславливает снижение инерционных свойств и приводит к незначительному возрастанию значений резонансных частот, сопровождаемому снижением амплитуд колебаний. Такое поведение характерно как для нелинейно-упругого подвеса, так и для линейного подвеса стенки канала.

При учете жесткой кубической нелинейности подвеса стенки канала наблюдается изгиб кривых аэроупругого отклика и фазового сдвига. В результате происходит рост значений резонансных частот при увеличении коэффициента виброперегрузок. При вынужденных нелинейных колебаниях осцилля-

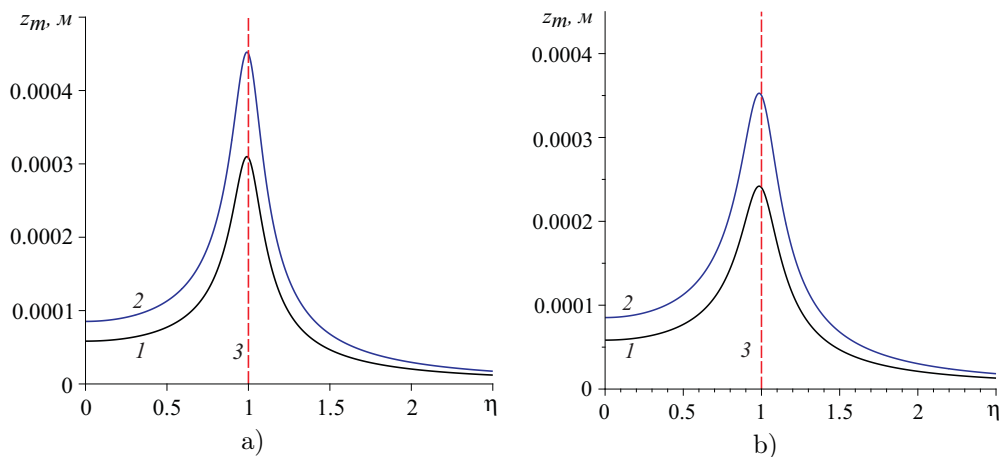


Рис. 6. Аэроупругий отклик стенки канала на линейно-упругом подвесе ($n_3 = 0$) при учете инерции движения и сжимаемости газа а) и ползущем движении сжимаемого газа б): (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 2 g, (3) безразмерная собственная частота ($\eta = 1$ соответствует $\omega = 1273.72$ рад/с для а), $\omega = 1649.45$ рад/с для б))

тора Дуффинга с вязким трением в зоне изгиба характеристик амплитудного отклика вблизи резонансных частот возникают неустойчивые колебания [24, 28]. Эти колебания характеризуются скачкообразным изменением амплитуд. Проведенные расчеты показали, что такие колебания возможны для рассматриваемой стенки канала. В случае линейного подвеса ($n_3 = 0$) выражения для аэроупругого отклика и фазового сдвига принимают классический вид, соответствующий гармоническому осциллятору с вязким трением.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа вибрационной устойчивости чувствительных элементов датчиков давления, аэростатических опор, систем газового демпфирования микромеханических приборов, а также стенок каналов, имеющих нелинейно- и линейно-упругие подвесы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание по теме 122030100145-3).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Païdoussis M.P. Fluid-Structure Interactions. V. 2: Slender structures and axial flow. 2nd ed. London: Acad. Press, 2016. xviii, 923 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>.
3. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 172–183.
4. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 103 с.

5. *Womersley J.R.* XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube — I: The linear approximation for long waves // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7. 1955. V. 46, No 373. P. 199–221.
<https://doi.org/10.1080/14786440208520564>.
6. *Womersley J.R.* Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // J. Physiol. 1955. V. 127, No 3. P. 553–563.
<https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>.
7. *Païdoussis M.P.* Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // J. Fluids Struct. 2021. V. 107. Art. 103374. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>.
8. *Païdoussis M.P.* Pipes conveying fluid: A fertile dynamics problem // J. Fluids Struct. 2022. V. 114. Art. 103664. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103664>.
9. *Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. R. Soc. A. 1920. V. 98, No 690. P. 205–216. <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>.
10. *Amabili M., Kwak M.K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. V. 10, No 7. P. 743–761.
<https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>.
11. *Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb’s model // J. Sound Vib. 2009. V. 326, No 1–2. P. 332–339.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
12. *Velmisov P.A., Pokladova Yu.V.* Mathematical modelling of the “Pipeline-pressure sensor” system // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1353. Art. 012085.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
13. *Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V.* Control of hydro-elastic vibrations of two parallel plates by electromagnetic coil // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2239. Art. 020020.
<https://doi.org/10.1063/5.0008384>.
14. *Indeitsev D.A., Osipova E.V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Tech. Phys. 2000. V. 45, No 12. P. 1513–1517.
<https://doi.org/10.1134/1.1333186>.
15. *Шевцова Е.В.* Газовое демпфирование в микромеханических приборах // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2006. № 2 (63). С. 100–111.
16. *Цинь Ц., Подчезерцев В.П.* Влияние конструктивных особенностей и параметров газового заполнения на характеристики динамически настраиваемых гироскопов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2 (113). С. 4–20.
<https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>.
17. *Хасьянова Д.У., Мукутадзе М.А.* Оптимизация опорной поверхности подшипника скольжения по параметру несущей способности с учетом зависимости вязкости смазочного материала от давления и температуры // ПМНМ. 2018. № 4. С. 66–72.
<https://doi.org/10.31857/S023571190000592-2>.
18. *Турчак Л.И., Шидловский В.П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 2. С. 329–348.
19. *Редер Т., Тенев В.А., Чернова А.А.* Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. 2020. № 68. С. 141–157. <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>.
20. *Raeder T., Tenenev V.A., Koroleva M.R., Mishchenkova O.V.* Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2021. V. 17, No 1. P. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>.

21. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. 2022. V. 10, No 20. Art. 3844. <https://doi.org/10.3390/math10203844>.
22. Попов В.С., Попова А.А. Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору // Комп. исслед. и моделир. 2022. Т. 14, № 1. С. 79–92. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>.
23. Попов В.С., Мозилевич Л.И., Попова А.А. Колебания стенки канала на нелинейно-упругом подвесе под воздействием пульсирующего слоя вязкого газа, находящегося в канале // Изв. вузов. Радиофизика. 2023. Т. 66, № 10. С. 821–834.
24. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
25. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
26. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
27. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.
28. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York, NY: Wiley, 1979. xiv, 704 p.
29. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.
30. Krack M., Gross J. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. Ser.: Mathematical Engineering. Schröder J., Weigand B. (Eds.). New York, NY: Springer, 2019. xii, 159 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.

Поступила в редакцию 24.04.2024

Принята к публикации 26.04.2024

Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»; главный научный сотрудник

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия

Институт проблем точной механики и управления РАН

ул. Рабочая, д. 24, г. Саратов, 410028, Россия

E-mail: vic_p@bk.ru

Попова Анна Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия

E-mail: anay_p@bk.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 2, pp. ...

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2...-...

**Nonlinear Aeroelastic Oscillations in the Wall of a Flat Channel
Filled with Viscous Gas and Resting on a Vibrating Foundation**

V.S. Popov^{a,}, A.A. Popova^{a,**}*

^a *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054 Russia*

^b *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences,
Saratov, 410028 Russia*

E-mail: ^{*}*vic_p@bk.ru*, ^{**}*anay_p@bk.ru*

Received April 24, 2024; Accepted April 26, 2024

Abstract

This article considers the problem of aeroelastic oscillations in the channel wall having a suspension with hardening cubic nonlinearity, which were induced by the vibration of the channel foundation. The narrow flat channel formed by two parallel rigid walls and filled with pulsating viscous gas was examined. The bottom wall was stationary, while the opposite one had a nonlinear elastic suspension. The aeroelasticity problem was formulated for the isothermal state of the gas and channel walls. Considering the narrowness of the channel, the equations of dynamics were derived for a thin layer of the viscous gas, and the asymptotic analysis of the problem was performed by the perturbation method. Using the method of iterations, the law of viscous gas pressure distribution in the channel was determined, and the equation of aeroelastic oscillations in the channel wall was obtained as a generalization of the Duffing equation. This equation was solved by the harmonic balance method. The primary nonlinear aeroelastic response of the channel wall and the nonlinear phase shift were expressed as implicit functions. These characteristics were studied numerically to evaluate the influence of the nonlinear elastic suspension of the channel wall and the viscous gas inertia and compressibility on the nonlinear oscillations in the channel wall.

Keywords: nonlinear aeroelastic oscillation, elastically fixed wall, viscous gas, nonlinear elastic suspension, hardening cubic nonlinearity, perturbation method, harmonic balance method, aeroelastic response, phase shift

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state assignment (theme no. 122030100145-3).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Narrow flat channel resting on a vibrating foundation: 1 – bottom wall (channel bottom) on a vibrating foundation; 2 – viscous gas filling the channel and end cavities adjacent to the channel ends; 3 – upper wall with a nonlinear elastic suspension; 4 – channel body.

Fig. 2. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the inertia and compressibility of gas: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1273.72$ rad/s).

Fig. 3. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the compressible gas creep: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1649.45$ rad/s).

Fig. 4. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the inertia of incompressible gas: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1266.09$ rad/s).

Fig. 5. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the incompressible gas creep: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1632.99$ rad/s).

Fig. 6. Aeroelastic response of the channel wall with a linear elastic suspension ($n_3 = 0$) considering the inertia and compressibility of gas a) and the compressible gas creep b): (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 2 g, (3) non-dimensional eigenfrequency ($\eta = 1$ corresponds to $\omega = 1273.72$ rad/s for a), $\omega = 1649.45$ rad/s for b)).

References

1. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* [Aerohydroelasticity of Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 592 p. (In Russian)
2. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions*. Vol. 2: Slender structures and axial flow. 2nd ed. London, Acad. Press, 2016. xviii, 923 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>.
3. Gromeka I.S. Wave velocities of fluid in elastic pipes. In: *Sobr. soch.* [Collected Works]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1952, pp. 172–183. (In Russian)
4. Joukowsky N.E. *O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh* [Water Hammer in Pipes]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1949. 103 p. (In Russian)
5. Womersley J.R. XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube — I: The linear approximation for long waves. *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7*, 1955, vol. 46, no. 373, pp. 199–221. <https://doi.org/10.1080/14786440208520564>.
6. Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 1955, vol. 127, no. 3, pp. 553–563. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>.
7. Païdoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review. *J. Fluids Struct.*, 2021, vol. 107, art. 103374. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>.
8. Païdoussis M.P. Pipes conveying fluid: A fertile dynamics problem. *J. Fluids Struct.*, 2022, vol. 114, art. 103664. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103664>.
9. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. R. Soc. A*, 1920, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>.
10. Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>.
11. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, nos. 1–2, pp. 332–339. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
12. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “Pipeline-pressure sensor” system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.

13. Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Control of hydro-elastic vibrations of two parallel plates by electromagnetic coil. *AIP Conf. Proc.*, 2020, vol. 2239, art. 020020. <https://doi.org/10.1063/5.0008384>.
14. Indeitsev D.A., Osipova E.V. Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water. *Tech. Phys.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 1513–1517. <https://doi.org/10.1134/1.1333186>.
15. Shevtsova E.V. Gas damping in micromechanical instruments. *Vestn. MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostr.*, 2006, no. 2 (63), pp. 100–111. (In Russian)
16. Qin Z., Podchertzsev V.P. Influence of design features and gas filling parameters on dynamically tuned gyroscope characteristics. *Vestn. MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostr.*, 2017, no. 2 (113), pp. 4–20. <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>.
17. Mukutadze M.A., Khasyanova D.U. Optimization of the supporting surface of a slider bearing according to the load-carrying capacity taking into account the lubricant viscosity depending on pressure and temperature. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2018, vol. 47, no. 4, pp. 356–361. <https://doi.org/10.3103/S1052618818040106>.
18. Turchak L.I., Shidlovskii V.P. Mathematical modeling of gas lubrication problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 308–325. <https://doi.org/10.1134/S0965542511020151>.
19. Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2020, no. 68, pp. 141–157. <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>. (In Russian)
20. Raeder T., Tenenev V.A., Koroleva M.R., Mishchenkova O.V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2021, vol. 17, no. 1, pp. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>.
21. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. <https://doi.org/10.3390/math10203844>.
22. Popov V.S., Popova A.A. Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>. (In Russian)
23. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Vibrations of the channel wall on a nonlinear elastic suspension under the influence of a pulsating layer of viscous gas located in the channel. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz.*, 2023, vol. 66, no. 10, pp. 821–834. (In Russian)
24. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the Theory of Mechanical Vibrations]. Moscow, Nauka, 1991. 256 p. (In Russian)
25. Constantinescu V.N. *Gazovaya smazka* [Gas Lubrication]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 718 p. (In Russian)
26. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
27. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures in Hydroaeromechanics]. Leningrad, LGU, 1978. 296 p. (In Russian)
28. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*. New York, NY, Wiley, 1979. xiv, 704 p.
29. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, CA, The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.

-
30. Krack M., Gross J. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Ser.: Mathematical Engineering. Schröder J., Weigand B. (Eds.). New York, NY, Springer, 2019. xii, 159 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.
-

⟨ **Для цитирования:** Попов В.С., Попова А.А. Нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала, заполненного вязким газом и установленного на вибрирующем основании // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 220–237. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237>. ⟩

⟨ **For citation:** Popov V.S., Popova A.A. Nonlinear aeroelastic oscillations in the wall of a flat channel filled with viscous gas and resting on a vibrating foundation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 220–237. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК [517.972.7+519.25+519.6+536.2]:[550.832.6+550.8.056]

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.238-249

**ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ИНТЕРПРЕТАЦИИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕРМОМЕТРИИ ИЗОЛИРОВАННОГО
УЧАСТКА НАГНЕТАТЕЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ
К ПОГРЕШНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ**

*К.А. Поташев¹, Д.Р. Салимьянова², А.Б. Мазо¹,
А.А. Давлетшин³, А.В. Костерин¹*

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»,
г. Москва, 123182, Россия

³ООО «НПП «Черный ключ», г. Казань, 420141, Россия

Аннотация

Поставлены и решены обратные задачи определения длительности работы нагнетательной скважины и теплофизических параметров пласта по результатам термометрии на непроницаемом участке скважины. Исследованы устойчивость алгоритмов решения задач и их чувствительность к погрешности исходных данных: замеров температуры и задания теплофизических свойств.

Ключевые слова: нефтяной пласт, термометрия, погрешность измерений, геологическая неопределённость, обратная задача, численное моделирование

Введение

Актуальной проблемой заводнения нефтяных пластов является непроизводительная закачка, когда нагнетаемая через скважину вода проникает в нецелевые пропластки. Это может возникать, например, при нарушении герметичности эксплуатационной колонны или повреждении целостности породы пласта при повышенном давлении нагнетания воды. При определении интервалов гидродинамической связи ствола нагнетательной скважины с пластом одним из надежных методов является термометрия – измерение температуры вдоль ствола скважины в процессе ее работы и последующей остановки, когда температура в стволе восстанавливается до уровня пластовой [1–4].

Интерпретация набора термограмм относится к классу обратных задач [5], поиск решения которых осложняется неопределенностью в исходных данных [6, 7]. Такой неопределенностью могут обладать не только теплофизические свойства (ТФС) пласта, но и показатели работы скважины. В настоящей работе рассмотрены задачи уточнения длительности работы скважины и температуропроводности

пласта по результатам термометрии на уровне верхнего непроницаемого интервала скважины. Уточнённые таким образом исходные данные впоследствии повышают корректность задачи интерпретации термограмм вдоль всего ствола скважины, содержащего перфорированные участки. В условиях отсутствия конвективного теплообмена скважины с пластом на этом интервале распределение температуры в породе определяется только теплопроводностью. Поэтому при интерпретации термометрии здесь упрощается постановка задачи, сокращается число ее параметров и повышается достоверность решения соответствующей обратной задачи.

1. Прямая задача

Прямая задача моделирует процесс распространения температурного возмущения в пласте при контакте с непроницаемой стенкой вертикальной нагнетательной скважины и последующее восстановление температуры в стволе скважины до пластовой после ее остановки. В предположении достаточной удалённости данного интервала скважины от участков ее гидродинамической связи с пластом полагаем, что процесс теплопередачи происходит лишь за счёт теплопроводности, а вертикальный градиент температуры пренебрежимо мал, что позволяет перейти к одномерной радиальной постановке в горизонтальной плоскости без учета вертикального теплообмена.

На основе решения задачи необходимо получить зависимость от времени температуры в скважине после ее остановки – кривую восстановления температуры.

Уравнение теплопроводности в рассматриваемой горизонтальной плоскости в однородном пласте в предположении осевой симметрии процесса имеет вид [2, 8]

$$c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > r_w, \quad (1)$$

где r – расстояние от оси скважины до точки в пласте (м); t – время (с); T – температура пласта, средняя по высоте моделируемого слоя (К); c – удельная теплоемкость (Дж/(кг·К)); ρ – плотность (кг/м³); λ – теплопроводность (Вт/(м·К)); r_w – внешний радиус стенки скважины (м); индекс s означает принадлежность параметра к объёму пласта.

В начальный момент времени ($t = 0$) на удалении от скважины температура в пласте совпадает с начальной T_G .

Уравнение (1) справедливо на двух интервалах времени: в период работы скважины $0 < t < t_0$, когда через ее ствол проходит вода постоянной температуры T_w , и в период простоя скважины $t_0 < t < t_1$, когда температура воды в скважине постепенно восстанавливается до пластовой T_G .

Для решения задачи в период $0 < t < t_0$ работы скважины примем условия:

$$\begin{aligned} t = 0 : T &= T_G, \\ r = r_w : T &= T_w, \\ r \rightarrow \infty : T &= T_G. \end{aligned} \quad (2)$$

В период $t_0 < t < t_1$ бездействия скважины используем иные условия:

$$\begin{aligned} t = t_0 : T(r) &= T_0(r), \\ r = r_w : \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\beta a}{r_w} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad a = \frac{\lambda_s}{c_s \rho_s}, \quad \beta = 2 \frac{c_s \rho_s}{c_w \rho_w}, \\ r \rightarrow \infty : T &= T_G. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь нижним индексом w обозначены теплофизические свойства жидкости в скважине. Второе граничное условие в (3) получено из баланса теплового потока через стенку скважины и скорости изменения средней в стволе температуры воды. С помощью характерных масштабов времени, координаты и разницы температур

$$t^0, \quad R = \sqrt{t^0 \frac{\lambda_s}{c_s \rho_s}} = \sqrt{t^0 \eta}, \quad \Delta T = T_w - T_G$$

введем безразмерные переменные

$$\bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{r}_w = \frac{r_w}{R}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^0}, \quad \theta = \frac{T - T_G}{\Delta T}, \quad \theta_0 = \frac{T_0 - T_G}{\Delta T}. \quad (4)$$

При типичных значениях

$t^0 \sim 1$ мес., $\lambda_s \sim 1$ Вт/(м·К), $c_s \sim 10^3$ Дж/(кг·К), $\rho_s \sim 10^3$ кг/м³, $r_w \approx 0.1$ м характерный радиус температурного возмущения имеет порядок $R \sim 1$ м и безразмерный радиус скважины $\bar{r}_w \approx 0.1$.

Опустив в дальнейшем черту в обозначении безразмерных переменных (4), уравнение (1) и условия (2), (3) перепишем в виде

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad r > r_w, \quad (5)$$

$$t = 0 : \theta(r) = 0; \quad r = r_w : \theta = 1; \quad r \rightarrow \infty : \theta = 0, \quad (6)$$

$$t = t_0 : \theta(r) = \theta_0(r; t_0); \quad r = r_w : \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\beta}{r_w} \frac{\partial \theta}{\partial r}; \quad r \rightarrow \infty : \theta = 0. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6) имеет вид [8, 9]

$$\theta(t, r) = \frac{\text{Ei}(-r^2/4t)}{\text{Ei}(-r_w^2/4t)}$$

и определяет запись начального условия в (7):

$$\theta_0(r; t_0) = \frac{\text{Ei}(-r^2/4t_0)}{\text{Ei}(-r_w^2/4t_0)}. \quad (8)$$

Распределение температуры в пласте (8) при разной длительности t_0 работы скважины показано на рис. 1 а).

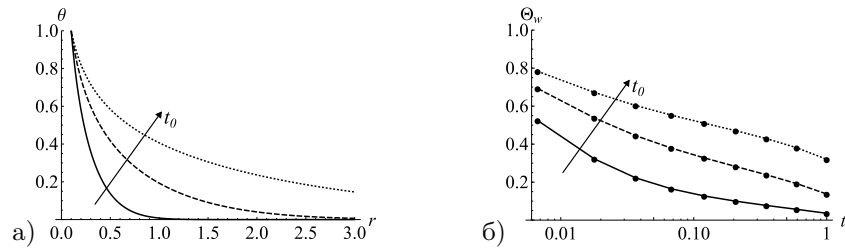


Рис. 1. а) Профиль температуры в пласте и б) восстановление температуры в скважине в период ее простоя при $t_0 = 0.1; 1; 10$

Задачу (5), (7) решали численно. Из ее решения, которое обозначим $\Theta(r, t; t_0)$, определяется динамика восстановления температуры в период простоя скважины $\Theta_w(t; t_0) = \Theta(r_w, t; t_0)$ (рис. 1 б)).

2. Обратная задача

2.1. Постановка обратной задачи. На практике после остановки скважины, то есть при $t_0 < t < t_1$, производят замеры температуры Θ_{wj} в ее стволе в моменты времени t_j . Для уточнения длительности t_0 работы скважины может быть поставлена обратная задача – отыскание значения t_0^a , доставляющего минимум функции невязки между расчётными значениями температуры в скважине $\Theta_w(t_j; t_0)$ и ее замерами [10]:

$$\Omega(t_0^a) = \min_{0 < t_0 < t_0^{\max}} \Omega(t_0), \quad (9)$$

$$\Omega(t_0) = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N (\Theta_w(t_j; t_0) - \Theta_{wj})^2, \quad (10)$$

где $t_0^{\max}$ – допустимый верхний предел искомого параметра t_0 ; N – число замеров температуры.

Заметим, что величина t_0^a является лишь приближением к точному значению t_0 в силу упрощений при записи математической постановки прямой задачи, а также погрешностей в исходных теплофизических параметрах системы и замерах температуры. Поэтому для поиска t_0^a применим метод подбора приближённого квазирешения (9) [5].

Для применения градиентных методов минимизации (9) определим производную функции (10) по параметру t_0 :

$$\Omega'(t_0) = \frac{\partial \Omega}{\partial t_0} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [(\Theta_w(t_j; t_0) - \Theta_{wj}) \Theta'(t_j; t_0)], \quad (11)$$

а также введем обозначение

$$\Theta'(t_j; t_0) = \frac{\partial \Theta_w(t_j; t_0)}{\partial t_0}. \quad (12)$$

Для вычисления функции (12) необходимо продифференцировать задачу (5), (7) по параметру t_0 :

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta'}{\partial r} \right), \quad \tau > 0, \quad r > r_w, \quad (13)$$

$$\tau = 0: \quad \Theta' = \theta'_0(r; t_0), \quad \theta'_0(r; t_0) = \frac{\partial \theta_0(r; t_0)}{\partial t_0}, \quad (14)$$

$$r = r_w: \quad \frac{\partial \Theta'}{\partial \tau} = \frac{\beta}{r_w} \frac{\partial \Theta'}{\partial r}; \quad r \rightarrow \infty: \quad \Theta' = 0. \quad (15)$$

Здесь введено обозначение локального времени, отсчитываемого с момента остановки скважины: $\tau = t - t_0$, $t_0 < t < t_1$.

Задача (13)–(15) аналогична задаче (5), (7) и решалась численно.

2.2. Метод решения обратной задачи. В качестве метода первого порядка для решения задачи (9) был использован метод Нестерова [11]. Этот алгоритм обеспечивает сходимость $O(1/k^2)$, неулучшаемую для выпуклых непрерывно-дифференцируемых функций для любых итеративных методов [12, 13]. Метод на каждой итерации реализует комбинацию градиентного спуска и «инерционного» шага:

$$t_0^{k+1} = t_0^k - \lambda (t_0^{k-1} - t_0^k) - \alpha \Omega' (t_0^k - \lambda (t_0^{k-1} - t_0^k)), \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in [0, 1], \quad (16)$$

где t_0^k – приближенное решение на шаге k ; α – длина шага градиентного спуска; λ – длина инерционного шага.

Подбор коэффициентов α и λ , приводящих к максимальному сокращению числа итераций метода, является отдельной задачей и зависит от поведения минимизируемой функции. Оценочные расчеты показали, что эффективность метода существенно зависит от выбора α , оптимальное значение которого лежит в широком диапазоне и зависит от начального приближения. Таким образом, даже для данной конкретной задачи выбор единого коэффициента α затруднен. Для устранения указанной проблемы был реализован алгоритм автоматического масштабирования величины α при выходе приближенного решения за границы интервала поиска или при смене направления итерационного шага с одновременным его увеличением. Это исключает необходимость заранее определять оптимальный коэффициент α , и задача настройки алгоритма сводится к определению лишь одного параметра λ .

В модельных расчетах в качестве замеров температуры Θ_{wj} задавали значения $\Theta_w(t_j)$, вычисленные для заранее заданной величины t_0^e на логарифмической сетке моментов времени $t_j, N = 10$ (рис. 16)). Расчеты показали, что коэффициент λ следует задавать вблизи значения 0.1, что на 5–10 % сокращает число итераций по сравнению с методом градиентного спуска (без инерции). Кроме того, установлено, что применение метода первого порядка (16) для решения задачи (9) сокращает число итераций в среднем в 3 раза по сравнению с методом золотого сечения, выбранного среди одномерных методов минимизации, работающих по принципу последовательного сокращения интервала, как наиболее эффективно, применимого для непрерывных унимодальных функций с независимыми от их свойств сходимостью и эффективностью [14]. В силу равноценности алгоритмов решения задач (5), (7) и (13)–(15) машинное время, затрачиваемое на итерацию методов нулевого и первого порядков, эквивалентно.

3. Результаты

В реальных условиях измерение температуры в скважине сопровождается наличием инструментальной погрешности или воздействием внешних факторов, вносящих искажения в полученные данные [15,16]. В свою очередь, неточность замеров будет оказывать влияние на достоверность полученного решения обратной задачи.

В качестве имитации искажения замеров температуры произведено «защумление» [6] в моменты времени t_j «точного» решения Θ_w задачи (5), (7) при заданном $t_0^e = 1$:

$$\Theta_{wj} = \Theta_w(t_j; t_0^e) + \xi_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Предполагали, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ – независимые нормально распределённые случайные величины, $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$, причем $\sigma \in [0, 1]$, то есть не превосходит общий перепад температуры.

На рис. 2 а) показано поведение точного решения $\Theta_w(t)$ и замеров Θ_{wj} с уровнем шума $2\sigma = 0.01$ и $2\sigma = 0.1$. Влияние уровня шума на минимизируемую функцию (10) представлено на рис. 2 б): погрешность замеров температуры приводит к искажению точки минимума t_0^a функции Ω по сравнению с точным значением t_0^e . При этом можно отметить, что наличие шума в замерах не изменяет поведение функции Ω , поэтому алгоритм оптимизации не требует повторного подбора параметров. Для статистического исследования поведения решения в условиях искаженных данных при каждом уровне шума 2σ выполнялось по 1000 реализаций набора величин $\xi_j, j = \overline{1, N}$, и оценивалась погрешность получаемого решения

для каждой реализации:

$$\varepsilon = \frac{t_0^a - t_0^e}{t_0^e}. \quad (17)$$

Очевидно, что ε – случайная величина. Ее распределение может быть описано нормальным законом $N(\mu, s^2)$ согласно критерию Лиллиефорса [17]. Для неизвестных параметров μ, s^2 на уровне значимости 0.05 получены оценки [7] (рис. 3 а)). Заметим, что увеличение уровня шума замеров 2σ на 1 % приводит в среднем к росту стандартного отклонения погрешности решения на 2 %, то есть $s \approx 4\sigma$. Погрешность измерений в некоторой степени можно компенсировать увеличением числа замеров (рис. 3 б)). Проведенные исследования решения задачи в широком диапазоне уровня шума показали, что основное снижение ε достигается уже для 10 замеров температуры.

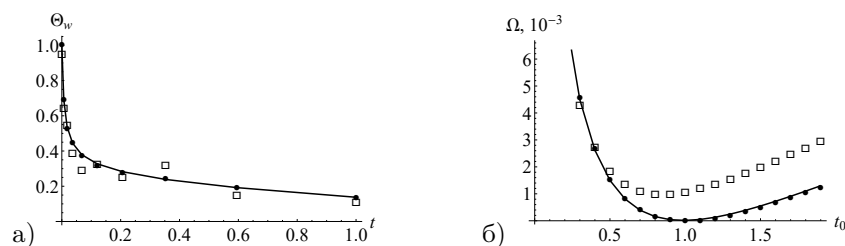


Рис. 2. Влияние шума замеров температуры с уровнем $2\sigma = 0.01$ (●) и $2\sigma = 0.1$ (□) на: а) кривую восстановления температуры и б) минимизируемый функционал $\Omega(t_0)$

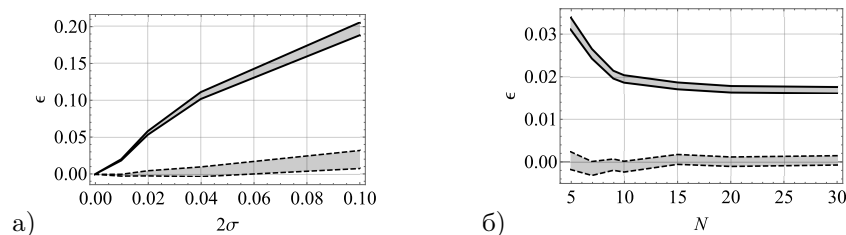


Рис. 3. Доверительные интервалы параметров μ (пунктирная линия) и s (сплошная линия) распределения ε в зависимости от: а) уровня шума при $N = 10$ и б) числа замеров при $2\sigma = 0.01$

Рассмотрим теперь влияние на точность решения задачи (9) погрешности задания ТФС, которая может быть связана с точностью как измерительного оборудования, так и используемой методики расчета ТФС [15, 18]. Согласно постановке задачи (5)–(7) и нормировке (4) исходными теплофизическими параметрами задачи являются коэффициент температуропроводности η , определяющий линейный масштаб задачи R и, следовательно, границы расчётной области, и коэффициент теплопередачи β , входящий в граничное условие (7).

Введем коэффициенты искажения $C_\eta, C_\beta > 0$ указанных параметров следующим образом:

$$\tilde{\eta} = C_\eta \eta, \quad \tilde{\beta} = C_\beta \beta,$$

где η, β и $\tilde{\eta}, \tilde{\beta}$ – точные и искаженные значения соответственно. Варьируя по отдельности коэффициенты C_η, C_β в отсутствии зашумления замеров температуры, мы выполнили серию решений обратной задачи (9) с определением приближенного

значения t_0^a . Величина ε , вычисленная по формуле (17), показывает чувствительность задачи определения длительности работы нагнетательной скважины к неточности задания ТФС (рис. 4). Видно, что задача малочувствительна к изменению теплопередачи через стенку скважины и, наоборот, при двухкратном искажении температуропроводности искомая величина длительности работы скважины будет отклоняться от истинного значения на 20–30 %.

На практике надежное определение длительности работы скважины t_0 может быть реализовано с привлечением дополнительной информации об истории ее работы, тогда как ТФС пласта, как правило, являются слабоизученными и могут варьироваться в широких диапазонах. Поэтому в условиях известного значения t_0 и заданных результатов термометрии Θ_{wj} можно решить аналогичную (9), (10) обратную задачу – по определению ТФС, в первую очередь, температуропроводности пласта. Параметр η , уточненный таким образом, может использоваться для повышения точности решения основной задачи термометрии – локализации и оценки интенсивности участков поглощения пластом нагнетаемой воды. На рис. 5 показана зависимость относительной погрешности ϵ_η определения величины η от искажения замеров температуры при $N = 10$.

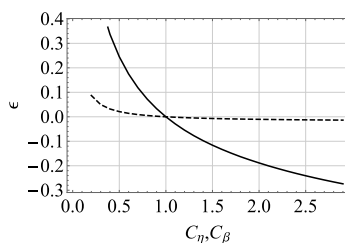


Рис. 4. Чувствительность задачи определения длительности работы скважины к искажению значений коэффициентов температуропроводности (сплошная линия) и теплообмена (пунктирная линия)

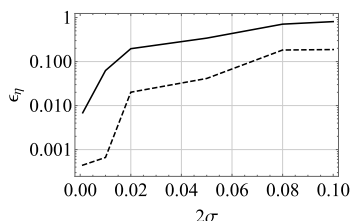


Рис. 5. Стандартное (сплошная линия) и среднее (пунктирная линия) отклонения величины ϵ_η в зависимости от уровня шума замеров температуры

Заключение

Представлены обратные задачи интерпретации термометрии нагнетательной скважины на изолированном участке ствола для определения длительности ее работы и уточнения теплофизических параметров пласта.

Прямая задача теплопроводности сведена к одномерной осесимметричной постановке в слое в пренебрежении вертикальным теплообменом с прилегающими слоями пласта.

Для решения обратной задачи определения длительности работы скважины получена постановка прямой задачи относительно производной поля температуры, что позволяет применять градиентные методы минимизации. В качестве такого метода реализован метод Нестерова. Разработан алгоритм автоматического масштабирования одного из двух параметров метода (длины шага) и найдено оптимальное значение второго параметра (инерционного шага), повышающее эффективность метода на 10–15 % при решении рассматриваемой задачи.

Показана устойчивость алгоритма к возмущению исходных данных по замерам температуры и теплофизическим свойствам. Оценки чувствительности показали, что погрешность измерений температуры на уровне 1 % приводит к стандартному отклонению решения порядка 2 % от истинного значения. Тот же уровень погрешности достигается при завышении или занижении температуропроводности примерно на 15 %. Чувствительность решения к погрешности в коэффициенте теплообмена между пластом и скважиной вблизи характерных величин незначительна – при двухкратном его искажении ошибка определения длительности работы скважины не превосходит 1.5 %. Для снижения погрешности интерпретации термометрии до уровня 1 % достаточно выполнять замеры температуры с погрешностью, не превосходящей 0.25 % при точно заданных теплофизических свойствах пласта, либо при точном измерении температуры задавать температуропроводность горной породы с погрешностью менее 3 %, что в реальных условиях практически нереализуемо.

Показано, что увеличение числа замеров температуры снижает чувствительность к погрешности ее измерения, при этом основной эффект достигается при 10 замерах, и дальнейшее увеличение их числа нецелесообразно.

Выполнено исследование устойчивости алгоритма и чувствительности решения обратной задачи определения температуропроводности пласта при заданной длительности работы скважины относительно погрешности измерений температуры. Показано, что погрешность измерений температуры на уровне 1 % приводит к стандартному отклонению решения порядка 6 % от истинного значения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке НИЦ «Курчатовский институт» в рамках государственного задания FNEF-2024-0016.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Проселков Ю.М. Теплопередача в скважинах. М.: Недра, 1975. 223 с.
2. Пудовкин М.А., Саламатин А.Н., Чугунов В.А. Температурные процессы в действующих скважинах. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 167 с.
3. Witterholt E.J., Tixier M.R. Temperature logging in injection wells // Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, San Antonio, TX, Oct. 8–11, 1972. Art. SPE-4022-MS. <https://doi.org/10.2118/4022-MS>.
4. Филиппов А.И., Ахметова О.В. Температурное поле в пласте и скважине. Уфа: АН РБ, Гилем, 2011. 336 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 288 с.
6. Özisik M.N., Orlande H.R.B. Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications. 2nd ed. Ser: Heat Transfer. Boca Raton, FL: CRC Press, 2021. 297 p. <https://doi.org/10.1201/9781003155157>.

7. Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А. Математическая геология. Том I. Введение в геостатистику. Ижевск: ИКИ, 2012. 228 с.
8. Мазо А.Б. Основы теории и методы расчёта теплопередачи: учебное пособие. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. 149 с.
9. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 256 с.
10. Салимьянова Д.Р., Поташев К.А., Мазо А.Б., Давлетишин А.А. Оценка длительности работы нагнетательной скважины по результатам термометрии в условиях неопределённости исходных данных // Тез. докл. XVI науч.-практ. межд. конф. Матем. моделир. и комп. техн. в проц. разраб. месторожд. М.: Нефтяное хозяйство, 2024. С. 38–39.
11. Нестеров Ю.Е. Метод решения задачи выпуклого программирования со скоростью сходимости $O(1/k^2)$ // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 543–547.
12. Невмировский А.С. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979. 384 с.
13. Костюк Ф.В. Метод тяжёлого шарика в задачах безусловной оптимизации непрерывно-дифференцируемых функций с ограниченными множествами Лебега // Моделир., декомп. и оптим. сложн. динам. проц. 2019. Т. 34, № 1 (34). С. 151–159. <https://doi.org/10.14357/24098639190112>.
14. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 510 с.
15. Яковлев Б.А. Решение задач нефтяной геологии методами термометрии. М.: Недра, 1979. 138 с.
16. Hill A.D. Production Logging: Theoretical and Interpretive Elements. 2nd ed. Monograph Ser. V. 14. Richardson, TX: Soc. Pet. Eng., 2021. 256 p. <https://doi.org/10.2118/9781613998243>.
17. Lilliefors H.W. On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown // J. Am. Stat. Assoc. 1967. V. 62, No 318. P. 399–402. <https://doi.org/10.1080/01621459.1967.10482916>.
18. Середкин И.Н. Методы измерения теплофизических свойств горных пород // ГИАБ. 2015. № S63. С. 249–255.

Поступила в редакцию 26.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024

Поташев Константин Андреевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: KPotashev@mail.ru

Салимьянова Дилара Радиковна, магистрант, младший научный сотрудник

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

ул. Академика Курчатова, д. 1, г. Москва, 123182, Россия

E-mail: DiRSalimyanova@kpfu.ru

Мазо Александр Бенцианович, доктор физико-математических наук, профессор

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: ABMazo1956@mail.ru

Давлетшин Алексей Анисович, директор

ООО «НПП «Черный ключ»

ул. Юлиуса Фучика, д. 99 А, г. Казань, 420141, Россия

E-mail: *blackey@inbox.ru*

Костерин Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, действительный член РАЕН, профессор-консультант Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *Alexander.Kosterin@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 238–249

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.238-249

**Sensitivity to Initial Data Errors in Interpreting
Temperature Logging of an Isolated Injection Well Segment**

K.A. Potashev^{a}, D.R. Salimyanova^{b**}, A.B. Mazo^{a***},
A.A. Davletshin^{c****}, A.V. Kosterin^{a*****}*

^a Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

^b National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, 123182 Russia

^c OOO NPP “Chernyi Klyuch”, Kazan, 420141 Russia

E-mail: **KPotashev@mail.ru*, ***DiRSalimyanova@kpfu.ru*, ****ABMazo1956@mail.ru*,

*****blackey@inbox.ru*, ******Alexander.Kosterin@kpfu.ru*

Received May 26, 2024; Accepted May 30, 2024

Abstract

This study considers the inverse problems inherent in interpreting temperature logging data from an isolated segment of the injection well in order to ascertain its operating period and the thermophysical properties of the oil reservoir.

The forward problem of thermal conductivity was reduced to a one-dimensional axisymmetric formulation within the oil reservoir layer, disregarding the vertical thermal exchange with neighboring layers.

The inverse problem of determining the well operating period was solved by reformulating the forward problem with regard to the temperature field derivative, which enabled the use of first-order optimization methods. Thus, Nesterov’s method was applied. An algorithm to automatically scale one of the method’s parameters (step length) was developed, and the optimal value of the second parameter (inertial step) was calculated. This increased the efficiency of the method by 10–15 % in solving the problem under consideration.

The algorithm’s stability against perturbations in the initial data on temperature and thermophysical properties was demonstrated. The sensitivity analysis revealed that a 1 % error in the temperature measurements results in a standard deviation of the solution, which is about 2 % from the true value of the well operating period. A similar level of error was seen when the thermal diffusivity was over- or underestimated by approximately 15 %. The solution was little sensitive to variations in the heat transfer coefficient between the oil reservoir and the well

at characteristic magnitudes; even with a twofold distortion, the error in the determination of the well operating period did not exceed 1.5 %. To mitigate the error in thermometry interpretation to 1 %, temperature measurements must have an error margin of no more than 0.25 %, alongside precisely specified thermophysical properties of the oil reservoir, or, alternatively, when temperature is measured accurately, the rock thermal diffusivity must be set within an error margin of less than 3 %, but it is nearly impossible under real conditions.

Increasing the number of temperature measurements diminishes the sensitivity to measurement errors, with the optimal efficacy achieved at 10 measurements, rendering further increments impractical.

Therefore, the algorithm's stability and the solution's sensitivity of the inverse problem of determining the reservoir thermal diffusivity for a given operating period of the well relative to temperature measurement errors were found. The results show that a 1 % error in temperature measurements leads to a standard deviation of about 6 % from the true value.

Keywords: oil reservoir, temperature logging, measurement error, geological uncertainty, inverse problem, numerical modeling

Acknowledgements. This study was supported by the National Research Centre "Kurchatov Institute" as part of state assignment no. FNEF-2024-0016.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. a) Temperature profile of the oil reservoir and b) temperature recovery during the well downtime at $t_0 = 0.1; 1; 10$.

Fig. 2. Influence of the temperature measurement noise with levels $2\sigma = 0.01$ (●) and $2\sigma = 0.1$ (□) on: a) the temperature recovery curve and b) the minimized functional $\Omega(t_0)$.

Fig. 3. Confidence intervals for the parameters μ (dashed line) and s (solid line) of the distribution ε depending on: a) noise level at $N = 10$ and b) the number of measurements at $2\sigma = 0.01$.

Fig. 4. Sensitivity of the problem of determining the operating period of the well to distortions in the values of the thermal diffusivity (solid line) and heat exchange (dashed line) coefficients.

Fig. 5. Standard (solid line) and mean (dashed line) deviation of ϵ_η depending on the noise level and temperature measurements.

References

1. Proselkov Yu.M. *Teploperedacha v skvazhinakh* [Heat Transfer in Wells]. Moscow, Nedra, 1975. 223 p. (In Russian)
2. Pudovkin M.A., Salamatin A.N., Chugunov V.A. *Temperaturnye protsessy v deistvuyushchikh skvazhynakh* [Thermal Processes in Active Wells]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1977. 167 p. (In Russian)
3. Witterholt E.J., Tixier M.R. Temperature logging in injection wells. *Proc. Fall Meet. of the Society of Petroleum Engineers of AIME, San Antonio, TX, Oct. 8–11, 1972*. Art. SPE-4022-MS. <https://doi.org/10.2118/4022-MS>.
4. Filippov A.I., Akhmetova O.V. *Temperaturnoe pole v plaste i skvazhine* [Temperature Field in the Oil Reservoir and Well]. Ufa, Akad. Nauk Resp. Bashk., Gilem, 2011. 336 p. (In Russian)
5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Solutions of Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1974. 288 p. (In Russian)
6. Özisik M.N., Orlande H.R.B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. 2nd ed. Ser: Heat Transfer. Boca Raton, FL, CRC Press, 2021. 297 p. <https://doi.org/10.1201/9781003155157>.

7. Baikov V.A., Bakirov N.K., Yakovlev A.A. *Matematicheskaya geologiya* [Mathematical Geology]. Vol. I: Introduction to geostatistics. Izhevsk, IKI, 2012. 228 p. (In Russian)
8. Mazo A.B. *Osnovy teorii i metody rascheta teploperedachi: uchebnoe posobie* [Fundamentals of Heat Transfer Theory and Calculation Methods: A Study Guide]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2013. 149 p. (In Russian)
9. Barenblatt G.I. *Podobie, avtomodel'nost', promezhutochnaya asimptotika. Teoriya i prilozheniya k geofizicheskoi gidrodinamike* [Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics. Theory and Applications to Geophysical Fluid Dynamics]. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1982. 256 p. (In Russian)
10. Salimyanova D.R., Potashev K.A., Mazo A.B., Davletshin A.A. Estimating the operating period of injection wells based on thermometry results and taking into account initial data errors. *Tez. dokl. XVI nauch.-prakt. mezhd. konf. Matem. modelir. i komp. v prots. razrab. mestorozhd.* [Proc. XVI Sci.-Pract. Int. Conf. Mathematical Modeling and Computer Technologies in Field Development]. Moscow, Neft. Khoz., 2024, pp. 38–39. (In Russian)
11. Nesterov Yu.E. A method of solving a convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 269, no. 3, pp. 543–547. (In Russian)
12. Nemirovsky A.S. *Slozhnost' zadach i effektivnost' metodov optimizatsii* [Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization]. Moscow, Nauka, 1979. 384 p. (In Russian)
13. Kostyuk F.V. Heavy ball method in unconstrained optimization problems for continuously differentiable functions with bounded Lebesgue sets. *Model., Dekompoz. Optim. Slozhnykh Din. Protseessov*, 2019, vol. 34, no. 1 (34), pp. 151–159.
<https://doi.org/10.14357/24098639190112>. (In Russian)
14. Gill P., Murray W., Wright M. *Prakticheskaya optimizatsiya* [Practical Optimization]. Moscow, Mir, 1985. 510 p. (In Russian)
15. Yakovlev B.A. *Reshenie zadach neftyanoi geologii metodami termometrii* [Solving the Problems of Petroleum Geology Using Thermometry Methods]. Moscow, Nedra, 1979. 138 p. (In Russian)
16. Hill A.D. *Production Logging: Theoretical and Interpretive Elements*. 2nd ed. Monograph Ser. Vol. 14. Richardson, TX, Soc. Pet. Eng., 2021. 256 p.
<https://doi.org/10.2118/9781613998243>.
17. Lilliefors H.W. On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *J. Am. Stat. Assoc.*, 1967, vol. 62, no. 318, pp. 399–402.
<https://doi.org/10.1080/01621459.1967.10482916>.
18. Seredkin I.N. Methods for measuring the thermophysical properties of rocks. *Gorn. Inf.-Anal. Byull.*, 2015, no. S63, pp. 249–255. (In Russian)

Для цитирования: Поташев К.А., Салимьянова Д.Р., Мазо А.Б., Давлетшин А.А., Костерин А.В. Чувствительность интерпретации результатов термометрии изолированного участка нагнетательной скважины к погрешности исходных данных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 238–249. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.238-249>.

For citation: Potashev K.A., Salimyanova D.R., Mazo A.B., Davletshin A.A., Kosterin A.V. Sensitivity to initial data errors in interpreting temperature logging of an isolated injection well segment. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 238–249.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.238-249>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 512.643.8, 517.954, 517.968

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.250-261

О ЗАДАЧЕ $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С.В. Rogozin, Л.П. Примачук, М.В. Дубатовская

Белорусский государственный университет, г. Минск, 220050, Беларусь

Аннотация

Исследована разрешимость задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (задачи Маркушевича) на единичной окружности. Эта задача эквивалентна векторно-матричной краевой задаче Римана. Ее коэффициент в параболическом случае вырождается (является треугольной матрицей-функцией). В этом случае дано полное описание факторизации матричного коэффициента и вычислены частные индексы этой факторизации. Основной метод исследования развит в серии статей авторов и основан на алгоритме Г.Н. Чеботарева. Построенная факторизация позволяет представить картину разрешимости задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности в параболическом случае.

Ключевые слова: $\mathbb{R}$ -линейное сопряжение, параболический случай, факторизация матриц-функций, алгоритм Г.Н. Чеботарева, частный индекс

Введение

Пусть Γ – простая замкнутая гладкая кривая, которая делит расширенную комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области $D^+ \ni \{0\}$ и $D^- \ni \{\infty\}$. Задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (или $\mathbb{R}$ -линейная краевая задача, или задача Маркушевича) заключается в нахождении двух функций $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$, аналитических в D^+, D^- соответственно, удовлетворяющих следующему краевому условию

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (1)$$

Иное название этой задачи связано со статьей А.И. Маркушевича [1], в которой изучен вырожденный случай задачи (1)

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

Задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения имеет долгую историю. Это связано в основном с ее многочисленными приложениями (см. исторический обзор [2]). В частности, эта задача описывает потенциальный тепловой поток в $2D$ -композиционных материалах (см., например, [2–4]), а также применяется для изучения задач теории оболочек (см., например, [5]).

Если $b(t) \equiv 0$, то задача (1) совпадает с известной краевой задачей Римана (см. [6]), разрешимость которой полностью определяется индексом Коши первого

коэффициента, т. е. $\text{Ind}_\Gamma a(t)$. Если $a(t) \neq 0$, то задача (1) нормально разрешима. Л.Г. Михайлов [7] выделил три случая разрешимости задачи (1): 1) $|a(t)| > |b(t)|$; 2) $|a(t)| \equiv |b(t)|$; 3) $|a(t)| < |b(t)|$, названные им эллиптическим, параболическим и гиперболическим случаями соответственно. Первое точное решение задачи (1) в эллиптическом случае было получено Б. Боярским [8] при достаточно строгих ограничениях и с использованием специфического искусственного метода. Приближенный метод решения применен в [9] (в частности, при некоторых ограничениях на коэффициенты, соответствующих параболическому случаю). Задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) исследовалась многими авторами (см. краткое описание результатов в [10, §20], а также [2, 4].) В частности, в [11] доказано, что задача (1) на единичной окружности (т. е. с $\mathcal{L} = \mathbb{T}$) эквивалентна векторно-матричной задаче $\mathbb{C}$ -линейного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2)$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$g(t) = \frac{1}{a(t)} \begin{pmatrix} \overline{a(t)}f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -f(t) \end{pmatrix},$$

и неизвестные аналитические векторы связаны с φ^+, φ^- соотношениями

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+(z) \\ \frac{1}{\varphi^-\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^-(z) \\ \frac{1}{\varphi^+\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Следовательно, в этом случае решение задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) эквивалентно сводится к факторизации матричного коэффициента $G(t)$ векторно-матричной задачи (2) (см., например, [12, 13]), последнее означает представление матрицы $G(t)$ в следующем виде

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \quad (5)$$

где $G^+(t)$, $G^-(t)$ – невырожденные квадратные матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе со своими обратными $[G^+(t)]^{-1}$, $[G^-(t)]^{-1}$ в области $D^+ = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ соответственно, и $\Lambda(t) = \text{diag}\{t^{\alpha_1}, t^{\alpha_2}\}$ с целыми числами α_1, α_2 . Числа α_1, α_2 называют частными индексами факторизации (5) или частными индексами матрицы $G(t)$.

Задача факторизации $n \times n$ -матриц-функций заключается в нахождении множителей $G^+(t)$, $G^-(t)$ и вычислении частных индексов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (согласно представлению, аналогичному (5)). Это старая задача, первоначально связанная с решением векторно-матричных краевых задач, но теперь связанная со многими другими математическими проблемами и имеющая множество приложений (см. обзорную статью [14], а также статьи [15–17], в которых специальное внимание уделено мероморфным матрицам-функциям). Предложено несколько методов конструктивного решения задачи факторизации, в том числе подход Г.Н. Чеботарева [18], который факторизовал треугольную матрицу-функцию второго порядка, применив метод цепных дробей.

В настоящей статье мы уделим внимание параболическому случаю задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности. Используя обобщение метода Чеботарева, мы получим явную факторизацию коэффициента $G(t)$ соответствующей краевой задачи Римана (2) и вычислим частные индексы. Это позволит получить полное описание картины разрешимости задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1). Обсуждена также устойчивость частных индексов рассматриваемой задачи. Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты задачи (1) удовлетворяют условию Гёльдера (см., например, [6]). Это обусловлено тем, что при решении используются свойства сингулярного интегрального оператора, ограниченно действующего в пространствах Гёльдера. В принципе, предлагаемый ниже алгоритм может быть использован и в случае более общих предположений на коэффициенты (см., например, [12]), однако это потребовало бы расширения технического аппарата статьи. Такой подход предполагается применить в последующих публикациях.

1. Об устойчивости краевой задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения

Напомним определение факторизации и частных индексов.

В классической постановке задача факторизации заключается в представлении квадратной невырожденной матрицы-функции $G \in \mathcal{G}(\mathcal{M}(\Gamma))^{n \times n}$ (вообще говоря, непрерывной), определенной на простой замкнутой гладкой кривой Γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в следующем виде

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \quad (6)$$

где невырожденные матрицы $G^+(t)$, $G^-(t)$ допускают аналитическое продолжение в D^+ и D^- соответственно. Здесь D^+ , D^- – области на сфере Римана, лежащие слева и справа от кривой Γ в соответствии с ориентацией, выбранной на Γ . $\Lambda(t)$ – $n \times n$ -диагональная матрица,

$$\Lambda(t) = \text{diag} \left\{ \left(\frac{t-t^+}{t-t^-} \right)^{\alpha_1}, \dots, \left(\frac{t-t^+}{t-t^-} \right)^{\alpha_n} \right\},$$

и $t^+ \in D^+$, $t^- \in D^-$ – некоторые (фиксированные) точки. В частности, если $\Gamma = \mathbb{R}$, то можно выбрать $t^+ = i$, $t^- = -i$, и если Γ – ограниченная кривая и $0 \in D^+$, то

$$\frac{t-t^+}{t-t^-} = t.$$

Целые числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называют частными индексами, а матрицы $G^-(t)$, $G^+(t)$ – минус-, плюс-факторами. Факторизация типа (6) называется левосторонней или классической левосторонней факторизацией. Если она существует, то частные индексы определяются однозначно с точностью до порядка, т. е. являются инвариантами задачи факторизации. Поменяв местами $G^+(t)$ и $G^-(t)$ в (6), мы приходим к определению правой факторизации. В приведенном выше определении символом $\mathcal{M}(\Gamma)^{n \times n}$ обозначен класс всех квадратных $n \times n$ -матриц-функций, определенных на Γ , а символом $\mathcal{G}$ – класс обратимых матриц-функций. Для описания результатов, касающихся конструктивных методов факторизации, мы отсылаем читателя к недавним статьям [13, 14, 19] и ссылкам в них.

Одним из важных вопросов, связанных с исследованием разрешимости векторно-матричных краевых задач, является исследование устойчивости частных индексов их матричных коэффициентов. Этот вопрос ставился и обсуждался еще в ранних работах Б. Боярского [20], а также И.Ц. Гохбергом и М.Г. Крейном [21]. Говорят (например, [22, с. 50]), что неособенная $n \times n$ -матрица-функция $G(x)$ имеет

устойчивое множество частных индексов, если существует такое число $\delta > 0$, что любая матрица-функция $F(x)$ из δ -окрестности $G(x)$ (т. е. $\|F - G\| < \delta$) имеет такое же множество частных индексов (правых или левых), что и матрица $G(x)$. Если это не так, то $G(x)$ имеет неустойчивое множество частных индексов. В зависимости от устойчивости/неустойчивости множества частных индексов матричного коэффициента векторно-матричной задачи последняя также называется устойчивой/неустойчивой соответственно. Было доказано (см. [20–22], а также [11]), что множество частных индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ устойчиво тогда и только тогда, когда $\max_j \alpha_j - \min_j \alpha_j \leq 1$. В неустойчивом случае небольшая деформация матрицы-функции $G(x)$ может привести к изменению частных индексов. В силу этого применение некоторых приближенных методов решения векторно-матричных краевых задач в неустойчивом случае не всегда приводит к правильному результату (с подробным обсуждением можно познакомиться в [23]).

Обсудим ниже специфику понятия устойчивости в случае задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности и эквивалентной ей задачи $\mathbb{C}$ -линейного сопряжения (2). Предположим для определенности, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ в краевом условии (1) непрерывны по Гёльдеру на единичной окружности $\mathbb{T}$ и $a(t) \neq 0$ на $\mathbb{T}$. Матричный коэффициент задачи (3) может быть переписан в виде $G(t) = G_1(t)G_2(t)$, где

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} 1/\overline{a(t)} & 0 \\ 0 & 1/a(t) \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\det G_2(t) = |a(t)|^2$ и, таким образом, $\text{ind}_{\mathbb{T}} \det G_2(t) = 0$. Следовательно, частные индексы матрицы $G_2(t)$ (которые обозначены $\tilde{\alpha}_i, i = 1, 2$) равны $\tilde{\alpha}_i = \pm \kappa$ при некотором $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, частные индексы матрицы $G(t)$ равны $(\alpha - \kappa, \alpha + \kappa)$ при $\alpha = \text{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$.

Общий результат, описывающий устойчивость задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, представлен в следующем утверждении.¹

Теорема 1 ([11, Thms. 3–5]).

- Краевая задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) является устойчивой в эллиптическом случае, т. е. когда $|a(t)| > |b(t)|$.
- Краевая задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) является устойчивой в параболическом случае, т. е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$, при выполнении дополнительного условия $\alpha_b = \text{ind}_{\mathbb{T}} b(t) \geq 0$.
- Краевая задача $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (1) является устойчивой в параболическом случае, т. е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$, при выполнении дополнительного условия $\alpha_b = \text{ind}_{\mathbb{T}} b(t) < 0$.

2. Факторизация матричного коэффициента в параболическом случае

В этом разделе мы получим явную факторизацию матричного коэффициента задачи (2), используя некоторое обобщение подхода Г.Н. Чеботарева [18]. В параболическом случае матрица $G_2(t)$ в коэффициенте имеет вид

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Заметим, что явная факторизация задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения не построена в [11]. Точная оценка так называемых дефектных чисел, т. е. чисел линейно независимых решений и условий разрешимости (1), приведена, например, в [24].

Удобно переписать эту матрицу в форме

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -b(t) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 1 & -b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и изучить в дальнейшем факторизацию матрицы $A(t)$, для которой частные индексы равны частным индексам матрицы $G_2(t)$.

Обозначим через $x^\pm(z)$, $y^\pm(z)$ канонические функции (см. [6]) следующих краевых задач:

$$x^+(t) = b(t)x^-(t),$$

$$y^+(t) = -\overline{b(t)}y^-(t).$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{x^-(t)}{y^+(t)} \frac{dt}{t-z}.$$

Тогда следующая кусочно-аналитическая матрица-функция

$$X(z) = \begin{pmatrix} x(z) & 0 \\ y(z)\sigma(z) & y(z) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет краевому условию (2), т. е.

$$X^+(t) = A(t)X^-(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Ниже представлены порядки компонент матрицы $X^-(z)$ на бесконечности:

$$\begin{pmatrix} \varkappa_b & \infty \\ -\varkappa_b + p & -\varkappa_b \end{pmatrix},$$

где $p \geq 1$ – порядок $\sigma^-(z)$ на бесконечности. Заметим, что $\text{ind}_{\mathbb{T}} \det A(t) = 0$.

Если $\varkappa_b \leq -\varkappa_b + p$ (т. е. $2\varkappa_b \leq p$), то матрица $X^-(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности (см., например, [25]), и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(\varkappa_b, -\varkappa_b)$.

Утверждение 1. Если $\varkappa_b \leq 0$, то частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(\varkappa_b, -\varkappa_b)$.

Доказательство. Действительно, если $\varkappa_b \leq 0$, то $\varkappa_b \leq -\varkappa_b + p$. □

Из теоремы 1 следует, что в случае $\varkappa_b < 0$ задача (1) неустойчива, но в случае $\varkappa_b = 0$ она устойчива.

В случае $\varkappa_b > 0$ представим отношение $\frac{1}{\sigma^-(z)}$ в виде непрерывной дроби в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{\sigma^-(z)} = Q_0(z) + \frac{1}{Q_1(z) + \frac{1}{Q_2(z) + \frac{1}{\ddots}}}. \quad (7)$$

Здесь $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ – полиномы, имеющие на бесконечности порядки, равные λ_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, с $\lambda_0 = p$ и $\lambda_j \geq 1$, $j = 1, 2, \dots$. Представление (7) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^-(z)} = Q_0(z) + R_1(z) &\Leftrightarrow 1 - \sigma^-(z)Q_0(z) = \sigma^-(z)R_1(z), \\ \frac{1}{R_1(z)} = Q_1(z) + R_2(z) &\Leftrightarrow 1 - R_1(z)Q_1(z) = R_1(z)R_2(z), \\ \frac{1}{R_2(z)} = Q_2(z) + R_3(z) &\Leftrightarrow 1 - R_2(z)Q_2(z) = R_2(z)R_3(z), \\ &\dots \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $R_j(z)$, $j = 1, 2, 3, \dots$, – функции, аналитические в окрестности бесконечно удаленной точки и имеющие там порядки λ_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, соответственно. Следовательно, мы построили семейство полиномов $Q_j(z)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и семейство функций $R_j(z)$, $j \in \mathbb{N}$, аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки.

Утверждение 2. Пусть $\mathfrak{a}_b = \text{ind}_{\mathbb{T}} b(t) > 0$ и $(\tilde{\mathfrak{a}}_1, \tilde{\mathfrak{a}}_2)$ – частные индексы матрицы $A(t)$. Если величина $\mathfrak{a}_b$ равна одному из следующих чисел: $p = \lambda_0$, $p + \lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$, $p + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2, \dots$, то частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(\tilde{\mathfrak{a}}_1, \tilde{\mathfrak{a}}_2) = (0, 0)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}_b = p$. Тогда порядки матрицы $X^-(z)$ на бесконечности имеют вид

$$\begin{pmatrix} p & \infty \\ 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $X^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & -Q_0(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и воспользуемся первым соотношением (8). Тогда

$$\begin{aligned} X_1^-(z) &= X^-(z)T_1(z) = \begin{pmatrix} x^-(z) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z) & y^-(z)[1 - \sigma^-(z)Q_0(z)] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^-(z) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z) & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Порядки матрицы $X_1^-(z)$ на бесконечности таковы:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_1 \geq 0$, то порядки на бесконечности обоих столбцов матрицы $X_1^-(z)$ равны 0. Таким образом, эта матрица имеет нормальную форму на бесконечности, и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(0, 0)$.

Пусть $\mathfrak{a}_b = p + \lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$. Умножим матрицу $X_1^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Q_1(z) & 1 \end{pmatrix}$$

и используем второе соотношение (8). Получим

$$\begin{aligned} X_2^-(z) &= X_1^-(z)T_2(z) = \begin{pmatrix} x^-(z)(1 + Q_0(z)Q_1(z)) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z)[1 - Q_1(z)R_1(z)] & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x^-(z)(1 + Q_0(z)Q_1(z)) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z)R_2(z) & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Порядки матрицы $X_2^-(z)$ на бесконечности

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_1 - (\lambda_0 + \lambda_1) & \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_0 \\ -\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 & -\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 + \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_j \geq 0$, то порядки на бесконечности обоих столбцов матрицы $X_2^-(z)$ равны 0. Таким образом, эта матрица имеет нормальную форму на бесконечности, и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(0, 0)$.

Если $\mathfrak{x}_b = p + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$, то умножим матрицу $X_2^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & -Q_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и используем третье соотношение (8). В результате получим тот же результат для частных индексов матрицы $A(t)$.

И так далее. $\square$

Замечание 1. Из [11, Thm. 2] следует, что утверждение об устойчивости частных индексов (значит, и устойчивости задачи) также имеет место для всех оставшихся нерассмотренными значений индекса второго коэффициента $\mathfrak{x}_b$, а именно, при $\mathfrak{x}_b \in (p/2, p) \cup (p, p+1) \cup (p+1, p+2), \dots$. Тем не менее нам пока неизвестен прямой способ доказательства данного утверждения, подобный приведенному в утверждении 2. Таким образом, вопрос о прямом доказательстве утверждения об устойчивости в указанных случаях в настоящее время является открытым.

3. Разрешимость краевой задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения

На основе метода, описанного выше, были вычислены частные индексы матричного коэффициента $G(t)$ краевой задачи (2). Следовательно, можно полностью описать картину разрешимости как задачи (2), так и исходной краевой задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения. Следуя [7, 11, 12], сформулируем соответствующие результаты в терминах так называемых дефектных чисел l и l' (первое из них означает количество линейно-независимых решений однородной задачи, т. е. при $c(t) \equiv 0$, над полем вещественных чисел, а второе – количество независимых вещественных условий разрешимости неоднородной задачи). Как было указано в разделе 1, частные индексы матрицы $G(t)$ равны $(\mathfrak{x} + \kappa, \mathfrak{x} - \kappa)$, где $\mathfrak{x} = \text{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ и κ – некоторое неотрицательное целое число. Дальнейший анализ показал, что $\kappa = 0$ в устойчивом случае и $\kappa = \mathfrak{x}_b = \text{ind}_{\mathbb{T}} b(t)$ в неустойчивом случае. Таким образом, получен следующий результат (который согласуется с [12, Sec. 9.2]).

Теорема 2. (i) Пусть либо $|a(t)| > |b(t)|$, либо $|a(t)| = |b(t)|$ и $\mathfrak{x}_b \geq 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = \max\{0, 2\mathfrak{x}\}$, $l' = \max\{0, -2\mathfrak{x}\}$.

(ii) Пусть $|a(t)| = |b(t)|$ и $\mathfrak{x}_b < 0$, $\lambda = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_b < 0$, $\mu = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_b > 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = 2\mathfrak{x} - 2\mathfrak{x}_b$, $l' = 2\mathfrak{x} + 2\mathfrak{x}_b$.

Замечание 2. Данное утверждение справедливо также и для краевой задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между решениями задач 2 и 1, а именно, соотношения (4).

Замечание 3. В неустойчивом случае краевой задачи $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения (случай (ii) теоремы 2) возникает следующий вопрос: возможно ли удовлетворить условия разрешимости за счет подходящего выбора произвольных постоянных, описывающих множество линейно независимых решений однородной задачи? Общая постановка такой задачи приведена в [7], а ряд частных случаев обсужден в [12].

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2025”, проект № 1.7.01.4.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Маркушевич А.И. Об одной краевой задаче теории аналитических функций // Уч. зап. Моск. ун-та. 1946. Т. 1, № 100. С. 20–30.
2. Mityushev V.V. $\mathbb{R}$ -linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains // Advances in Applied Analysis / Rogosin S.V., Koroleva A.A. (Eds.). Ser.: Trends in Mathematics. Basel: Birkhäuser, 2012. P. 147–176. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0417-2_4.
3. Drygaś P., Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec, W. Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Results for Materials Scientists and Engineers. Ser.: Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Cambridge: Woodhead Publ., 2020. 372 p. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-03743-6>.
4. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications. Ser.: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. V. 108. Boca Raton, FL, London, New York, NY, Washington, DC: Chapman & Hall/CRC, 1999. 296 p.
5. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи, 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. Михайлов Л.Г. Общая задача сопряжения аналитических функций и ее применения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, № 5. С. 969–992.
8. Боярский Б. Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщ. АН ГрузССР. 1960. Т. 25, № 4. С. 385–390.
9. Сабитов И.Х. Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 124–129.
10. Litvinchuk G.S. Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Ser.: Mathematics and Its Applications. V. 523. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. xvi, 378 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9>.
11. Литвинчук Г.С. Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Матем. 1967. № 12. С. 47–57.
12. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. Factorization of Measurable Matrix Functions / Heinig G. (Ed.). Ser.: Operator Theory: Advances and Applications. V. 25. Basel: Birkhäuser, 1987. 372 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6266-0>.
13. Rogosin S.V., Mishuris G. Constructive methods for factorization of matrix-functions// IMA J. Appl. Math. 2016. V. 81, No 2. P. 365–391. <https://doi.org/10.1093/imat/hxv038>.
14. Kisil A.V., Abrachams I.D., Mishuris G., Rogosin S.V. The Wiener–Hopf technique, its generalizations and applications: Constructive and approximate methods // Proc. R. Soc. A. 2021. V. 477, No 2254. Art. 20210533. <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0533>.
15. Адуков В.М. Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 1. С. 54–74.
16. Адуков В.М. Факторизация Винера–Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 3–24.
17. Câmara M.C., Malheiro M.T. Meromorphic factorization revisited and application to some groups of matrix functions // Compl. Anal. Oper. Theory. 2008. V. 2, No 2. P. 299–326. <https://doi.org/10.1007/s11785-008-0054-1>.

18. Чеботарев Г.Н. Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // УМН. 1956. Т. 11, вып. 3 (69). С. 192–202.
19. Primachuk L., Rogosin S.V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, No 6. P. 809–817.
<https://doi.org/10.1134/S1995080218060148>.
20. Боярский Б. Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора // Сообщ. АН ГрузССР. 1958. Т. 21, № 4. С. 391–398.
21. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 5. С. 854–857.
22. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 2 (80). С. 3–72.
23. Mishuris G., Rogosin S. Approximate factorization of a class of matrix-function with unstable set of partial indices // Proc. R. Soc. A. 2018. V. 474, No 2209. Art. 20170279.
<https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0279>.
24. Литвинчук Г.С., Спитковский И.М. Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана, факторизация эрмитовых матриц-функций и некоторые проблемы приближения мероморфными функциями // Матем. сб. 1982. Т. 117 (159), № 2. С. 196–215.
25. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд. М.: Наука, 1968. 512 с.

Поступила в редакцию 10.04.2024

Принята к публикации 2.05.2024

Рогозин Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет

пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь

E-mail: rogosinsv@gmail.com

Примачук Леонид Платонович, кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет

пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь

E-mail: rosanovas@yahoo.fr

Дубатовская Марина Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент

Белорусский государственный университет

пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь

E-mail: marina.dubatovskaya@gmail.com

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 2, pp. 250–261

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.250-261

 $\mathbb{R}$ -Linear Conjugation Problem on the Unit Circle in the Parabolic Case

S.V. Rogosin*, L.P. Primachuk**, M.V. Dubatovskaya***

Belarusian State University, Minsk, 220050 Belarus

E-mail: *rogosinsv@gmail.com, **rosanovas@yahoo.fr,

***marina.dubatovskaya@gmail.com

Received April 10, 2024; Accepted May 2, 2024

Abstract

A solution to the $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem (Markushevich boundary value problem) on the unit circle was proposed. This problem is analogous to the vector-matrix Riemann boundary value problem with the coefficient degenerating in the parabolic case (the coefficient is a triangular matrix function). A complete description of the factorization of the matrix coefficient was provided. Its partial indices were calculated. The method used is based on G.N. Chebotarev's algorithm and has been developed in a series of author's articles. The resulting factorization confirms the solvability of the $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem on the unit circle in the parabolic case.

Keywords: $\mathbb{R}$ -linear conjugation, parabolic case, factorization of matrix functions, G.N. Chebotarev's algorithm, partial index

Acknowledgements: This study was supported in part by the State Program for Scientific Research of the Republic of Belarus "Convergence-2025" (project no. 1.7.01.4).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Markushevich A.I. On a boundary value problem of analytic function theory. *Uch. Zap. Mosk. Univ.*, 1946, vol. 1, no. 100, pp. 20–30. (In Russian)
2. Mityushev V.V. $\mathbb{R}$ -linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains. In: Rogosin S.V., Koroleva A.A. (Eds.) *Advances in Applied Analysis*. Ser.: Trends in Mathematics. Basel, Birkhäuser, 2012, pp. 147–176.
https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0417-2_4.
3. Drygaś P., Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W. *Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Results for Materials Scientists and Engineers*. Ser.: Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Cambridge, Woodhead Publ., 2019. 372 p. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-03743-6>.
4. Mityushev V.V., Rogosin S.V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications*. Ser.: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 108. Boca Raton, FL, London, New York, NY, Washington, DC, Chapman & Hall/CRC, 1999. 296 p.

5. Vekua I.N. *Nekotorye obshchie metody postroeniya razlichnykh variantov teorii obolochek* [Some General Methods of Constructing Various Versions of the Shell Theory]. Moscow, Nauka, 1982. 286 p. (In Russian)
6. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. 3rd ed. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)
7. Mikhailov L.G. The general conjugation problem for analytic functions and its applications. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1963, vol. 27, no. 5, pp. 969–992. (In Russian)
8. Bojarski B. On generalized Hilbert boundary value problem. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1960, vol. 25, no. 4, pp. 385–390. (In Russian)
9. Sabitov I.Kh. A general boundary value problem for the linear conjugate on the circle. *Sib. Mat. Zh.*, 1964, vol. 5, no. 1, pp. 124–129. (In Russian)
10. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift*. Ser.: Mathematics and Its Applications. Vol. 523. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000. xvi, 378 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9>.
11. Litvinchuk G.S. Two theorems on the stability of the partial indices of Riemann boundary value problem and their application. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1967, no. 12, pp. 47–57. (In Russian)
12. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. *Factorization of Measurable Matrix Functions*. Heinig G. (Ed.). Ser.: Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 25. Basel, Birkhäuser, 1987. 372 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6266-0>.
13. Rogosin S.V., Mishuris G. Constructive methods for factorization of matrix-functions. *IMA J. Appl. Math.*, 2016, vol. 81, no. 2, pp. 365–391. <https://doi.org/10.1093/imat/hxv038>.
14. Kisil A.V., Abrachams I.D., Mishuris G., Rogosin S.V. The Wiener–Hopf technique, its generalizations and applications: Constructive and approximate methods. *Proc. R. Soc. A*, 2021, vol. 477, no. 2254, art. 20210533. <https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0533>.
15. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Math. J.*, 1993, vol. 4, no. 1, pp. 51–69.
16. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of piecewise meromorphic matrix-valued functions. *Sb.: Math.*, 2009, vol. 200, no. 8, pp. 1105–1126. <https://doi.org/10.1070/SM2009v200n08ABEH004030>.
17. Câmara M.C., Malheiro M.T. Meromorphic factorization revisited and application to some groups of matrix functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, vol. 2, no. 2, pp. 299–326. <https://doi.org/10.1007/s11785-008-0054-1>.
18. Chebotarev G.N. Partial indices for the Riemann boundary value problem with a triangular matrix of the second order. *Usp. Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 3 (69), pp. 192–202. (In Russian)
19. Primachuk L., Rogosin S.V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 809–817. <https://doi.org/10.1134/S1995080218060148>.
20. Bojarski B. Stability of the Hilbert problem for a holomorphic vector. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1958, vol. 21, no. 4, pp. 391–398. (In Russian)
21. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. On the stable system of partial indices in the Hilbert problem for many unknown functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 119, no. 5, pp. 854–857. (In Russian)

-
22. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Systems of integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of the arguments. *Usp. Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 2 (80), pp. 3–72. (In Russian)
 23. Mishuris G., Rogosin S. Approximate factorization of a class of matrix-function with unstable set of partial indices. *Proc. R. Soc. A*, 2018, vol. 474, no. 2209, art. 20170279. <https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0279>.
 24. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. Sharp estimates of defect numbers of a generalized Riemann boundary value problem, factorization of Hermitian matrix-valued functions and some problems of approximation by meromorphic functions. *Math. USSR – Sb.*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 205–224. <https://doi.org/10.1070/sm1983v045n02abeh002595>.
 25. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations]. 3rd ed. Moscow, Nauka, 1968. 512 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Rogosin S.V., Primachuk L.P., Dubatovskaya M.V. О задаче $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения на единичной окружности в параболическом случае // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 250–261. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.250-261>.

For citation: Rogosin S.V., Primachuk L.P., Dubatovskaya M.V. $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem on the unit circle in the parabolic case. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 250–261. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.250-261>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 514.822

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.262-272

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОГО ОСАЖДЕНИЯ
ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ФИЛЬТРЕ СМЕШАННОГО
ТИПА**

Д.А. Сафин, Ш.Х. Зарипов, Р.Ф. Марданов, Е.А. Костерина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Представлена математическая модель движения взвешенных аэрозольных частиц в фильтре смешанного типа. Для несущей среды принята модель течения несжимаемой жидкости в пористом периодическом элементе, состоящем из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. Краевая задача Стокса для функции тока течения решена с помощью метода граничных элементов. В найденном поле скоростей несущей среды рассчитаны траектории взвешенных частиц для нахождения эффективности их осаждения в результате инерционной импакции и механизма зацепления. Для различных соотношений массовых долей нано- и микроволокон рассчитаны зависимости эффективности осаждения от числа Стокса.

Ключевые слова: аэрозольный фильтр, инерционное осаждение, лагранжевы уравнения движения частиц, метод Рунге – Кутты, число Стокса

Введение

Волокнистые аэрозольные фильтры являются одними из широко распространенных устройств воздухоочистки от мелкодисперсных взвешенных частиц. В настоящее время наряду с фильтрами из монодисперсных микро- и нановолокон начинают активно применять фильтры нового типа, состоящие из комбинации микро- и нановолокон. Волокнистые среды смешанного типа имеют преимущества по сравнению с фильтрами с монодисперсными волокнами в результате высокой эффективности улавливания аэрозольных частиц нановолокнами и их низкого аэродинамического сопротивления, а также управляемой однородности пористой среды за счет вкрапления микроволокон в нановолокнистую среду. В [1, 2] проведены экспериментальные исследования характеристик таких фильтров. В [3] предложена математическая модель гидродинамического течения несущей среды для волокнистого фильтра смешанного типа из микро- и нановолокон. Проведены расчетные исследования и построена приближенная формула для силы сопротивления элемента пористой среды из микро- и нановолокон.

Фильтрация аэрозолей заключается в улавливании взвешенных частиц на волокнах фильтра под действием диффузионного механизма, инерционной импакции и эффекта зацепления [4–7]. Тип механизма улавливания частиц определяется главным образом размером частиц и скоростью несущей среды. В [1] для оценки эффективности осаждения частиц в результате диффузии и механизма зацепления

применены формулы классической теории фильтрации аэрозолей монодисперсными волокнами. В целом для условий экспериментов [1] эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными кривыми осаждения. Однако для строгого исследования эффективности улавливания аэрозольных частиц фильтрами смешанного типа необходимо решать задачу о движении взвешенных частиц в его гидродинамическом поле скоростей. В настоящей работе для восполнения указанного пробела разработана математическая модель осаждения аэрозольных частиц внутри периодического элемента фильтра смешанного типа с множеством нано- и микроволокон на основе численного решения лагранжевых уравнений движения инерционных частиц и рассчитана эффективность инерционного осаждения. Инерционность частиц определяется значением числа Стокса St , включающего в себя размер частиц, характерную (или среднюю) скорость течения несущей среды, а также вязкость среды.

1. Модель течения несущей среды

В [3] развита математическая модель течения несжимаемой жидкости в пористой области, состоящей из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. В качестве области течения выбрана прямоугольная периодическая ячейка со стороной H (рис. 1) с одним микроволокном радиуса R_m в центре ячейки и N нановолокон радиуса R_n . На границах ячейки приняты условия симметрии. Пористая среда всего фильтра получается симметричным отражением выбранной периодической ячейки.

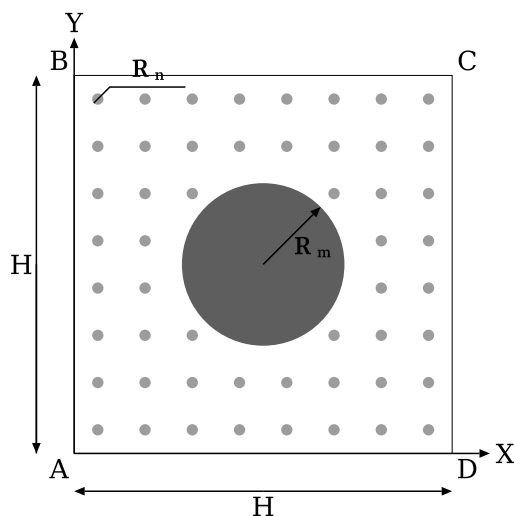


Рис. 1. Схема периодического элемента фильтра смешанного типа

Общую плотность упаковки α определим как отношение объема всех волокон V_f к объему ячейки V

$$\alpha = \frac{V_f}{V} = \frac{\pi R_m^2 + N\pi R_n^2}{H^2} = \frac{\pi R_m^2}{H^2} \frac{N + k^2}{k^2}, \quad (1)$$

где $k = R_m/R_n$. Массовую фракцию γ нановолокон зададим как отношение массы

нановолокон M_n к общей массе волокон

$$\gamma = \frac{M_n}{M_n + M_m},$$

где $M_m = \rho_f V_{mf}$ – масса микроволокна, ρ_f – плотность вещества волокон, V_{mf} – объем микроволокна, $M_n = \rho_f V_{nf}$, V_{nf} – объем нановолокон.

2. Уравнения движения аэрозольных частиц

В приближении Стокса аэродинамического сопротивления лагранжевы уравнения движения сферической взвешенной частицы записываются в виде

$$\frac{d\bar{V}}{dT} = \frac{\bar{U} - \bar{V}}{\tau}, \quad \frac{d\bar{R}}{dT} = \bar{V}, \quad (2)$$

где $\bar{U}$, $\bar{V}$ – скорости несущей среды и частицы соответственно, T – время, $\bar{R}$ – радиус-вектор положения частицы, $\tau = \rho_p d_p^2 / (18\mu)$ – время релаксации аэрозольной частицы, μ – вязкость среды, ρ_p и d_p – плотность и диаметр частицы. Для рассматриваемой двумерной задачи уравнения (2) представим в безразмерном виде

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x - v_x}{St}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{u_y - v_y}{St}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (3)$$

где u_x , u_y и v_x , v_y – декартовы составляющие скоростей несущей среды и частицы соответственно, $St = U_0 \tau / H$ – число Стокса, U_0 – характерная (или средняя) скорость течения в фильтре. Величины U_0 и H выбраны в качестве масштаба скорости длины. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) в найденном поле скоростей несущей среды с начальными условиями, соответствующими точке старта частиц $v_x(0) = u_x(x_0, y_0)$, $v_y(0) = u_y(x_0, y_0)$, $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, позволяет рассчитать траекторию отдельной частицы.

3. Результаты расчетов

В качестве области для расчета траекторий частиц выбрана полоса прямоугольных периодических элементов, состоящих из одного микроволокна и N нановолокон (рис. 1, $r_m = R_m/H = 0.215$, $r_n = R_n/H = 0.015$, $N = 52$). Описание постановки и метода граничных элементов решения задачи о течении несущей среды в периодическом элементе в приближении Стокса даны в [3]. Указанным методом найдено численное решение для функции тока течения в периодическом элементе. При интегрировании уравнений движения частиц необходимо знать составляющие скорости несущей среды в произвольной точке области течения. Для определения этих составляющих построено подробное сеточное разбиение области течения в периодическом элементе (рис. 2). Полученное численное решение задачи в приближении Стокса использовано для вычисления значений скорости течения в точках упомянутого разбиения. В найденном поле скоростей задача Коши для системы уравнений (3) движения частиц решалась численно методом Рунге–Кутты пятого порядка со встроенной оценкой погрешности Цитураса [8], который автоматически обеспечивает возможность получения промежуточных значений путем интерполяции 4-го порядка. Значения составляющих скорости газа в текущей точке траектории частицы были найдены на основе билинейной интерполяции во множестве значений, полученных из численного решения уравнений течения несущей среды. Частицы стартуют с левой границы первой периодической ячейки с начальной

скоростью, равной скорости течения несущей среды. При достижении частицами границ периодического элемента траектории продолжают свое движение в том же поле скоростей, но с нового начального положения, соответствующего предыдущей крайней точке достижения частицей границы элемента. Реализованный таким образом алгоритм позволяет рассчитывать движения частиц для произвольного числа периодических элементов, т. е. смешанного фильтра заданной толщины, определяемой как произведение количества ячеек на ширину одной ячейки.

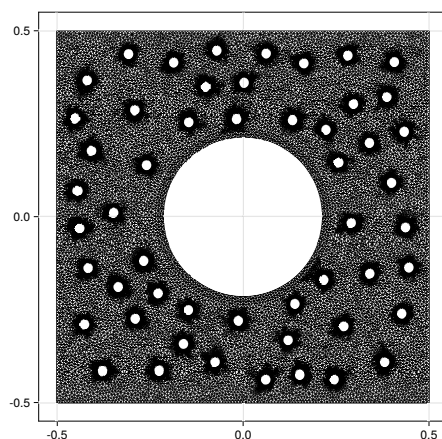


Рис. 2. Разбиение области периодического элемента

Частица считается осажденной при пересечении траекторией цилиндрических волокон. Для учета эффективности улавливания частиц за счет эффекта зацепления граница, при пересечении которой траекторией частица считается уловленной, проводится на расстоянии безразмерного радиуса аэрозольной частицы δ от поверхности волокон. Примеры траекторий частиц для различных чисел Стокса без учета и с учетом эффекта зацепления представлены на рис. 3. Видно, что при малом числе Стокса частицы не попадают на поверхность волокон, в то время как с ростом St часть частиц сталкивается с волокнами и оказывается отделенной от основного потока.

Для определения эффективности инерционного захвата частиц с левой границы первого периодического элемента стартуют 2000 частиц. Эффективность E инерционного осаждения определялась как отношение количества частиц, осевших на волокнах, к числу стартовавших частиц. Параметрические расчеты проводились для различных случайных расположений нановолокон относительно микроволокна. Варьировались число Стокса St , массовая доля нановолокон, число периодических элементов по потоку и радиус частиц. Для построения кривых $E(St)$ расчеты проведены для диапазона значений числа Стокса $St \in [0.0001, 100]$ и различного числа p периодических ячеек. Общее число необходимых расчетов (до 2 тысяч траекторий для одного варианта упаковки и одного числа Стокса) обеспечено использованием высокопроизводительного компьютера PC (CPU AMD Ryzen 9 5950X 16x3.4GHz, RAM 64 Gb). Построены зависимости эффективности осаждения $E(St)$ частиц от числа Стокса. Было проведено до 10 расчетов для различных вариантов расположения нановолокон относительно микроволокна в периодическом элементе и выполнено осреднение их результатов по методу Монте-Карло (рис. 5). В целом кривые $E(St)$ незначительно отличаются друг от друга. Наблюдается характерная для инерционного осаждения зависимость

эффективности осаждения от числа Стокса. При малых числах Стокса инерционное оседание практически отсутствует. С ростом St величина E растет, достигая максимума, и далее падает до значения 0.9, соответствующего относительной проекции миделева сечения волокон. Зависимости $E(St)$ также сближаются при росте числа p рассчитываемых периодов (рис. 6). Начиная с $p = 10$, кривые практически не изменяются, поэтому все расчеты в дальнейшем проводились для десяти периодов.

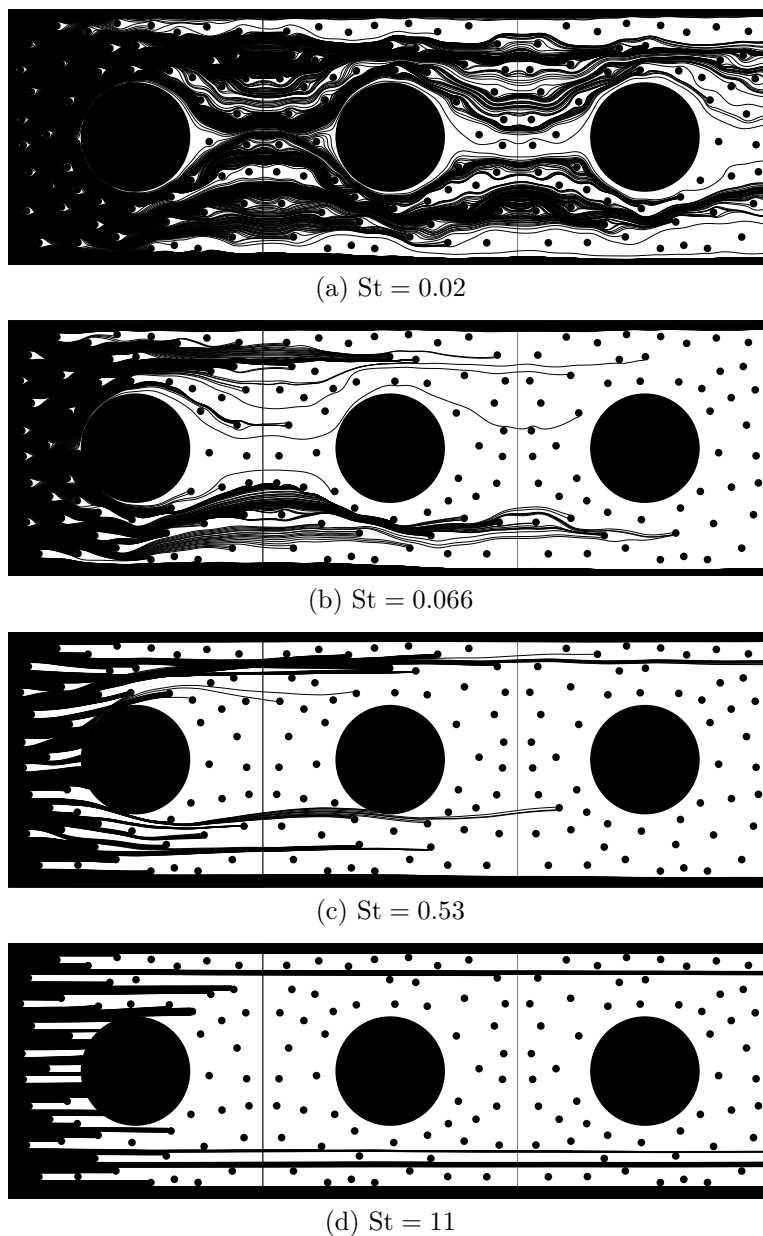


Рис. 3. Траектории частиц для различных чисел Стокса

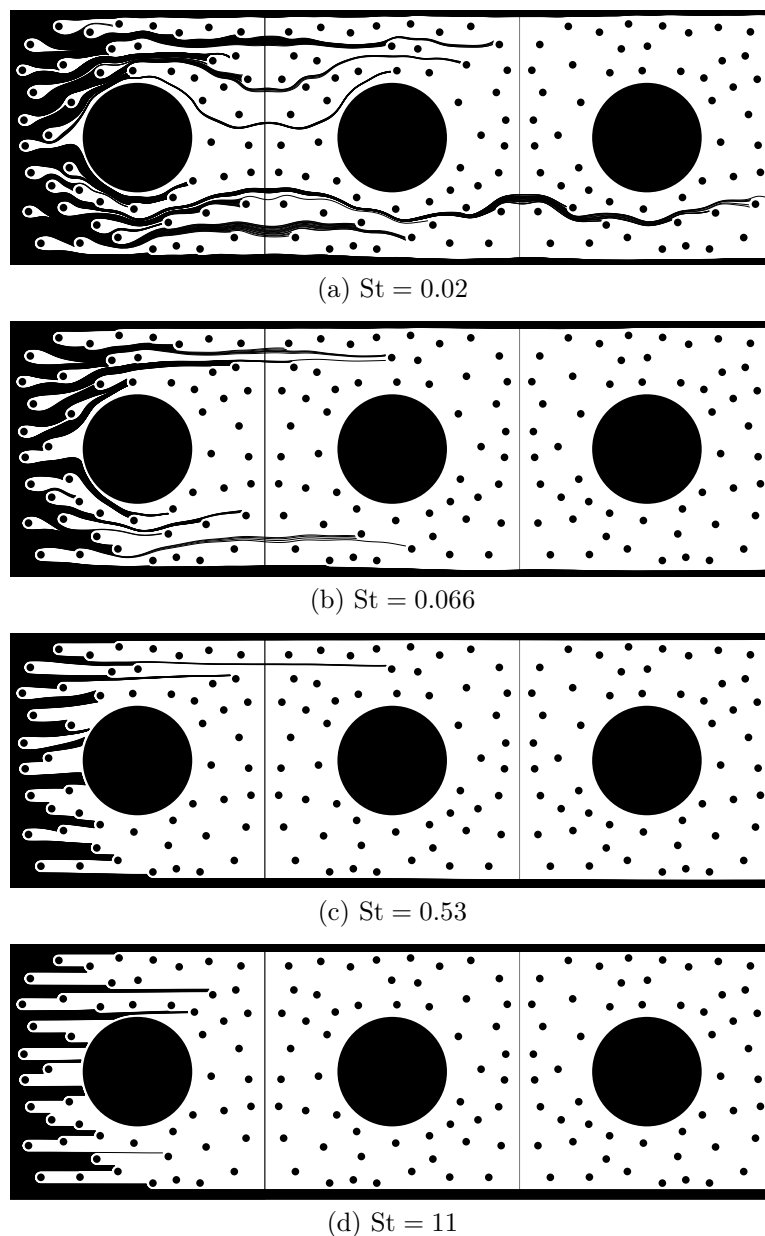


Рис. 4. Траектории частиц с учетом зацепления для различных чисел Стокса

Для случайного расположения нановолокон эффективность осаждения частиц растет от нулевого значения до максимального, зависящего от массовой доли нановолокон (рис. 7). При больших числах Стокса эффективность осаждения для случайного расположения нановолокон стремится к значению, соответствующему значению общей проекции миделева сечения всех волокон, отнесенной к высоте полосы. Наблюдается рост величины $E(St)$ с увеличением массовой доли нановолокон. Учет зацепления частиц волокнами дает ненулевые значения эффективности и для безинерционных частиц ($St = 0$) (рис. 8).

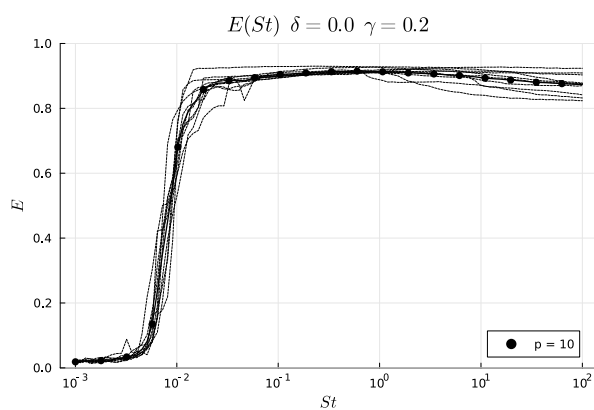


Рис. 5. Зависимость $E(St)$ для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон $\gamma = 0.2$ для десяти периодов. Выделенная кривая – осредненная зависимость

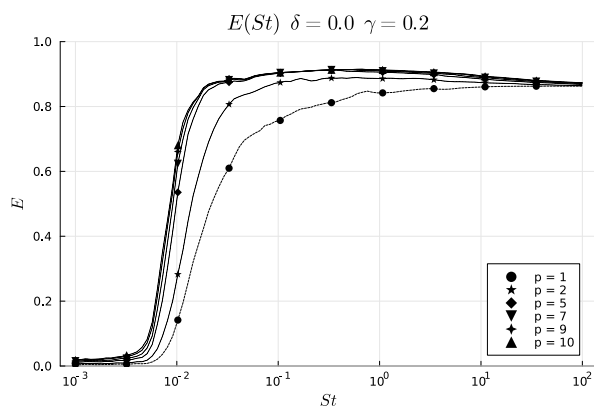


Рис. 6. Зависимость $E(St)$ для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон $\gamma = 0.2$ для различного числа периодов

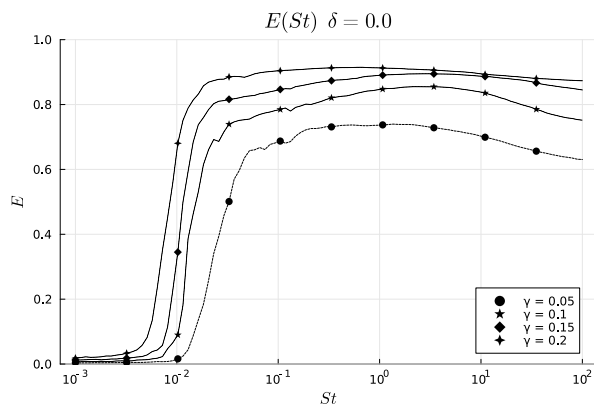


Рис. 7. Зависимость $E(St)$ для случайного расположения нановолокон для различных значений массовой доли нановолокон

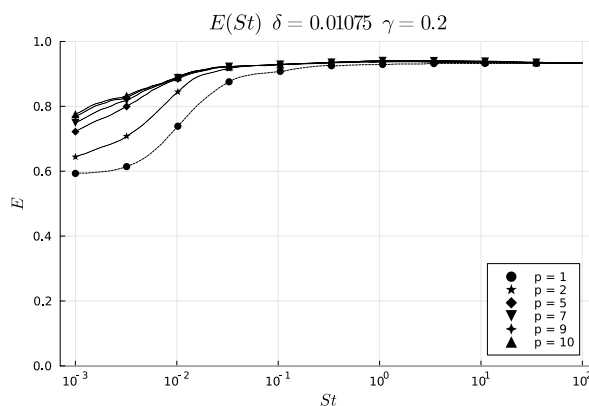


Рис. 8. Зависимость $E(St)$ с учетом эффекта зацепления для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон $\gamma = 0.2$ для различного числа периодов

Заключение

Представлена математическая модель движения взвешенных аэрозольных частиц в фильтре смешанного типа. Для несущей среды принята модель течения несжимаемой жидкости в пористом периодическом элементе, состоящем из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. Краевая задача Стокса для функции тока течения решена с помощью метода граничных элементов. В найденном поле скоростей несущей среды рассчитаны траектории взвешенных частиц для нахождения эффективности их осаждения за счет инерционной импакции и механизма зацепления. Для различных соотношений массовых долей нано- и микроволокон рассчитаны зависимости эффективности осаждения от числа Стокса.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00176.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Choi H.-J., Kumita M., Hayashi S., Yuasa H., Kamiyama M., Seto T., Tsai C.-J., Otani Y. Filtration properties of nanofiber/microfiber mixed filter and prediction of its performance // *Aerosol Air Qual. Res.* 2017. V. 17, No 4. P. 1052–1062. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2016.06.0256>.
2. Liu Y., Qian X., Zhang H., Wang L., Zou C., Cui Y. Preparing micro/nano-fibrous filters for effective PM 2.5 under low filtration resistance // *Chem. Eng. Sci.* 2020. V. 217. Art. 115523. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115523>.
3. Panina E., Mardanov R., Zaripov S. Mathematical model of the flow in a nanofiber/microfiber mixed aerosol filter // *Mathematics*. 2023. V. 11, No 16. Art. 3465. <https://doi.org/10.3390/math11163465>.
4. Liu Z.G., Wang P.K. Pressure drop and interception efficiency of multifiber filters // *Aerosol Sci. Technol.* 1997. V. 26, No 4. P. 313–325. <https://doi.org/10.1080/02786829708965433>.

5. *Hosseini S.A., Tafreshi H.V.* Modeling particle filtration in disordered 2-D domains: A comparison with cell models // *Sep. Purif. Technol.* 2010. V. 74, No 2. P. 160–169. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2010.06.001>.
6. *Yang H., Fu H., Zhu H.* A new expression for inertial particle collection efficiency by nanofibers with slip effect // *Chem. Eng. Sci.* 2022. V. 263. Art. 118061. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2022.118061>.
7. *Kirsh V.A.* Inertial deposition of submicron aerosols in model fibrous filters composed of ultrafine fibers // *Colloid J.* 2023. V. 85, No 3. P. 377–388. <https://doi.org/10.1134/S1061933X23600331>.
8. *Tsitouras Ch., Famelis I.Th.* On phase-fitted modified Runge-Kutta pairs of order 6 (5) // *Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (INCAAM 2006): Ext. Abstr.* / Simos T., Psihoyios G., Tsitouras C. (Eds.). Weinheim: Wiley-VCH, 2006. P. 1962–1965.

Поступила в редакцию 15.05.2024

Принята к публикации 24.05.2024

Сафин Дамир Айдарович, магистрант кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: damirsafin2000@mail.ru

Зарипов Шамиль Хузеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экологических систем

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Shamil.Zaripov@kpfu.ru

Марданов Ренат Фаритович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Renat.Mardanov@kpfu.ru

Костерина Екатерина Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры моделирования экологических систем

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.262-272

Modeling the Inertial Deposition of Aerosol Particles
in a Mixed-Type Filter

*D.A. Safin**, *Sh.Kh. Zaripov***, *R.F. Mardanov****, *E.A. Kosterina*****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **damirsafin2000@mail.ru*, ***Shamil.Zaripov@kpfu.ru*,

****Renat.Mardanov@kpfu.ru*, *****Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru*

Received May 15, 2024; Accepted May 24, 2024

Abstract

This article presents a mathematical model that describes the movement of suspended aerosol particles in a mixed-type filter. For the carrier medium, a model of incompressible fluid flow in a porous periodic element consisting of many cylinders with diameters in the nano- and micrometer range was adopted. The Stokes boundary value problem for the flow function was solved using the boundary element method. The efficiency of the deposition of suspended particles was determined by calculating their trajectories in the identified velocity field of the carrier medium. For various ratios of mass fractions of nano- and microfibers, the dependences of the deposition efficiency due to the inertial impact and interception mechanism on the Stokes number were found.

Keywords: aerosol filter, inertial deposition, Lagrangian equations of particle motion, Runge–Kutta method, Stokes number

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00176).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Schematic representation of the periodic element in a mixed-type filter.

Fig. 2. Partition of the periodic element area.

Fig. 3. Particle trajectories for different Stokes numbers.

Fig. 4. Particle trajectories considering interception for different Stokes numbers.

Fig. 5. $E(St)$ dependence for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of $\gamma = 0.2$ for ten periods. The highlighted curve shows the average dependence.

Fig. 6. $E(St)$ dependence for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of $\gamma = 0.2$ for different numbers of periods.

Fig. 7. $E(St)$ dependence for the random arrangement of nanofibers for various mass fractions of nanofibers.

Fig. 8. $E(St)$ dependence considering the interception effect for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of $\gamma = 0.2$ for different numbers of periods.

References

1. Choi H.-J., Kumita M., Hayashi S., Yuasa H., Kamiyama M., Seto T., Tsai C.-J., Otani Y. Filtration properties of nanofiber/microfiber mixed filter and prediction of its performance. *Aerosol Air Qual. Res.*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 1052–1062. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2016.06.0256>.
2. Liu Y., Qian X., Zhang H., Wang L., Zou C., Cui Y. Preparing micro/nano-fibrous filters for effective PM 2.5 under low filtration resistance. *Chem. Eng. Sci.*, 2020, vol. 217, art. 115523. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115523>.
3. Panina E., Mardanov R., Zaripov S. Mathematical model of the flow in a nano-fiber/microfiber mixed aerosol filter. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 16, art. 3465. <https://doi.org/10.3390/math11163465>.
4. Liu Z.G., Wang P.K. Pressure drop and interception efficiency of multifiber filters. *Aerosol Sci. Technol.*, 1997, vol. 26, no. 4, pp. 313–325. <https://doi.org/10.1080/02786829708965433>.
5. Hosseini S.A., Tafreshi H.V. Modeling particle filtration in disordered 2-D domains: A comparison with cell models. *Sep. Purif. Technol.*, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 160–169. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2010.06.001>.
6. Yang H., Fu H., Zhu H. A new expression for inertial particle collection efficiency by nanofibers with slip effect. *Chem. Eng. Sci.*, 2022, vol. 263, art. 118061. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2022.118061>.
7. Kirsh V.A. Inertial deposition of submicron aerosols in model fibrous filters composed of ultrafine fibers. *Colloid J.*, 2023, vol. 85, no. 3, pp. 377–388. <https://doi.org/10.1134/S1061933X23600331>.
8. Tsitouras Ch., Famelis I.Th. Phase-fitted modified Runge-Kutta pairs of order 6 (5). *Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (INCAAM 2006): Ext. Abstr.* Simos T., Psihoyios G., Tsitouras C. (Eds.). Weinheim, Wiley-VCH, 2006, pp. 1962–1965.

Для цитирования: Сафин Д.А., Зарипов Ш.Х., Марданов Р.Ф., Костерина Е.А. Моделирование инерционного осаждения взвешенных частиц в фильтре смешанного типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 262–272. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.262-272>.

For citation: Safin D.A., Zaripov Sh.Kh., Mardanov R.F., Kosterina E.A. Modeling the inertial deposition of aerosol particles in a mixed-type filter. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 262–272. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.262-272>. (In Russian)

Индекс 19423

ISSN 2541-7746 Ученые записки Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2

2024 Ученые записки Казанского университета Т. 166, кн. 2