



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

КАЗАНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

220-летие КФУ

Том 166

Книга 1

2024

Ученые записки Казанского университета.

Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2024

Т. 166, кн. 1

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Егоров – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстоков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору

в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 2.04.2024.
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 9,99. Уч.-изд. л. 7,59.
Тираж 300 экз. Заказ 181/3

Отпечатано в типографии Издательства
Казанского университета
420008, Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.

Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

Peer-Reviewed Scientific Journal

2024

Vol. 166

no. 1

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Andrey G. Egorov – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, 420008 Russia
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: April 2, 2024.
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional
printing sheet: 9.99. Publisher's signature: 7.59.
Circulation: 300 copies. Order: 181/3

Printed in KFU Publishing House
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, 420008
Russia

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Андреев В.К., Степанова И.В.</i> Априорные и апостериорные оценки решения одной эволюционной обратной задачи	5
<i>Байзаев С., Баротов Р.Н.</i> О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе	22
<i>Губарев Ю.Г., Котельникова М.С.</i> К устойчивости частного класса одномерных состояний динамического равновесия электронного газа Власова – Пуассона	36
<i>Насрутдинов М.Ф.</i> Протокол обмена ключами над кольцом формальных матриц $B_n(R, P)$	52
<i>Окулов Р.А., Крашанинин В.А., Гельчинский Б.Р., Ремпель А.А.</i> Влияние формы внутреннего канала анодного узла на скорость плазменного потока	58
<i>Плещинский Н.Б.</i> Задача Трикоми и интегральные уравнения	74
<i>Севодин М.А.</i> О смешанных стратегиях управления структурой портфеля ценных бумаг	92
<i>Сенницкий В.Л.</i> О движении вязкой жидкости со свободной границей	99
<i>Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р.</i> Задача Гильберта в полуплоскости для обобщённых аналитических функций с сингулярной точкой на вещественной оси	111

CONTENTS

Andreev V.K., Stepanova I.V. A priori and a posteriori estimates for solving one evolutionary inverse problem	5
Baizaev S., Barotov R.N. Some estimates for elliptic systems generalizing the Bitsadze system of equations	22
Gubarev Yu.G., Kotelnikova M.S. On the stability of a particular class of one-dimensional states of dynamic equilibrium of the Vlasov–Poisson electron gas	36
Nasrutdinov M.F. A key exchange protocol based on the ring $B_n(R, P)$	52
Okulov R.A., Krashaninin V.A., Gelchinsky B.R., Rempel A.A. Influence of the shape of the anode assembly inner channel on plasma flow velocity	58
Pleshchinskii N.B. Tricomi problem and integral equations	74
Sevodin M.A. Combined strategies for managing the securities portfolio structure	92
Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary	99
Shabalin P.L., Faizov R.R. The Hilbert problem in a half-plane for generalized analytic functions with a singular point on the real axis	111

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9, 532.5-1/-9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21

АПРИОРНЫЕ И АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ
РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.К. Андреев, И.В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, 660036, Россия

Аннотация

Исследована начально-краевая задача для системы параболических уравнений, возникающая при изучении течения бинарной смеси в горизонтальном канале, стенки которого неоднородно нагреваются. Задача сведена к последовательно решаемым линейным начально-краевым задачам с условиями Дирихле или Неймана, одна из которых является обратной с нелокальным условием переопределения. Решение построено с помощью метода Фурье, дано обоснование, что оно является классическим. Обсуждается вопрос установления решения на больших временах.

Ключевые слова: уравнение конвективного теплопереноса, неклассическая краевая задача, нестационарное решение, априорная оценка, ограниченность

Введение

Для описания однонаправленного движения бинарной жидкости в горизонтальном канале использованы уравнения Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска, дополненные уравнениями теплопереноса [1]

$$\begin{aligned} u_t &= \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p_x, & g(\beta_1 \theta + \beta_2 c) &= \frac{1}{\rho_0} p_y, \\ \theta_t + u \theta_x &= \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), & c_t + u c_x &= D(c_{xx} + c_{yy}) + D^T(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь t – время, x и y – горизонтальная и вертикальная координаты, $u(y, t)$ – горизонтальная компонента скорости, $p(x, y, t)$ – давление с точностью до гидростатического, $\theta(x, y, t)$, $c(x, y, t)$ – функции температуры и концентрации, g – ускорение свободного падения; все постоянные, входящие в уравнения (1), имеют физический смысл и известны для каждой конкретной смеси, при этом все они, кроме D^T , положительны. В работе [2] проведено исследование совместности системы (1), показано, что решение уравнений возможно, если функция $\theta_0 = \theta(x, y, 0)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\theta_{0xx} + \theta_{0yy} = \alpha(y)x + \beta(y)$, где α и β связаны с функцией давления p и скоростью u . Отсюда, в частности, следует, что если функция θ представляет собой полином переменной x , то она является многочленом относительно x степени не выше третьей. В работе [3] установлено, что в лабораторном эксперименте с однородной жидкостью возможно воспроизвести

режим нагрева стенок с постоянным градиентом температуры в горизонтальном направлении (т.е. с линейной зависимостью функции температуры от переменной x). В качестве верификации эксперимента в [3] выбрана математическая модель на основе уравнений (1) без учёта последнего уравнения на перенос примеси. Тем самым построение решения системы (1), где функции θ и c линейно зависят от координаты x , представляет интерес и с точки зрения объяснения результатов эксперимента. Следуя предположению о линейности функций θ и c относительно x , из первых двух уравнений системы (1) получим

$$u_t = \nu u_{yy} - g \int (\beta_1 \theta + \beta_2 c)_x dy + P(t),$$

где $P(t)$ – функция, которая имеет смысл горизонтального градиента давления и находится наряду с остальными неизвестными функциями в процессе решения задачи с помощью дополнительного условия на расход жидкости через поперечное сечение слоя. Одно из практических приложений решения данной задачи состоит в поиске такого градиента давления, который обеспечит нужный расход жидкости. Вследствие такой постановки обсуждаемая задача является обратной.

Необходимо заметить, что решению обратных задач для параболических уравнений посвящено достаточно много работ. В частности, задачи нахождения коэффициентов и функции источника с нелокальным условием переопределения исследованы в [4–7]. Обычно авторы ограничиваются доказательством существования и единственности решения в пространствах Соболева. Но для использования решения при описании процесса теплообмена (как в случае системы (1)) предпочтительнее его строить в пространстве гладких функций. Из конструктивных методов решения краевых задач для параболических уравнений отметим работы научной школы академика А. Ф. Сидорова (см., например, [8, 9]), где разработан и применён общий метод специальных рядов для решения широкого круга краевых задач математической физики. Построению точных решений нелинейных уравнений теплопроводности посвящены работы [10, 11]. Некоторые аналитические методы решения нестационарных задач молекулярного теплообмена описаны в [12]. В настоящей работе предложено решение нелинейной начально-краевой задачи для уравнений (1), постановка которой обсуждается ниже, с помощью метода разделения переменных. Доказано, что построенное решение является классическим при некоторых ограничениях на входные данные. В исследовании использованы не только широко известные результаты, относящиеся к решению задач Дирихле и Неймана для уравнения линейной диффузии, но и некоторые нетривиальные авторские находки, основанные на специфике задачи.

1. Постановка задачи

Предположим, что функции $\theta(x, y, t) = v_1(y, t)x + v_4(y, t)$, $c(x, y, t) = v_2(y, t)x + v_5(y, t)$, $u(y, t) = v_3(y, t)$. Тогда, опуская подробности, касающиеся обезразмеривания переменных в системе (1), сведём их к цепочке последовательно решаемых уравнений

$$v_{1t} = a_1 v_{1yy}, \quad (2)$$

$$v_{2t} = a_2 (v_{2yy} - a_3 v_{1yy}), \quad (3)$$

$$v_{3t} = v_{3yy} - \int_0^y [v_1(z, t) + v_2(z, t)] dz - f(t), \quad (4)$$

$$v_{4t} = a_1 v_{4yy} - a_4 v_1 v_3, \quad (5)$$

$$v_{5t} = a_2 (v_{5yy} - a_3 v_{2yy}) - a_4 v_2 v_3, \quad (6)$$

где $v_i(y, t)$, $i = 1, \dots, 5$, – неизвестные функции двух переменных, определённые в области $Q = \{(y, t) | y \in (0, 1), t \in (0, t_0)\}$, t_0 и a_j , $j = 1, \dots, 4$, – постоянные, из которых все, кроме a_3 , положительны, последняя может иметь произвольный знак. Функция $f(t)$ находится вместе с решением уравнения (4) с помощью интегрального условия

$$\int_0^1 v_3(y, t) dy = q(t) \quad (7)$$

с известной функцией $q(t)$, имеющей физический смысл заданного расхода через поперечное сечение горизонтального канала, ограниченного твёрдыми стенками $y = 0$ и $y = 1$.

Граничные условия на функции $v_i(y, t)$ при $y = 0$, $y = 1$ обусловлены физической постановкой задачи и имеют вид

$$v_1(0, t) = c_1(t), \quad v_1(1, t) = c_2(t), \quad (8)$$

$$v_{2y}(0, t) = a_3 v_{1y}(0, t), \quad v_{2y}(1, t) = a_3 v_{1y}(1, t), \quad (9)$$

$$v_3(0, t) = v_3(1, t) = 0, \quad (10)$$

$$v_4(0, t) = c_3(t), \quad v_4(1, t) = c_4(t), \quad (11)$$

$$v_{5y}(0, t) = a_3 v_{4y}(0, t), \quad v_{5y}(1, t) = a_3 v_{4y}(1, t). \quad (12)$$

Начальные условия запишутся так:

$$v_i(y, 0) = b_i(y), \quad (13)$$

где $b_i(y)$, $i = 1, \dots, 5$, – заданные функции. В равенствах (8) и (11) $c_j(t)$, $j = 1, \dots, 4$, считаются известными.

Видно, что часть задачи, а именно, уравнения (2)–(4) с условиями (7)–(10), можно выделить в отдельную подзадачу. Алгоритм её решения таков: сначала находим решение уравнения (2) с условиями (8) и $v_1(y, 0) = b_1(y)$; затем записываем решение задачи, состоящей из уравнения (3), условий (9) и $v_2(y, 0) = b_2(y)$; после этого функции $v_3(y, t)$ и $f(t)$ находим из уравнения (4), условий (7), (10) и $v_3(y, 0) = b_3(y)$. Тем самым задачи на функции v_1 и v_2 являются классическими задачами Дирихле и Неймана, а задача на функции v_3 , f – обратной с интегральным условием переопределения. Описанная подзадача была решена в работе авторов [13] с помощью преобразования Лапласа. Анализ свойств этого преобразования позволил сделать вывод, что нестационарное решение выходит на стационарный режим при $t \rightarrow \infty$, если функции $c_j(t)$, $j = 1, 2$, из граничных условий (8) и функция $q(t)$ из (7) стремятся к своим стационарным значениям. При этом стоит упомянуть, что для функции v_2 решение соответствующей стационарной задачи неединственно [14]. Для замыкания стационарной задачи необходимо использовать дополнительное условие, которое в терминах физической постановки задачи формулируется через задание средней концентрации в поперечном сечении

слоя жидкости. В работе [13] было показано, что нужно согласовывать вид функции $b_2(y)$ с другими входными данными, чтобы нестационарное решение, построенное с помощью численного обращения образов по Лапласу, выходило на полученный стационарный режим. Численная процедура решения задачи в полной постановке (2)–(13) была реализована в работе [15]. Графически подтверждено установление решения на больших временах при выполнении условия согласования для функции $b_2(y) = v_2(y, 0)$ из [13] и ограниченности функций $c_j(t)$, $j = 1, \dots, 4$, $q(t)$. Указано, что для стабилизации решения на больших временах выведенное в работе [13] ограничение является существенным, только если нужно получить режим, найденный как решение соответствующей стационарной задачи с дополнительным условием. В ином случае проведённые вычислительные эксперименты показали, что решение устанавливается к некоторому постоянному режиму, не совпадающему с решением указанной стационарной задачи.

2. Построение решений задач на функции $v_1(y, t)$, $v_2(y, t)$ и их анализ

Уравнение (2) для функции $v_1(y, t)$ с граничными условиями (8) и начальным условием $v_1(y, 0) = b_1(y)$ представляет собой первую начально-краевую задачу с неоднородными граничными условиями. Введём обозначения

$$\|c_j^{(n)}\| = \max_{t \in [0, t_0]} |c_j^{(n)}(t)|, \quad \|b_i(y)\| = \max_{y \in [0, 1]} |b_i(y)|, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Везде ниже штрих будет означать производную по переменной t , натуральный индекс (n) – порядок производной. Отметим несколько известных фактов о решении обсуждаемой задачи.

А. Справедлив принцип максимума [16], то есть выполнено неравенство

$$|v_1(y, t)| \leq \max[\|b_1(y)\|, \|c_1(t)\|, \|c_2(t)\|].$$

Приведённая оценка позволяет установить единственность гладкого решения, но не даёт информации о поведении решения задачи (2)–(13) при больших t .

В. В [14] показано, что если $c_j(t) \rightarrow c_j^s = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$ в равномерной метрике, то верно соотношение

$$|v_1(y, t) - v_1^s(y)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty \quad \forall y \in [0, 1], \quad (14)$$

где $v_1^s(y) = (c_2^s - c_1^s)y + c_1^s$ – решение соответствующей стационарной задачи.

Если выполнены условия

$$|c_j^{(n)}(t)| \leq M e^{-m_1 t}, \quad |c_j(t) - c_j^s| \leq M e^{-m_1 t}, \quad j = 1, 2, \quad n = 0, 1, \quad m_1 > 0 \quad (15)$$

(здесь и далее M обозначает некоторую положительную постоянную без уточнения её величины), то решение удовлетворяет оценкам

$$|v_1(y, t)| \leq M e^{-m_2 t}, \quad |v_1(y, t) - v_1^s(y)| \leq M e^{-m_2 t}, \quad 0 < m_2 < m_1. \quad (16)$$

Постоянную m_2 можно уточнить с помощью решения задачи, построенного в виде формального ряда с помощью метода разделения переменных.

Предположение 1. Первые производные функций $c_j(t)$, $j = 1, 2$, существуют при $t \in [0, t_0]$; функция $b_1(y)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, при этом $b_{1y} \in L_2(0, 1)$; выполнены условия согласования $b_1(0) = c_1(0)$, $b_1(1) = c_2(0)$.

Исходя из требований предположения 1, функция v_1 определяется формулой [17]

$$v_1(y, t) = c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y + 2 \sum_{k=1}^{\infty} V_{1k}(t) \sin \pi k y e^{-(\pi k)^2 a_1 t}, \quad (17)$$

$$V_{1k}(t) = \int_0^1 b_1(y) \sin \pi k y dy - \frac{1}{\pi k} [c_1(0) - (-1)^k c_2(0)] - \frac{1}{\pi k} \int_0^t e^{(\pi k)^2 a_1 \tau} [c_{1\tau} - (-1)^k c_{2\tau}] d\tau.$$

Ряд в (17) сходится абсолютно и равномерно для любых $(y, t) \in \bar{Q}$ (см., например, [16]).

Замечание 1. При обосновании того, что выражение (17) есть классическое решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности, в учебниках [18–20] существенно используется свойство финитности правой части на отрезке $y \in [0, 1]$. В случае задачи для $v_1(t, y)$ правая часть представлена выражением $c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y$, и её финитность влечёт существенное ограничение на краевые условия: c_j могут быть только нулевыми, что неприемлемо для физической интерпретации постановки задачи. В книге [21] (главы 4, 5) авторам удалось найти ряд теорем, пользуясь которыми можно доказать, что ряд во втором слагаемом формулы (17) сходится абсолютно и равномерно и при невыполнении свойства финитности правой части.

Уточним постоянную m_2 из неравенства (16). Из (15) имеем

$$|c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y| \leq 3Me^{-m_1 t} \quad \forall y \in [0, 1],$$

поэтому необходимо оценить последнее слагаемое в формуле (17). Нетрудно заметить, что выполнено неравенство

$$|V_{1k}(t)| \leq \|b_1\| + \frac{\max\{|c_1(0)|, |c_2(0)|\}}{\pi k} + \frac{2M[e^{(\pi^2 k^2 a_1 - m_1)t} - 1]}{\pi k[(\pi k)^2 a_1 - m_1]},$$

тогда при $t \geq \delta > 0$ получим оценку

$$\begin{aligned} 2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} V_{1k}(t) \sin \pi k y e^{-(\pi k)^2 a_1 t} \right| &\leq \\ &\leq 2e^{-\pi a_1 t} \left(\|b_1\| \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\pi^2 a_1 (k^2 - 1)\delta} + \frac{\max\{|c_1(0)|, |c_2(0)|\}}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\pi^2 a_1 (k^2 - 1)\delta}}{k} \right) + \\ &\quad + \frac{4Me^{-m_1 t}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - e^{(m_1 - (\pi k)^2 a_1)t}}{k[(\pi k)^2 a_1 - m_1]}. \end{aligned}$$

Поскольку все ряды в правой части данного неравенства сходящиеся (начиная с некоторого k , неравенство $m_1 < (\pi k)^2 a_1$ всегда выполнено), то из проведённых рассуждений следует, что в формуле (16) постоянная $m_2 = \min(m_1, \pi^2 a_1)$.

Для получения оценки на производную функции v_1 по переменной t заметим, что функция $Z(y, t) = v_{1t}(y, t)$ есть решение задачи

$$Z_t = a_1 Z_{yy}, \quad Z(y, 0) = v_{1t}(y, 0) = a_1 b_{1yy}(y), \quad Z(0, t) = c'_1(t), \quad Z(1, t) = c'_2(t).$$

Поэтому, если дополнительно предположить, что ограничение (15) выполнено и для $n = 2$, $b_1 \in C^2[0, 1]$, $b_{1yyy} \in L_2(0, 1)$, соответствующие начальные и граничные

условия согласованы ($a_1 b_{1yy}(0) = c'_1(0)$, $a_1 b_{1yy}(1) = c'_2(0)$), то для функции $Z(y, t)$ верна оценка типа (16):

$$|Z(y, t)| = |v_{1t}(y, t)| \leq M e^{-m_2 t} \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (18)$$

Отметим, что не представляет труда получить оценки вида (16) для первой и второй производных функции v_1 по переменной y . Ограниченность первой производной может быть доказана непосредственно дифференцированием выражения (17) и оценкой получившегося ряда, ограниченность второй следует из уравнения (2) и оценки (18). Тем самым имеем

$$|v_{1yy}| \leq a_1 M e^{-m_2 t}, \quad |v_{1y}| \leq M e^{-m_2 t} \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (19)$$

В результате проведённых рассуждений сформулируем теорему.

Теорема 1. *Функция $v_1(y, t)$ является классическим решением задачи*

$$v_{1t} = a_1 v_{1yy}, \quad v_1(y, 0) = b_1(y), \quad v_1(0, t) = c_1(t), \quad v_1(1, t) = c_2(t) \quad (20)$$

и представляется формулой (17) при условии выполнения ограничений на входные данные задачи:

$$b_1(y) \in C^2[0, 1], \quad b_1^{(3)} \in L_2(0, 1), \quad b_1(0) = c_1(0), \quad b_1(1) = c_2(0), \\ a_1 b_{1yy}(0) = c'_1(0), \quad a_1 b_{1yy}(1) = c'_2(0).$$

Если дополнительно выполнено требование (15), то при $t \rightarrow \infty$ справедливы оценки (16), где $m_2 = \min(m_1, \pi^2 a_1)$.

В случае однородных граничных условий и нулевой правой части аналогичный результат для задачи (20) сформулирован, например, в [22].

Обратимся далее к решению задачи (3) с граничными (9) и начальным условием $v_2(y, 0) = b_2(y)$ с уже известной функцией $v_1(y, t)$. Будем считать, что $b_2(y) \in C^1[0, 1]$, $b_{2y}(0) = a_3 b_{1y}(0)$, $b_{2y}(1) = a_3 b_{1y}(1)$. Заметим, что в уравнении (3) можно сделать замену $v_2 = N(y, t) + a_3 v_1$ и получить задачу для функции $N(y, t)$ с однородными граничными условиями:

$$N_t = a_2 N_{yy} - a_3 v_{1t}, \quad N_y(0, t) = N_y(1, t) = 0, \quad N(y, 0) = b_2(y) - a_3 b_1(y) = b_{20}(y).$$

Решив полученную задачу [17], можно записать $v_2(y, t)$:

$$v_2(y, t) = a_3 v_1(y, t) + \int_0^1 b_{20}(z) G(y, z, t) dz - a_3 \int_0^t \int_0^1 v_{1\tau}(z, \tau) G(y, z, t - \tau) dz d\tau, \quad (21)$$

$$G(y, z, t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos \pi k y \cos \pi k z e^{-(\pi k)^2 a_2 t}.$$

Покажем, что функция $v_2(y, t)$ ограничена в $\bar{Q}^\delta = \{(y, t) | y \in [0, 1], t \in [\delta, t_0]\}$, где $\delta > 0$. Поскольку оценки на функцию $v_1(y, t)$ и её производные известны (см. (16), (18), (19)), представим доказательство ограниченности для остальных слагаемых в формуле (21):

$$\left| \int_0^1 b_{20}(z) G(y, z, t) dz - a_3 \int_0^t \int_0^1 v_{1\tau}(z, \tau) G(y, z, t - \tau) dz d\tau \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 a_2 \delta}\right] \int_0^1 |b_{20}(z)| dz + |a_3| \int_0^t M e^{-m_3 \tau} |G(y, \xi, t - \tau)| d\xi d\tau \leq \\ &\leq M_1 \int_0^1 |b_{20}(z)| dz + |a_3| M \left(\frac{1}{m_3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|(\pi k)^2 a_2 - m_3|} \right) \leq K = \text{const}. \end{aligned}$$

Тем самым установлено, что

$$|v_2(y, t)| \leq M_2 = |a_3| M e^{-m_2 t} + K \quad \text{в } \bar{Q}^\delta, \quad (22)$$

и ограниченность функции $v_2(y, t)$ доказана. Заметим, что в отличие от функции $v_1(y, t)$ для функции $v_2(y, t)$ невозможно получить оценку вида (16) вследствие вида функции G в формуле (21).

Получим оценку на производную $v_{2t}(y, t)$. Из представления решения (21) следует

$$\begin{aligned} |v_{2t}(y, t)| &\leq |a_3| |v_{1t}| + 2\pi^2 a_2 \int_0^1 |b_{20}(z)| dz \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(\pi k)^2 a_2 t} + \\ &+ |a_3| \left| \int_0^1 v_{1t}(z, t) G(y, z, 0) dz \right| + |a_3| \left| \int_0^t \int_0^1 v_{1\tau}(z, \tau) \frac{\partial G}{\partial t}(y, z, t - \tau) dz d\tau \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(\pi k)^2 a_2 t}$ сходится при $t \geq \delta$, остальные слагаемые в формуле (23) ограничены в силу оценки (18) и вида функции G . Таким образом,

$$|v_{2t}(y, t)| \leq M_3. \quad (24)$$

Обращаясь к уравнениям (3), используя первую оценку из (19) и (24), получим

$$|v_{2yy}(y, t)| \leq a_2 M_3 \quad \text{в } \bar{Q}^\delta. \quad (25)$$

Заметим также, что из равенства

$$v_{2y}(y, t) = a_3 v_{1y}(0, t) + \int_0^y v_{2zz}(z, t) dz$$

следует оценка

$$|v_{2y}(y, t)| \leq M_4 \quad \text{в } \bar{Q}^\delta. \quad (26)$$

Резюмируя результаты рассуждений относительно функции $v_2(y, t)$, сформулируем теорему.

Теорема 2. *Функция $v_2(y, t)$ является классическим решением задачи*

$$v_{2t} = a_2(v_{2yy} - a_3 v_{1yy}), \quad v_2(y, 0) = b_2(y), \quad v_{2y}(0, t) = a_3 v_{1y}(0, t),$$

$$v_{2y}(1, t) = a_3 v_{1y}(1, t)$$

и представляется формулой (21) при условии выполнения всех условий теоремы 1 и ограничений на входные данные задачи: $b_2(y) \in C^1[0, 1]$, $b_{2y}(0) = a_1 b_{1y}(0)$, $b_{2y}(1) = a_1 b_{1y}(1)$ для любых $(y, t) \in \bar{Q}^\delta$. Для функции $v_2(y, t)$ и её производных справедливы оценки (22), (24)–(26).

Отметим ещё один факт, связанный с функцией $v_2(y, t)$. Нетрудно видеть, что имеет место закон сохранения

$$\int_0^1 v_2(y, t) dy = \int_0^1 b_2(y) dy = \text{const.} \quad (27)$$

Введём функцию

$$W(y, t) = \int_0^y v_2(z, t) dz.$$

Из соотношений (3), (9) и (27) следует, что $W(y, t)$ есть решение первой краевой задачи

$$W_t = a_2(W_{yy} - a_3 v_{1y}), \quad W(y, 0) = \int_0^y b_2(z) dz, \quad W(0, t) = 0, \quad W(1, t) = \int_0^1 b_2(z) dz \equiv W_0.$$

Для данной задачи справедлива оценка типа (16)

$$|W(y, t) - W^s(y)| \leq M e^{-m_2 t} \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \forall y \in [0, 1], \quad (28)$$

где $W^s(y) = a_3(c_2^s - c_1^s)(y^2 - y) + W_0 y$ – решение соответствующей стационарной задачи. Оценка (28) будет использована в следующем разделе при анализе решения задачи для функции $v_3(y, t)$.

3. Решение обратной задачи (4), (7), (10), апостериорные оценки решения

Перейдём теперь к решению обратной задачи (4), (7), (10) с начальным условием $v_3(y, 0) = b_3(y)$. Пусть

$$q(t) \in C^1[0, t_0], \quad b_3(y) \in C^1[0, 1], \quad b_3(0) = b_3(1) = 0, \quad \int_0^1 b_3(y) dy = q(0). \quad (29)$$

Сделаем замену

$$U(y, t) = v_3(y, t) - \frac{\pi}{2} q(t) \sin \pi y, \quad (30)$$

тогда интегральное условие (7) станет однородным, задача для функции $U(y, t)$ примет вид

$$U_t = U_{yy} + h(y, t) - f(t), \quad (31)$$

$$U(0, y) = U_0(y), \quad U(0, t) = U(1, t) = 0, \quad \int_0^1 U(y, t) dy = 0, \quad (32)$$

$$U_0(y) \equiv b_3(y) - \frac{\pi}{2} q(0) \sin \pi y, \quad h(y, t) = -\frac{\pi}{2} (q' + \pi q) \sin \pi y - \int_0^y [v_1(z, t) + v_2(z, t)] dz.$$

Проинтегрировав уравнение (31) по y от 0 до 1, найдём

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 U dy = U_y(1, t) - U_y(0, t) + q' + \pi q - \int_0^1 \int_0^y [v_1(z, t) + v_2(z, t)] dz dy - f(t).$$

Отсюда функция $f(t)$ выражается с помощью (17), (21), (30) следующим образом:

$$f(t) = U_y(1, t) - U_y(0, t) - \int_0^1 \int_0^y [v_1(z, t) + v_2(z, t)] dz dy + q' + \pi q. \quad (33)$$

Формула (33) позволяет на данном этапе только найти значение $f(0)$, поскольку следы $U_y(0, t)$, $U_y(1, t)$ остаются неизвестными.

Отметим, что задачу (31), (32) можно свести к прямой начально-краевой задаче с неклассическими граничными условиями. Для этого достаточно ввести обозначение $U_y = w(y, t)$, $U_{0y} = w_0(y) = b_{3y} - (\pi^2 q(0) \cos(\pi y))/2$, продифференцировать (4) по y с использованием граничных условий (32) и сделанной замены (30). В результате получим следующую задачу для функции w :

$$w_t = w_{yy} - h_y, \quad \int_0^1 w dy = 0, \quad \int_0^1 y w dy = 0, \quad w(0, y) = w_0(y), \quad (34)$$

при этом выполнено

$$\int_0^1 w_0(y) dy = \int_0^1 y w_0(y) dy = 0.$$

Решение задачи (34) строится в виде ряда по специальному базису. Детальный алгоритм изложен в работе [23], приведём здесь только конечную формулу для функции $U(y, t)$:

$$U(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[\mu_k(2y-1)] - \cos \mu_k}{2\mu_k} u_k(t), \quad (35)$$

$$u_k(t) = -\frac{2(1+\mu_k^2)}{\mu_k^2} \left\{ e^{-4\mu_k^2 t} \int_0^1 w_0(y) \sin[\mu_k(2y-1)] dy + \right. \\ \left. + \int_0^t \left[\int_0^1 h_y(y, \tau) \sin[\mu_k(2y-1)] dy \right] e^{-4\mu_k^2(t-\tau)} d\tau \right\},$$

где μ_k – корни уравнения $\operatorname{tg} \mu_k = \mu_k$, $\mu_k = \pi(k + 1/2) + O(1/k)$, $k \gg 1$. Теперь функция $f(t)$ из (33) восстановится в явном виде:

$$f(t) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \sin \mu_k u_k(t) + q' + \pi q - \int_0^1 (1-y) v_1(y, t) dy - \int_0^1 W(y, t) dy. \quad (36)$$

Подробное доказательство ограниченности функции $U(y, t)$ и её производной по переменной t приведено в работе [23] при $v_2 \equiv 0$ и соответствующих ограничениях на входные данные задачи. Покажем, что подобные оценки можно получить, если $v_2 \neq 0$. При этом будет существенно использованы закон сохранения (27) и функция W , введённая выше.

Вычислим внутренний интеграл в выражении для $u_k(t)$ в формуле (35) с учётом определения функции $h(y, t)$ и граничных условий для $v_1(y, t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_y(y, \tau) \sin[\mu_k(2y-1)] dy &= -\frac{1}{2\mu_k} \{ [v_2(1, \tau) - v_2(0, \tau)] \cos \mu_k - \\ &- \int_0^1 (v_{1y}(y, \tau) + v_{2y}(y, \tau) + \frac{\pi^3}{2} [q'(\tau) + \pi q(\tau)] \sin \pi y) \cos [\mu_k(2y-1)] dy \}. \end{aligned}$$

Из ограниченности функции $v_2(y, t)$, производных v_{1y} , v_{2y} (см. неравенства (26), (19)) и условий (29) следует, что для множителя в формуле (35) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{|u_k(t)|}{\mu_k} &\leq \frac{2e^{-2\mu_k^2 t}}{\mu_k} \int_0^1 |w_0(y)| dy + \frac{4M_5(1 - e^{-4\mu_k^2 t})}{\mu_k^4}, \\ M_5 &= M_2 + M_4 + \frac{\pi^3}{2} (||q'|| + \pi ||q||), \quad ||q^{(n)}(t)|| = \max_{t \in [0, t_0]} |q^{(n)}(t)|. \end{aligned}$$

Тогда в $\bar{Q}^\delta$ равномерно и абсолютно сходятся ряды в представлениях функций $U(y, t)$, $U_{yy}(y, t)$ и $f(t)$. Из уравнения (31) вытекает сходимость рядов в выражении для $U_t(y, t)$. Отсюда согласно замене (30) аналогичные выводы имеют место и для функций $v_3(y, t)$, v_{3t} и v_{3yy} . Значит, обратная задача (4), (7), (10) имеет классическое решение.

Перейдём к анализу поведения функции $U(t, y)$ при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что решение задач для функций $U(y, t)$, $f(t)$ в стационарной постановке есть

$$\begin{aligned} U^s &= (y^2 - y) \frac{f^s}{2} - \int_0^y (y-z) h^s(z) dz + y \int_0^1 (1-z) h^s(z) dz, \\ f^s &= 12 \int_0^1 (1-z) h^s(z) dz - 6 \int_0^1 \int_0^y (y-z) h^s(z) dz dy, \\ h^s(y) &= -\frac{q^s \sin(\pi y)}{2} - \int_0^y v_1^s(y) dy - W^s(y). \end{aligned} \tag{37}$$

Поскольку $v_1^s(y)$, $W^s(y)$ известны (см. выше), то все интегралы в (37) могут быть вычислены в явном виде.

Далее черта над функцией будет означать, что рассматривается разность между её нестационарным и стационарным значениями. Так, функции $\bar{U} = U(y, t) - U^s(y)$, $\bar{f} = f(t) - f^s$ являются решениями задач (31), (32) с соответствующими функциями $\bar{h}$, $\bar{q}$, $\bar{W}$, $\bar{v}_1$, $\bar{U}_0$. Значит, функция $\bar{U}(y, t)$ представима единственным образом в виде ряда (35) с коэффициентами $\bar{u}_k(t)$.

Предположение 2. Функции $q(t)$, $q'(t)$ определены при всех $t \geq 0$, и выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |q(t) - q^s| &\leq M e^{-m_3 t}, \quad |q'| \leq M e^{-m_3 t}, \quad m_3 > 0, \\ q^s &= \int_0^1 v_3^s(y) dy, \quad v_3^s = U^s + \frac{\pi}{2} q^s \sin \pi y. \end{aligned} \tag{38}$$

Учитывая второе неравенство в (16), оценки (28) и (38), находим

$$|\bar{u}_k(t)| \leq 4 \max_{y \in [0,1]} |\bar{U}_0(y)| e^{-4\mu_k^2 t} + \begin{cases} \frac{2M}{4\mu_k^2 - m} (e^{-mt} - e^{-4\mu_k^2 t}), & \text{если } 4\mu_k^2 \neq m, \quad m = \min(m_1, m_3), \\ 2Mte^{-4\mu_k^2 t}, & \text{если } \min(m_1, m_3) = 4\mu_k^2. \end{cases}$$

Тогда при $t \geq \delta > 0$ справедливы неравенства

$$|\bar{U}(y, t)| \leq 4 \max_{y \in [0,1]} |\bar{U}_0(y)| e^{-4\mu_1^2 t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-4(\mu_k^2 - \mu_1^2)\delta}}{\mu_k} + \begin{cases} 2Me^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(4\mu_k^2 - m)}, & \text{если } 4\mu_k^2 \neq m, \\ 2Mte^{-4\mu_1^2 t} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-4\mu_k^2 \delta}, & \text{если } \min(m_1, m_3) = 4\mu_k^2. \end{cases}$$

Тем самым в общем случае имеем оценки

$$|\bar{U}(y, t)| \leq Mte^{-\alpha t}, \quad |\bar{f}(t)| \leq Mte^{-\alpha t}, \quad \alpha = \min(4\mu_1^2, m) > 0. \quad (39)$$

По результатам анализа решения обратной задачи сформулируем теорему.

Теорема 3. *Решение обратной задачи*

$$v_{3t} = v_{3yy} - \int_0^y [v_1(z, t) + v_2(z, t)] dz - f(t), \quad v_3(0, t) = v_3(1, t) = 0, \\ v_3(y, 0) = b_3(y), \quad \int_0^1 v_3(y, t) dy = q(t)$$

выражается формулами (36) для функции $f(t)$ и $v_3 = U(y, t) + (\pi q(t) \sin(\pi y))/2$, где $U(y, t)$ из формулы (35), и является классическим, если выполнены условия теорем 1, 2 и ограничения (29). Если дополнительно выполнены неравенства (38), то справедливы оценки

$$|v_3(y, t) - v_3^s(y)| \leq Mte^{-\alpha t}, \quad |f(t) - f^s| \leq Mte^{-\alpha t}, \quad \alpha = \min(4\mu_1^2, \min[m_1, m_3]).$$

4. Нахождение функций $v_4(y, t)$ и $v_5(y, t)$

Поскольку функции $v_1(y, t)$ и $v_3(y, t)$ на данном этапе уже известны, то решение задачи для функции $v_4(y, t)$, $(y, t) \in \bar{Q}^\delta$, при условии, что $c_3(0) = b_4(0)$, $c_4(0) = b_4(1)$, запишется так:

$$v_4(y, t) = c_3(t) + [c_4(t) - c_3(t)]y + 2 \sum_{k=1}^{\infty} V_{4k}(t) \sin \pi ky e^{-(\pi k)^2 a_1 t}, \quad (40)$$

$$V_{4k}(t) = \int_0^1 b_4(y) \sin \pi ky dy - \frac{1}{\pi k} [c_3(0) - (-1)^k c_4(0)] + \int_0^t F(z, \tau) e^{(\pi k)^2 a_1 \tau} \sin \pi kz dz d\tau,$$

$$F(y, t) = -a_4 v_1(y, t) v_3(y, t) - c_3'(t) - [c_4'(t) - c_3'(t)]y.$$

Решение соответствующей стационарной задачи есть

$$v_4^s(y) = \frac{a_4}{a_1} \int_0^y (y-z) v_1^s(z) v_3^s(z) dz + \left[c_4^s - c_3^s - \frac{a_4}{a_1} v_1^s(y) v_3^s(y) \right] y + c_3^s, \quad (41)$$

где $v_1^s(y)$, $v_3^s(y)$ записаны выше, c_j^s – стационарные аналоги функций $c_j(t)$, $j = 3, 4$.

Для функции $v_4(y, t)$ можно провести все те же рассуждения, которые изложены для функции $v_1(y, t)$ в разделе 2. Ниже сформулируем кратко результат.

При выполнении условий теорем 1, 3 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |v_1(y, t) v_3(y, t) - v_1^s(y) v_3^s(y)| &= |v_1 v_3 - v_1^s v_3 + v_1^s v_3 - v_1^s v_3^s| \leq \\ &\leq |v_1 - v_1^s| |v_3| + v_1^s |v_3 - v_3^s| \leq M e^{-m_5 t}, \quad m_5 = \max\{\alpha, m_2\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Если выполнены оценки (42) и условия

$$|c_j^{(n)}(t)| \leq M e^{-m_4 t}, \quad |c_j(t) - c_j^s| \leq M e^{-m_4 t}, \quad j = 3, 4, \quad n = 0, 1, \quad m_4 > 0,$$

то из свойств решения первой начально-краевой задачи для параболического оператора, доказанных в [14], следует, что функция $v_4(y, t)$, определяемая формулой (40), является классическим решением задачи (5), (11) с начальным условием $v_4(y, 0) = b_4(y)$. При этом $v_4(y, t)$ стремится к $v_4^s(y)$ из (41) при $t \rightarrow \infty$ по экспоненциальному закону.

Чтобы записать решение $v_5(y, t)$, удобно ввести замену $S = v_5 - a_3 v_4$. Тогда задача для $S(y, t)$ примет вид

$$S_t = a_2 S_{yy} + S_0, \quad S_y(0, t) = S_y(1, t) = 0, \quad S(y, 0) = b_5 - a_3 b_4, \quad S_0 = -a_3 v_{4t} - a_4 v_2 v_3.$$

Здесь $b_5(0) = a_3 b_4(0)$, $b_5(1) = a_3 b_4(1)$, функция S_0 уже известна. Из [17] $S(y, t)$ может быть записана как

$$S = \int_0^1 [b_5(z) - a_3 b_4(z)] G(y, z, t) dz + \int_0^t \int_0^1 S_0(z, \tau) G(y, z, t - \tau) dz d\tau, \quad (43)$$

где функция Грина $G(y, z, t)$ совпадает с функцией Грина из формулы (21) для функции $v_2(y, t)$. Соответствующее стационарное решение имеет вид

$$v_5^s = a_3 v_4^s + \frac{a_4}{a_2} \int_0^y (y-z) v_2^s(z) v_3^s(z) dz. \quad (44)$$

В силу второго условия в (12) для разрешимости стационарной задачи необходимо выполнение соотношения

$$\int_0^1 v_2^s(y) v_3^s(y) dy = 0.$$

Поскольку функция $v_5(y, t)$ находится через функцию $v_2(y, t)$, для которой доказана только ограниченность в области Q^δ , то сходимости $v_5(y, t)$ к $v_5^s(y)$ при $t \rightarrow \infty$ в общем случае нет.

Заключение

Доказано существование классического решения краевой задачи для системы пяти параболических уравнений. В качестве граничных условий для трёх функций выступают условия Дирихле, для оставшихся – условия Неймана. Решаемая система является следствием уравнений однонаправленного конвективного течения теплопроводной бинарной смеси, условия совместности которой приводят к обратной задаче для функции скорости: определение горизонтального градиента давления происходит вместе с остальными неизвестными функциями, входящими в систему. Соответствующая стационарная задача имеет неединственное решение в общем случае как задача Неймана для эллиптического оператора [14], для её замыкания поставлено дополнительное условие [13]. Сходимость нестационарного решения к соответствующему стационарному по экспоненциальному закону относительно времени установлена только для функций, для которых заданы условия Дирихле. Для функций, задачи определения которых замыкаются условиями второго рода, установлена ограниченность.

Полученные результаты завершают цикл работ авторов по исследованию математической модели движения бинарной смеси в протяжённом канале, ограниченном твёрдыми стенками, на которых поддерживается линейное по горизонтальной координате распределение температуры. Исследованы физические и геометрические параметры, влияющие на стационарное течение [24]. Для нестационарной задачи установлены свойства сходимости части характеристик течения к соответствующим стационарным, для оставшихся – доказана ограниченность. Влияние периодических по времени граничных условий для функции температуры исследовано численно [15], подтверждён критерий стабилизации движения, полученный теоретически [13].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пушачев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
2. Андреев В.К., Степанова И.В. Об условиях существования однонаправленных движений бинарных смесей в модели Обербека – Буссинеска // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 2. С. 3–12. <https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.201>.
3. Kirdyashkin A.G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. No 8. P. 1205–1218. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90048-6).
4. Кожанов А.И. Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 12. С. 2168–2184.
5. Искендеров А.Д., Ахундов А.Я. Обратная задача для линейной системы параболических уравнений // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 4. С. 442–444.
6. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396, No 2. P. 546–554. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.046>.

7. *Andreev V.K., Stepanova I.V.* Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, No 4. P. 445–451. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451>.
8. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 546 с.
9. *Филимонов М.Ю.* Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.
10. *Казаков А.Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068. <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.073>.
11. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Точные решения типа диффузионных волн для нелинейного вырождающегося параболического уравнения второго порядка // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 114–128. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128>.
12. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: Инфра-М, 2013. 391 с.
13. *Andreev V.K., Stepanova I.V.* Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // Int. J. Appl. Comput. Math. 2020. V. 6, No 6. <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.
15. *Степанова И.В., Зализняк В.Е.* Численное решение задачи нестационарной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьютер. науки. 2023. Т. 33, № 2. С. 365–381. <https://doi.org/10.35634/vm230212>.
16. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.
17. *Полянин А.Д.* Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 592 с.
18. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 512 с.
19. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 742 с.
20. *Алексеев Г.В.* Классические методы математической физики. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. 416 с.
21. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
22. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.
23. *Андреев В.К.* О решении одной обратной задачи, моделирующей двумерное движение вязкой жидкости // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделир. и программир. 2016. Т. 9, №4. С. 5–16. <https://doi.org/10.14529/mmp160401>.
24. *Stepanova I.V.* On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2022. V. 15, No 6. P. 776–784. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-6-776-784>.

Поступила в редакцию 18.01.2024

Принята к публикации 19.02.2024

Андреев Виктор Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Академгородок, д. 50/44, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: *andr@icm.krasn.ru*

Степанова Ирина Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Академгородок, д. 50/44, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: *stepiv@icm.krasn.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 5–21

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21

**A Priori and a Posteriori Estimates
for Solving One Evolutionary Inverse Problem**

V.K. Andreev , I.V. Stepanova***

*Institute of Computational Modelling, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mail: **andr@icm.krasn.ru, **stepiv@icm.krasn.ru*

Received January 18, 2024; Accepted January 19, 2024

Abstract

This article considers an initial-boundary value problem for a system of parabolic equations, which arises when studying the flow of a binary mixture in a horizontal channel with walls heated non-uniformly. The problem was reduced to a sequence of initial-boundary value problems with Dirichlet or Neumann conditions. Among them, an inverse problem with a non-local overdetermination condition was distinguished. The solution was constructed using the Fourier method and validated as classical. The behavior of the non-stationary solution at large times was discussed. It was shown that certain functions within the solution tend to their stationary analogs exponentially at large times. For some functions, only boundedness was proved. The problem and its solution are relevant for modeling the thermal modes associated with the separation of liquid mixtures.

Keywords: equation of convective heat and mass transfer, non-classical boundary value problem, non-stationary solution, a priori estimate, boundedness

Acknowledgments. This study was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as a part of activities for the creation and development of regional scientific centers for mathematics (agreement no. 075-02-2024-1378).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konveksii* [Mathematical Models of Convection]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p. (In Russian)
2. Andreev V.K., Stepanova I.V. On the conditions for existence of unidirectional motions of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, vol. 13, no. 2, pp. 185–193. <https://doi.org/10.1134/S1990478919020017>.
3. Kirdyashkin A.G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1984, vol. 27, no. 8, pp. 1205–1218. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90048-6](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90048-6).
4. Kozhanov A.I. Parabolic equations with an unknown time-dependent coefficient. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2085–2101.
5. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 73–75. <https://doi.org/10.1134/S1064562409010219>.
6. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, no. 2, pp. 546–554. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.046>.
7. Andreev V.K., Stepanova I.V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 445–451. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451>.
8. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 546 p. (In Russian)
9. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Differ. Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. <https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a>.
10. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. <https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.073>. (In Russian)
11. Kazakov A.L., Lempert A.A. Exact solutions of diffusion wave type for a nonlinear second-order parabolic equation with degeneration. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 114–128. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128> (In Russian)
12. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teplomassoperenosa* [Analytical Solutions of Parabolic and Hyperbolic Equations of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Infra-M, 2013. 391 p. (In Russian)
13. Andreev V.K., Stepanova I.V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer. *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 2020, vol. 6, no. 6, art. 169. <https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0>.
14. Friedman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type]. Moscow, Mir, 1968. 427 p. (In Russian)
15. Stepanova I.V., Zalizniak V.E. Numerical solution of nonstationary problem for convection of binary mixture in horizontal layer. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2023, vol. 33, no. 2, pp. 365–381. <https://doi.org/10.35634/vm230212>. (In Russian)
16. Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. <https://doi.org/10.1070/rm1960v015n02abeh004217>.

17. Polyanin A.D. *Lineinye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 592 p. (In Russian)
18. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1967. 512 p. (In Russian)
19. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 742 p. (In Russian)
20. Alekseev G.V. *Klassicheskie metody matematicheskoi fiziki* [Classical Methods of Mathematical Physics]. Vladivostok, Izd. Dal'nevost. Univ., 2003. 416 p. (In Russian)
21. Arsenin V.Ya. *Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii* [Methods of Mathematical Physics and Special Functions]. Moscow, Nauka, 1984. 384 p. (In Russian)
22. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1977. 431 p. (In Russian)
23. Andreev V.K. On the solution of an inverse problem simulating two-dimensional motion of a viscous fluid. *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 5–16. <https://doi.org/10.14529/mmp160401>. (In Russian)
24. Stepanova I.V. On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022, vol. 15, no. 6, pp. 776–784. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-6-776-784>.

Для цитирования: Андреев В.К., Степанова И.В. Априорные и апостериорные оценки решения одной эволюционной обратной задачи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 5–21.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.5-21>.

For citation: Andreev V.K., Stepanova I.V. A priori and a posteriori estimates for solving one evolutionary inverse problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 5–21.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.5-21>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.22-35

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ, ОБОБЩАЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ
БИЦАДЗЕ

С. Байзаев¹, Р.Н. Баротов²

¹Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

²Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Аннотация

Рассмотрена эллиптическая система из n уравнений, главной частью которой является оператор Бицадзе (квадрат оператора Коши – Римана), а младший член состоит из произведения заданной матриц-функции на сопряжение искомой вектор-функции. Система исследована в банаховом пространстве вектор-функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости. Установлено, что задача о решении системы в указанном пространстве может быть не нётеровой, приведен пример однородной системы, имеющей бесконечное число линейно независимых решений.

Как известно, для многих классов эллиптических систем нётеровость граничных задач в компактной области эквивалентна наличию априорных оценок в соответствующих пространствах. В связи с этим представляется важным изучение вопросов, связанных с установлением априорных оценок для рассматриваемой системы в пространстве, указанном выше. Для случая слабо осциллирующих на бесконечности коэффициентов найдены необходимые и достаточные условия справедливости априорной оценки. Эти условия записаны на языке спектра предельных матриц, образуемых по частичным пределам матрицы коэффициентов на бесконечности. На конкретных примерах показано, как строятся предельные матрицы и как выглядят условия, названные выше.

Ключевые слова: эллиптическая система, ограниченная и равномерно непрерывная по Гёльдеру функция, априорная оценка, нётеровость

Введение

Рассмотрим эллиптическую систему вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}z} + A(z)\bar{w} = f(z), \quad (1)$$

где $w \in \mathbb{C}^n$, $A(z)$ – матриц-функция порядка n и $f(z)$ – вектор-функция, определенные во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как известно [1, с. 133], задача Дирихле для системы $w_{\bar{z}z} = 0$ не является нётеровой. Для системы

$$Lw = 0 \quad (2)$$

задача о решениях, ограниченных на $\mathbb{C}$, может быть не нётеровой. Например, при $A = E$, единичной матрице порядка n , вектор-функции

$$w = p\omega + \bar{p}e^{2i\gamma}\bar{\omega},$$

где $\omega = e^{2i\operatorname{Re}(e^{i\gamma}z)}$, $0 < \gamma < 2\pi$, $p \in \mathbb{C}^n$, будут ограниченными на $\mathbb{C}$ решениями системы (2), т. е. система (2) имеет бесконечное число линейно независимых решений, ограниченных на $\mathbb{C}$.

В настоящей работе установлены некоторые априорные оценки решений системы (1) из пространства вектор-функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости. Эти оценки можно использовать при изучении вопросов нормальной разрешимости и нётеровости оператора L в гёльдеровых пространствах.

Введем следующие обозначения (см., например, [2]).

C_α – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, ограниченных на $\mathbb{C}$ и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и нормой

$$\|w\|_\alpha = \|w\|_0 + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|w(z_1) - w(z_2)\|, \quad (3)$$

здесь $\|w\|_0 = \sup_z \|w(z)\|$, $\|\bullet\|$ – норма в $\mathbb{C}^n$.

C_α^1 – банахово пространство таких вектор-функций $w(z)$, что $w, w_{\bar{z}}, w_z \in C_\alpha$ с нормой

$$\|w\|_{\alpha,1} = \|w\|_\alpha + \|w_{\bar{z}}\|_\alpha + \|w_z\|_\alpha. \quad (4)$$

Аналогично определим банахово пространство C_α^2 с нормой

$$\|w\|_{\alpha,2} = \|w\|_{\alpha,1} + \|w_{\bar{z}}\|_{\alpha,1} + \|w_z\|_{\alpha,1}. \quad (5)$$

$C(D_{r,z_0})$ – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных и непрерывных в круге $D_{r,z_0} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, с нормой

$$\|w\|_{C(D_{r,z_0})} = \sup_z \|w(z)\|.$$

$C_\alpha(D_{r,z_0})$ – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных в круге D_{r,z_0} и непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и нормой, аналогичной (3).

Таким же образом определим банаховы пространства $C_\alpha^1(D_{r,z_0})$ и $C_\alpha^2(D_{r,z_0})$ с нормами $\|w\|_{C_\alpha^1(D_{r,z_0})}$ и $\|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})}$, аналогичными (4) и (5) соответственно.

1. Вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α . Тогда оператор $L : C_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha$ будет ограниченным. Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α . Тогда для произвольной вектор-функции $w(z)$ из $C_\alpha^2(D_{r,z_0})$, $r > 2$, справедлива оценка вида

$$\|w\|_{C_\alpha^2(D_{1,z_0})} \leq M \left(\|Lw\|_{C_\alpha(D_{r,z_0})} + \|w\|_{C(D_{r,z_0})} \right), \quad (6)$$

где M – постоянная, не зависящая от w .

Эта лемма может быть доказана по аналогии с внутренними оценками шаудеровского типа [3, с. 24], [4, с. 161] с привлечением операторов T_G и Π_G (G – ограниченная область) [5, сс. 39, 53].

Лемма 2. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α . Тогда для произвольной вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ справедлива оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq K (\|Lw\|_\alpha + \|w\|_0), \quad (7)$$

где K – постоянная, не зависящая от w .

Доказательство. Пусть $w \in C_\alpha^2$. Рассмотрим эту вектор-функцию в круге D_{r,z_0} , получим

$$\|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})} \leq \|w\|_{\alpha,2}. \quad (8)$$

С учетом этого неравенства в классе C_α^2 введем следующую норму

$$\|w\|'_{\alpha,2} = \sup_{z_0 \in C} \|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})}.$$

По этой норме класс C_α^2 будет банаховым пространством, которое обозначим символом H_α^2 . Докажем эквивалентность норм $\|\bullet\|_{\alpha,2}$ и $\|\bullet\|'_{\alpha,2}$.

Из (8) следует неравенство

$$\|w\|'_{\alpha,2} \leq \|w\|_{\alpha,2}. \quad (9)$$

Пусть I_α – оператор вложения, сопоставляющий каждой вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ эту же вектор-функцию, рассматриваемую как элемент пространства H_α^2 . Оператор $I_\alpha: C_\alpha^2 \rightarrow H_\alpha^2$ является непрерывным в силу неравенства (9), биективным и отображает C_α^2 на H_α^2 . Тогда по теореме Банаха обратный оператор $I_\alpha^{-1}: H_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha^2$ будет непрерывным, то есть найдется такая постоянная $m > 0$, что для всех $\omega \in H_\alpha^2$ справедливо неравенство

$$\|I_\alpha^{-1}\omega\|_{\alpha,2} \leq m\|\omega\|'_{\alpha,2}.$$

Отсюда имеем

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq m\|w\|'_{\alpha,2} \quad \forall w \in C_\alpha^2. \quad (10)$$

Неравенства (9) и (10) показывают, что нормы $\|\bullet\|_{\alpha,2}$ и $\|\bullet\|'_{\alpha,2}$ эквивалентны.

В силу неравенства (1) имеем

$$\|w\|'_{\alpha,2} \leq M \sup_{z_0 \in C} (\|Lw\|_{C_\alpha(D_{r,z_0})} + \|w\|_{C(D_{r,z_0})}) \leq M (\|Lw\|_\alpha + \|w\|_0).$$

Отсюда и из (10) следует оценка (7) с постоянной $K = mM$. $\square$

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область и $f \in L_p(G)$, $p > 2$. Тогда определены операторы $T_G(f)$ и $\Pi_G(f)$ [5, сс. 39, 53].

Лемма 3. Общее решение неоднородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z), \quad z \in G,$$

имеет вид

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) - T_G(\bar{\zeta}f) + \bar{z}T_G(f),$$

где φ и ψ – произвольные функции, аналитические в области G .

Заметим, что $w_0(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z)$ является общим решением соответствующего однородного уравнения (это уравнение Бицадзе), а $\omega(z) = -T_G(\bar{\zeta}f) + \bar{z}T_G f$ – частным решением неоднородного уравнения.

Лемма 4. Пусть матрица A является постоянной. Тогда система

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + A\bar{w} = 0 \quad (11)$$

имеет в пространстве S' ненулевое решение в том и только том случае, когда спектр $\sigma(A\bar{A})$ матрицы $A\bar{A}$ пересекается с полуосью $R_+ = [0, +\infty)$.

Эта лемма может быть доказана применением преобразования Фурье к системе (11).

Рассмотрим случай матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда характеристическое уравнение для матрицы $A\bar{A}$ имеет вид $\lambda^2 - 2p\lambda + q^2 = 0$, где $p = \frac{1}{2}(|a|^2 + |d|^2) + \operatorname{Re}b\bar{c}$, $q = |\det A|$. Поэтому $\lambda_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$.

Справедлива следующая

Лемма 5. 1) Если $p > |\det A|$, то $\lambda_{1,2} \geq 0$.

2) Если $p < |\det A|$ и $p \neq -|\det A|$, то $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, т. е. собственные значения матрицы $A\bar{A}$ комплексно-сопряженные.

3) Если $p = \pm|\det A|$, то $\lambda_{1,2} = p$.

Замечание 1. Из соотношений

$p + |\det A| \geq \frac{1}{2}(|a|^2 + |d|^2) + \operatorname{Re}b\bar{c} - |ad| + |bc| = \frac{1}{2}(|a| - |d|)^2 + |b\bar{c}| + \operatorname{Re}b\bar{c} \geq 0$ следует, что случай $p < -|\det A|$ невозможен.

Замечание 2. Из лемм 4 и 5 следует, что в случае $n = 2$ система (11) имеет в S' ненулевое решение в том и только том случае, когда $p \geq |\det A|$.

Случай матрицы третьего порядка можно исследовать, как в работе [6].

Через Γ обозначим множество $\sigma(A\bar{A}) \cap R_+$, а через K_U – носитель образа Фурье $U(\zeta)$ решения $w \in S'$ системы (11). Заметим, что если $\Gamma = \emptyset$, то система (11) в пространстве S' имеет только нулевое решение.

Справедлива следующая теорема о носителе K_U .

Теорема 1. Пусть $\Gamma \neq \emptyset$. Тогда

1) $K_U = \{0\}$, если $\Gamma = \{0\}$.

2) $K_U \subset \bigcup_{j=1}^m \{z : |z|^4 = \frac{\mu_j}{16}\}$, если $\Gamma = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$; здесь $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$.

Доказательство. Рассмотрим систему (11) в пространстве S' и применив преобразование Фурье, получим

$$\zeta^2 U(\zeta) + 4AV(\zeta) = 0, \quad (12)$$

здесь $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ – образы Фурье $w(z)$ и $\overline{w(z)}$ соответственно. Отметим, что $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ связаны соотношением

$$\overline{U(-\zeta)} = V(\zeta), \quad (13)$$

поэтому в (12), заменив ζ на $-\zeta$ и перейдя к комплексно сопряжённым величинам, получим ещё одно уравнение

$$4\bar{A}U(\zeta) - \bar{\zeta}^2 V(\zeta) = 0. \quad (14)$$

Введя обозначения $B(\zeta) = \begin{pmatrix} -\zeta^2 E & 4A \\ 4\bar{A} & -\bar{\zeta}^2 E \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, уравнения (12), (14) запишем в виде

$$B(\zeta)\Omega = 0. \quad (15)$$

Согласно свойствам блочных матриц [7, с. 107] определитель матрицы B равен

$$\det B = \det \left(|\zeta|^4 E - 16A\bar{A} \right).$$

Отсюда следует, что при $\Gamma = \emptyset$, т. е. когда матрица $A\bar{A}$ не имеет неотрицательных собственных значений, матрица B обратима, и уравнение (15) в $S' \times S'$ имеет только нулевое решение. Тогда и система (11) в S' будет иметь только нулевое решение.

Пусть Γ состоит из одной точки $z = 0$. Тогда $\det B(\zeta)$ обращается в нуль только при $\zeta = 0$. Поэтому носитель распределения $\Omega(\zeta)$ состоит из одной точки $\zeta = 0$. Следовательно, носитель $U(\zeta)$ также состоит из точки $\zeta = 0$, т. е. $K_U = \{0\}$.

Пусть теперь Γ состоит из точек $z_j = \mu_j$, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$. Тогда $\det B(\zeta)$ обращается в нуль на окружностях $S_j = \left\{ z : |z| = \frac{\sqrt[4]{\mu_j}}{2} \right\}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{supp } \Omega \subset \bigcup_{j=1}^m S_j$, следовательно, $K_U \subset \bigcup_{j=1}^m S_j$. $\square$

Используя теорему 1 и теоремы о структуре обобщенных функций с точечным носителем [8, с. 49] и с носителем, принадлежащим окружности [9], можно определить $U(\zeta)$ и далее найти $w(z)$ – решение системы (11).

Отметим, что в случае 1) многообразие решений системы (11), растущих на бесконечности не быстрее, чем $|z|^N$, N – неотрицательное целое число, как вещественное линейное пространство, будет конечномерным и ненулевым, в случае 2) – бесконечномерным, а в остальных случаях – нулевым.

2. Априорные оценки

Предположим, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат S_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности, т. е. удовлетворяют условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup_{|\xi - z| < 1} \|a(\xi) - a(z)\| = 0.$$

Тогда из последовательности $\{A(z + h_k)\}$, где $h_k \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом компакте, причем пределом будет постоянная матрица $\hat{A}$. Выбрав всевозможные последовательности $\{h_k\}$, $h_k \rightarrow \infty$, получим множество предельных матриц $\hat{A}$, которое обозначим символом $H(A)$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть матрица $A(z)$ со столбцами из C_α стабилизируется на бесконечности, т. е. существует предел $A_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z)$. Тогда множество $H(A)$ состоит из единственной матрицы A_0 .

Пример 2. Пусть

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon(r) e^{im\varphi} \\ -\varepsilon(r) e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

где $z = re^{i\varphi}$, m – целое число, $\varepsilon(r) = \begin{cases} r & \text{при } r \leq 1, \\ 1 & \text{при } r > 1. \end{cases}$ Покажем, что функция

$a(z) = \varepsilon(r) e^{im\varphi}$ является слабо осциллирующей на бесконечности.

Пусть $m = 1$. Тогда при $r > 1$ и $0 < |z - \zeta| < 1$, $\zeta = \rho e^{i\psi}$ имеем

$$\begin{aligned} |a(z) - a(\zeta)| &= |e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = |r^{-1}z - \rho^{-1}\zeta| = r^{-1} |z - \zeta + (1 - r\rho^{-1})\zeta| \leq \\ &\leq r^{-1} (|z - \zeta| + |\rho - r|) \leq 2r^{-1} |z - \zeta| < 2r^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup_{0 < |z - \zeta| < 1} |a(z) - a(\zeta)| = 0.$$

Аналогично функция $\varepsilon(r) e^{-i\varphi}$ также будет слабо осциллирующей на бесконечности.

Далее, если ограниченные на всей плоскости функции $f(z)$ и $g(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности, то таким же свойством будет обладать и их произведение. Это вытекает из следующего неравенства

$$|f(z)g(z) - f(\zeta)g(\zeta)| \leq |f(z)| |g(z) - g(\zeta)| + |g(\zeta)| |f(z) - f(\zeta)|.$$

Поэтому функция $\varepsilon(r) e^{im\varphi}$ будет слабо осциллирующей на бесконечности.

Теперь построим предельные матрицы $\tilde{A}$. Пусть $h_k \rightarrow \infty$ и $h_k = |h_k| e^{i\varphi_k}$. Из ограниченной последовательности φ_k выберем сходящуюся подпоследовательность $\varphi_{k_j} \rightarrow \psi \in [0, 2\pi]$. Для произвольного $R > 0$ при $|z| \leq R$ и достаточно больших k имеем $\varepsilon(|z + h_k|) \equiv 1$ и

$$\begin{aligned} |a(z + h_k) - e^{im\psi}| &= |e^{im\psi_k(z)} - e^{im\psi}| \leq |e^{im\psi_k(z)} - e^{im\varphi_k}| + \\ &+ |e^{im\varphi_k} - e^{im\psi}| = |e^{im[\psi_k(z) - \varphi_k]} - 1| + |e^{im(\varphi_k - \psi)} - 1|, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\psi_k(z) = \arg(z + h_k)$. Так как

$$\psi_k(z) - \varphi_k = \arg \frac{z + h_k}{h_k} = \arg \left(1 + \frac{z}{h_k} \right),$$

то при $|z| \leq R$ последовательность $\psi_k(z) - \varphi_k$ равномерно сходится к нулю. Поэтому из соотношений (16) следует, что последовательность $a(z + h_{k_j})$ будет равномерно сходиться на каждом компакте к постоянной $e^{im\psi}$. В силу произвольности h_k множество точек ψ будет заполнять отрезок $[0, 2\pi]$.

Таким образом, предельные матрицы имеют вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix},$$

где δ – произвольное комплексное число с $|\delta| = 1$.

Теорема 2. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α , слабо осциллируют на бесконечности, и выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 < |\zeta - z| \leq \delta} \|A(z) - A(\zeta)\|' |z - \zeta|^{-\alpha} = 0, \quad (17)$$

здесь $\|\bullet\|'$ – матричная норма. Тогда для того чтобы при всех $w \in C_\alpha^2$ была справедлива оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|Lw\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|w(t)\| \right), \quad (18)$$

где M – постоянная, не зависящая от w , необходимо и достаточно, чтобы для всех матриц $\tilde{A} \in H(A)$ выполнялось условие

$$\sigma(\tilde{A}\tilde{A}) \cap R_+ = \emptyset, \quad (19)$$

где $\sigma(\tilde{A}\tilde{A})$ – спектр матрицы $\tilde{A}\tilde{A}$, $R_+ = [0, \infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место оценка (18). Для произвольной последовательности $h_k \rightarrow \infty$ и вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ с компактным носителем имеем

$$\|S_{-h_k}w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|L(S_{-h_k}w)\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| \right), \quad (20)$$

где $S_{-h_k}w(z) = w(z - h_k)$. Очевидно, сдвиги $S_{-h_k}w$ не изменяют норму в пространствах C_α^2 и C_α . Поэтому неравенство (20) можно переписать в виде

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|S_{h_k}L(S_{-h_k}w)\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| \right). \quad (21)$$

Второе слагаемое в правой части этого неравенства, в силу компактности носителя $w(z)$, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| = 0. \quad (22)$$

Пусть $\tilde{A}$ – матрица, построенная по последовательности $A(z + h_k)$, и $f_k = S_{h_k}L(S_{-h_k}w)$, $f_0 = \tilde{L}w = w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{w}$. Покажем, что

$$\|f_k - f_0\|_\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Так как $f_k = w_{\bar{z}\bar{z}} + A(z + h_k)\bar{w}$, то $f_k - f_0 = [A(z + h_k) - \tilde{A}]\bar{w}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $A(z + h_k)$ на каждом компакте равномерно сходится к $\tilde{A}$ (иначе мы перешли бы к подпоследовательности). Поэтому в силу компактности носителя $w(z)$ имеем

$$\|f_k - f_0\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Пусть D – носитель $w(z)$, ε_k – произвольная последовательность положительных чисел, причем $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $c_k = \sup_{z_1 \neq z_2} v_k(z_1, z_2)$, где

$$v_k(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|f_k(z_1) - f_0(z_1) - f_k(z_2) + f_0(z_2)\|, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда найдутся такие точки $\xi_k, \eta_k \in C$, $\xi_k \neq \eta_k \forall k = 1, 2, \dots$, что

$$c_k - \xi_k \leq v_k(\xi_k, \eta_k) \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Можно считать, что последовательность $\delta_k = |\xi_k - \eta_k|$ имеет конечный или бесконечный предел δ . В силу симметричности функции $v_k(z_1, z_2)$ относительно переменных z_1, z_2 и компактности D , если нужно, переходя от последовательностей ξ_k, η_k к их подпоследовательностям, достаточно рассмотреть следующие случаи:

- 1) $\xi_k \in D, \eta_k \in D \forall k$;
- 2) $\xi_k \in D, \eta_k \notin D \forall k$.

Случай 1. Имеем

$$\begin{aligned} v_k(\xi_k, \eta_k) &= |\xi_k - \eta_k|^{-\alpha} \left\| \left[A(\xi_k + h_k) - \tilde{A} \right] \left[\overline{w(\xi_k)} - \overline{w(\eta_k)} \right] + \right. \\ &+ \overline{w(\eta_k)} \left[A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k) \right] \left. \right\| \leq \delta_k^{-\alpha} \left\| A(\xi_k + h_k) - \tilde{A} \right\|' \times \\ &\times \|w(\xi_k) - w(\eta_k)\| + \|w(\eta_k)\| \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|'. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как для всякой ограниченной последовательности ξ_k

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' = 0,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|' \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' + \|A(\eta_k + h_k)\|' \right) = 0.$$

Поэтому в случае $\delta > 0$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\xi_k, \eta_k) = 0. \quad (27)$$

Если же $\delta = 0$, то, усилив правую часть неравенства (26), получим

$$v_k(\xi_k, \eta_k) \leq \|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' H_\alpha(w) + \|w(\eta_k)\| \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|' \delta_k^{-\alpha},$$

где $H_\alpha(w)$ – гёльдерова постоянная вектор-функции $w(z)$. Перейдя здесь к пределу с учетом условия (17), придем к равенству вида (27). Тогда из неравенства (25) и равенства (27) будем иметь $c_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е.

$$H_\alpha(f_k - f_0) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (26) следуют соотношения (23).

Теперь, перейдя к пределу в (21), с учетом соотношений (22) и (23) получим неравенство

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left\| \tilde{L}w \right\|_\alpha, \quad (28)$$

справедливое для любой вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ с компактным носителем.

Пусть $w \in C_\alpha^2$ – произвольная, а $\eta(z)$ – такая гладкая функция, что $\forall z \in C$ $0 \leq \eta(z) \leq 1$, причем $\eta(z) = 1$ при $|z| \leq 1$ и $\eta(z) = 0$ при $|z| \geq 2$. Тогда вектор-функции $\eta\left(\frac{z}{k}\right)$ и $w(z)$ имеют компактный носитель, и из (28) следует

$$\left\| \eta\left(\frac{z}{k}\right) w \right\|_{\alpha,2} \leq M \left\| \tilde{L} \left[\eta\left(\frac{z}{k}\right) w \right] \right\|_\alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как

$$\tilde{L} \left[\eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right] = \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w + \frac{1}{k^2} \eta_{\bar{z}\bar{z}} w + \frac{1}{k} \eta_{\bar{z}} w_{\bar{z}},$$

то из последнего неравенства получим

$$\left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right\|_{\alpha,2} \leq M \left[\left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w \right\|_{\alpha} + \frac{1}{k^2} \|\eta_{\bar{z}\bar{z}} w\|_{\alpha} + \frac{1}{k} \|\eta_{\bar{z}} w_{\bar{z}}\|_{\alpha} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right\|_{\alpha,2} = \|w\|_{\alpha,2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w \right\|_{\alpha} = \|\tilde{L}w\|_{\alpha}.$$

Поэтому, перейдя в (29) к пределу, убедимся в справедливости неравенства (28) для любой $w \in C_{\alpha}^2$. Отсюда следует, что ядро оператора $\tilde{L} : C_{\alpha}^2 \rightarrow C_{\alpha}$ нулевое. Тогда в силу леммы 4 будет выполнено условие (19). Необходимость условия (19) доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (19). Доказательство справедливости оценки (18) проведем от противного. Тогда $\forall j \in \mathbb{N} \exists w_j \in C_{\alpha}^2$, что имеет место неравенство

$$\|w_j\|_{\alpha,2} > j \left(\|Lw_j\|_{\alpha} + \max_{|t| \leq 1} \|w_j(t)\| \right).$$

Нормировав w_j , $v_j = \|w_j\|_{\alpha,2}^{-1} w_j$, получим

$$\|Lv_j\|_{\alpha} + \max_{|t| \leq 1} \|v_j(t)\| < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Далее из априорной оценки (7) (лемма 2) следует, что

$$\|Lv_j\|_{\alpha} + \|v_j\|_0 \geq \frac{1}{K}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Из неравенства (30) следует, что $\|Lv_j\|_{\alpha} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства (31) получим, что $\|v_j\|_0 > \frac{1}{2K}$ при $j \gg 1$, следовательно, найдутся точки z_j такие, что

$$\|v_j(z_j)\| > \frac{1}{2K}. \quad (32)$$

Будем считать, что последовательность $\{z_j\}$ имеет конечный или бесконечный предел z_0 .

Пусть $f_j = Lv_j$. Тогда в силу (30) $\|f_j\|_{\alpha} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и согласно лемме 3 для любого $R > 0$ справедливы равенства

$$v_j(z) = \varphi_j(z) + \bar{z}\psi_j(z) - T(\bar{z}g_j) + \bar{z}Tg_j, \quad |z| \leq r < R, \quad (33)$$

здесь $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ – аналитические функции, $g_j = f_j - A\bar{v}_j$; для удобства в индексе оператора T мы не указали область $G = \{z : |z| < R\}$. Не умаляя общности, можно считать, что последовательности v_j , $\frac{\partial v_j}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2 v_j}{\partial \bar{z}^2}$ равномерно сходятся на каждом компакте плоскости. Из (33) следует, что

$$\frac{\partial v_j}{\partial \bar{z}} = \psi_j(z) - Tg_j,$$

и в силу сказанного выше последовательность $\{\psi_j(z)\}$ будет равномерно сходящейся в круге $K_r = \{z : |z| \leq r\}$. Тогда из (33) следует, что этим свойством обладает и

последовательность $\{\varphi_j(z)\}$. Обозначив пределы последовательностей $\{v_j\}$, $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ через v , φ , ψ соответственно и перейдя в (33) при $j \rightarrow \infty$ к пределу с учетом соотношения $\|f_j\|_\alpha \rightarrow 0$ получим

$$v(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + T(\bar{z}A\bar{v}) - \bar{z}T(A\bar{v}), \quad z \in K_r.$$

Отсюда имеем

$$v_{\bar{z}} = -A\bar{v},$$

т. е. $Lv = 0$, причем в силу (30) $v(z) \equiv 0$ при $|z| \leq 1$. Так как оператор L эллиптический, то $v(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Если $z_0 \neq \infty$, то из (32) следует, что $v(z_0) \neq 0$, получили противоречие.

Если $z_0 = \infty$, то рассмотрим последовательность $u_j(z) = v_j(z + z_j)$. Очевидно, что

$$Lu_j \equiv \frac{\partial^2 u_j(z)}{\partial \bar{z}^2} + A(z + z_j)u_j(z) = f_j(z + z_j), \quad (34)$$

$$\|u_j\|_{\alpha,2} = 1, \quad \|u_j(0)\| > \frac{1}{2K}. \quad (35)$$

Считая последовательность $\{u_j(z)\}$ равномерно сходящейся на каждом компакте к некоторой функции $u(z)$, а последовательность $\{A(z + z_j)\}$ — к $\tilde{A} \in H(A)$, из (34), (35) путем предельного перехода получим

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{u} = 0, \quad \|u(0)\| \geq \frac{1}{2K}.$$

Эти соотношения показывают, что предельное уравнение

$$\tilde{L}w \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{w} = 0 \quad (36)$$

в пространстве C_α^2 имеет ненулевое решение $u(z)$. Но это противоречит условию (19), так как из этого условия в силу леммы 4 следует, что уравнение (36) в пространстве S' , тем более в C_α^2 , имеет только нулевое решение. Следовательно, справедлива априорная оценка (18). $\square$

Замечание 3. Для выполнения равенства (19) необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\det A(z)| > 0. \quad (37)$$

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $A(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$, где функции a, b, c, d принадлежат пространству C_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Найдем условия, при выполнении которых имеет место равенство (29), т. е.

$$\tilde{\Gamma} = \sigma(\tilde{A}\tilde{A}) \cap R_+ = \emptyset \quad \forall \tilde{A} \in H(A). \quad (38)$$

Определим две функции

$$p(z) = \frac{1}{2} \left[|a(z)|^2 + |d(z)|^2 \right] + \operatorname{Re} \left[b(z) \overline{c(z)} \right], \quad q(z) = |\det A(z)|.$$

Эти функции принадлежат пространству C_α .

Для того чтобы выполнялось равенство (38), необходимо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} q(z) > 0. \quad (39)$$

Действительно, если (39) не выполняется, то найдется такая последовательность $z_k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} q(z_k) = 0$. Тогда предельная матрица $\tilde{A}$, построенная по последовательности $A(z_k)$ (эта последовательность матриц ограниченная и имеет сходящуюся подпоследовательность), будет вырожденной, т. е. $0 \in \sigma(\tilde{A}\tilde{A})$ и $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$.

Далее, учитывая лемму 5, получим, что для выполнения (38) необходимо, чтобы

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} [p(z) - q(z)] < 0. \quad (40)$$

Действительно, если (40) не выполняется, то существуют такие точки $z_k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} [p(z_k) - q(z_k)] \geq 0$. Тогда для предельной матрицы $\tilde{A}$, построенной по последовательности $A(z_k)$, будет выполнено неравенство $\tilde{p} \geq \tilde{q}$. Поэтому в силу утверждений 1) и 2) леммы 5 собственные значения матрицы $\tilde{A}\tilde{A}$ будут неотрицательными, и $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$.

Отметим, что условия (39) и (40) будут и достаточными для выполнения равенства (38).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть элементы a, b, c, d матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Тогда для того чтобы выполнялись условия (38), необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства (39) и (40).

Для примера 2 имеем

$$p(z) = -[\varepsilon(r)]^2, \quad q(z) = [\varepsilon(r)]^2,$$

причем $p(z) = -q(z) = -1$ при $|z| \geq 1$. Потому условия (39) и (40) выполняются. Следовательно, для оператора

$$Lw = w_{\bar{z}\bar{z}} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon(r)e^{im\varphi} \\ -\varepsilon(r)e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix} \bar{w}$$

имеет место оценка вида (18).

Рассмотрим ещё ряд примеров, в которых предполагается, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α и слабо осциллируют на бесконечности.

Пример 3. Пусть существует такое число $R > 0$, что при $|z| \geq R$ матрица $A(z)$ является вещественной. Тогда из равенства

$$A\bar{A} - \lambda^2 E = A^2 - \lambda^2 E = (A + \lambda E)(A - \lambda E), \quad |z| \geq R, \quad (41)$$

следует, что условие (19) выполняется тогда и только тогда, когда при $|z| \geq R$ собственные значения $\lambda(A)$ матрицы $A(z)$ удовлетворяют условию

$$|\operatorname{Im} \lambda(A)| \geq c_0,$$

где c_0 – положительная постоянная.

Если в этом примере дополнительно при $|z| \geq R$ матрица $A(z)$ является симметрической, т. е. $A^T = A$ (кососимметрической, т. е. $A^T = -A$), то в силу того,

что собственные значения симметрической (кососимметрической) матрицы являются вещественными (чисто мнимыми или нулями) [7, сс. 57, 61], из равенства (41) получим следующие включения:

$$\sigma(A\bar{A}) \subset R_+ \quad (\sigma(A\bar{A}) \subset (-\infty, 0]).$$

Поэтому для симметрического случая равенства (19) не могут выполняться, а для кососимметрического случая они выполняются при условии (37).

Пример 4. Пусть матрица $A(z) = (a_{kj}(z))$ четного порядка и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} a_{kj}(z) = 0 \quad \text{при } k + j = n + 1.$$

Тогда $\sigma(\tilde{A}\tilde{A}) = \{\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{n1}, \tilde{a}_{2n}\tilde{a}_{n-1,2}, \dots, \tilde{a}_{n1}\tilde{a}_{1n}\}$ (здесь $\tilde{a}_{k, n+1-k}$ – частичный предел $\tilde{a}_{k, n+1-k}(z)$ при $z \rightarrow \infty$), и если существуют такие числа $R > 0$ и $\rho > 0$, что $a_k(z)\overline{a_{n+1-k}(z)} \notin \prod_\rho \quad \forall k = 1, \dots, n$, где $\prod_\rho = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \geq -\rho, |\operatorname{Im}\zeta| < \rho\}$, то будет выполнено равенство (19).

Заметим, что пример 2 является частным случаем этого примера.

Априорную оценку (18) можно использовать при изучении вопросов нормальной разрешимости и нётеровости оператора L в гёльдеровых пространствах.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
6. Байзаев С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши–Римана // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 3–8.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
8. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. Байзаев С., Рахимова М.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, № 1. С. 3–13.

Поступила в редакцию 20.04.2023

Принята к публикации 31.01.2024

Байзаев Саттор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
17 мкр-н., д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Баротов Рузбой Нумонжонович, докторант (PhD) математического факультета

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
пр. Мавлонбекова, д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

E-mail: *ruzmet.tj@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.22-35

Some Estimates for Elliptic Systems Generalizing the Bitsadze System of Equations

S. Baizaev^a, R.N. Barotov^{b}*

^a*Tajik State University of Law, Business and Politics,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

^b*Khujand State University named after Academician B. Gafurov,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

E-mail: **ruzmet.tj@mail.ru*

Received April 20, 2023; Accepted January 31, 2024

Abstract

This article explores an elliptic system of n equations where the main part is the Bitsadze operator (the square of the Cauchy–Riemann operator) and the lower term is the product of a given matrix function by the conjugate of the desired vector function. The system was analyzed in the Banach space of vector functions that are bounded and uniformly Hölder continuous in the entire complex plane. It was revealed that the problem of solving the system in the specified space may not be Noetherian. An example of a homogeneous system with an infinite number of linearly independent solutions was given. As is known, for many classes of elliptic systems, the Noetherianity of boundary value problems in a compact domain is equivalent to the presence of a priori estimates in the corresponding spaces. In this regard, it is important to study the issues related to the establishment of a priori estimates for the system under consideration in the above space. In the case of coefficients weakly oscillating at infinity, necessary and sufficient conditions for the validity of the a priori estimate were found. These conditions were written out in the language of the spectrum of limit matrices formed by the partial limits of the coefficient matrix at infinity. Specific examples were provided to illustrate how the limit matrices are constructed and what the above conditions look like.

Keywords: elliptic system, functions bounded and uniformly Hölder continuous, a priori estimate, Noetherian property

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981. 448 p. (In Russian)
2. Baizaev S., Muhamadiev E. On the index of first-order elliptic operators on the plane. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 663–672.
3. Bers L., John F., Schechter M. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1966. 351 p. (In Russian)
4. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (In Russian)
5. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 509 p. (In Russian)
6. Baizaev S. On the solutions of polynomial growth for a multidimensional generalized Cauchy–Riemann system. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 3–8.
<https://doi.org/10.13108/2015-7-3-3>.
7. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis]. Moscow, Nauka, 1976. 351 p. (In Russian)
8. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1976. 280 p. (In Russian)
9. Baizaev S., Rakhimova M.A. Some functional equations in Schwartz space and their applications. *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 3–13.
<https://doi.org/10.13108/2018-10-1-3>.

Для цитирования: Байзаев С., Баротов Р.Н. О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 22–35.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>.

For citation: Baizaev S., Barotov R.N. Some estimates for elliptic systems generalizing the Bitsadze system of equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 533.95

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.36-51

К УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНОГО КЛАССА ОДНОМЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА ВЛАСОВА – ПУАССОНА

Ю.Г. Губарев, М.С. Котельникова

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, 630090, Россия*

Аннотация

Изучена одномерная задача линейной устойчивости динамических состояний локальных термодинамических равновесий относительно малых возмущений в случае, когда газ Власова – Пуассона содержит в себе электроны со стационарной функцией распределения, которая постоянна по физическому пространству и переменна по континууму скоростей. Прямой метод Ляпунова доказана абсолютная неустойчивость любого из рассматриваемых одномерных динамических состояний всякого локального термодинамического равновесия. Описана область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта. Получена априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания малых одномерных возмущений. Построены аналитические контрпримеры к спектральному теореме Ньюкомба–Гарднера и критерию Пенроуза. Теорема Ирншоу распространена с классической механики на статистическую.

Ключевые слова: электронный газ Власова–Пуассона, динамические состояния равновесия, линейная устойчивость, прямой метод Ляпунова

Введение

Широкий интерес к исследованию различных равновесных состояний плазмы и их устойчивости обусловлен в первую очередь практическими задачами, возникающими при решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Но не менее важным практическим направлением для применения результатов исследования устойчивости плазменных состояний равновесия является осуществление ускорения элементарных частиц коллективными методами. Идея коллективных методов возникла еще в середине прошлого века: ожидалось существенное повышение эффективности ускорения, в том числе увеличение энергии, получаемой пучком частиц на единице длины ускорителя. Такие методы оценивались как значительно более энергоэффективные в сравнении с традиционными, использующими для создания внешнего ускоряющего поля устройства, ограниченные в технических возможностях. Однако и по прошествии нескольких десятков лет с момента формулирования идеи фундаментальной проблемой для осуществления коллективных методов по-прежнему остается необходимость в создании устойчивого облака горячих электронов, производящего дополнительный нагрев пучка элементарных частиц.

Для решения этой проблемы необходим инструмент получения критериев практической неустойчивости для конкретных геометрии и параметров установки, в которой производится ускорение. Полученные критерии практической неустойчивости позволили бы, во-первых, соблюдая условия их выполнения, оптимальным образом формировать сгусток плазмы, во-вторых, поддерживать устойчивость сгустка, контролируя соответствие параметров установки состоянию плазмы, нарушающему условия практической неустойчивости. Таким образом, основной целью данной работы является решение задачи выявления и дальнейшего устранения либо управления разнообразными неустойчивостями, обусловленными коллективным взаимодействием электронов в сгустке плазмы.

На первом этапе решения этой задачи необходимо определить модель описания плазмы, и несомненным фаворитом для этого служит плазма Власова – Пуассона. Эта классическая модель безграничного бесстолкновительного электронного газа продолжает оставаться в теоретических работах современной физики плазмы одной из базовых и наиболее широко используемых моделей, что связано с простотой и ясностью модели, а также ее очевидной полезностью для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза. Поэтому ряд фундаментальных результатов был получен на ранних этапах изучения устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона. А именно, в статьях [1–3] было установлено достаточное условие линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона. Более того, в работах [2, 3] показано, что данное условие запрещает рост во времени малых возмущений состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона в виде нормальных волн. Наконец, в статье [4] достаточное условие [1–3] для линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона было обобщено на конечные возмущения.

Тема устойчивости плазменных состояний равновесия настолько интересна, что классические фундаментальные результаты дополняются новыми практически ежегодно, хотя и становятся менее общими. В качестве примера можно привести работу [5], в которой исследованы свойства устойчивости периодических стационарных решений, известных как волны Бернштейн – Грина – Крускала (BGK), и определены достаточные условия, при которых волны BGK линейно неустойчивы по отношению к возмущениям, имеющим тот же период, что и изучаемые состояния равновесия. Также показано, что эти решения не могут поддерживать монотонно убывающую функцию распределения частиц. В статье [6] исследован квазинейтральный предел одномерного уравнения Власова – Пуассона для распределений, близких к стационарным однородным профилям, и доказано, что профили, для которых выполняется классический критерий Пенроуза, не соответствуют данному пределу. Таким образом, в работах последнего десятилетия по теме устойчивости состояний равновесия плазмы прослеживается тенденция, обратная классической: находятся примеры неустойчивого относительно определенных подклассов возмущений поведения классических решений. Существуют, конечно, и недавние работы, нарушающие эту тенденцию: например, в статье [7] при изучении линейной устойчивости одномерной системы Власова – Пуассона на конечном интервале времени показано, что если равновесное распределение является строго убывающей функцией локальной плотности энергии, то система Власова – Пуассона на конечном временном интервале устойчива. Все настоящие результаты объединяет с классическими то, что рассматриваются всегда только вполне определенные виды возмущений, но получить сколько-нибудь общий критерий устойчивости для таких систем не удастся. В качестве примера можно упомянуть хорошо известное затухание Ландау. Конкретно Л. Д. Ландау изучал плазму Власова – Пуассона

ионов и электронов [8]. Его интересовали колебания электронной плазмы, которые возникали в результате произвольного начального неравновесного распределения в ней. Л. Д. Ландау предположил, что частота колебаний электронов достаточно высока, поэтому столкновения электронов с ионами и друг с другом несущественны, так что интегралом столкновений в уравнении Власова можно пренебречь. Тогда функцию распределения ионов можно рассматривать как неизменную, и лишь распределение электронов колеблется вокруг пространственно однородного максвелловского (гауссова) равновесия. Он показал, что колебания электрического поля в плазме всегда затухают, а зависимость частоты и декремента затухания от волнового вектора определяется для малых и больших значений последнего. Впоследствии результат Л. Д. Ландау был активно расширен, развит, углублен и обобщен другими исследователями [9, 10]. К сожалению, Л. Д. Ландау не учел всех допустимых малых возмущений. А именно, он не изучал малые возмущения потенциала самосогласованного электрического поля, которые являются функциями исключительно времени. Тем не менее для таких возмущений линеаризованные уравнения Власова – Пуассона [8] являются вырожденными, ключевая формула [8] не может быть выведена, и, следовательно, отсутствует затухание Ландау. В работе [11] приведены аналитические примеры, подтверждающие, что подкласс малых возмущений потенциала электрического поля, которые описываются исключительно функциями времени, не является пустым, значит, результат затухания Ландау не является общим. Аналогично в работе [12] дано строгое описание области применимости классического условия [4], ограничивающее набор возмущений, к которым оно может быть применено. Следует сделать вывод, что для практических приложений гораздо важнее информация об условиях практической неустойчивости плазменных состояний равновесия, чем формулировки частных случаев критериев устойчивости.

В данной работе проведено исследование линейной устойчивости одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий электронного газа Власова – Пуассона, вмещающего в себя электроны со стационарной функцией распределения, которая изотропна по физическому пространству, но переменна по скоростному континууму. Прямой метод Ляпунова показана абсолютная неустойчивость подкласса динамических состояний таких локальных термодинамических равновесий относительно малых возмущений. Обозначена область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба – Гарднера – Розенблюта. Сформулированы достаточные условия линейной практической неустойчивости подкласса одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий электронного газа Власова – Пуассона. Найдены начальные данные для малых одномерных возмущений, растущих во времени. Получена априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания таких возмущений. Построены аналитические контрпримеры к спектральным теореме Ньюкомба – Гарднера и критерию Пенроуза. Теорема Ирншоу распространена с классической механики на статистическую.

1. Кинетический случай

Эволюцию электронного газа, приведенного в движение, описывает следующая начально-краевая задача [13, 14]:

$$\begin{aligned} f_t + v f_x + \varphi_x f_v &= 0, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv - n_e \right); \\ f(x, v, t) &\geq 0; f(x, v, 0) = f_0(x, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь f – функция распределения электронов, x – координаты электронов, v – скорости электронов, t – время, $\varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля, $4\pi n_e$ – плотность электронов в состоянии глобального термодинамического равновесия, f_0 – начальные данные для функции распределения f . Предполагается, что функция $f \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ_x она или периодична по аргументу x , или затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вдоль решений задачи (1) сохраняются с течением времени функционал полной энергии E и интеграл движения C :

$$E \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = const, \quad (2)$$

$$C \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) dx dv = const, \quad (3)$$

где $\Phi(f)$ – произвольная функция своего аргумента.

Задача (1) имеет точные стационарные решения

$$f = f^0(v) \geq 0, \quad \varphi = \varphi^0 \equiv const; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(v) dv = n_e. \quad (4)$$

Для изучения посредством вариационного метода устойчивости точных стационарных решений (4) относительно малых одномерных возмущений выполним линеаризацию начально-краевой задачи (1):

$$\begin{aligned} f'_t + v f'_x + \varphi'_x \frac{df^0}{dv} &= 0, \\ \varphi'_{xx} &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, v, t) dv; \\ f'(x, v, 0) &= f'_0(x, v). \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагаем, что $f' \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ'_x функция f' по аргументу x либо периодична, либо затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вычислим первую вариацию суммы I функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3):

$$\begin{aligned} \delta I = \delta(E + C) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v^2 + 2 \frac{d\Phi}{df}(f^0) \right) \delta f dx dv + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \delta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\varphi^0}{2} + \frac{d\Phi}{df}(f^0) \right) \delta f dx dv. \end{aligned} \quad (6)$$

Произвол в выборе функции Φ обеспечивает условие зануления δI (6):

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = - \frac{d\Phi}{df}(f^0). \quad (7)$$

С использованием условия (7) вычислим вторую вариацию $I = E + C$:

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) (\delta f)^2 dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta \varphi)_x^2 dx. \quad (8)$$

При замене вариаций δf , $\delta\varphi$ на малые возмущения f' , φ' соответственно из (8) получается линейный аналог функционала полной энергии

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) f'^2 dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const, \quad (9)$$

сохраняющийся с течением времени вдоль решений линеаризованной задачи (5).

Таким образом, по знаку E_1 (9) можно определить, устойчивы ли точные стационарные решения f^0 , φ^0 (4) начально-краевой задачи (1) относительно малых одномерных возмущений.

Функционал E_1 (9) является неотрицательным при выполнении неравенства

$$\frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) \geq 0,$$

которое с использованием условия (7) примет вид

$$\frac{1}{v} \frac{df^0}{dv} \leq 0. \quad (10)$$

Неравенство (10) является достаточным условием линейной устойчивости стационарных решений задачи (1). Данный результат совпадает с теоремой Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта [2, 3], согласно которой монотонно убывающие стационарные функции распределения f^0 являются устойчивыми.

Однако условие (10) получено с использованием функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3), сохраняющихся с течением времени в силу одного и того же эволюционного уравнения Власова (первое соотношение задачи (1)). Как следствие, их вариации оказываются зависимыми друг от друга. Это приводит к тому, что достаточное условие устойчивости (10) оказывается справедливым не для всех рассматриваемых возмущений, а лишь для некоторого их подкласса.

2. Аналитический пример в кинетическом случае

Точные стационарные решения начально-краевой задачи (1) выберем в форме

$$f^0 = \frac{n_e}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2), \quad \varphi^0 = const,$$

они удовлетворяют условию (10), а также стационарному уравнению Пуассона (последнее соотношение системы (4)).

Для возмущений потенциала самосогласованного электрического поля вида

$$\varphi' = c \exp(\alpha t), \quad \alpha, c = const, \quad \alpha > 0$$

происходит частичное вырождение дифференциального оператора линеаризованных уравнений (5). Это значит, что данные малые возмущения выпадают из процедуры варьирования суммы функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3).

Возмущения функции распределения

$$f' = v \exp\left(\beta\left(t - \frac{x}{v}\right) - v^2\right), \quad \frac{x}{v} > 0, \quad \beta = const > 0$$

взяты таким образом, чтобы удовлетворять вырожденным уравнениям Власова–Пуассона и граничным условиям линеаризованной задачи (5). Отметим, что функция f' доопределена по непрерывности следующим образом:

$$\left(f' \Big|_{x=0}\right) \Big|_{v=0} = 0.$$

Как результат, построен пример возмущений f' , φ' в виде нормальных волн, растущих со временем вне зависимости от выполнения достаточного условия устойчивости (10) стационарных решений f^0 , φ^0 (4).

Аналитический пример представляет собой пример некорректности по Адамару [15] и одновременно является контрпримером к спектральным теореме Ньюкомба–Гарднера [16] и критерию Пенроуза [17], согласно которым при выполнении условия (10) возмущения в виде нормальных волн в принципе запрещены.

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы доказать неустойчивость стационарных решений f^0 , φ^0 (4) вне зависимости от выполнения условия (10).

3. Гидродинамический случай

Далее используем методику доказательства неустойчивости, разработанную для уравнений гидродинамического типа. С целью перехода от уравнений кинетического типа к уравнениям гидродинамического типа выполним невырожденную замену независимых переменных [14, 18, 19] (гидродинамическая подстановка) вида [11, 12]:

$$\begin{aligned} v = u(x, \nu, t), \quad f(x, v, t) &= \frac{\rho(x, \nu, t)}{u_\nu(x, \nu, t)}; \\ \nu - \text{лагранжева координата:} \quad \frac{d\nu}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \nu, t) &\neq 0 - \text{якобиан замены.} \end{aligned}$$

Начально-краевая задача (1) в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных x , ν , t примет вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \varphi_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \nu, t) d\nu - n_e \right); \\ u(x, \nu, 0) &= u_0(x, \nu), \quad \rho(x, \nu, 0) = \rho_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ν – лагранжевы координаты электронов, u – поле скорости электронов, ρ – поле плотности электронов, u_0 и ρ_0 – начальные данные для полей u и ρ соответственно. Предполагаем, что $\rho \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ_x функция ρ по аргументу x или периодична, или затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вдоль решений задачи (11) сохраняются во времени интеграл полной энергии E_2 и интеграл движения C_1 :

$$E_2 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = \text{const}, \quad (12)$$

$$C_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\varkappa) \frac{\partial u}{\partial \nu} dx d\nu = \text{const}, \quad (13)$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(\varkappa)$ – произвольная функция своего аргумента $\varkappa \equiv \rho/u_\nu$, который имеет смысл обратной завихренности и сохраняется в каждой жидкой частице согласно уравнению движения

$$\varkappa_t + u\varkappa_x = 0. \quad (14)$$

Из вида (14) понятно, что $\varkappa$ является первым интегралом. Следовательно, если в начальный момент времени задать величину $\varkappa$ ограниченной и не равной нулю,

то она останется такой же во все последующие моменты времени, обеспечивая невырожденность гидродинамической замены.

Задача (11) имеет точные стационарные решения вида

$$u = u^0(\nu), \quad \rho = \rho^0(\nu) \geq 0, \quad \varphi = \varphi^0 \equiv \text{const}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0(\nu) d\nu = n_e. \quad (15)$$

Задача (11), линеаризованная вблизи стационарных решений (15), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u'_t + u^0 u'_x &= \varphi'_x, & \rho'_t + u^0 \rho'_x + u'_x \rho^0 &= 0, \\ \varphi'_{xx} &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, \nu, t) d\nu; \\ u'(x, \nu, 0) &= u'_0(x, \nu), & \rho'(x, \nu, 0) &= \rho'_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (16)$$

Предполагаем, что $\rho' \rightarrow 0$ при $|\nu| \rightarrow \infty$, а вместе с φ'_x функция ρ' по аргументу x либо периодична, либо затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Аналогично кинетическому случаю с помощью вариационного метода исследуем устойчивость стационарных решений u^0, ρ^0, φ^0 (15) относительно малых возмущений u', ρ', φ' (16).

Условие зануления первой вариации суммы функционала полной энергии E_2 (12) и интеграла движения C_1 (13) ($\varkappa^0$ – стационарная обратная завихренность) имеет вид

$$\frac{u^{02}}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = -\frac{d\Phi_1}{d\varkappa}(\varkappa^0). \quad (17)$$

Из второй вариации суммы E_2 и C_1 с учетом (17) получим линейный аналог функционала полной энергии, сохраняющийся с течением времени вдоль решений линеаризованной задачи (16):

$$\begin{aligned} E_3 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho^0 u'^2 + 2u^0 u' \rho' + \frac{d^2 \Phi_1}{d\varkappa^2}(\varkappa^0) \varkappa'^2 \frac{du^0}{d\nu} \right) dx d\nu + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'_x{}^2 dx = \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\varkappa^0(\nu) = \rho^0(\nu) \left(\frac{du^0}{d\nu} \right)^{-1}, \quad \varkappa' = (\rho' - \varkappa^0 u'_\nu) \left(\frac{du^0}{d\nu} \right)^{-1}.$$

Для установления знакоопределенности/знакопостоянства функционала E_3 (18) представим его в виде

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A \vec{\omega}, \vec{\omega}) dx d\nu,$$

где

$$A \equiv \begin{pmatrix} \rho^0 & u^0 & 0 & 0 \\ u^0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d^2 \Phi_1}{d\varkappa^2}(\varkappa^0) \frac{du^0}{d\nu} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} \equiv \begin{pmatrix} u' \\ \rho' \\ \varkappa' \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Главные миноры матрицы A :

$$\Delta_1 = \rho^0, \quad \Delta_2 = -u^{02}, \quad \Delta_3 = -u^{02} \frac{d^2 \Phi_1}{d\kappa^2} (\kappa^0) \frac{du^0}{d\nu}.$$

Согласно критерию Сильвестра [20] функционал E_3 (18) знакоопределенностью не обладает. Из этого можно сделать вывод, что достаточного условия линейной устойчивости для всех малых возмущений в данном случае нет. Однако это условие может возникнуть при рассмотрении подкласса возмущений, описываемых полем лагранжевых смещений.

Далее рассмотрим одномерные малые возмущения $\xi(x, \nu, t)$ [21], которые описываются полем лагранжевых смещений

$$\xi_t = u' - u^0 \xi_x. \quad (19)$$

Данные возмущения определяются как отклонения траекторий движения электронов от своих линий тока, отвечающих стационарным решениям (15).

В терминах поля лагранжевых смещений (19) линеаризованная задача (16) примет вид

$$\begin{aligned} \xi_{tt} + 2u^0 \xi_{xt} + u^{02} \xi_{xx} &= \varphi'_x, \\ \varphi'_{xx} &= -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi_x d\nu, \quad \rho' = -\rho^0 \xi_x; \\ \xi(x, \nu, 0) &= \xi_0(x, \nu), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, \nu, 0) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (20)$$

Предполагаем, что $\rho^0 \xi_x \rightarrow 0$ при $|\nu| \rightarrow \infty$, а функции ξ и φ'_x по аргументу x или периодичны, или затухают при $|x| \rightarrow \infty$.

Уравнение на ρ' получено интегрированием, при этом константа интегрирования принята равной нулю. По этой причине поле лагранжевых смещений описывает именно подкласс возмущений.

Для задачи (20) оказалось, что $\kappa' \equiv 0$. Это влечет выполнение соотношения

$$\rho' = \kappa^0 \frac{\partial u'}{\partial \nu}. \quad (21)$$

Тогда при наложении на малые возмущения u' добавочных требований в виде асимптотик

$$(u^0 \kappa^0 u'^2) \Big|_{\nu \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0 \quad (22)$$

линейный аналог функционала полной энергии E_3 (18) с учетом соотношения (21) примет вид

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho^0 - \frac{d(u^0 \kappa^0)}{d\nu} \right) u'^2 dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'_x{}^2 dx = const. \quad (23)$$

Условие знакоопределенности/знакопостоянства для E_3 (23) представляется неравенством

$$u^0 \frac{d\kappa^0}{d\nu} \leq 0, \quad (24)$$

которое с учетом условия $du^0/d\nu > 0$ (следствие неотрицательности функции f^0 , неравенства нулю якобиана u_ν , а также стационарных уравнений Пуассона (4) и (15)) можно записать в виде

$$\frac{1}{u^0} \frac{d\mathcal{K}^0}{d\nu} \leq 0,$$

эквивалентном (с точностью до обозначений) достаточному условию линейной устойчивости (10) в кинетическом случае.

Однако в силу того, что асимптотики (22) не являются интегралами движения, всегда обеспечить их выполнение не представляется возможным. Из этого можно сделать вывод, что достаточное условие линейной устойчивости (24) стационарных решений (15) носит формальный характер, а рассматриваемые малые возмущения u', ρ', φ' (16), (21), (22) образуют неполный, незамкнутый подкласс.

Без учета асимптотик (22) интеграл E_3 (18) с использованием линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19) примет вид

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t^2 - u^{02} \xi_x^2) dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const$$

и согласно критерию Сильвестра [20] в принципе не может быть знакоопределен. Это значит, что найдется хотя бы одно растущее возмущение $\xi(x, \nu, t)$ (19), на которое действие условия устойчивости (24) точных стационарных решений (15) не распространяется.

В отношении же возмущений u', ρ', φ' (16), (21), подчиненных асимптотикам (22), условие устойчивости (24) точных стационарных решений (15) является не только достаточным, но и необходимым.

Данные результаты позволяют перейти к доказательству абсолютной неустойчивости точных стационарных решений (15) задачи (11).

4. Функционал Ляпунова и априорная оценка для гидродинамического случая

Рассмотрим неотрицательный функционал

$$M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi^2 dx d\nu.$$

Вычислим его первую и вторую производные по времени

$$\frac{dM}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi \xi_t dx d\nu, \quad \frac{d^2 M}{dt^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t^2 + \xi \xi_{tt}) dx d\nu.$$

С использованием линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19) получим оценку снизу для выражения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t - \lambda \xi + u^0 \xi_x)^2 dx d\nu - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx \geq -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь λ – произвольный параметр. Результатом интегрирования второго уравнения системы (20) является соотношение

$$\varphi_x' = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi d\nu$$

(константа интегрирования опять принята равной нулю, но это лишь уточняет исследуемый подкласс возмущений). С применением неравенства Коши – Буняковского получим оценку квадрата данного соотношения:

$$\varphi'_x{}^2 = 16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi d\nu \right)^2 \leq 16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi^2 d\nu.$$

С учетом этой оценки построим основное дифференциальное неравенство вириального типа

$$\frac{d^2 M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2(\lambda^2 + \alpha'_1) M \geq 0, \quad (25)$$

где

$$\alpha'_1 = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 d\nu > 0.$$

При выборе $\lambda > 0$ и наложении счетного набора дополнительных условий

$$M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\frac{dM}{dt} \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) \geq 2 \left(\lambda + \frac{\alpha'_1}{\lambda} \right) M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right);$$

$$M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) = M(0) \exp \left(\frac{\lambda \pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right), \quad (26)$$

$$\frac{dM}{dt} \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) = \frac{dM}{dt}(0) \exp \left(\frac{\lambda \pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right);$$

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2 \left(\lambda + \frac{\alpha'_1}{\lambda} \right) M(0)$$

проинтегрируем неравенство (25) на счетном наборе временных полуинтервалов методом Чаплыгина [22]. Процесс интегрирования подробно описан в работе [23].

В итоге это дает возможность установить следующую априорную экспоненциальную оценку снизу роста малых возмущений $\xi(x, \nu, t)$ (19), (20), (26)

$$M(t) \geq C_2 \exp(\lambda t). \quad (27)$$

Здесь C_2 – положительная постоянная, определяемая по начальным данным для растущих малых возмущений (последние два неравенства из (26)).

Из оценки (27) следует, что среди возмущений, описываемых полем лагранжевых смещений, найдется хотя бы одно, растущее со временем относительно стационарных решений (15) задачи (11) не медленнее, чем экспоненциально. Данный результат полностью согласуется с определением неустойчивого по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений [24].

5. Аналитический пример в гидродинамическом случае

Точные стационарные решения (15) начально-краевой задачи (11) выберем в виде

$$\rho^0 = \frac{n_e}{\sqrt{\pi}} \exp(-\nu^2), \quad u^0 \equiv \nu, \quad \varphi^0 = \text{const.}$$

Они удовлетворяют условию (24) и стационарному уравнению Пуассона в гидродинамическом описании (последнее соотношение системы (15)), а также эквивалентны стационарным решениям (4) в кинетическом случае. Это значит, что данные стационарные решения также отвечают одномерным динамическим состояниям того либо иного локального термодинамического равновесия электронного газа Власова–Пуассона.

Для возмущений потенциала самосогласованного электрического поля вида

$$\varphi' = c_1 \exp(\alpha_1 t), \quad \alpha_1, c_1 = \text{const}, \quad \alpha_1 > 0$$

происходит частичное вырождение дифференциального оператора линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19). Следовательно, данные малые возмущения выпадают из процедуры варьирования суммы функционала полной энергии E_2 (12) и интеграла движения C_1 (13).

Возмущения, описываемые полем лагранжевых смещений

$$\xi = (t+1)\nu^2 \exp\left(\beta_1\left(t - \frac{x}{\nu}\right) - \nu^2\right), \quad \frac{x}{\nu} > 0, \quad \beta_1 = \text{const} > 0,$$

взяты таким образом, чтобы удовлетворять вырожденным уравнениям и граничным условиям задачи (20). Заметим, что функция ξ доопределена по непрерывности следующим образом

$$\left(\xi\right|_{\substack{t=0 \\ x=0}}\Big|_{\nu=0} = 0.$$

Тем самым построен пример возмущений в виде нормальных волн, растущих со временем вне зависимости от выполнения условия устойчивости (24), что подтверждает его формальный характер. Данный аналитический пример представляет собой пример некорректности по Адамару [15] и одновременно является контрпримером к спектральной теореме Ньюкомба–Гарднера [16] и критерию Пенроуза [17], также имеющими формальный характер.

Заключение

Задача линейной устойчивости подкласса одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий относительно одномерных же малых возмущений в случае, когда электронный газ Власова–Пуассона содержит в себе электроны со стационарной функцией распределения, постоянной по физическому пространству и переменной по пространству скоростей, исследована в кинетическом и гидродинамическом описаниях. В кинетическом описании обозначена область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта и сформулированы достаточные условия линейной практической неустойчивости, построены аналитические контрпримеры к спектральной теореме Ньюкомба–Гарднера и критерию Пенроуза. В гидродинамическом описании то, что оценка (27) получена без каких бы то ни было дополнительных условий на точные стационарные решения (15), позволяет сделать вывод, что возмущения, приводящие к неустойчивости стационарного течения, возникают вне зависимости от выполнения достаточного условия линейной устойчивости (24). Значит, имеет место абсолютная неустойчивость точных стационарных решений (15) задачи (11).

Необходимо отметить, что данный результат расширяет область применимости теоремы Ирншоу с классической механики на статистическую. Согласно настоящей теореме всякая равновесная конфигурация точечных зарядов без действия на них каких-либо сил, помимо сил кулоновского притяжения и отталкивания, является неустойчивой. Распространение теоремы происходит за счет того, что рассматриваемая в задаче термодинамическая система, описываемая функцией распределения электронов, является изолированной.

Важным служит и то, что первые два неравенства счетного набора дополнительных условий (26) допускают трактовку в качестве достаточных условий линейной практической неустойчивости [23] и могут быть использованы двумя способами в экспериментах по ускорению заряженных частиц. Во-первых, при создании в ускорителе облака электронов, через которое будут пролетать заряженные частицы, нужно, чтобы условия практической неустойчивости были выполнены. За счет этого облако электронов будет образовываться быстрее и будет обладать более высокой температурой. Во-вторых, чтобы горячее облако электронов просуществовало как можно дольше и не рассеивалось, необходимо, чтобы условия практической неустойчивости, напротив, не выполнялись.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Виктории Павловне Зининой, выполнившей выпускную квалификационную работу бакалавра под руководством Ю. Г. Губарева по данной теме, за активное участие в настоящих исследованиях.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Bernstein I.B.* Waves in a plasma in a magnetic field // *Phys. Rev.* 1958. V. 109, No 1. P. 10–21. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.10>.
2. *Gardner C.S.* Bound on the energy available from a plasma // *Phys. Fluids.* 1963. V. 6, No 6. P. 839–840. <https://doi.org/10.1063/1.1706823>.
3. *Rosenbluth M.N.* Topics in microinstabilities // *Advanced Plasma Theory / Rosenbluth M.N. (Ed.). Ser.: Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 25.* New York, NY: Acad. Press, 1964. P. 137–158.
4. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // *Phys. Rep.* 1985. V. 123, No 1–2. P. 1–116.
5. *Pankavich S., Allen R.* Instability conditions for some periodic BGK waves in the Vlasov–Poisson system // *Eur. Phys. J. D.* 2014. V. 68, No 12. Art. 363. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50170-y>.
6. *Han-Kwan D., Hauray M.* Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov–Poisson equation // *Commun. Math. Phys.* 2015. V. 334, No 2. P. 1101–1152. <https://doi.org/10.1007/s00220-014-2217-4>.
7. *Esenturk E., Hwang H.-J.* Linear stability of the Vlasov–Poisson system with boundary conditions // *Nonlinear Anal.* 2016. V. 139. P. 75–105. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.02.014>.
8. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // *УФН.* 1967. Т. 93, № 3. С. 527–540.
9. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // *Acta Math.* 2011. V. 207, No 1. P. 29–201. <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.

10. *Bedrossian J., Masmoudi N., Mouhot C.* Linearized wave-damping structure of Vlasov–Poisson in $\mathbb{R}^3$ // *SIAM J. Math. Anal.* 2022. V. 54, No 4. P. 4379–4406. <https://doi.org/10.1137/20M1386141>.
11. *Bibilova S.A., Gubarev Y.G.* Two-flow instability of one class of spherically symmetric dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma // *Acta Appl. Math.* 2023. V. 187, No 1. Art. 2. <https://doi.org/10.1007/s10440-023-00595-1>.
12. *Gubarev Yu.G.* Two-flow instability of particular class of one-dimensional dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma // *Plasma Res. Express.* 2019. V. 1, No 4. Art. 045008. <https://doi.org/10.1088/2516-1067/ab5ac0>.
13. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *УФН.* 1997. Т. 167, № 11. С. 1137–1167.
14. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа. Новосибирск: Ин-т автоматизации и электрометрии, 1982. 50 с. (Препринт / Ин-т автоматизации и электрометрии. Сиб. отд-ние АН СССР; № 186).
15. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
16. *Кролл Н., Трайвеллис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 528 с.
17. *Penrose O.* Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma // *Phys. Fluids.* 1960. V. 3, No 2. P. 258–264. <https://doi.org/10.1063/1.1706024>.
18. *Захаров В.Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // *Функц. анализ и его прил.* 1980. Т. 14, № 2. С. 15–24.
19. *Губарев Ю.Г.* К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова–Пуассона // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.* 1995. Вып. 110. Акустика неоднородных сред. С. 78–90.
20. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
21. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
22. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950. 103 с.
23. *Губарев Ю.Г.* Прямой метод Ляпунова. Устойчивость состояний покоя и стационарных течений жидкостей и газов. Saarbrücken: Palmarium Acad. Publ., 2012. 192 p.
24. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 229 с.

Поступила в редакцию 13.02.2024

Принята к публикации 06.03.2024

Губарев Юрий Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: gubarev@hydro.nsc.ru

Котельникова Мария Станиславовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: kotelnikova@hydro.nsc.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 36–51

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.36-51

**On the Stability of a Particular Class of One-Dimensional States
of Dynamic Equilibrium of the Vlasov–Poisson Electron Gas**

*Yu.G. Gubarev**, *M.S. Kotelnikova***

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia
E-mail: *gubarev@hydro.nsc.ru, **kotelnikova@hydro.nsc.ru*

Received February 13, 2024; Accepted March 6, 2024

Abstract

The one-dimensional problem of the linear stability of dynamic states of local thermodynamic equilibria with respect to small perturbations was studied for the case when the Vlasov–Poisson electron gas contains electrons with a stationary distribution function that is constant in physical space and variable in a continuum of velocities. The absolute instability of all considered one-dimensional dynamic states of any local thermodynamic equilibrium was proved using the direct Lyapunov method. The scope of applicability of the Newcomb–Gardner–Rosenbluth sufficient condition for linear stability was outlined. An a priori exponential estimation was obtained for the rise of small one-dimensional perturbations from below. Analytic counterexamples to the spectral Newcomb–Gardner theorem and the Penrose criterion were constructed. Earnshaw’s theorem was extended from classical mechanics to statistical one.

Keywords: Vlasov–Poisson electron gas, dynamic equilibrium states, linear stability, direct Lyapunov method

Acknowledgments. We thank Viktoriya P. Zinina for actively participating in our study, as she wrote her bachelor’s thesis on the same topic under the supervision of Yu.G. Gubarev.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Bernstein I.B. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.*, 1958, vol. 109, no. 1, pp. 10–21. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.10>.
2. Gardner C.S. Bound on the energy available from a plasma. *Phys. Fluids*, 1963, vol. 6, no. 6, pp. 839–840. <https://doi.org/10.1063/1.1706823>.
3. Rosenbluth M.N. Topics in microinstabilities. In: Rosenbluth M.N. (Ed.) *Advanced Plasma Theory*. Ser: Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 25. New York, NY, Acad. Press, 1964, pp. 137–158.
4. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S., Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, 1985, vol. 123, nos. 1–2, pp. 1–116.
5. Pankavich S., Allen R. Instability conditions for some periodic BGK waves in the Vlasov–Poisson system. *Eur. Phys. J. D.*, 2014, vol. 68, no. 12, art. 363. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50170-y>.

6. Han-Kwan D., Hauray M. Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov–Poisson equation. *Commun. Math. Phys.*, 2015, vol. 334, no. 2, pp. 1101–1152. <https://doi.org/10.1007/s00220-014-2217-4>.
7. Esenturk E., Hwang H.-J. Linear stability of the Vlasov–Poisson system with boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 2016, vol. 139, pp. 75–105. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.02.014>.
8. Landau L.D. On the vibrations of the electronic plasma. *Usp. Fiz. Nauk*, 1967, vol. 93, no. 3, pp. 527–540. (In Russian)
9. Mouhot C., Villani C. On Landau damping. *Acta Math.*, 2011, vol. 207, no. 1, pp. 29–201. <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.
10. Bedrossian J., Masmoudi N., Mouhot C. Linearized wave-damping structure of Vlasov–Poisson in $\mathbb{R}^3$. *SIAM J. Math. Anal.*, 2022, vol. 54, no. 4, pp. 4379–4406. <https://doi.org/10.1137/20M1386141>.
11. Bibilova S.A., Gubarev Y.G. Two-flow instability of one class of spherically symmetric dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma. *Acta Appl. Math.*, 2023, vol. 187, no. 1, art. 2. <https://doi.org/10.1007/s10440-023-00595-1>.
12. Gubarev Yu.G. Two-flow instability of particular class of one-dimensional dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma. *Plasma Res. Express*, 2019, vol. 1, no. 4, art. 045008. <https://doi.org/10.1088/2516-1067/ab5ac0>.
13. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Phys.-Usp.*, 1997, vol. 40, no. 11, pp. 1087–1116. <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n11ABEH000304>.
14. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. *Gamil'tonovskii formalizm dlya sistem gidrodinamicheskogo tipa* [Hamiltonian Formalism for Systems of Hydrodynamic Type]. Novosibirsk, Inst. Avtom. Elektrom., 1982. 50 p. Preprint, Inst. Avtom. Elektrom. Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, no. 186. (In Russian)
15. Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979. 392 p. (In Russian)
16. Krall N.A., Trivelpiece A.W. *Osnovy fiziki plazmy* [Principles of Plasma Physics]. Moscow, Mir, 1975. 528 p. (In Russian)
17. Penrose O. Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, 1960, vol. 3, no. 2, pp. 258–264. <https://doi.org/10.1063/1.1706024>.
18. Zakharov V.E. Benney equations and quasiclassical approximation in the method of the inverse problem. *Funct. Anal. Appl.*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 89–98. <https://doi.org/10.1007/BF01086549>.
19. Gubarev Yu.G. To analogy between the Benny and Vlasov–Poisson equations. In: *Din. Sploshnoi Sredy: Sb. nauch. tr. RAN, In-t gidrodinamiki* [Dynamics of a Continuous Medium: A Collection of Articles by the Institute of Hydrodynamics, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch], 1995, no. 110: Acoustics of heterogeneous media, pp. 78–90. (In Russian)
20. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. *Lineinye differentsial'nye uravneniya s preiodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1972. 718 p. (In Russian)
21. Chandrasekhar S. *Ellipsoidnye figury ravnovesiya* [Ellipsoidal Figures of Equilibrium]. Moscow, Mir, 1973. 288 p. (In Russian)

-
22. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirvaniya differentsial'nykh uravnenii* [A New Method for Approximate Integration of Differential Equations]. Moscow, GITTL, 1950. 103 p. (In Russian)
 23. Gubarev Yu.G. *Pryamoi metod Lyapunova. Ustoichivost' sostoyanii pokoya i statsionarnykh techenii zhidkosti i gazov* [The Direct Lyapunov Method. The Stability of Quiescent States and Steady-State Flows of Fluids and Gases]. Saarbrücken, Palmarium Acad. Publ., 2012. 192 p. (In Russian)
 24. Sirazetdinov T.K. *Ustoichivost' sistem s rasprelennymi parametrami* [Optimization of Systems with Distributed Parameters]. Novosibirsk, Nauka, 1987. 229 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Губарев Ю.Г., Котельникова М.С. К устойчивости частного класса одномерных состояний динамического равновесия электронного газа Власова – Пуассона // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 36–51. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.36-51>.

For citation: Gubarev Yu.G., Kotelnikova M.S. On the stability of a particular class of one-dimensional states of dynamic equilibrium of the Vlasov–Poisson electron gas. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 36–51. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.36-51>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 512.552

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.52-57

ПРОТОКОЛ ОБМЕНА КЛЮЧАМИ НАД КОЛЬЦОМ ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ $B_n(R, P)$

М.Ф. Насрутдинов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Рассмотрена возможность построения протокола обмена сообщениями над специальным классом формальных матриц $B_n(R, P)$. Показано, что такая конструкция позволяет получить протоколы обмена сообщениями, используя произвольные ассоциативные кольца и идеалы над ними.

Ключевые слова: протокол обмена сообщениями, кольцо формальных матриц

Введение

Появление и развитие интернета привело к массовому применению криптографии для защиты информации, передаваемой по открытым каналам связи. Само по себе использование криптографии насчитывает несколько тысяч лет, но широкое применение математики для построения и анализа стойкости криптосистем началось с работы К. Шеннона "Математическая теория криптографии" [1], опубликованной в 1949 г.

Криптосистемы разделяют на симметричные, то есть системы, в которых для шифрования и расшифрования применен один и тот же криптографический ключ, и асимметричные (криптосистемы с открытым ключом). В асимметричных системах используются открытый ключ, который передается по открытому каналу, и закрытый ключ, который применяется для расшифровки. Начало асимметричным шифрам было положено в работе У. Диффи и М. Хеллмана [2], опубликованной в 1976 г. Методы шифрования с открытым ключом применяются как для собственно шифрования, так и для обмена ключами по открытым каналам связи для дальнейшего применения симметричного шифрования, или как средство аутентификации пользователей.

Одной из первых реализаций идеи асимметричного шифрования была криптосистема RSA (см., например, [3]), базирующаяся на вычислительной сложности задачи факторизации больших чисел. С тех пор ведутся поиски подходящих математических объектов для построения асимметричных криптосистем.

В конце 1990-х гг. сформировалось направление исследований, которое можно назвать алгебраической криптографией (см., например, [4], [5]). Особенностью алгебраической криптографии является то, что криптографические протоколы строятся с использованием таких абстрактных алгебраических структур (платформ), как, например, некоммутативные группы, полугруппы, кольца. Исследо-

вания по алгебраической криптографии (так же как и по математической криптографии в целом) нацелены на построение тех или иных криптографических протоколов и на обоснование их криптостойкости, т.е. вычислительной сложности нахождения секретного ключа по тем или иным открытым данным (например, по открытому ключу).

В данной работе рассматривается протокол обмена ключами над кольцами специального вида, который мы обозначили через $B_n(R, P)$. Данная конструкция обобщает результаты [6] на более широкий класс колец.

1. Кольцо $B_n(R, P)$

В работе Г.М. Бергмана [7] рассматривалось кольцо эндоморфизмов абелевой группы $E_p = \text{End}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2})$, где p – простое число. Там же показано, что E_p состоит из p^5 элементов и E_p дает пример полулокального кольца, которое не вложено в кольцо матриц над коммутативным кольцом.

В работах [8], [9] авторы рассмотрели свойства этих колец и построили над ними протокол обмена сообщениями. Преимуществом этого кольца является то, что его можно реализовать в виде колец матриц (точнее, кольцо формальных матриц) и все вычисления проводить сначала в кольце целых чисел, а потом брать результаты вычислений по подходящему модулю степени простого числа p .

В работе [10] приведена атака на этот протокол. Ключевым моментом в этой атаке было наличие большого количества обратимых элементов в E_p . Для кольца E_p их количество составляет $p^3(p-1)^2$, и вероятность того, что произвольный элемент будет обратимым, стремится к единице с ростом p .

В работе [6] конструкция кольца Бергмана была обобщена и рассматривалось кольцо $E_p^{(m)} = \text{End}(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p^m})$. Авторы называли его обобщенным кольцом Бергмана. В нем долю обратимых элементов можно сильно уменьшить, и был введен протокол, для которого атака уже не применима. В [11] построен протокол обмена ключом между несколькими участниками (больше двух) на основе этого кольца. В [12] обсуждались вопросы атаки на построенный протокол.

В нашей совместно с С.Н. Трониным работе [13] конструкция кольца $E_p^{(m)}$ была обобщена следующим образом.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, P – двусторонний идеал R , $n \geq 2$ – натуральное число. Обозначим через

$$B_n(R, P) = \{(x_{ij}) | x_{ij} \in B_{ij}\} = \begin{pmatrix} R/P & R/P & \dots & R/P \\ P/P^2 & R/P^2 & \dots & R/P^2 \\ P^2/P^3 & P/P^3 & \dots & R/P^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{n-1}/P^n & P^{n-2}/P^n & \dots & R/P^n \end{pmatrix}$$

множество формальных матриц размера $n \times n$ ($B_{ij} = R/P^i$ при $i \leq j$, $B_{ij} = P^{i-j}/P^i$ при $i > j$) для любых $1 \leq i, j \leq n$.

Приведем для удобства необходимые сведения относительно строения кольца $B_n(R, P)$ из статьи [13].

- 1) На множестве $B_n(R, P)$ можно естественным образом определить операции сложения и умножения, превращающие его в ассоциативное кольцо с единицей [13, Теорема 1]. Это кольцо изоморфно кольцу эндоморфизмов правого R -модуля $R/P \oplus R/P^2 \oplus \dots \oplus R/P^n$.

2) Центр кольца $B_n(R, P)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} z+P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z+P^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z+P^n \end{pmatrix},$$

где $z + P^n$ принадлежит центру кольца R/P^n [13, Теорема 4].

3) Матрица $A \in B_n(R, P)$ обратима тогда и только тогда, когда элементы на главной диагонали A_{ii} обратимы в R/P^i для всех $i = 1, 2, \dots, n$ [13, Теорема 5].

Таким образом, мы получили целое семейство колец, которое может обладать лучшими характеристиками с точки зрения криптостойкости протокола обмена ключами.

2. Приложения в криптографии

Как сказано выше, в [9] был предложен протокол обмена сообщениями над кольцом E_p . В наших обозначениях это кольцо $B_2(\mathbb{Z}, p\mathbb{Z})$. Приведем описание этого протокола.

Пусть $f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. Для элемента $M \in B_n(R, P)$ обозначим

$$f(M) = a_0E + a_1M + a_2M^2 + \dots + a_nM^n,$$

где E – единичная матрица кольца $B_n(R, P)$.

Схема протокола описывается следующим образом:

1. Алиса и Боб публикуют открытые ключи $r, s \in \mathbb{N}$ и $M, N \in B_n(R, P)$.
 2. Алиса и Боб выбирают закрытые ключи $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ и $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ соответственно.
 3. Алиса вычисляет открытый ключ $P_A = f(M)^r N f(M)^s$ и посылает его Бобу.
 4. Боб вычисляет открытый ключ $P_B = g(M)^r N g(M)^s$ и посылает его Алисе.
 5. Алиса вычисляет $S_A = f(M)^r P_B f(M)^s$, Боб вычисляет $S_B = g(M)^r P_A g(M)^s$.
Так как элементы $f(M)^r$, $f(M)^s$, $g(M)^r$, $g(M)^s$ коммутируют, то $S_A = f(M)^r P_B f(M)^s = f(M)^r g(M)^r N g(M)^s f(M)^s = g(M)^r f(M)^r N f(M)^s g(M)^s = g(M)^r P_A g(M)^s = S_B$.
 6. Таким образом, $S_A = S_B$ – общий ключ.
- В [10] была предложена атака, основанная на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $W_1, W_2 \in E_p$ такие, что

$$W_1M = MW_1, \quad W_2M = MW_2, \quad P_BW_2 = W_1N.$$

Тогда

$$S_A = S_B = W_1P_AW_2.$$

Фактически для раскрытия ключа надо подобрать матрицы W_1 и W_2 , коммутирующие с M , и W_2 должна быть обратимой. Подбор коммутирующих матриц сводятся к линейным уравнениям над $\mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{Z}_{p^2}$, а обратимость матрицы при росте p получается практически автоматически в силу большой доли обратимых элементов в E_p .

При увеличении n доля обратимых элементов уменьшается. Так как строение обратимых элементов в кольце $B_n(R, P)$ известно, то мы можем достаточно просто оценивать этот параметр для каждого выбранного P .

В [6] протокол обмена ключами был усложнен следующим образом.

Обозначим через $C(B_n(R, P))$ центр кольца $B_n(R, P)$ (согласно [13] мы знаем его строение).

1. Алиса и Боб публикуют открытые ключи $M \in B_n(R, P)$, $N \in B_n(R, P) \setminus C(B_n(R, P))$.
2. Алиса выбирает закрытые ключи $f_1(X), f_2(x) \in C(B_n(R, P))[X]$ и $r, s \in \mathbb{N}$. Боб выбирает закрытые ключи $g_1(X), g_2(x) \in C(B_n(R, P))[X]$ и $u, v \in \mathbb{N}$.
3. Алиса вычисляет открытый ключ $P_A = f_1(M)^r N f_2(M)^s$ и посылает его Бобу.
4. Боб вычисляет открытый ключ $P_B = g_1(M)^u N g_2(M)^v$ и посылает его Алисе.
5. Алиса вычисляет $S_A = f_1(M)^r P_B f_2(M)^s$, Боб вычисляет $S_B = g_1(M)^u P_A g_2(M)^v$.
6. Элементы S_A и S_B равны, т. е. $S_A = S_B$. Таким образом, Алиса и Боб получают общий ключ.

В этом варианте протокола приведенная выше атака для кольца $B_n(\mathbb{Z}, p\mathbb{Z})$ уже не работает [6], но применима атака, основанная на применении теоремы Гамильтона–Кэли для коммутативных колец [12].

Заключение

Мы показали, что протоколы обмена ключами, приведенные в [8], [6], [11], допускают обобщения на кольцо вида $B_n(R, P)$. В качестве базового кольца R можно выбрать, например, кольцо многочленов над конечным полем или конечным коммутативным кольцом. С точки зрения приложений кольцо должно быть удобным для вычислений. Меняя базовое кольцо, мы потенциально можем получить протоколы с лучшими (с точки зрения криптостойкости) свойствами.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Shannon C.E. A mathematical theory of communication // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27, No 3. P. 379–423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>.
2. Diffie W., Hellman M.E. New directions in cryptography // IEEE Trans. Inf. Theory. 1976. V. 22, No 6. P. 644–654. <https://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638>.
3. Яценко В.В. Введение в криптографию. 4-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2014. 347 с.
4. Романьков В.А. Алгебраическая криптография: монография. Омск: Изд-во Омск. гос. ун-та, 2013. 136 с.
5. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. Non-Commutative Cryptography and Complexity of Group-Theoretic Problems. Ser.: Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 177. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. 385 p. <https://doi.org/10.1090/surv/177>.
6. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements // Appl. Algebra Eng., Commun. Comput. 2014. V. 25, No 5. P. 347–361. <https://doi.org/10.1007/s00200-014-0231-6>.
7. Bergman G.M. Some examples in PI ring theory // Isr. J. Math. 1974. V. 18, No 3. P. 257–277. <https://doi.org/10.1007/BF02757282>.
8. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. On the arithmetic of the endomorphisms ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // Appl. Algebra Eng., Commun. Comput. 2011. V. 22, No 2. P. 91–108. <https://doi.org/10.1007/s00200-011-0138-4>.

9. *Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L.* Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // *Int. J. Comput. Math.* 2012. V. 89, No 13–14. P. 1753–1763. <https://doi.org/10.1080/00207160.2012.696105>.
10. *Kamal A.A., Youssef A.M.* Cryptanalysis of a key exchange protocol based on the endomorphisms ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$ // *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.* 2012. V. 23, No 3. P. 143–149. <https://doi.org/10.1007/s00200-012-0170-z>.
11. *Climent J.-J., López-Ramos J.A., Navarro P.R., Tortosa L.* Key agreement protocols for distributed secure multicast over the ring $E_p^{(m)}$ // *WIT Trans. Inf. Commun. Technol.* 2013. V. 45. P. 13–24. <https://doi.org/10.2495/DATA130021>.
12. *Zhang Y.* Cryptanalysis of a key exchange protocol based on the ring $E_p^{(m)}$ // *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.* 2018. V. 29, No 2. P. 103–112. <https://doi.org/10.1007/s00200-017-0332-0>.
13. *Nasrutdinov M.F., Tronin S.N.* On some class of formal matrix ring // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 3. P. 677–681. <https://doi.org/10.1134/S1995080222060269>.

Поступила в редакцию 4.02.2024

Принята к публикации 6.02.2024

Насрутдинов Марат Фаритович, доцент кафедры компьютерной математики и информатики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: marat.nasrutdinov@kpfu.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 52–57

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.52-57

A Key Exchange Protocol Based on the Ring $B_n(R, P)$

M.F. Nasrutdinov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: marat.nasrutdinov@kpfu.ru

Received February 4, 2024; Accepted February 6, 2024

Abstract

A key exchange protocol over a special class of formal matrices $B_n(R, P)$ was proposed. The potential of this design for constructing key exchange protocols using suitable associative rings and ideals over them was shown.

Keywords: key exchange protocol, ring of formal matrices

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

References

1. Shannon C.E. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.*, 1948, vol. 27, no. 3, pp. 379–423. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>.
2. Diffie W., Hellman M.E. New directions in cryptography. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1976, vol. 22, no. 6, pp. 644–654. <https://doi.org/10.1109/TIT.1976.1055638>.
3. Yashchenko V.V. *Vvedenie v kriptografiyu* [Introduction to Cryptography]. 4th enlarged ed. Moscow, MTsNMO, 2014. 347 p. (In Russian)
4. Roman'kov V.A. *Algebraicheskaya kriptografiya: monografiya* [Algebraic Cryptography: A Monograph]. Omsk, Izd. Omsk. Gos. Univ., 2013. 136 p. (In Russian)
5. Myasnikov A., Shpilrain V., Ushakov A. *Non-Commutative Cryptography and Complexity of Group-Theoretic Problems*. Ser.: Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 177. Providence, RI, Am. Math. Soc., 2011. 385 p. <https://doi.org/10.1090/surv/177>.
6. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. An extension of the noncommutative Bergman's ring with a large number of noninvertible elements. *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.*, 2014, vol. 25, no. 5, pp. 347–361. <https://doi.org/10.1007/s00200-014-0231-6>.
7. Bergman G.M. Some examples in PI ring theory. *Isr. J. Math.*, 1974, vol. 18, no. 3, pp. 257–277. <https://doi.org/10.1007/BF02757282>.
8. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. On the arithmetic of the endomorphisms ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.*, 2011, vol. 22, no. 2, pp. 91–108. <https://doi.org/10.1007/s00200-011-0138-4>.
9. Climent J.-J., Navarro P.R., Tortosa L. Key exchange protocols over noncommutative rings. The case of $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *Int. J. Comput. Math.*, 2012, vol. 89, nos. 13–14, pp. 1753–1763. <https://doi.org/10.1080/00207160.2012.696105>.
10. Kamal A.A., Youssef A.M. Cryptanalysis of a key exchange protocol based on the endomorphisms ring $\text{End}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^2})$. *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.*, 2012, vol. 23, no. 3, pp. 143–149. <https://doi.org/10.1007/s00200-012-0170-z>.
11. Climent J.-J., López-Ramos J.A., Navarro P.R., Tortosa L. Key agreement protocols for distributed secure multicast over the ring $E_p^{(m)}$. *WIT Trans. Inf. Commun. Technol.*, 2013, vol. 45, pp. 13–24. <https://doi.org/10.2495/DATA130021>.
12. Zhang Y. Cryptanalysis of a key exchange protocol based on the ring $E_p^{(m)}$. *Appl. Algebra Eng., Commun. Comput.*, 2018, vol. 29, no. 2, pp. 103–112. <https://doi.org/10.1007/s00200-017-0332-0>.
13. Nasrutdinov M.F., Tronin S.N. On some class of formal matrix ring. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 3, pp. 677–681. <https://doi.org/10.1134/S1995080222060269>.

⟨ **Для цитирования:** Насрутдинов М.Ф. Протокол обмена ключами над кольцом формальных матриц $B_n(R, P)$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 52–57. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.52-57>. ⟩

⟨ **For citation:** Nasrutdinov M.F. A key exchange protocol based on the ring $B_n(R, P)$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 52–57. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.52-57>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 621.7

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.58-73

**ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ВНУТРЕННЕГО КАНАЛА
АНОДНОГО УЗЛА НА СКОРОСТЬ
ПЛАЗМЕННОГО ПОТОКА**

*Р.А. Окулов^{1,2}, В.А. Крашанинин¹, Б.Р. Гельчинский¹,
А.А. Ремпель¹*

¹*Институт металлургии Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, 620016, Россия*

²*Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, 620002, Россия*

Аннотация

Охарактеризовано влияние формы внутреннего канала анодного узла плазмотрона на скорость плазменного потока. Рассмотрены три варианта формы анодного узла с конфузорной частью в виде конической поверхности длиной 50 мм: первый – с переходом диаметров с 12 до 6 мм; второй – с переходом диаметров с 12 до 8 мм; третий – с переходом диаметров с 12 до 10 мм. Выполнен компьютерный эксперимент с последующей верификацией путем проведения натурного эксперимента на лабораторной плазменной установке. Верификация показала удовлетворительную сходимость и согласуется с данными, представленными в литературе. Компьютерный эксперимент проведен с помощью метода конечных элементов. Выполнен литературный обзор конструкций плазменных установок, применяемых для получения порошков, нанесения функциональных покрытий и модификации поверхностей, а также программных пакетов, используемых для реализации метода конечных элементов при решении подобных задач. Разработаны рекомендации, имеющие практическое значение для потребителей и разработчиков плазмотронного оборудования. Определены формы анодного узла, позволяющие достигать сверхзвукового и дозвукового режимов течения плазменного потока.

Ключевые слова: порошок, функциональное покрытие, модификация поверхности, пламенный метод, скорость потока, дозвуковая плазма, сверхзвуковая плазма, анодный узел, сопло

Введение

В настоящее время растет интерес к применению в производственной практике аддитивных технологий в качестве способа создания деталей сложной конфигурации [1]. Качество изделий, полученных этим способом, зависит от свойств порошков, применяемых в качестве сырья для 3D-принтеров. Плазменное распыление является одной из эффективных технологий получения порошков с требуемыми свойствами [2]. Порошки для печати требуют высокой степени сферичности, соответствующего гранулометрического состава для обеспечения необходимой сыпучести [3]. Кроме того, плазменный метод получения порошков является привлекательным с точки зрения его экологичности [4]. Плазменным методом получают

и функциональные покрытия [5]. Использование различных способов напыления оказывает существенное влияние на микроструктуру и свойства покрытий [6]. Благодаря особенностям процесса плазменного напыления можно создавать покрытия на основе меди, алюминия, титана и т. д. [7]. Полученные таким способом покрытия позволяют повысить эксплуатационные свойства изделий [8]. Нанесенные плазменным методом покрытия нашли широкое применение для создания антикоррозионных покрытий [9]. Плазменным методом производят модификацию поверхности в нефтегазовой сфере [10]. Плазменная модификация улучшает трибологические свойства изделий, благотворно влияя на износостойкость и продлевая срок их эксплуатации [11]. Благодаря плазменной модификации можно достигать упрочнения поверхности обрабатываемых изделий [12]. Широкое применение в производственной практике нашло азотирование поверхности плазменным методом для придания изделиям стойкости к окислению [13].

От параметров плазменного потока зависят свойства получаемых порошков, функциональных покрытий и модифицируемых поверхностей. Среди параметров плазменного потока особую роль играет скорость. Известны конструкции плазменных головок, позволяющих реализовать режим с дозвуковым [14, 15] и сверхзвуковым [16–18] плазменными течениями. Скорость плазменного потока зависит от формы внутреннего канала плазменной головки, которая описана формой составных частей [19].

В научной литературе представлены конструкции плазмотронов, которые для достижения сверхзвукового режима течения плазменного потока применяют сопло [20], например, параболическое сопло Лаваля [21].

Применение сопла имеет ряд недостатков, например, возникают сложности с эффективностью охлаждения подобных конструкций плазмотронов. Известны конструкции плазменных установок, в которых сопло не используется в качестве отдельного элемента плазмотрона. Вместо него применяют плазменную головку, в анодном узле которой канал выполнен в виде конического конфузора [22] или диффузора [23].

В литературе широко представлен также тезис о том, что прогнозирование воздействия формы составных частей, описывающих внутренний канал плазменной головки, на скорость плазменного потока позволяет достигать требуемых свойств получаемых порошков, наносимых покрытий и модифицируемых поверхностей. Таким образом, изучение влияния формы внутреннего канала плазменной головки на скорость плазменного потока является актуальной задачей научного исследования и имеет практическую ценность для производителей и потребителей плазмотронного оборудования.

В настоящей работе поставлена задача определить, как влияет форма внутреннего канала анодного узла на скорость плазменного потока. Для этого выбрана конструкция плазмотрона, в анодном узле которого внутренний канал выполнен в виде конфузорного конического участка. Данная конструкция выбрана исходя из простоты изготовления, например по сравнению с применением сопла Лаваля, и обслуживания, например по сравнению с конструкциями плазмотронов, в которых предусмотрено сопло-насадок, выполненное в виде отдельного узла, что предполагает наличие дополнительных коммуникаций для охлаждения. Рассмотрены три варианта форм анодного узла с конфузорной частью в виде конической поверхности длиной 50 мм и входным диаметром 12 мм: первый – с выходным диаметром 6 мм, второй – с выходным диаметром 8 мм и третий – с выходным диаметром 10 мм.

Поставленная цель достигалась путем проведения компьютерного эксперимента с последующей верификацией при проведении натурных экспериментов. Компьютерный эксперимент выполнен при помощи метода конечных элементов, зарекомендовавшего себя в производственной практике при решении подобных задач.

В литературе описаны работы, в которых метод конечных элементов применен для моделирования нанопорошков заданных размеров с учетом связи между физическими условиями в промышленной установке и геометрическими свойствами получаемых частиц [24]. Для исследования свойств получаемых порошков плазменным методом используются пакеты COMSOL [25], ANSYS [26] и FLOW-3D [27]. Применение численного метода для изучения свойств функциональных покрытий из высокотропных сплавов, например GdTbDyHoSc и GdTbDyHoY, описано в обзорной статье [28].

Для высокотропных сплавов на основе редкоземельных элементов исключительно важны антикоррозионные покрытия, которые наносятся плазменным методом. Среди пакетов прикладных программ, применяемых для проведения расчетов по определению характеристик функциональных покрытий плазменным методом, используются ANSYS [29], JmarPro [30] и SolidWorks [31]. Численный метод для исследования модификации поверхности плазменным методом применен нами в [32–34].

1. Описание компьютерного эксперимента

Применен пакет Flow Simulation SolidWorks, версия 2016 г. (ссылка на источник программного пакета: www.solidworks.com), позволяющий реализовать метод конечных элементов. Создана компьютерная модель лабораторной плазменной установки МАК-10, собранной на базе Института металлургии Уральского отделения Российской академии наук. Эта установка применяется для получения порошков, нанесения функциональных покрытий и модификации поверхностей. Принципиальная схема МАК-10 представлена на рис. 1 и более подробно описана в [35].

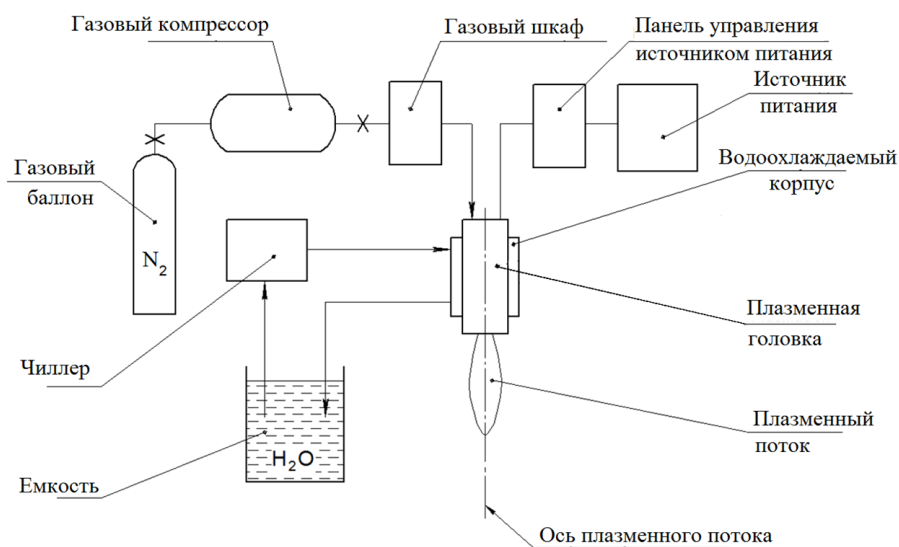


Рис. 1. Принципиальная схема МАК-10

МАК-10 – это плазменная установка косвенного действия, в состав которой входит источник питания мощностью 10 кВт (напряжение 40 В, ток 250 А). Поперечное сечение плазменной головки МАК-10 представлено на рис. 2 и более подробно описано в [36].

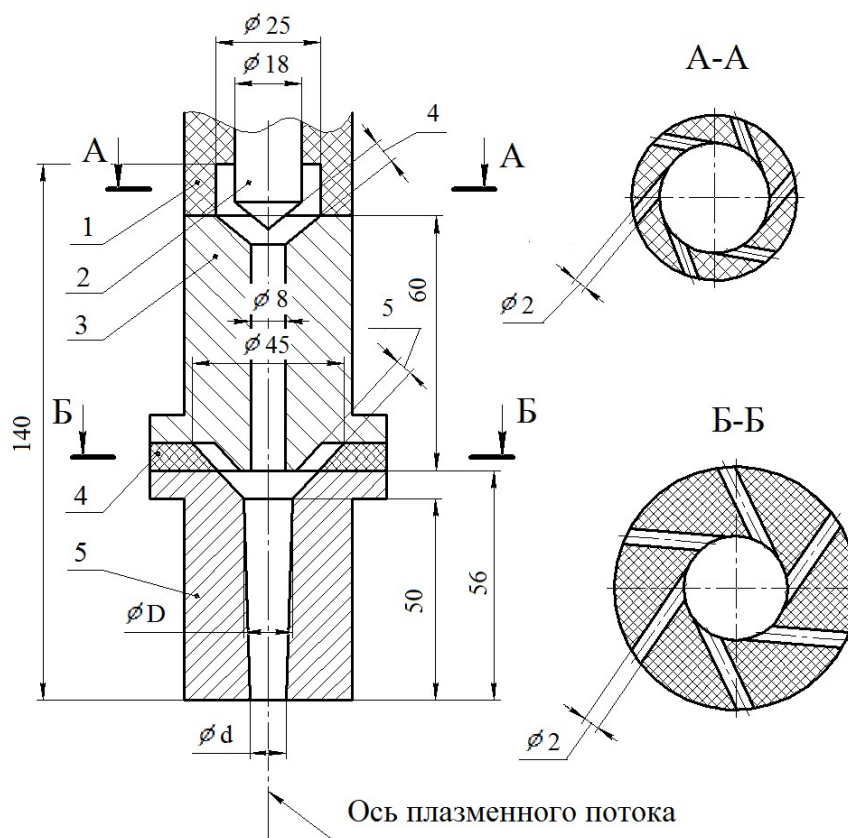


Рис. 2. Схема поперечного сечения плазменной головки: 1 – верхний завихритель, 2 – катодный узел, 3 – межэлектродная вставка, 4 – нижний завихритель, 5 – анодный узел, D – диаметр входного участка в конфузурную часть анода, d – диаметр выходного участка из конфузурной части анода

Программный пакет Flow Simulation зарекомендовал себя как удобный инструмент для вычислительной гидродинамики (computational fluid dynamics). При решении численным методом применили уравнения Эйлера и Навье–Стокса. В основе сходимости численного метода был метод спектральных элементов. Размер конечных элементов сетки разбиения выбран таким образом, чтобы в наиболее узком месте трехмерной компьютерной модели плазмотрона (канал ввода плазмообразующего газа завихрителя диаметром 2 мм) размещались как минимум 8 элементов. Сделано это для учета поверхностных, подповерхностных и срединных процессов, происходящих в потоке. Размер конечных элементов сетки разбиения составлял 0.236 мм.

В качестве плазмообразующего газа был применен технический азот первого сорта чистоты 99.6% по ГОСТу 9293. Массовый расход плазмообразующего газа составлял 50 л/мин.

Граничные условия, использованные в расчетах, следующие: на входном участке в газопроводы закрутки (верхний и нижний) давление составляло 0.3 МПа; радиальная составляющая скорости газового потока подаваемого в газопроводы закрутки принята равной нулю, температура подаваемого в закрутки газа 300 К; на внешних поверхностях анода, межэлектродной вставки и катода локальный тепловой поток определяется тепловым излучением с учетом водного охлаждения при помощи чиллера холодопроизводительностью 6.3 кВт; для вольфрамового сердечника катода используется коэффициент излучения 0.3; материал элементов конструкции плазменной головки (анод, межэлектродная вставка) – медь М1 по ГОСТу 859; на всех границах, кроме катода и анода, предполагается нулевая плотность тока. Плазменный поток направлен в воздушное пространство.

При проведении компьютерного эксперимента были использованы следующие допущения:

1. Процесс течения газа является изоэнтальпийным и адиабатическим.
2. Массовый расход газа одинаков во всех поперечных сечениях потока.
3. Газовое течение является установившимся, в любой фиксированной точке анодного узла все параметры потока постоянны во времени и изменяются вдоль его оси. Во всех точках поперечного сечения параметры потока одинаковы, и вектор скорости газа параллелен оси симметрии.

4. Влияние внешних сил, в том числе гравитационной, пренебрежимо мало.

Фактор изоэнтальпийного расширения (показатель адиабаты) азота зависит от температуры и определяется по формуле [37]: $\gamma = 1.472 - 2 \cdot 10^{-4} T$, где T – абсолютная температура газа на выходе из конфузора анодного узла (определяется исходя из мощности плазмотрона), К.

Согласно уравнению Сен-Венана – Ванцеля [38] скорость газа на выходе из конфузора анодного узла определяется в виде

$$V_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{T R}{M} \left(1 - (P_e/P)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)},$$

где R – универсальная газовая постоянная, равная 8.31446261815324 Дж/(моль · К); M – молярная масса газа (для азота принята равной 0.028 кг/моль); P_e – абсолютное давление газа на выходе из конфузора анодного узла, принята равной 98100 Па; P – абсолютное давление газа на входе из конфузора анодного узла (соответствует значению из пересчета массового расхода плазмообразующего газа), Па.

Скорость звука в газовой среде зависит от ее температуры [39]: $C = \sqrt{\gamma RT/M}$.

2. Итоги проведенного компьютерного эксперимента

Данные по определению скорости на оси плазменного потока для трех рассмотренных вариантов форм каналов анодного узла, полученные в результате компьютерного эксперимента, представлены на рис. 3, где начало отсчета расположено на выходе из анодного узла. На рис. 4б представлена картина распределения скорости плазменного потока в поперечном сечении для анодного узла с переходом конфузорного конического участка с диаметра 12 мм до диаметра 6 мм.

Как видно из представленных данных, скорость плазменного потока зависит от формы конфузорной части анодного узла. Наибольшее значение скорости достигается при использовании формы анодного узла с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 6 мм. При использовании такого анодного узла возможно достижение сверхзвукового течения плазменного потока с образованием «бочек уплотнения», представленных на рисунке 4б. Сверхзвуковое течение

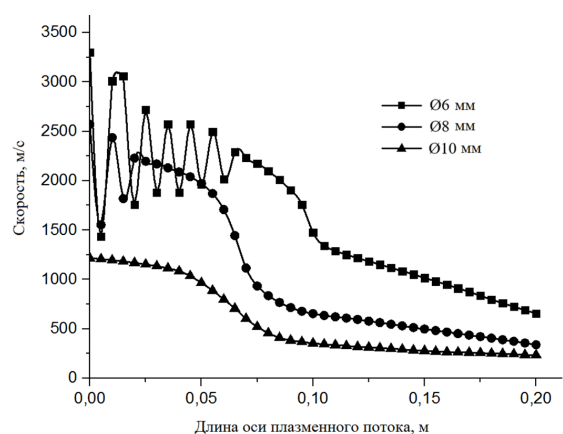


Рис. 3. Распределение скорости в центре плазменного потока вдоль его оси в зависимости от формы анодного узла

плазменного потока наблюдается при использовании анодного узла с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 8 мм. Длина участка плазменного потока со значением скорости, превышающей сверхзвуковую, у конструкции анодного узла с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 8 мм примерно в два раза короче по сравнению с анодным узлом с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 6 мм. При использовании анодного узла с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 10 мм значение скорости снижается приблизительно в три раза по сравнению с первым вариантом, и реализуется режим дозвукового течения плазменного потока. Все три варианта используемых конфигураций рассмотренных анодных узлов имеют общую зависимость и условно могут быть разделены на три области: первая, расположенная у выхода из анодного узла; вторая, которая расположена за первой и характеризуется резким снижением скорости плазменного потока; третья расположена на конце плазменного потока и может быть аппроксимирована линейной функцией. По мере удаления от плазменной головки скорость плазменного потока для трех рассмотренных случаев снижается.

С учетом вышеизложенного пришли к выводу о том, что дозвуковой и сверхзвуковой режимы течения плазменного потока можно достигать с использованием анода, внутренняя поверхность которого имеет вид конического конфузорного участка. Данное заключение имеет практическую пользу для производителей и потребителей технологического оборудования, потому что сверхзвуковой режим течения плазмы достигнут без использования дополнительного узла в виде сопла-насадка сложной формы наподобие сопла Лавалья. Использование представленной в рамках данной работы формы анода значительно облегчает эксплуатацию и обслуживание технологического оборудования, а также положительно влияет на сокращение габаритных размеров, снижает себестоимость производства оборудования за счет сокращения количества элементов конструкции (в том числе путем сокращения дополнительных коммуникаций) и простоты их изготовления.

Рекомендуется применять набор анодных узлов с разной конфигурацией формы внутреннего канала, при смене которых можно достичь требуемые параметры скорости плазменного потока в зависимости от поставленных задач. Для процессов получения порошков требуется плазменный поток более низкой скорости, который

возможен при использовании анода с конфузорной частью с переходом диаметров с 12 до 10 мм. Это обусловлено применением приемной камеры (реактора), так как использование сверхзвукового плазменного потока приводит к увеличению ее габаритных размеров вследствие необходимости предотвращения налипания расплавленных частиц производимого порошка на стенки, а также к росту расхода инертных газов для заполнения. В случае применения плазмотронного оборудования для задач нанесения функциональных покрытий требуется применять плазменный поток более высокой скорости, то есть использовать анод с конфузорной частью с переходом диаметров с 12 до 6 мм. Представленную компьютерную модель можно использовать для определения рационального положения подложки, на которую наносится функциональное покрытие. То же справедливо по отношению к процессам модификации поверхности, поскольку результат термообработки зависит от удаленности обрабатываемой поверхности от плазмотрона, угла между ней и осью плазменного потока, ширины потока. Представленная компьютерная модель может быть использована для прогнозирования результата в зависимости от формы внутреннего канала анода на этапе проектирования процессов.

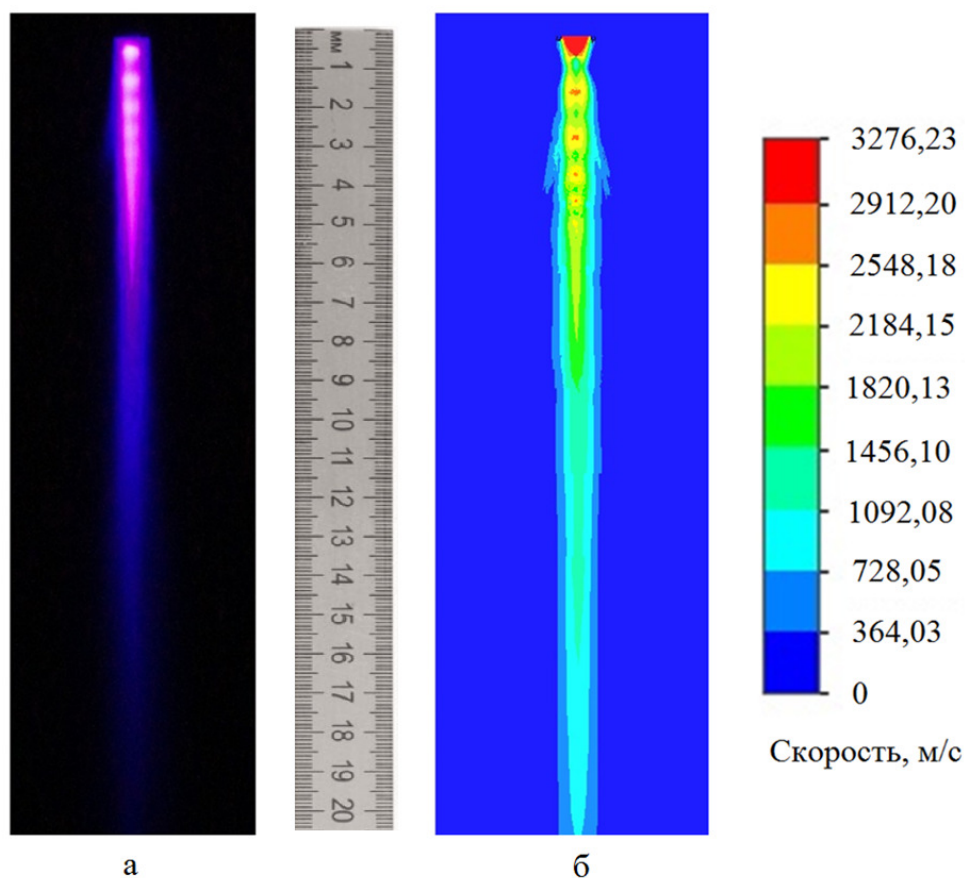


Рис. 4. Результаты исследования скорости плазменного потока по результатам натурального (а) и компьютерного (б) экспериментов для случая применения анодного узла с переходом диаметров входного участка к выходному с 12 до 6 мм

3. Проведение натурного эксперимента и верификация

С целью верификации результатов компьютерного эксперимента был проведен натурный. Для этого был выполнен сравнительный анализ картины распределения скорости в поперечном сечении вдоль оси плазменной головки, полученный в результате компьютерного эксперимента с фотографией плазменного потока, выполненной при функционировании МАК-10. Данные, полученные при проведении натурного эксперимента, представлены на рис. 4а. Был использован анодный узел с переходом конфузорного конического участка с диаметра 12 мм до диаметра 6 мм.

Очертания плазменного потока имеют схожую картину. Сравнительный анализ результатов вычисления скоростей аналитическим способом с данными, полученными в результате проведения компьютерного эксперимента, показал, что относительное отклонение не превышает 8,4%. Итоги проведенного исследования согласуются в допустимых пределах и соответствуют описанным в литературе (см., например, [40]). Более подробное описание верификации компьютерного эксперимента представлено в работе [41]. На рис. 4 можно видеть образование «бочек» Маха. Такое явление можно наблюдать в сверхзвуковом потоке, когда скорость центральной части на участках при переходе через скачки уплотнения в результате перепада давления становится дозвуковой.

Заключение

Создана компьютерная модель формы каналов анодного узла плазменной головки, позволяющей формировать дозвуковой и сверхзвуковой режимы течения плазменного потока. Установлены размеры анодного канала, при которых дозвуковой режим течения плазменного потока переходит в сверхзвуковой. Представленную компьютерную модель можно использовать для прогнозирования распределения скоростей плазменной струи с целью определения рациональной формы анодного узла плазменной головки в зависимости от поставленных задач. Для получения порошков рекомендуется применять конфигурацию анодного узла с формой конфузорной части, обеспечивающей наименьшее значение скорости плазменного потока, поскольку такое снижение скорости позволяет сократить габариты приемной камеры. В процессе нанесения функциональных покрытий, напротив, рекомендуется применять конфигурацию анодного узла, обеспечивающего наибольшую скорость, поскольку такая конструкция благотворно влияет на свойства наносимых покрытий.

При помощи представленных данных рекомендуется определять рациональное положение подложки, на которую наносится покрытие, за счет выбора следующих параметров: удаленность от плазмотрона, угол наклона плазменного потока относительно подложки, ширина потока. Рациональное положение подложки можно определить с помощью построенной компьютерной модели для модификации поверхности плазмотрона.

Проведена верификация результатов компьютерного эксперимента, сравнительный анализ полученных результатов показал удовлетворительную сходимость и согласование с результатами проведенных исследований, описанных в литературе. Представленные данные имеют практическую ценность для потребителей и разработчиков плазмотронного оборудования.

Благодарности. Работа выполнена в рамках госзадания Института металлургии Уральского отделения РАН (тема № 122020100287-1 ЕГИСУ НИОКТР).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Fu P., Wang N., Liao H., Xu W., Peng L., Chen J., Hu G., Ding W.* Microstructure and mechanical properties of high strength Mg-15Gd-1Zn-0.4Zr alloy additive-manufactured by selective laser melting process // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2021. V. 31, No 7. P. 1969–1978. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(21\)65630-3](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(21)65630-3).
2. *Yurtkuran E., Ünal R.* Theoretical and experimental investigation of Tialloy powder production using low-power plasma torches // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*. 2022. V. 32, No 1. P. 175–191. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(21\)65786-2](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(21)65786-2).
3. *Bao Q., Yang Y., Wen X., Guo L., Guo Z.* The preparation of spherical metal powders using the high-temperature remelting spheroidization technology // *Mater. Des.* 2021. V. 199. Art. 109283. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109382>.
4. *Amarnath P., Nandy N., Indumathy B., Yugeswaran S.* Study on CO₂ based thermal plasma torch and its effective utilization for material processing in atmospheric pressure // *J. CO₂ Util.* 2022. V. 66. Art. 102290. <https://doi.org/10.1016/j.jcou.2022.102290>.
5. *Kornienko E., Gulyaev I., Smirnov A., Nikulina A., Ruktuev A., Kuzmin V., Tuezov A.* Microstructure and properties of Ni-Al coatings obtained by conventional and high-velocity atmospheric plasma spraying // *Results Surf. Interfaces*. 2022. V. 6. Art. 100038. <https://doi.org/10.1016/j.rsufi.2022.100038>.
6. *Tang L., Kang J., He P., Ding S., Chen S., Liu M., Xiong Y., Ma G., Wang H.* Effects of spraying conditions on the microstructure and properties of NiCrBSi coatings prepared by internal rotating plasma spraying // *Surf. Coat. Technol.* 2019. V. 374. P. 625–633. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2019.06.056>.
7. *Li W., Cao C., Yin S.* Solid-state cold spraying of Ti and its alloys: A literature review // *Prog. Mater. Sci.* 2020. V. 110. Art. 100633. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2019.100633>.
8. *Miao Y., Zhu H., Gao P., Li L.* The effects of spraying power on microstructure, magnetic and dielectric properties of plasma sprayed cobalt ferrite coatings // *J. Mater. Res. Technol.* 2020. V. 9, No 6. P. 14237–14243. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.10.006>.
9. *Morończyk B., Ura-Bińczyk E., Kuroda S., Jaroszewicz J., Molak R.M.* Microstructure and corrosion resistance of warm sprayed titanium coatings with polymer sealing for corrosion protection of AZ91E magnesium alloy // *Surf. Coat. Technol.* 2019. V. 363. P. 142–151. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2019.02.023>.
10. *Malyshev V.N.* Oil and gas steels surface hardening investigation by anodic plasma electrolytic treatment // *Chem. Eng. Process. – Process Intensif.* 2022. V. 179. Art. 109055. <https://doi.org/10.1016/j.cep.2022.109055>.
11. *Guo D., Yu D., Zhang P., Duan Y., Zhang B., Zhong Y., Qiu J.* Laminar plasma jet surface hardening of the U75V rail steel: Insight into the hardening mechanism and control scheme // *Surf. Coat. Technol.* 2020. V. 394. Art. 125857. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.125857>.
12. *Guo D., Yu D., Zhang P., Song W., Zhang B., Peng K.* Laminar plasma jet surface hardening of P20 mold steel: Analysis on the wear and corrosion behaviors // *Surf. Coat. Technol.* 2021. V. 415. Art. 127129. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.127129>.
13. *Sun J., Li J., Xie J.M., Yang Y., Wu W.P., Zhou X., Zhang S.H., Wang Q.M.* Properties of rapid arc discharge plasma nitriding of AISI 420 martensitic stainless: Effect of nitriding temperatures // *J. Mater. Res. Technol.* 2022. V. 19. P. 4804–4814. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.07.028>.

14. *Liu S.-H., Trelles J.P., Li C.-J., Li C.-X., Guo H.-B.* A review and progress of multiphase flows in atmospheric and low pressure plasma spray advanced coating // *Mater. Today Phys.* 2022. V. 27. Art. 100832. <https://doi.org/10.1016/j.mtphys.2022.100832>.
15. *Okulov R.A., Popov E.V., Gelchinsky B.R., Rempel A.A.* Development of the computer model of the plasma installation // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 2064, No 1. Art. 012044. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2064/1/012044>.
16. *Zou K., Zou J.-P., Deng C.-M., Liu M., Liu X.-Z., Zhao R.-M., Li S.-H., Zhu R.-B., Gao D.* Preparation and properties of supersonic atmospheric plasma sprayed TiB₂-SiC coating // *Trans. Nonferrous Met. Soc. China.* 2021. V. 31, No 1. P. 243–254. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(20\)65491-7](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(20)65491-7).
17. *Shuai K., Zhang Y., Fu Y., Guo X., Li T., Li J.* MoSi₂-HfC/TaC-HfC multi-phase coatings synthesized by supersonic atmospheric plasma spraying for C/C composites against ablation // *Corros. Sci.* 2021. V. 193. Art. 109884. <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109884>.
18. *Wang Z., Huang Y., Guo W., Shan D., Xing Z., Wang H., He G.* Effects of pulsed magnetic field on the flight and impact of supersonic plasma spraying particles and the properties of coatings // *Mater. Des.* 2022. V. 223. Art. 111127. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.111127>.
19. *Okulov R., Ilinykh S., Zakharov M., Akhmetin S.* Mathematical model of the process of the plasma atomizing of the rod electrode to produce of titanium powder // *Proc. 2020 Int. Conf. on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). IEEE*, 2020. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253292>.
20. *Ishimoto J., Abe H., Ochiai N.* Computational prediction of cryogenic micro-nano solid nitrogen particle production using laval nozzle for physical photo resist removal-cleaning technology // *Phys. Procedia.* 2015. V. 67. P. 607–612. <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.06.103>.
21. *Patel M., Thomas J., Hem J.C.* Experimental investigation of rarefied flows through supersonic nozzles // *Vacuum.* 2023. V. 211. Art. 111909. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.111909>.
22. *Li J., Zhang X., Shen J., Ran T., Chen P., Yin Y.* Dissociation of CO₂ by thermal plasma with contracting nozzle quenching // *J. CO₂ Util.* 2017. V. 21. P. 72–76. <https://doi.org/10.1016/j.jcou.2017.04.003>.
23. *Lazarev A.V., Semenov T.A., Belega E.D., Gordienko V.M.* Dynamics of expanding gas from supercritical state in conical nozzle and cluster formation // *J. Supercrit. Fluids.* 2022. V. 187. Art. 105631. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2022.105631>.
24. *Korenchenko A.E., Vorontsov A.G., Okulov R.A., Gel'chinskii B.R.* Simulation of the self-assembly of metal nanoclusters // *Russ. Metall. (Metally).* 2022. V. 2022, No 8. P. 927–932. <https://doi.org/10.1134/S0036029522080067>.
25. *AlShunaifi I.A., Elaissi S., Ghiloufi I., Alterary S.S., Alharbi A.A.* Modelling of a non-transferred plasma torch used for nano-silica powders production // *Appl. Sci.* 2021. V. 11, No 21. Art. 9842. <https://doi.org/10.3390/app11219842>.
26. *Yin Z., Yu D., Zhang Q., Yang S., Yang T.* Experimental and numerical analysis of a reverse-polarity plasma torch for plasma atomization // *Plasma Chem. Plasma Process.* 2021. V. 41, No 5. P. 1471–1495. <https://doi.org/10.1007/s11090-021-10181-8>.
27. *Cui Y., Zhao Y., Numata H., Yamanaka K., Bian H., Aoyagi K., Chiba A.* Effects of process parameters and cooling gas on powder formation during the plasma rotating electrode process // *Powder Technol.* 2021. V. 393. P. 301–311. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.07.062>.

28. *Gelchinski B.R., Balyakin I.A., Yuryev A.A., Rempel A.A.* High-entropy alloys: Properties and prospects of application as protective coatings // *Russ. Chem. Rev.* 2022. V. 91, No 6. Art. RCR5023. <https://doi.org/10.1070/RCR5023>.
29. *Li Q., Zhang N., Gao Y., Qing Y., Zhu Y., Yang K., Zhu J., Wang H., Ma Z., Gao L., Liu Y., He J.* Effect of the core-shell structure powders on the microstructure and thermal conduction property of YSZ/Cu composite coatings // *Surf. Coat. Technol.* 2021. V. 424. Art. 127658. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.127658>.
30. *Dong X.-Y., Luo X.-T., Zhang S.-L., Li C.-J.* A novel strategy for depositing dense self-fluxing alloy coatings with sufficiently bonded splats by one-step atmospheric plasma spraying // *J. Therm. Spray Technol.* 2020. V. 29, No 1. P. 173–184. <https://doi.org/10.1007/s11666-019-00943-4>.
31. *Golewski P., Sadowski T.* Technological and strength aspects of layers made of different powders laminated on a polymer matrix composite substrate // *Molecules.* 2022. V. 27, No 4. Art. 1168. <https://doi.org/10.3390/molecules27041168>.
32. *Schramm A., Jafarpour S.M., Schimpf C., Biermann H., Dalke A.* Effect of bias plasma on active screen nitrocarburising response of AISI 420 martensitic stainless steel // *Vacuum.* 2022. V. 205. Art. 111389. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2022.111389>.
33. *Quinones D., Braun K., Meirner A., Chassé T.* Comparing chemical and plasma modification of stainless steel surfaces – relevance for adsorption of adhesion promotor vinyltrimethoxysilane (VTMS) // *Appl. Surf. Sci.* 2022. V. 575. Art. 151674. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2021.151674>.
34. *Deng T., Li J., Zheng Z., Tian W., Li G.* Influence of plasma beam polishing process parameters on surface roughness of AISI 304 stainless steel // *Appl. Surf. Sci.* 2022. V. 585. Art. 152741. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2022.152741>.
35. *Okulov R.A., Krashaninin V.A., Popov E.V.* Plasma jet stream simulation for formation coating and powder manufacturing processes // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021. V. 1954, No 1. Art. 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1954/1/012033>.
36. *Okulov R.A., Sarsadskikh K.I., Ilinykh S.A., Zakharov M.N.* Effect of the plasma-forming gas consumption on processes of plasma spray coating and metal powder production // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. V. 1281, No 1. Art. 012058. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1281/1/012058>.
37. *Карташева М.А.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в областях отрыва потока за элементами летательных аппаратов: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18. Челябинск: Юж.-Урал. гос. ун-т. 2008. 168 с.
38. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
39. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
40. *Mungiguerra S., Di Martino G.D., Savino R., Zoli L., Silvestroni L., Sciti D.* Characterization of novel ceramic composites for rocket nozzles in high-temperature harsh environments // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 2020. V. 163. Art. 120492. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120492>.
41. *Okulov R.A., Krashaninin V.A., Popov E.V.* Influence of the plasmatron anode length in the processes of powder production and coating // *AIP Conf. Proc.* 2022. V. 2456, No 1. Art. 020035. <https://doi.org/10.1063/5.0074612>.

Поступила в редакцию 6.10.2023

Принята к публикации 19.01.2024

Окулов Роман Александрович, старший научный сотрудник лаборатории «порошковых и композиционных материалов» Института металлургии; доцент института фундаментального образования

Уральское отделение РАН

ул. Амундсена, д. 101, г. Екатеринбург, 620016, Россия

Уральский федеральный университет имени первого Президента России

Б.Н. Ельцина

ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

E-mail: okulov.roman@gmail.com

Крашанин Владимир Александрович, заведующий лабораторией «порошковых и композиционных материалов» Института металлургии

Уральское отделение РАН

ул. Амундсена, д. 101, г. Екатеринбург, 620016, Россия

E-mail: krash_55@mail.ru

Гельчинский Борис Рафаилович, руководитель отдела «материаловедения» Института металлургии

Уральское отделение РАН

ул. Амундсена, д. 101, г. Екатеринбург, 620016, Россия

E-mail: brg47@list.ru

Ремпель Андрей Андреевич, директор Института металлургии

Уральское отделение РАН

ул. Амундсена, д. 101, г. Екатеринбург, 620016, Россия

E-mail: rempel.imet@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 58–73

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.58-73

Influence of the Shape of the Anode Assembly Inner Channel on Plasma Flow Velocity

R.A. Okulov^{a,}, V.A. Krashanin^{a,**}, B.R. Gelchinsky^{a***}, A.A. Rempel^{a****}*

^a *Institute of Metallurgy, Ural Branch, Russian Academy of Sciences,
Yekaterinburg, 620016 Russia*

^b *Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin,
Yekaterinburg, 620002 Russia*

E-mail: *okulov.roman@gmail.com, **krash_55@mail.ru,

***brg47@list.ru, ****rempel.imet@mail.ru

Received October 6, 2023; Accepted January 19, 2024

Abstract

This article considers how the shape of the inner channel in the anode assembly affects plasma flow velocity in a plasma torch. Three different shapes of the anode assembly were analyzed, all with a conical confusor part of 50 mm in length: with a diameter transition from 12 to 6 mm, from 12 to 8 mm, and from 12 to 10 mm. A computer experiment was performed using the finite element method and then validated by the subsequent full-scale experiment

on a laboratory plasma unit. The obtained results were verified. The verification outcomes showed a satisfactory convergence and were consistent with the published data. A review of the existing plasma unit designs for powder production, application of functional coatings, and surface modification was carried out. The software packages implementing the finite element method to solve these problems were examined. The study yielded practical recommendations for consumers and developers of plasma equipment and identified the shapes of the anode assembly enabling both supersonic and subsonic plasma flow regimes.

Keywords: powder, functional coating, surface modification, flame method, flow velocity, subsonic plasma, supersonic plasma, anode assembly, nozzle

Acknowledgments. This study was carried out as part the state assignment to the Institute of Metallurgy, Ural Branch, Russian Academy of Sciences (project no. 122020100287-1 EGISU NIOKTR).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Schematic diagram of the MAK-10 unit.

Fig. 2. Scheme of the plasma head cross section: 1 – upper swirler, 2 – cathode assembly, 3 – interelectrode insert, 4 – lower swirler, 5 – anode assembly, D – diameter of the inlet section into the confusor part of the anode, d – diameter of the outlet section from the confusor part of the anode.

Fig. 3. Velocity profile in the center of the plasma flow along its axis depending on the shape of the anode assembly.

Fig. 4. Results of the study on plasma flow velocity based on the in-situ (a) and computer (b) experiments for the anode assembly with a transition of inlet section diameters to outlet section diameters from 12 to 6 mm.

References

1. Fu P., Wang N., Liao H., Xu W., Peng L., Chen J., Hu G., Ding W. Microstructure and mechanical properties of high strength Mg-15Gd-1Zn-0.4Zr alloy additive-manufactured by selective laser melting process. *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2021, vol. 31, no. 7, pp. 1969–1978. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(21\)65630-3](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(21)65630-3).
2. Yurtkuran E., Unal R. Theoretical and experimental investigation of Tialloy powder production using low-power plasma torches. *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2022, vol. 32, no. 1, pp. 175–191. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(21\)65786-2](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(21)65786-2).
3. Bao Q., Yang Y., Wen X., Guo L., Guo Z. The preparation of spherical metal powders using the high-temperature remelting spheroidization technology. *Mater. Des.*, 2021, vol. 199, art. 109283. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109382>.
4. Amarnath P., Nandy N., Indumathy B., Yugeswaran S. Study on CO₂ based thermal plasma torch and its effective utilization for material processing in atmospheric pressure. *J. CO₂ Util.*, 2022, vol. 66, art. 102290. <https://doi.org/10.1016/j.jcou.2022.102290>.
5. Kornienko E., Gulyaev I., Smirnov A., Nikulina A., Ruktuev A., Kuzmin V., Tuezov A. Microstructure and properties of Ni-Al coatings obtained by conventional and high-velocity atmospheric plasma spraying. *Results Surf. Interfaces*, 2022, vol. 6, art. 100038. <https://doi.org/10.1016/j.rsurfi.2022.100038>.
6. Tang L., Kang J., He P., Ding S., Chen S., Liu M., Xiong Y., Ma G., Wang H. Effects of spraying conditions on the microstructure and properties of NiCrBSi coatings prepared by internal rotating plasma spraying. *Surf. Coat. Technol.*, 2019, vol. 374, pp. 625–633. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2019.06.056>.

7. Li W., Cao C., Yin S. Solid-state cold spraying of Ti and its alloys: A literature review. *Prog. Mater. Sci.*, 2020, vol. 110, art. 100633. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2019.100633>.
8. Miao Y., Zhu H., Gao P., Li L. The effects of spraying power on microstructure, magnetic and dielectric properties of plasma sprayed cobalt ferrite coatings. *J. Mater. Res. Technol.*, 2020, vol. 9, no. 6, pp. 14237–14243. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2020.10.006>.
9. Morończyk B., Ura-Bińczyk E., Kuroda S., Jaroszewicz J., Molak R.M. Microstructure and corrosion resistance of warm sprayed titanium coatings with polymer sealing for corrosion protection of AZ91E magnesium alloy. *Surf. Coat. Technol.*, 2019, vol. 363, pp. 142–151. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2019.02.023>.
10. Malyshev V.N. Oil and gas steels surface hardening investigation by anodic plasma electrolytic treatment. *Chem. Eng. Process. – Process Intensif.*, 2022, vol. 179, art. 109055. <https://doi.org/10.1016/j.cep.2022.109055>.
11. Guo D., Yu D., Zhang P., Duan Y., Zhang B., Zhong Y., Qiu J. Laminar plasma jet surface hardening of the U75V rail steel: Insight into the hardening mechanism and control scheme. *Surf. Coat. Technol.*, 2020, vol. 394, art. 125857. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.125857>.
12. Guo D., Yu D., Zhang P., Song W., Zhang B., Peng K. Laminar plasma jet surface hardening of P20 mold steel: Analysis on the wear and corrosion behaviors. *Surf. Coat. Technol.*, 2021, vol. 415, art. 127129. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.127129>.
13. Sun J., Li J., Xie J.M., Yang Y., Wu W.P., Zhou X., Zhang S.H., Wang Q.M. Properties of rapid arc discharge plasma nitriding of AISI 420 martensitic stainless: Effect of nitriding temperatures. *J. Mater. Res. Technol.*, 2022, vol. 19, pp. 4804–4814. <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.07.028>.
14. Liu S.-H., Trelles J.P., Li C.-J., Li C.-X., Guo H.-B. A review and progress of multiphase flows in atmospheric and low pressure plasma spray advanced coating. *Mater. Today Phys.*, 2022, vol. 27, art. 100832. <https://doi.org/10.1016/j.mtphys.2022.100832>.
15. Okulov R.A., Popov E.V., Gelchinsky B.R., Rempel A.A. Development of the computer model of the plasma installation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 2064, no. 1, art. 012044. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2064/1/012044>.
16. Zou K., Zou J.-P., Deng C.-M., Liu M., Liu X.-Z., Zhao R.-M., Li S.-H., Zhu R.-B., Gao D. Preparation and properties of supersonic atmospheric plasma sprayed TiB₂-SiC coating. *Trans. Nonferrous Met. Soc. China*, 2021, vol. 31, no. 1, pp. 243–254. [https://doi.org/10.1016/S1003-6326\(20\)65491-7](https://doi.org/10.1016/S1003-6326(20)65491-7).
17. Shuai K., Zhang Y., Fu Y., Guo X., Li T., Li J. MoSi₂-HfC/TaC-HfC multi-phase coatings synthesized by supersonic atmospheric plasma spraying for C/C composites against ablation. *Corros. Sci.*, 2021, vol. 193, art. 109884. <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2021.109884>.
18. Wang Z., Huang Y., Guo W., Shan D., Xing Z., Wang H., He G. Effects of pulsed magnetic field on the flight and impact of supersonic plasma spraying particles and the properties of coatings. *Mater. Des.*, 2022, vol. 223, art. 111127. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.111127>.
19. Okulov R., Ilinykh S., Zakharov M., Akhmetin S. Mathematical model of the process of the plasma atomizing of the rod electrode to produce of titanium powder. *Proc. 2020 Int. Conf. on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)*. IEEE, 2020, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/ITNT49337.2020.9253292>.

20. Ishimoto J., Abe H., Ochiai N. Computational prediction of cryogenic micro-nano solid nitrogen particle production using laval nozzle for physical photo resist removal-cleaning technology. *Phys. Procedia*, 2015, vol. 67, pp. 607–612.
<https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.06.103>.
21. Patel M., Thomas J., Hem J.C. Experimental investigation of rarefied flows through supersonic nozzles. *Vacuum*, 2023, vol. 211, art. 111909.
<https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2023.111909>.
22. Li J., Zhang X., Shen J., Ran T., Chen P., Yin Y. Dissociation of CO₂ by thermal plasma with contracting nozzle quenching. *J. CO₂ Util.*, 2017, vol. 21, pp. 72–76.
<https://doi.org/10.1016/j.jcou.2017.04.003>.
23. Lazarev A.V., Semenov T.A., Belega E.D., Gordienko V.M. Dynamics of expanding gas from supercritical state in conical nozzle and cluster formation. *J. Supercrit. Fluids*, 2022, vol. 187, art. 105631. <https://doi.org/10.1016/j.supflu.2022.105631>.
24. Korenchenko A.E., Vorontsov A.G., Okulov R.A., Gel'chinskii B.R. Simulation of the self-assembly of metal nanoclusters. *Russ. Metall. (Metally)*, 2022, vol. 2022, no. 8, pp. 927–932. <https://doi.org/10.1134/S0036029522080067>.
25. AlShunaifi I.A., Elaissi S., Ghiloufi I., Alterary S.S., Alharbi A.A. Modelling of a non-transferred plasma torch used for nano-silica powders production. *Appl. Sci.*, 2021, vol. 11, no. 21, art. 9842. <https://doi.org/10.3390/app11219842>.
26. Yin Z., Yu D., Zhang Q., Yang S., Yang T. Experimental and numerical analysis of a reverse-polarity plasma torch for plasma atomization. *Plasma Chem. Plasma Process.*, 2021, vol. 41, no. 5, pp. 1471–1495. <https://doi.org/10.1007/s11090-021-10181-8>.
27. Cui Y., Zhao Y., Numata H., Yamanaka K., Bian H., Aoyagi K., Chiba A. Effects of process parameters and cooling gas on powder formation during the plasma rotating electrode process. *Powder Technol.*, 2021, vol. 393, pp. 301–311.
<https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.07.062>.
28. Gelchinski B.R., Balyakin I.A., Yuryev A.A., Rempel A.A. High-entropy alloys: Properties and prospects of application as protective coatings. *Russ. Chem. Rev.*, 2022, vol. 91, no. 6, art. RCR5023. <https://doi.org/10.1070/RCR5023>.
29. Li Q., Zhang N., Gao Y., Qing Y., Zhu Y., Yang K., Zhu J., Wang H., Ma Z., Gao L., Liu Y., He J. Effect of the core-shell structure powders on the microstructure and thermal conduction property of YSZ/Cu composite coatings. *Surf. Coat. Technol.*, 2021, vol. 3424, art. 127658. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2021.127658>.
30. Dong X.-Y., Luo X.-T., Zhang S.-L., Li C.-J. A novel strategy for depositing dense self-fluxing alloy coatings with sufficiently bonded splats by one-step atmospheric plasma spraying. *J. Therm. Spray Technol.*, 2020, vol. 29, no. 1, pp. 173–184.
<https://doi.org/10.1007/s11666-019-00943-4>.
31. Golewski P., Sadowski T. Technological and strength aspects of layers made of different powders laminated on a polymer matrix composite substrate. *Molecules*, 2022, vol. 27, no. 4, art. 1168. <https://doi.org/10.3390/molecules27041168>.
32. Schramm A., Jafarpour S.M., Schimpf C., Biermann H., Dalke A. Effect of bias plasma on active screen nitrocarburising response of AISI 420 martensitic stainless steel. *Vacuum*, 2022, vol. 205, art. 111389. <https://doi.org/10.1016/j.vacuum.2022.111389>.
33. Quinones D., Braun K., Meixner A., Chassé T. Comparing chemical and plasma modification of stainless steel surfaces – relevance for adsorption of adhesion promotor vinyltrimethoxysilane (VTMS). *Appl. Surf. Sci.*, 2022, vol. 575, art. 151674.
<https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2021.151674>.

34. Deng T., Li J., Zheng Z., Tian W., Li G. Influence of plasma beam polishing process parameters on surface roughness of AISI 304 stainless steel. *Appl. Surf. Sci.*, 2022, vol. 585, art. 152741. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2022.152741>.
35. Okulov R.A., Krashaninin V.A., Popov E.V. Plasma jet stream simulation for formation coating and powder manufacturing processes. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1954, no. 1, art. 012033. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1954/1/012033>.
36. Okulov R.A., Sarsadskikh K.I., Ilinykh S.A., Zakharov M.N. Effect of the plasma-forming gas consumption on processes of plasma spray coating and metal powder production. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1281, no. 1, art. 012058. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1281/1/012058>.
37. Kartasheva M.A. Mathematical modeling of non-stationary gas-dynamic processes in the regions of flow separation behind aircraft elements. *Cand. Tech. Sci. Diss.* Chelyabinsk, Yuzhno-Ural. Gos. Univ., 2008. 168 p. (In Russian)
38. Loitsyanskii L. G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
39. Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1969. 824 p. (In Russian)
40. Mungiguerra S., Di Martino G.D., Savino R., Zoli L., Silvestroni L., Sciti D. Characterization of novel ceramic composites for rocket nozzles in high-temperature harsh environments. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2020, vol. 163, art. 120492. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120492>.
41. Okulov R.A., Krashaninin V.A., Popov E.V. Influence of the plasmatron anode length in the processes of powder production and coating. *AIP Conf. Proc.*, 2022, vol. 2456, no. 1, art. 020035. <https://doi.org/10.1063/5.0074612>.

Для цитирования: Окулов Р.А., Крашанинин В.А., Гельчинский Б.Р., Ремпель А.А. Влияние формы внутреннего канала анодного узла на скорость плазменного потока // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 58–73. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.58-73>.

For citation: Okulov R.A., Krashaninin V.A., Gelchinsky B.R., Rempel A.A. Influence of the shape of the anode assembly inner channel on plasma flow velocity. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 58–73. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.58-73>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.968.23

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.74-91

ЗАДАЧА ТРИКОМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н.Б. Плещинский

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Получены формулы обращения интегральных уравнений, возникающих при исследовании задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе. Условия разрешимости вспомогательной переопределенной задачи в эллиптической части смешанной области найдены методом функции Грина. Установлена связь между функциями Грина задачи Дирихле и задачи N для уравнения Лапласа в виде интегральных уравнений, взаимно обращающих друг друга. Рассмотрены различные интегральные уравнения, в том числе разрешимые в явном виде, к которым сводится задача Трикоми. Явное решение характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши получено без привлечения теории краевых задач для аналитических функций.

Ключевые слова: задача Трикоми, переопределенная задача, интегральное уравнение, функция Грина, конформное отображение

Введение

В 1923 г. Ф. Трикоми [1, 2] исследовал уравнение с частными производными, которое изменяет тип с эллиптического на гиперболический при переходе через линию $y = 0$ параболического вырождения (уравнение Трикоми). В 1945 г. Ф.И. Франкль [3] показал, что уравнение Трикоми при определенных допущениях описывает течения газа при переходе через скорость звука. Позже были найдены и другие задачи физики и механики, сводящиеся к уравнениям смешанного типа.

М.А. Лаврентьев [4] предложил исследовать модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(уравнение Лаврентьева – Бицадзе). Задачу Трикоми и ее обобщения для этого уравнения изучал А.В. Бицадзе (см. [5, 6] и другие его работы).

Обзор более поздних публикаций по граничным задачам для уравнений смешанного типа можно найти, например, в монографиях [7–9].

Пусть линия АВ (отрезок оси x в случае модельных уравнений) разделяет области D^+ и D^- , в первой из них уравнение является эллиптическим, а во второй – гиперболическим. В областях D^+ и D^- нужно найти решения уравнения при условии, что предельные значения этих решений и их нормальных производных с разных сторон на АВ совпадают (или удовлетворяют некоторым более сложным зависимостям – условиям склеивания). Следуя Ф. Трикоми, обычно используют

обозначения $\tau(x) = u(x, 0 \pm 0)$, $\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0 \pm 0)$. На оставшихся частях границ областей D^+ и D^- также должны быть заданы условия, при которых граничная задача будет корректной.

Таким образом, речь идет о задаче сопряжения на АВ решений, вообще говоря, двух различных уравнений с частными производными в D^+ и D^- . Метод сведения таких задач к интегральным уравнениям предложил еще Ф. Трикоми. Нужно рассмотреть вспомогательные граничные задачи в D^+ и D^- (например, задачу N и задачу Коши – Гурса), получить зависимости между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ (эти зависимости обычно называют "основными соотношениями") и исключить одну из них.

В данной работе в качестве вспомогательных граничных задач рассмотрены такие переопределенные задачи в областях D^+ и D^- , когда на АВ заданы одновременно и функция $\tau(\cdot)$, и функция $\nu(\cdot)$. Условия разрешимости переопределенных задач и являются основными соотношениями.

Метод переопределенной граничной задачи успешно использовался при исследовании ряда задач для уравнений с частными производными, в частности, теории распространения и дифракции электромагнитных и упругих волн (см., например, обзорные статьи [10, 11]).

В данной работе показано, что разные формы условий разрешимости вспомогательной граничной задачи в области D^+ образуют пару взаимно обращающих друг друга интегральных уравнений, ядра которых выражаются через функции Грина задачи Дирихле и задачи N. Функции Грина получены методом электростатических изображений или методом конформных отображений при условии, что построена полная система точек, симметричных относительно границы области.

Если область D^+ является половиной области D , симметричной относительно отрезка АВ, то функции Грина задачи Дирихле и задачи N в области D^+ находятся с помощью функции Грина задачи Дирихле в области D . Следуя методу Ю.М. Крикунова ([12–14]), функции Грина для области D^+ можно выразить через функции Грина таких же задач в некоторой канонической области, в качестве которой удобно взять верхнюю полуплоскость. В итоге интегральные уравнения, к которым сводится задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, преобразуются в характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши. Явное решение этого уравнения получено методом интегральных преобразований, минуя переход к краевой задаче Римана для аналитических функций.

1. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

Пусть область D^+ ограничена снизу отрезком АВ = $[0, 1]$ оси x , а сверху – гладкой или кусочно-гладкой кривой Γ без точек самопересечения. Пусть область D^- – характеристический треугольник в полуплоскости $y < 0$ с основанием АВ и боковыми сторонами АС: $y = -x$ и ВС: $y = x - 1$ (рис. 1).

Задача Трикоми состоит в следующем.

Нужно найти решения уравнения Лаврентьева – Бицадзе в D^+ и D^- , удовлетворяющие условиям сопряжения $u(x, 0+0) = u(x, 0-0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0+0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0-0)$ и граничным условиям

$$u|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad u|_{AC} = \psi(x).$$

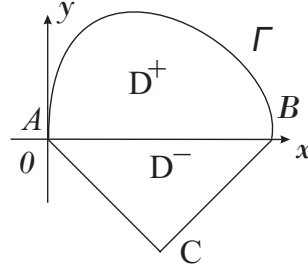


Рис. 1. Смешанная область задачи Трикоми

Вспомогательная переопределенная задача в области D^- ставится так: найти решение волнового уравнения в характеристическом треугольнике, удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \nu(x), \quad u|_{AC} = \psi(x).$$

Из формулы Даламбера следует, что

$$\tau(x) - \int_0^x \nu(\xi) d\xi = \psi_1(x), \quad \psi_1(x) = 2\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi(0). \quad (1)$$

Отсюда по известной функции $\nu(\cdot)$ легко найти функцию $\tau(\cdot)$ и, наоборот, по известной функции $\tau(\cdot)$ — функцию $\nu(\cdot)$.

Вспомогательная переопределенная граничная задача в области D^+ ставится так: найти решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее на отрезке AB условиям

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \nu(x)$$

и принимающее заданные значения $\varphi(s)$ на дуге Γ .

Связи между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ найдем методом функции Грина. Если $G_1(\zeta, z)$ — функция Грина задачи Дирихле для области D^+ , то

$$u(x, y) = - \int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi, 0, x, y) d\xi - \int_{\Gamma} \varphi(s) \frac{\partial G_1}{\partial n_{\zeta}}(\xi(s), \eta(s), x, y) ds_{\zeta}.$$

Если $G_2(\zeta, z)$ — функция Грина задачи N для области D^+ , то

$$u(x, y) = - \int_0^1 \nu(\xi) G_2(\xi, 0, x, y) d\xi - \int_{\Gamma} \varphi(s) \frac{\partial G_2}{\partial n_{\zeta}}(\xi, 0, x, y) ds_{\zeta}.$$

Будем считать, что $\varphi(\cdot) \equiv 0$, что не уменьшает общности рассуждений. Тогда

$$\nu(x) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_0^1 \tau(\xi) \frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi, 0, x, y) d\xi \right) \Big|_{y=0}, \quad (2)$$

$$\tau(x) = - \int_0^1 \nu(\xi) G_2(\xi, 0, x, 0) d\xi. \quad (3)$$

Таким образом, задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе сводится к системе из двух уравнений на АВ: первое – зависимость между $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$, полученная из D^- , второе – из D^+ . Можно исключить одну из этих функций и перейти к интегральному уравнению относительно другой. Но прежде чем это сделать, выскажем следующее утверждение.

Теорема 1. Если $G_1(x, y, \xi, \eta)$ и $G_2(x, y, \xi, \eta)$ – функции Грина задачи Дирихле и задачи N для области D^+ , то формулы (2) и (3) представляют собой пару интегральных уравнений, взаимно обращающих друг друга.

В дальнейшем будем считать, что функции $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ таковы, что интегралы в приведенных формулах существуют в обычном смысле или в смысле главного значения. Для этого достаточно предположить, что $\tau'(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ удовлетворяют условию Гёльдера в интервале $(0, 1)$ и могут иметь (но не обязательно) интегрируемые особенности в его граничных точках. Так как рассматривается классическое решение задачи Трикоми, непрерывное в смешанной области, то необходимо $\tau(0) = \tau(1) = 0$.

2. Функции Грина граничных задач для уравнения Лапласа

Функции Грина задачи Дирихле и задачи N (а также задачи Неймана) могут быть построены в некоторых случаях методом электростатических изображений ([15], гл. IV, §4). Этот метод состоит в следующем (удобно использовать комплексные координаты точек плоскости $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$).

Фундаментальное решение уравнения Лапласа $q(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z - \zeta|}$ рассматривается как потенциал электрического поля в точке z плоскости, который создает положительный заряд с единичной плотностью, размещенный на прямой, проходящей через точку ζ перпендикулярно этой плоскости. Функция Грина имеет вид $G(z, \zeta) = q(z, \zeta) + g(z, \zeta)$, слагаемое $g(z, \zeta)$ строится так, чтобы были выполнены соответствующие граничные условия. Это слагаемое составляется из потенциалов положительных и отрицательных зарядов с единичной плотностью, размещенных на прямых, проходящих через некоторые точки ζ_j плоскости.

Метод электростатических изображений можно использовать, если удастся построить полную систему точек ζ_j , симметричных относительно границы области, только одна из которых принадлежит этой области. В этих точках и размещаются прямые с положительными и отрицательными зарядами. Как известно, линиями симметрии на плоскости являются только прямые и окружности. Поэтому граница области D_1 должна состоять из отрезков прямых и дуг окружностей.

Если, как в рассматриваемом случае, в границу области D_1 входит отрезок вещественной оси, то множество симметричных точек состоит из пар точек, симметричных относительно вещественной оси. Если точка ζ_j принадлежит этому множеству, то и точка $\bar{\zeta}_j$ ему принадлежит. Тогда, если две точки ζ_j и ζ_k симметричны относительно окружности, часть которой входит в границу области D_1 , то в множестве симметричных точек содержатся точки $\bar{\zeta}_j$ и $\bar{\zeta}_k$. Поэтому взаимно уничтожаются разности потенциалов пар зарядов на окружностях, расположенных симметрично относительно вещественной оси.

Функция Грина задачи Дирихле строится следующим образом. Пусть ζ_j^+ – точки в верхней полуплоскости, в которых размещены положительно заряженные прямые, и ζ_j^- – точки в верхней полуплоскости, в которых размещены отрицательно заряженные прямые. Тогда в симметричных им точках нижней полуплоскости

должны быть размещены прямые с зарядами противоположных знаков, следовательно,

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \zeta_j^+| - \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \zeta_j^-| - \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \overline{\zeta_j^+}| + \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \overline{\zeta_j^-}|. \quad (4)$$

Для задачи N в точках $\overline{\zeta_j^\pm}$, симметричных точкам $\zeta_j^\pm$ относительно вещественной оси, должны находиться заряды таких же знаков. Поэтому

$$G_2(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \zeta_j^+| - \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \zeta_j^-| + \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \overline{\zeta_j^+}| - \frac{1}{2\pi} \sum_j \ln |z - \overline{\zeta_j^-}|. \quad (5)$$

Если система симметричных точек бесконечна, то нужно убедиться в сходимости соответствующих рядов.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. Пусть функции Грина $G_1(z, \zeta)$ и $G_2(z, \zeta)$ задачи Дирихле и задачи N построены методом электростатических изображений. Чтобы преобразовать одну из них в другую, нужно изменить знаки у половины слагаемых в формуле (4) или в формуле (5).

Полная система точек, симметричных относительно границы области, может быть построена в том случае, когда область, ограниченная отрезками прямых и дугами окружностей, является ячейкой симметрии (или правильной областью) ([16], с. 22). Это значит, что при преобразованиях симметрии относительно всех участков границы области и возникающих при этом новых границ получаются области, покрывающие в совокупности всю плоскость и не пересекающиеся друг с другом (однослойное паркетное покрытие).

Как известно, преобразованиями симметрии на плоскости являются дробно-линейные преобразования от $\bar{\zeta}$ (конформные отображения 2-го рода) [17].

Ячейки симметрии являются половинами симметричных фундаментальных областей некоторых групп дробно-линейных преобразований.

Действительно, если $S_k(z)$ – преобразования симметрии относительно прямых и окружностей, части которых образуют границу области, то обратные преобразования $S_k^{-1}(z)$ совпадают с $S_k(z)$. Все возможные комбинации преобразований $S_k(z)$ образуют группу, которую называют расширенной группой симметрии. Преобразования этой группы, зависящие от ζ , образуют группу симметрии. Одна из фундаментальных областей группы симметрии – область, составленная из исходной области и примыкающего к ней ее образа, полученного при одном из симметричных преобразований. В такой области нет конгруэнтных точек, и в окрестности любой точки ее границы есть точки, конгруэнтные точкам области.

Но не всегда половина симметричной фундаментальной области группы дробно-линейных преобразований является ячейкой симметрии.

Рассмотрим частный случай примера 2 из работы [18] – трехчленную группу дробно-линейных преобразований $z, \frac{z-1}{z}, \frac{1}{1-z}$. Фундаментальные области этой группы – внешность двух изометрических окружностей и конгруэнтные ей части плоскости, ограниченные одной из окружностей и отрезком $z_1 z_2$ вертикальной прямой. Такие фундаментальные области не являются ячейками симметрии, при симметричном отражении области через ее границы и границы новых областей образуется двулистная риманова поверхность.

Пусть $\{T_j(z)\}$ – преобразования группы дробно-линейных преобразований (конечной или бесконечной). Если часть границы области D_1 – отрезок вещественной оси, то множество симметричных точек имеет вид $\{T_j(\zeta), T_j(\bar{\zeta})\}$.

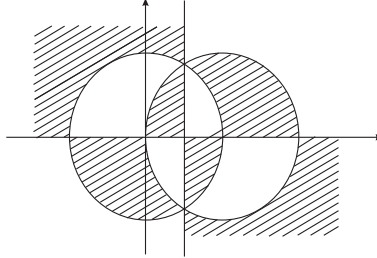


Рис. 2. Паркетное покрытие плоскости

На рис. 2 показано паркетное покрытие плоскости, порожденное группой ангармонических отношений

$$z, \frac{z}{z-1}, \frac{1}{z}, \frac{z-1}{z}, \frac{1}{1-z}, 1-z$$

и дополнительным преобразованием симметрии относительно вещественной оси. Две окружности и вертикальная прямая делят плоскость на шесть частей, каждая из них состоит из двух ячеек симметрии, симметричных относительно вещественной оси, то есть их всего двенадцать. В ([17], с. 147, рис. 38) показано более сложное покрытие плоскости. В работах [19, 20] паркетные покрытия плоскости использованы при построении функций Грина в более сложных случаях.

3. Конформные отображения и функции Грина

Метод конформных отображений позволяет не только записать в явном виде функции Грина для ряда областей, но и ответить на вопросы, связанные с существованием и единственностью этих функций. Хорошо известно следующее утверждение.

Пусть функция $w = f(z, \zeta)$ по переменной z определяет конформное отображение области D на единичный круг $|w| < 1$, причем $f(\zeta, \zeta) = 0$ ($\zeta \in D$). Тогда

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, \zeta)|}$$

– *функция Грина задачи Дирихле для области D .*

Поэтому задача построения функции Грина и задача построения конформного отображения области на единичный круг – почти одно и то же.

Конформные отображения области на единичный круг используются также при решении задачи Шварца: найти аналитическую в области функцию по значениям на границе области ее вещественной части. Эта задача сводится (в случае односвязной области) к задаче Дирихле (см. [21], п. 27.2). Функция Грина задачи Дирихле является вещественной частью комплексной функции Грина.

Метод построения оператора Шварца с помощью конформного отображения развит в цикле работ Л.А. Аксентьева [22–24] (см. также [16, 25]). При построении конформного отображения области на единичный круг им использован принцип симметрии: симметричные точки переходят в симметричные точки. Самый простой

пример: $\omega(z, \zeta) = \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}}$ – отображение верхней полуплоскости на единичный круг, точка ζ переходит в нуль.

Как показано в ([25], теорема 1), если $T_k(z)$, $T_k S_1(z)$, $k = 0 \dots n$, – конечная группа симметрии односвязной области D , ограниченной алгебраической кривой L , и все симметричные образы этой области образуют паркетное покрытие плоскости, то функция

$$f(z, \zeta) = \frac{g(z, \zeta)}{g(z, t_0)}, \quad g(z, \zeta) = \prod_{k=0}^n \frac{\zeta - T_k(z)}{\zeta - T_k S_1(z)}, \quad t_0 \in \mathcal{L},$$

конформно отображает область D на единичный круг, точка t_0 переходит в точку 1. В работе [23] получено условие конечности группы симметрии (в [16] исправлена неточность, на которую указано в обзоре [26], с. 47).

Если D – правильная область, то группу симметрии образуют дробно-линейные преобразования $T_k(z)$ и их суперпозиции с преобразованием $S_1(z)$. Если область симметрична относительно вещественной оси, то можно считать, что $S_1(z) = \bar{z}$.

Функция Грина задачи Дирихле инвариантна относительно конформного отображения областей ([27], с. 209; [14], §8).

I. Пусть функция $w = \omega(z)$ конформно отображает область D в плоскости z на область D_0 в плоскости w . Если $G_0(w, v)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D_0 , то $G(z, \zeta) = G_0[\omega(z), \omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи Дирихле в области D .

Например, если

$$G_0(w, v) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - w\bar{v}}{w - v} \right|$$

– функция Грина задачи Дирихле в единичном круге и $w = 2z - 1$ – отображение круга $|2z - 1| < 1$ на единичный круг, то для первого круга

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z + \bar{\zeta} - 2z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|.$$

В работах ([12, 13], см. также [14], §8) сформулированы и доказаны важные свойства функций Грина задачи Дирихле и задачи N для уравнения Лапласа. Перечислим их с некоторыми дополнениями.

Пусть D^* – область, симметричная области D^+ относительно вещественной оси, область $D = D^+ \cup AB \cup D^*$.

II. Если $G(z, \zeta)$ – функция Грина для области D , то $G(z, \bar{\zeta}) = G(\bar{z}, \zeta)$.

Следовательно, функция Грина задачи N для полукруга $|2z - 1| < 1$, $\text{Im } z > 0$ имеет вид

$$G_2(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z + \bar{\zeta} - 2z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \cdot \frac{z + \zeta - 2z\zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|.$$

Тогда при $z \rightarrow x$, $\zeta \rightarrow \xi$

$$G_2(x, 0, \xi, 0) = G_2(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{x + \xi - 2x\xi}{|x - \xi|}. \quad (6)$$

III. Если $G(z, \zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D , то $G_1(z, \zeta) = G(z, \zeta) - G(z, \bar{\zeta})$ – функция Грина задачи Дирихле в области D^+ и $G_2(z, \zeta) = G(z, \zeta) + G(z, \bar{\zeta})$ – функция Грина задачи N в области D^+ .

Легко видеть, что $G_1(z, \zeta) = 0$ при $z = x \in AB$.

Вторая часть утверждения может быть доказана так.

Из II следует, что $G_2(z, \zeta) = G(z, \zeta) + G(\bar{z}, \zeta) = G(x + iy; \zeta) + G(x - iy; \zeta)$. Тогда

$$\frac{\partial G_2(z, \zeta)}{\partial y} = \frac{\partial G(x + iy; \zeta)}{\partial y} - \frac{\partial G(x - iy; \zeta)}{\partial y}.$$

Это выражение равно нулю при $y = 0$.

IV. $G(\zeta, z) = G(z, \zeta)$, $G_1(\zeta, z) = G_1(z, \zeta)$, $G_2(\zeta, z) = G_2(z, \zeta)$.

В итоге пары функций Грина могут быть получены следующим образом.

Теорема 3. Пусть функция $w = \omega(z)$ отображает область $D = D^+ \cup AB \cup D^*$ на единичный круг. Тогда

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \omega(z)\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \frac{\omega(z) - \omega(\bar{\zeta})}{1 - \omega(z)\overline{\omega(\bar{\zeta})}} \right|$$

– функция Грина задачи Дирихле в области D^+ и

$$G_2(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - \omega(z)\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z) - \omega(\zeta)} \frac{1 - \omega(z)\overline{\omega(\bar{\zeta})}}{\omega(z) - \omega(\bar{\zeta})} \right|$$

– функция Грина задачи N в области D^+ .

Заметим, что $\omega(\bar{z}) = \overline{\omega(z)}$ в силу симметрии области D . Поэтому при $z \rightarrow x$ и $\zeta \rightarrow \xi$ выражения функций Грина становятся существенно более простыми.

В работе [12] установлена связь между функциями Грина задачи N в конформно эквивалентных областях. Это возможно и в случае задачи Дирихле.

Пусть D^+ и D_0 – области, расположенные в верхних полуплоскостях и ограниченные отрезком AB и кривыми с концами в точках A и B, а $w = \omega(z)$ – функция, конформно отображающая область D^+ на область D_0 , причем так, что отрезок AB переходит в себя и $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$. В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $w = \omega(z)$.

Теорема 4. Если $G_1^0(w, v)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D_0 , то $G_1(z, \zeta) = G_1^0[\omega(z), \omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи Дирихле в области D^+ . Если $G_2^0(w, v)$ – функция Грина задачи N в области D_0 , то $G_2(z, \zeta) = G_2^0[\omega(z), \omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи N в области D^+ .

В ([14], с. 33, теорема 1) доказана вторая часть этого утверждения. Доказательство первой части проводится по аналогии.

Эту теорему можно применять в случае, когда известна функция, осуществляющая конформное отображение области на некоторую каноническую область, для которой уже получена функция Грина одной из рассматриваемых задач. Функция Грина задачи N в верхней полуплоскости получается с помощью конформного отображения верхней полуплоскости на полукруг $|2w - 1| < 1$, $\text{Im } w > 0$:

$$w = \omega(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z} + \sqrt{1 - z}}$$

([14], с. 34; в формуле (3.25) имеется опечатка!). След этой функции Грина при $z \rightarrow t$, $\zeta \rightarrow \tau$ имеет вид

$$G_2(t, \tau) = -\frac{1}{\pi} \ln |t - \tau| + \frac{2}{\pi} \ln |\sqrt{t(1 - \tau)} + \sqrt{\tau(1 - t)}| \quad (7)$$

(формула (3.26), но мы используем другие обозначения переменных). Эта формула следует из (6) с помощью замены переменных.

Из (7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} G_2(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\tau(1-\tau)}}{\sqrt{t(1-t)}} \frac{1}{\tau - t}. \quad (8)$$

4. Интегральные уравнения задачи Трикоми

Вернемся к системе уравнений (1), (2) или (1), (3). Простая связь (1) между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ позволяет легко перейти от системы двух уравнений к одному уравнению. Прежде всего, из уравнений (1) и (3) следует, что

$$\int_0^x \nu(\xi) d\xi + \int_0^1 \nu(\xi) G_2(\xi, 0, x, 0) d\xi = -\psi_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (9)$$

и, после дифференцирования,

$$\nu(x) + \int_0^1 \nu(\xi) \frac{\partial}{\partial x} G_2(\xi, 0, x, 0) d\xi = f(x), \quad f(x) = -\psi_1'(x), \quad (10)$$

$$G_2(\xi, 0, x, 0) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 - \omega(\xi) \omega(x)}{|\omega(\xi) - \omega(x)|},$$

функция $\omega(z)$ отображает область D_1 на верхний полукруг единичного круга.

Если область D_1 – полукруг $|2z - 1| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, то $\omega(z) = 2z - 1$ и функция $G_2(\xi, 0, x, 0)$ имеет вид (6). Тогда уравнение (10) примет вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \nu(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} + \frac{1 - 2\xi}{\xi + x - 2\xi x} \right) d\xi = f(x). \quad (11)$$

Оно было впервые получено и решено А.В. Бицадзе. Его решение имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 f(t) \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx} \right) dt.$$

Если в уравнении (9) введем новую искомую функцию $\mu(x) = \int_0^x \nu(\xi) d\xi$, то после интегрирования по частям получим

$$\mu(x) - \int_0^1 \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} G_2(\xi, 0, x, 0) d\xi = g(x), \quad g(x) = -\psi_1(x), \quad (12)$$

а в частном случае

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \mu(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1 - 2x}{\xi + x - 2\xi x} \right) d\xi = g(x). \quad (13)$$

Точно такому же уравнению должна удовлетворять функция $\tau(\cdot)$, так как $\tau(\cdot) = \mu(\cdot)$. Формула обращения уравнения (13)

$$\mu(x) = \frac{1}{2} g(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 g(t) \sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2x}{t+x-2tx} \right) dt$$

получена в [28].

В работе [29] Ф.Д. Гахов и Л.И. Чибрикова показали, что интегральное уравнение (11) принадлежит широкому классу интегральных уравнений, решение которых может быть получено в замкнутой форме методом аналитического продолжения, то есть сведением к краевой задаче для аналитических функций. Эта работа положила начало разработке теории краевых задач для аналитических функций на римановых поверхностях (см. обзор [26]).

Решение частного случая уравнения (9) с логарифмическим ядром (11) построено в ([30], §19) также методом сведения к краевой задаче Римана. Существенно, что при этом были использованы вспомогательные кусочно-аналитические функции – аналоги интеграла типа Коши, автоморфные относительно группы дробно-линейных преобразований $z, \frac{z}{2z-1}$. Наиболее полное изложение теории краевых задач для автоморфных аналитических функций дано в [31].

В работах Ю.М. Крикунова [13, 14] предложено на основе формулы (8) перейти от уравнения (10) к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши с помощью замены переменных.

Теорема 5. *Интегральные уравнения (10) и (12) сводятся к характеристическим сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши.*

Доказательство. Повторим рассуждения из ([14], §17). Пусть функция Грина $G_2(z, \zeta)$ задачи N в области D^+ $G_2(z, \zeta) = G_2^0[\omega(z), \omega(\zeta)]$, где $G_2^0(w, v)$ – функция Грина $G_2^0(w, v)$ задачи N в верхней полуплоскости; здесь функция $w = \omega(z)$ дает конформное отображение области D^+ на верхнюю полуплоскость. Пусть $z = \alpha(w)$ – функция, обратная к $w = \omega(z)$, и $v = \omega(\zeta)$.

Перейдем к пределу из области D^+ на отрезок АВ: $z \rightarrow x$, $\zeta \rightarrow \xi$ и из верхней полуплоскости на вещественную ось: $w \rightarrow t$, $v \rightarrow \tau$. Тогда из $G_2[\alpha(w), \alpha(v)] = G_2^0(w, v)$ следует $G_2[\alpha(t), \alpha(\tau)] = G_2^0(t, \tau)$ и $\frac{\partial G_2^0}{\partial t}(t, \tau) = \frac{\partial G_2}{\partial x}[\alpha(t), \alpha(\tau)] \alpha'(t)$. Производная функции $G_2^0(t, \tau)$ была вычислена раньше (формула (8)).

В уравнении (10) выполним замену переменных: $x = \alpha(t)$, $\xi = \alpha(\tau)$. Для новых функций $\nu_1(t) = \sqrt{t(1-t)} \alpha'(t) \nu[\alpha(t)]$ и $f_1(t) = \sqrt{t(1-t)} \alpha'(t) f[\alpha(t)]$ получим уравнение

$$\nu_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\nu_1(\tau) d\tau}{\tau - t} = f_1(t).$$

С помощью аналогичной замены переменных интегральное уравнение (12) также приводится к уравнению с ядром Коши

$$\mu_1(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu_1(\tau) d\tau}{\tau - t} = g_1(t), \quad \mu_1(t) = \frac{\nu[\alpha(t)] \alpha'(t)}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad g_1(t) = \frac{g[\alpha(t)] \alpha'(t)}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

5. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши и постоянными коэффициентами на отрезке $[\alpha, \beta]$ вещественной оси

$$\nu(x) + \frac{b}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t) dt}{t - x} = f(x), \quad x \in (\alpha, \beta). \quad (14)$$

Ограничимся случаем, когда $f(\cdot) \in H[\alpha, \beta]$, то есть удовлетворяет условию Гёльдера и не имеет особенностей на концах отрезка. Решение будем искать в классе H^* . Формулу обращения уравнения (14) легко получить как частный случай

общей формулы, дающей решение характеристического уравнения (см. [21, 32]). Это решение найдено на основе эквивалентности характеристического сингулярного интегрального уравнения по разомкнутому контуру и краевой задачи Римана (задачи линейного сопряжения) для аналитических функций.

Покажем, что решение уравнения (14) может быть получено другим, очень простым методом без перехода к краевой задаче для аналитических функций.

Поведение решения уравнения (14) в точках α и β зависит от свойств его правой части и коэффициентов, в рассматриваемом случае – только от величины b .

Предположим, что

$$\nu(x) = \left(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\right)^\lambda \nu_0(x), \quad \nu_0(\alpha) \neq 0,$$

то есть функция $\nu(\cdot)$ имеет степенную особенность в точке α порядка λ . Подставим это выражение в (14), поделим обе части на $\left(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\right)^\lambda$ и перейдем к пределу при $x \rightarrow \alpha$. Получим $\nu_0(\alpha)[1 + b \operatorname{ctg} \lambda \pi] = 0$. Если $b < 0$, то $\lambda = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} b \in (0, 1)$. Но если $b > 0$, то решений с особенностью в точке α быть не может. Аналогично, если $b > 0$, то решение уравнения (1) может иметь особенность в точке $x = \beta$, при этом $\lambda = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} b \in (0, 1)$. Исследуем именно этот случай.

Заменим в уравнении (14) t на t_1 и x на t . Умножим обе его части на $\left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda$ и применим операцию сингулярного интегрирования. Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{\nu(t) dt}{t - x} + \frac{b}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1) dt_1}{t_1 - t}\right] \frac{dt}{t - x} = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{f(t) dt}{t - x}. \quad (15)$$

Преобразуем второй интеграл в левой части. По формуле Пуанкаре – Бертрана

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \left[\left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1) dt_1}{t_1 - t}\right] \frac{dt}{t - x} = \\ & = -\pi^2 \left(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\right)^\lambda \nu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} \nu(t_1) \left[\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{dt}{(t_1 - t)(t - x)}\right] dt_1. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{dt}{(t_1 - t)(t - x)} = \frac{1}{t_1 - x} \left[\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{dt}{t_1 - t} + \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{dt}{t - x}\right] = \\ & = \frac{1}{t_1 - x} \frac{\pi}{b} \left[\left(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\right)^\lambda - \left(\frac{\beta - t_1}{t_1 - \alpha}\right)^\lambda\right]. \end{aligned}$$

В результате два интеграла в левой части равенства (15) взаимно уничтожатся.

Поделим обе части равенства на $\left(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\right)^\lambda$ и получим

$$-b\pi \nu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1) dt_1}{t_1 - x} = \left(\frac{x - \alpha}{\beta - x}\right)^\lambda \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\right)^\lambda \frac{f(t) dt}{t - x}.$$

Отсюда и из равенства (14) следует, что

$$\nu(x) = \frac{1}{1+b^2} f(x) - \frac{1}{\pi} \frac{b}{1+b^2} \left(\frac{x-\alpha}{\beta-x} \right)^\lambda \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{\beta-t}{t-\alpha} \right)^\lambda \frac{f(t) dt}{t-x}. \quad (16)$$

Итак, если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (14), то эта функция имеет вид (16). Ясно, что такое решение единственно. Простой подстановкой $\nu(\cdot)$ в (14) можно убедиться, что эта функция действительно является решением уравнения.

Таким образом, метод построения формулы обращения уравнения (14) состоит в том, что после специального интегрального преобразования и приведения подобных членов в левой части уравнения должны остаться только такие же слагаемые, что были раньше, но с другими коэффициентами.

Повторим такие же рассуждения для характеристического уравнения с переменными коэффициентами

$$a(x) \nu(x) + \frac{b(x)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t) dt}{t-x} = f(x), \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Пусть, как и раньше, $f(\cdot) \in H[\alpha, \beta]$. Предположим также, что $a^2(x) + b^2(x) = 1$, следовательно, $a(x) \pm i b(x) \neq 0$.

Пусть функция $Z(x) \neq 0$ пока такая, что произведение $Z(x) \nu(x)$ не имеет особенностей на концах отрезка $[\alpha, \beta]$ и $Z(x)$ – главное значение при $z = x$ функции $Z(z)$, аналитической вне $[\alpha, \beta]$ и имеющей конечное значение $Z(\infty)$ в бесконечно удаленной точке.

Заменим t на t_1 и x на t . Умножим обе части уравнения на $Z(t)$ и применим операцию сингулярного интегрирования:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Z(t) a(t) \frac{\nu(t) dt}{t-x} + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(Z(t) b(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1) dt_1}{t_1-t} \right) \frac{dt}{t-x} = \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) \frac{f(t) dt}{t-x}.$$

По формуле Пуанкаре – Бертрана

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left(Z(t) b(t) \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1) dt_1}{t_1-t} \right) \frac{dt}{t-x} = \\ & = -\pi Z(x) b(x) \nu(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \nu(t_1) \left[\int_{\alpha}^{\beta} Z(t) b(t) \frac{dt}{(t_1-t)(t-x)} \right] dt_1 = \\ & = -\pi Z(x) b(x) \nu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} \nu(t_1) \left[-\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) b(t) \frac{dt}{t-t_1} + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) b(t) \frac{dt}{t-x} \right] \frac{dt_1}{t_1-x}. \end{aligned}$$

Теперь потребуем, чтобы функция $Z(x)$ удовлетворяла условию

$$\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) b(t) \frac{dt}{t-x} = Z(x) a(x) - Z(\infty). \quad (17)$$

Тогда два интеграла взаимно уничтожатся, и окончательно

$$-b(x)\nu(x) + \frac{a(x)}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t) dt}{t-x} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{Z(x)} \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) \frac{f(t) dt}{t-x}.$$

Отсюда и из исходного уравнения легко получить, что

$$\nu(x) = a(x)f(x) - \frac{b(x)}{\pi} \frac{1}{Z(x)} \int_{\alpha}^{\beta} Z(t) \frac{f(t) dt}{t-x}.$$

Построим функцию $Z(x)$ с требуемыми свойствами. Пусть

$$X(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau-z}, \quad \gamma(\tau) = \ln \frac{a(\tau) + ib(\tau)}{a(\tau) - ib(\tau)}.$$

Легко видеть, что $X(z)$ – функция, аналитическая вне $[\alpha, \beta]$, причем $X(\infty) = 1$. Тогда

$$X^{\pm}(x) = e^{\pm \frac{1}{2} \gamma(x)} Z(x), \quad Z(x) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma(\tau) d\tau}{\tau-x} \right],$$

то есть

$$X^{+}(x) = \sqrt{\frac{a(x) + ib(x)}{a(x) - ib(x)}} Z(x), \quad X^{-}(x) = \sqrt{\frac{a(x) - ib(x)}{a(x) + ib(x)}} Z(x).$$

При этом $X^{+}(x) - X^{-}(x) = 2i Z(x) b(x)$, $X^{+}(x) + X^{-}(x) = 2 Z(x) a(x)$. Из интегральной формулы Коши следует, что условие (17) выполнено, $Z(\infty) = 1$.

Отметим, что фактически была построена каноническая функция краевой задачи Римана, но сама задача Римана в рассуждениях не участвовала. Тем не менее, интеграл типа Коши и его свойства понадобились.

При выполнении этого исследования автор использовал в основном ранние работы сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Казанского университета – Ю.М. Крикунова, Л.И. Чибриковой и Л.А. Аксентьева. Пятьдесят лет назад наши учителя были такими, как на фото (рис. 3).



Рис. 3. Л.А. Аксентьев, Л.И. Чибрикова и Ю.М. Крикунов, 1974 г.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Tricomi F.* Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto // Memor. della R. Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 5. 1923. V. 14, F. 7. P. 133–247.
2. *Трикоми Ф.Д.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
3. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 772 с.
4. *Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373–376.
5. *Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1953. Т. 41. С. 3–59.
6. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
7. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
8. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2008. 276 с.
9. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.
10. *Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б.* Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2005. Т. 147, кн. 3. С. 4–32.
11. *Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B.* Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory // Appl. Anal. 2014. V. 93, No 11. P. 2350–2359. <https://doi.org/10.1080/00036811.2014.930825>.
12. *Крикунов Ю.М.* К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе // Изв. вузов. Матем. 1974. № 2. С. 76–81.
13. *Крикунов Ю.М.* К задаче Трикоми для квадрата // Изв. вузов. Матем. 1977. № 10. С. 81–85.
14. *Крикунов Ю.М.* Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 148 с.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
16. *Аксентьев Л.А.* Метод симметрии. Программа и учебные задания к специальному курсу. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. 48 с.
17. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
18. *Чибрикова Л.И.* К методу Д.А. Граве решения задачи Дирихле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 1962. Т. 122, кн. 3. С. 73–80.
19. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Green functions, reflections, and plane parqueting // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, No. 1. P. 17–31.
20. *Begehr H., Vaitekhovich T.* The parqueting-reflection principle for constructing Green functions // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cottenham: Cambridge Sci. Publ., 2013. P. 11–20.
21. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
22. *Аксентьев Л.А.* Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. задачам. Изд-во Казан. ун-та. 1964. Вып. 2. С. 3–11.

23. Аксентьев Л.А. Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. Изд-во Казан. ун-та. 1966. Вып. 3. С. 11–24.
24. Аксентьев Л.А. Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. Изд-во Казан. ун-та. 1967. Вып. 4. С. 3–10.
25. Аксентьев Л.А. Применение метода симметрии в конформных отображениях и в краевых задачах. Программа и учебные задания к специальному курсу. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1993. 48 с.
26. Чибрикова Л.И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анализ. Т. 18. М.: ВИНТИ, 1980. С. 3–66.
27. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
28. Maher A., Pleshchinskii N.B. On connection among values of solutions of the Tricomi problem on the sides of characteristic triangles // Acta Sci. Math. (Szeged). 2008. V. 74. P. 121–133.
29. Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Матем. сб. 1954. Т. 35, № 3. С. 395–436.
30. Плещинский Н.Б. Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. Учеб.-метод. пособие. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. 154 с.
31. Чибрикова Л.И. Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Казан. ун-т, 1977. 302 с.
32. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Поступила в редакцию 29.01.2024

Принята к публикации 31.01.2024

Плещинский Николай Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: pnb@kpfu.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 74–91

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.74-91

Tricomi Problem and Integral Equations

N.B. Pleshchinskii

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: pnb@kpfu.ru

Received January 29, 2024; Accepted January 31, 2024

Abstract

Formulas for inverting integral equations that arise when studying the Tricomi problem for the Lavrentyev–Bitsadze equation were derived. Solvability conditions of an auxiliary overdetermined problem in the elliptic part of the mixed domain were found using the Green function method. A connection was established between the Green functions of the Dirichlet problem and problem N for the Laplace equation in the form of integral equations mutually inverting each other. Various integral equations were considered, including explicitly solvable ones, to which the Tricomi problem can be reduced. An explicit solution of the characteristic singular equation with a Cauchy kernel was obtained without involving the theory of boundary value problems for analytic functions.

Keywords: Tricomi problem, overdetermined problem, integral equation, Green function, conformal mapping

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Mixed domain of the Tricomi problem.

Fig. 2. Tiling of the plane.

Fig. 3. L.A. Aksent'ev, L.I. Chibrikova, and Yu.M. Krikunov, 1974.

References

1. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. *Memor. della R. Accad. Naz. dei Lincei. Ser. 5.*, 1923, vol. 14, fasc. 7, pp. 133–247. (In Italian)
2. Tricomi F.D. *O lineinykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka smeshannogo tipa* [On Second-Order Linear Partial Differential Equations of Mixed Type]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1947. 192 p. (In Russian)
3. Frankl F. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973. 772 p. (In Russian)
4. Lavrentyev M.A., Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 70, no. 3, pp. 373–376. (In Russian)
5. Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. *Tr. MIAN SSSR*, 1953, vol. 41, pp. 3–59. (In Russian)

6. Bitsadze A.V. *Uraveneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1959. 164 p. (In Russian)
7. Smirnov M.M. *Uraveneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, Nauka, 1970. 295 p. (In Russian)
8. Marichev O.I., Kilbas A.A., Repin O.A. *Kraevye zadachi dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients]. Samara, Izd. Samar. Gos. Ekon. Univ., 2008. 276 p. (In Russian)
9. Sabitov K.B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Equations of Mixed Type]. Moscow, Fizmatlit, 2014. 304 p. (In Russian)
10. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. Over-determined boundary value problems for elliptic partial differential equations and their applications to waves diffraction theory. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2005, vol. 147, no. 3, pp. 4–32. (In Russian)
11. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory. *Appl. Anal.*, 2014, vol. 93, no. 11, pp. 2350–2359. <https://doi.org/10.1080/00036811.2014.930825>.
12. Krikunov Yu.M. On the Tricomi problem for the Lavrentyev–Bitsadze equation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1974, no. 2, pp. 76–81. (In Russian)
13. Krikunov Yu.M. On the Tricomi problem for a square. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1977, no. 10, pp. 81–85. (In Russian)
14. Krikunov Yu.M. *Kraevye zadachi dlya model'nykh uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary Value Problems for the Model Equations of Mixed Type]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1986. 148 p. (In Russian)
15. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uraveneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p. (In Russian)
16. Aksent'ev L.A. *Metod simmetrii. Programma i uchebnye zadaniya k spetsial'nomu kursu* [Symmetry Method. Program and Assignments for a Special Course]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1991. 48 p. (In Russian)
17. Ford L.R. *Avtomorfnye funktsii* [Automorphic Functions]. Moscow, Leningrad, ONTI, 1936. 340 p. (In Russian)
18. Chibrikova L.I. On the method of D.A. Grave for solving the Dirichlet problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 1962, vol. 122, no. 3, pp. 73–80. (In Russian)
19. Begehr H., Vaitekhovich T. Green functions, reflections, and plane parqueting. *Eurasian Math. J.*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 17–31.
20. Begehr H., Vaitekhovich T. The parqueting-reflection principle for constructing Green functions. In: *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012*. Cottenham, Cambridge Sci. Publ., 2013, pp. 11–20.
21. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)
22. Aksent'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham*. Izd. Kazan. Univ., 1964, no. 2, pp. 3–11. (In Russian)
23. Aksent'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham*. Izd. Kazan. Univ., 1966, no. 3, pp. 11–24. (In Russian)

24. Aksept'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham.* Izd. Kazan. Univ., 1967, no. 4, pp. 3–10. (In Russian)
25. Aksept'ev L.A. *Primenenie metoda simmetrii v konformnykh otobrazheniyakh i v kraevykh zadachakh. Programma i uchebnye zadaniya k spetsial'nomu kursu* [Application of the Symmetry Method to Conformal Mappings and Boundary Value Problems. Program and Assignments for a Special Course]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1993. 48 p. (In Russian)
26. Chibrikova L.I. Boundary value problems of the theory of analytic functions on Riemann surfaces. In: *Itogi nauki i tekhn. Ser. Matem. anal.* [Achievements of Science and Technology. Series: Mathematical Analysis]. Vol. 18. Moscow, VINITI, 1980, pp. 3–66. (In Russian)
27. Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral'nykh uravneniyam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 232 p. (In Russian)
28. Maher A., Pleshchinskii N.B. On connection among values of solutions of the Tricomi problem on the sides of characteristic triangles. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2008, vol. 74, pp. 121–133.
29. Gakhov F.D., Chibrikova L.I. On some types of singular integral equations solvable in closed form. *Mat. Sb.*, 1954, vol. 35, no. 3, pp. 395–436. (In Russian)
30. Pleshchinskii N.B. *Prilozheniya teorii integral'nykh uravnenii s logarifmicheskimi i stepennymi yadrami. Ucheb.-metod. posobie* [Applications of the Theory of Integral Equations with Logarithmic and Power Kernels. A Study Guide]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1987. 154 p. (In Russian)
31. Chibrikova L.I. *Osnovnye granichnye zadachi dlya analiticheskikh funktsii* [Basic Boundary Value Problems for Analytic Functions]. Kazan, Kazan. Univ., 1977. 302 p. (In Russian)
32. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Плещинский Н.Б. Задача Трикоми и интегральные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 74–91. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.74-91>. ⟩

⟨ **For citation:** Pleshchinskii N.B. Tricomi problem and integral equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 74–91. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.74-91>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 533.95

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.92-98

О СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

М.А. Севодин

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
г. Пермь, 614990, Россия*

Аннотация

Изучены возможности объединения известных приемов оптимизации структуры портфеля ценных бумаг (ПЦБ). Предложен метод, с помощью которого можно одновременно использовать пассивные и активные подходы к управлению структурой ПЦБ. Совместное применение названных способов основано на приемах диверсификации ПЦБ и поиске структуры портфеля, по составу максимально приближенной к структуре ПЦБ индексного фонда. Для оптимизации структуры ПЦБ в рамках традиционного подхода “доходность–риск” модифицирована целевая функция. Предложенная целевая функция, наряду с риском ПЦБ, описывает степень совпадения искомого распределения долей ценных бумаг портфеля с распределением, построенным с помощью индексного фонда. Установлено, что основные свойства оптимальных ПЦБ, полученных на основе подхода “доходность–риск”, имеют место и в рассматриваемом случае.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, доходность, риск, индексный фонд, оптимизация структуры

Введение

Одна из важнейших проблем количественного анализа фондового рынка связана с задачами оптимального управления портфелями активов, хеджирования риска операций с фондовыми активами и рядом других. В рамках подхода “доходность–риск” названные задачи сводятся к формированию портфеля активов, обеспечивающего ожидаемые доходности и риски. Совокупность ценных бумаг, приобретенная с этими целями инвестором (лицом, принимающим решение, – ЛПР) составляет портфель ценных бумаг (ПЦБ). Набор долей инвестиций в активы различного вида, произведенных конкретным ЛПР, определяет структуру его ПЦБ.

Способность формировать и распоряжаться набором разных ценных бумаг характеризует возможность управления ПЦБ, описывает стратегию и тактику управления ПЦБ. При этом обычно выделяют два направления: формирование диверсифицированного портфеля, а затем его поддержание на приемлемом уровне риска относят к пассивной стратегии управления ПЦБ; активная стратегия управления предусматривает отслеживание финансовых инструментов, а также быстрое изменение структуры ПЦБ в случае несоответствия целям, поставленным инвестором.

Оптимизация структуры ПЦБ при использовании активных методов проводится с помощью критериев оптимальности. Классическими критериями при этом

являются ожидаемая доходность и риск [1–3], то есть математическое ожидание и дисперсия доходности ценной бумаги за некоторый промежуток времени владения.

Пассивные методы в основном базируются на гипотезе об информационной эффективности рынка ценных бумаг. Исходя из этого, считают возможным формирование диверсифицированного набора ценных бумаг при условии гарантирования необходимых уровней доходности и риска.

Типичным методом при пассивном управлении структурой ПЦБ является метод индексного фонда. Индексный фонд – это портфель, структура которого соответствует движению какого-либо биржевого индекса, характеризующего ситуацию на рынке ценных бумаг. Часто за основу при этом берут структуру какого-нибудь крупного фонда, считая ее эталонной.

Как правило, на фондовом рынке производятся действия, соответствующие общим принципам формирования ПЦБ, то есть используются либо активные, либо пассивные методы. Ясно, что большой интерес здесь вызывает совместное использование этих методов, что определяет важную исследовательскую проблему. В таком виде названная проблема впервые была рассмотрена в работах [4, 5]. Результатом объединения указанных методов в этих работах было предложено считать соответствующим образом построенную двухкритериальную оптимизационную задачу с ограничениями.

В настоящей работе попытка объединения рассматриваемых методов осуществлена с другой позиции: в качестве представителя активного управления взята диверсификация, а в качестве представителя пассивного управления – метод индексного фонда. Искомая структура ПЦБ ищется вблизи структуры эталонного портфеля. Мерой близости, в отличие от работ [4, 5], служит евклидово расстояние. Поиск решения осуществлен традиционным способом с помощью модифицированной целевой функции. Она учитывает критерии и активного и пассивного методов оптимизации структуры ПЦБ. Показано, что при таком подходе сохраняются известные эффекты инвестирования. В частности, построены аналоги эффективного фронта и портфеля Тобина (см., например, [3]), а также доказано сохранение основных свойств некоторых характеристик инвестирования.

1. Усредненный портфель ценных бумаг

Будем считать, что ЛПР решает задачу определения структуры портфеля ценных бумаг на один период времени из N ($N > 1$) различных рисков ценных бумаг. Пусть для исследуемого периода известны значения вектора ожидаемых доходностей активов и их ковариационной матрицы: $\mu = (\mu_i)$ и $\Sigma = \Sigma^T = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 > 0$, $i, j = 1, 2, \dots, N$. Задача состоит в определении такой структуры ПЦБ $X^* = (x_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, N$, которая обеспечивала бы достижение заданной доходности μ_p с минимальным риском σ_p и минимальным расстоянием от ПЦБ индексного фонда со структурой $X_u = (x_i^u)$, $i = 1, 2, \dots, N$, вектором доходности $\mu^u = (\mu_i^u)$, $i = 1, 2, \dots, N$, с риском σ^u . Математическая формулировка поставленной задачи имеет вид

$$\alpha \sigma_p^2 + (1 - \alpha) \|X_u^T - X^T\|^2 \rightarrow \min_X, \quad (1)$$

$$X^T \mu = \mu_p, \quad (2)$$

$$X^T \mathbf{1} = 1. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$ – единичный N -вектор. Число $\alpha \in [0, 1]$ характеризует склонность инвестора к активной и пассивной стратегиям. Будем называть ПЦБ X^* усредненным, а α – коэффициентом усреднения.

Соотношения (1)–(3) представляют собой формализованное описание задачи определения оптимального в смысле минимизации усреднения риска ПЦБ и удаления от пассивного ПЦБ при фиксированной доходности. Частный случай ($\alpha = 1$) такой задачи носит название задачи Марковица (см., например, [3]). Поэтому естественно называть задачу (1)–(3) задачей Марковица усредненного ПЦБ, а решения этой задачи – эффективными усредненными портфелями.

Заметим, что в рассматриваемом случае компоненты вектора-решения задачи (1)–(3) $X^* = (x_i^*)$ могут принимать отрицательные значения. Как обычно (см., например, [3]), это означает рекомендацию ЛПР совершить относительно соответствующих активов операцию “короткая продажа”.

Наметим схему решения задачи. Функционал Лагранжа с учетом (1)–(3) имеет вид

$$L = L(X, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha X^T \Sigma X + (1 - \alpha) \|X_u^T - X^T\|^2 + \lambda_1(\mu_p - X^T \mu) + \lambda_2(1 - X^T \mathbf{1}).$$

Продифференцировав по X и приравняв нулю вектор производных, получим

$$2(\alpha \Sigma + (1 - \alpha) E)X - \lambda_1 \mu - \lambda_2 \mathbf{1} - 2(1 - \alpha)X_u = 0.$$

Ковариационная матрица Σ является положительно полуопределенной (см., например, [6]). Следовательно, матрица $(\alpha \Sigma + (1 - \alpha) E)$ положительно определена. Обозначим матрицу, обратную к этой матрице, через A . В частном случае $\alpha = 1$ будем предполагать существование A (ср. с [3]). Таким образом,

$$X = \frac{\lambda_1}{2} A \mu + \frac{\lambda_2}{2} A \mathbf{1} + (1 - \alpha) A X_u. \quad (4)$$

Коэффициенты Лагранжа λ_i , $i = 1, 2$, определяются из системы уравнений

$$\mu_p = \mu^T X = \frac{\lambda_1}{2} \mu^T A \mu + \frac{\lambda_2}{2} \mu^T A \mathbf{1} + (1 - \alpha) \mu^T A X_u,$$

$$1 = \mathbf{1}^T X = \frac{\lambda_1}{2} \mathbf{1}^T A \mu + \frac{\lambda_2}{2} \mathbf{1}^T A \mathbf{1} + (1 - \alpha) \mathbf{1}^T A X_u.$$

Решение этой системы имеет громоздкий вид и поэтому здесь не приведено. Заметим только, что оно представляет собой аффинное преобразование вектора X_u и числа μ_p с детерминированными коэффициентами. Значит, можно считать, что решение X^* задачи (1)–(3) имеет следующую структуру

$$X^* = \mathbf{a} + \mathbf{b} \mu_p + d X_u,$$

где векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и число d определяются по исходным данным задачи.

Исходя из представления решения X^* , запишем соответствующую дисперсию доходности ПЦБ

$$\sigma_p^2 = \mu_p^2 \mathbf{b}^T \Sigma \mathbf{b} + 2\mu_p (\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{b} + d \mathbf{b}^T \Sigma X_u) + \mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} + d \mathbf{a}^T \Sigma X_u + d^2 \sigma_u^2. \quad (5)$$

Выделим некоторые свойства оптимального решения X^* . Сначала заметим, что согласно представлению X^* с увеличением задаваемой доходности μ_p компоненты x_i , $i = 1, 2, \dots, N$, изменяются линейно. При возможности операции “короткая

продажа” они увеличиваются, если соответствуют более доходным активам. В противном случае они уменьшаются. Данный процесс происходит за счет изменения доходности μ_p до появления операции “короткая продажа”. Повлиять на начало этого момента может еще одна составляющая X^* , связанная с X_u . Здесь имеют значение и структура индексного фонда, и коэффициент усреднения.

Далее рассмотрим зависимость между риском и доходностью (5) в системе координат “доходность–риск”. В силу положительной определенности матрицы σ уравнение (5) определяет гиперболу G в плоскости (σ, μ) . Очевидно, что точка, соответствующая любому эффективному усредненному портфелю, лежит на этой кривой. Выделим оптимальное свойство эффективных портфелей, связанное с кривой G .

Пусть точка (σ_a, μ_a) соответствует портфелю со структурой X_a и $\rho = \|X_u - X_a\|$. Тогда для всех портфелей X_b с (σ_b, μ_b) и $\|X_u - X_a\| \leq \rho$ имеет место следующее.

Если $(\sigma_b, \mu_b) \in G$ и $\sigma_b = \sigma_a$, то $\mu_b \geq \mu_a$. Если $(\sigma_b, \mu_b) \in G$ и $\mu_b = \mu_a$, то $\sigma_b \leq \sigma_a$. Таким образом [3], точки (σ_p, μ_p) эффективных портфелей на G описывают часть G , которую естественно назвать фронтом эффективных усредненных портфелей.

2. Усредненные ПЦБ с безрисковыми активами

Пусть инвестор формирует свой ПЦБ как комбинацию из безрискового актива и заданного усредненного портфеля активов, включающего только рисковые ценные бумаги. Усреднение будем понимать в смысле предыдущего пункта. Традиционно (см. [3]) будем называть подобные портфели комбинированными.

Обозначим: R_0 – ставка доходности безрискового актива за один период владения; x_0 – доля безрисковых вложений в структуре ПЦБ; R_t , σ_t и μ_t , $t = r, p$, – доходность, ожидаемая доходность и риск, соответственно. Последние параметры являются характеристиками рисковой части ПЦБ ($t = r$) и комбинированного ПЦБ ($t = p$), относятся к одному периоду владения и удовлетворяют условиям $\mu_r > R_0$, $\sigma_r > 0$. Из очевидных равенств $\mu_p = x_0 R_0 + (1 - x_0)\mu_r$, $\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_r$ вытекает равенство [3]

$$\mu_p = R_0 + (\mu_r - R_0)\sigma_p/\sigma_r. \quad (6)$$

Будем считать, что заданы значения безрисковой ставки R_0 , ожидаемой доходности ПЦБ μ_p и структура ПЦБ индексного фонда X_u . Пусть введенные ранее обозначения сохраняют свой смысл. Рассмотрим следующее обобщение задачи Тобина [1–3]

$$\alpha\sigma_p^2 + (1 - \alpha)\|X - X_u\|^2 = \alpha X^T \Sigma X + (1 - \alpha)(X - X_u)^T (X - X_u) \rightarrow \min_X, \quad (7)$$

$$X^T \mu + (1 - X^T \mathbf{1}) R_0 = \mu_p. \quad (8)$$

Как видно, по сравнению с задачей Тобина, изменилась целевая функция: минимизируются некоторое усреднение риска портфеля и расстояния до ПЦБ индексного фонда. Несмотря на это усложнение, задача (6), (7) по-прежнему допускает аналитическое решение с помощью метода Лагранжа. Функционал Лагранжа при этом имеет вид

$$\Lambda(X, \lambda) = \alpha X^T \Sigma X + (1 - \alpha)(X - X_u)^T (X - X_u) + \lambda(\mu_p - X^T \mu - (1 - X^T \mathbf{1}) R_0).$$

Продифференцировав эту функцию по X и приравняв нулю вектор производных, получим

$$2\alpha \Sigma X + 2(1 - \alpha)E(X - X_u) - \lambda(\mu - R_0 \mathbf{1}) = 0.$$

Значит,

$$X = (\lambda/2) A (\mu - R_0 \mathbf{1}) + (1 - \alpha) A X_u,$$

где A — обратная к матрице $\alpha \Sigma + (1 - \alpha) E$.

Определим λ . Умножим последнее равенство слева на матрицу $(\mu - R_0 \mathbf{1})^T$ и получим

$$(\mu - R_0 \mathbf{1})^T X = \mu_p - R_0 = \lambda (\mu - R_0 \mathbf{1})^T A (\mu - R_0 \mathbf{1}) / 2 + (1 - \alpha) (\mu - R_0 \mathbf{1})^T A X_u.$$

Значит,

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_p - R_0}{(\mu - R_0 \mathbf{1})^T A (\mu - R_0 \mathbf{1})} - \frac{(1 - \alpha) (\mu - R_0 \mathbf{1})^T A X_u}{(\mu - R_0 \mathbf{1})^T A (\mu - R_0 \mathbf{1})}.$$

Таким образом, решение задачи (7), (8) имеет вид

$$X^* = c_1 Y + Z, \quad (9)$$

где $Y = A (\mu - R_0 \mathbf{1})$, $Z = (1 - \alpha) A X_u$,

$$c_1 = \left((\mu_p - R_0) - (1 - \alpha) (\mu - R_0 \mathbf{1})^T A X_u \right) / D, \quad D = (\mu - R_0 \mathbf{1})^T A (\mu - R_0 \mathbf{1}).$$

Следовательно, искомое решение задачи (7), (8) является линейной комбинацией векторов Y и Z , причем эти векторы не зависят от ожидаемой доходности портфеля и склонности инвестора к риску. Отсюда вытекают следующие свойства оптимальных комбинированных портфелей.

Все оптимальные портфели, включающие безрисковый и рискованные активы, независимо от склонности инвестора к риску и ожидаемой доходности портфеля, могут быть получены, исходя из следующего свойства. Разность между векторами X^* и Z коллинеарна вектору Y . Векторы Y и Z не зависят от ожидаемой доходности портфеля и склонности инвестора к риску. Рисковый портфель соответствует частному случаю рассматриваемого комбинированного портфеля при $x_0 = 0$, что говорит об отсутствии безрисковых вложений. В этом случае для X^* должно выполняться равенство (4). Поэтому имеет место соотношение

$$1 = \mathbf{1}^T X^* = \mathbf{1}^T (c_1 Y) + \mathbf{1}^T Z.$$

Таким образом, можно выделить портфель активов со структурой вида

$$\bar{X}^* = \frac{(1 - \mathbf{1}^T Z) A (\mu - R_0 \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T A (\mu - R_0 \mathbf{1})} + Z. \quad (10)$$

Обозначим характеристики ПЦБ из (10) через μ_r , σ_r и заметим следующее. Портфель (10) включает в себя только рискованные активы и удовлетворяет равенству (4). Следовательно, он является элементом множества оптимальных по Марковицу усредненных ПЦБ, поэтому точка с координатами (μ_r, σ_r) должна принадлежать кривой эффективных портфелей, определяемой равенством (5). С другой стороны, портфель со структурой $\bar{X}^*$ принадлежит множеству эффективных комбинированных ПЦБ, значит, точка (μ_r, σ_r) лежит на прямой (6). Таким образом, портфелю $\bar{X}^*$ соответствует точка касания линий (5) и (6). Итак, портфель со структурой $\bar{X}^*$ имеет свойства, аналогичные свойствам портфеля Тобина, поэтому о нем можно говорить как о портфеле Тобина усредненного ПЦБ.

Подводя итог, сформулируем следующее предложение.

Утверждение. Оптимизация комбинированного усредненного ПЦБ сводится к оптимизации ПЦБ, включающего только рискованные ценные бумаги. Структура такого рискованного портфеля единственным образом определяется с помощью вектора вида (10).

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Дж.В. Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997. 265 с.
2. Markowitz H.M. Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Oxford, Blackwell, 1990. 387 p.
3. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг. Количественные методы анализа. М.: Дело, 2003. 320 с.
4. Севодин М.А., Куимов П.А. О диверсификации индексного фонда // Перспективы науки. 2016. № 7 (82). С. 29–32.
5. Северина Л.А., Севодин М.А. О диверсификации индексного фонда // МЭЖ. 2020. № 6. С. 683–689.
6. Симущкин С.В. Методы теории вероятностей. М.: Лань, 2020. 548 с.

Поступила в редакцию 5.02.2024

Принята к публикации 6.03.2024

Севодин Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Комсомольский просп., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия

E-mail: m.sevodin@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 92–98

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.92-98

Combined Strategies for Managing the Securities Portfolio Structure*M.A. Sevodin**Perm National Research Polytechnic University, Perm, 614990 Russia*E-mail: m.sevodin@mail.ru

Received February 5, 2024; Accepted March 6, 2024

Abstract

The possibilities of combining known techniques for optimizing the securities portfolio (SP) structure were studied. A method was introduced that enables the simultaneous use of both passive and active approaches to managing the SP structure. The combined application of these methods is based on techniques for SP diversification and searching for an SP structure that mirrors the SP structure of an index fund. The objective function was modified in order to optimize the SP structure according to the traditional “return–risk” approach. The proposed objective function, along with the security risk, describes the degree to which the desired distribution of SP shares coincides with the distribution generated using an index fund. It was established that the main properties of optimal SPs obtained with the “return–risk” approach also occur in the case under consideration.

Keywords: securities portfolio, profitability, risk, index fund, structure optimization**Conflicts of Interest.** The author declares no conflicts of interest.

References

1. Sharpe W.F., Alexander D.V., Bailey J.V. *Investitsii* [Investments]. Moscow, INFRA-M, 1997. 265 p. (In Russian)
2. Markowitz H.M. *Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*. Oxford, Blackwell, 1990. 387 p.
3. Malyugin V.I. *Rynok tsennykh bumag. Kolichestvennye metody analiza* [Securities Market. Quantitative Methods of Analysis]. Moscow, Delo, 2003. 320 p. (In Russian)
4. Sevodin M.A. Diversification of the index fund. *Perspekt. Nauki*, 2016, no. 7 (82), pp. 29–32. (In Russian)
5. Severina L.A., Sevodin M.A. The diversification of an index fund. *MEZh*, 2020, no. 6, pp. 683–689. (In Russian)
6. Simushkin S.V. *Metody teorii veroyatnostei* [Methods of Probability Theory]. Moscow, Lan', 2020. 548 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Севодин М.А. О смешанных стратегиях управления структурой портфеля ценных бумаг // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 92–98. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.92-98>. ⟩

⟨ **For citation:** Sevodin M.A. Combined strategies for managing the securities portfolio structure. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 92–98. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.92-98>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.516, 517.928

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.99-110

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Л. Сенников

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, 630090, Россия*

Аннотация

Поставлена и решена задача о нестационарном течении вязкой жидкости, окружающей движущееся твердое цилиндрическое тело и имеющей внешнюю свободную границу. Жидкость испытывает периодические по времени воздействия, характеризующиеся наличием или отсутствием выделенного направления в пространстве. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости. Обнаружены новые гидромеханические эффекты.

Ключевые слова: вязкая жидкость, твердое тело, свободная граница, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, вращательное движение

Введение

Периодическим по времени явлениям, процессам принадлежит важнейшая роль в природе и технике. Это положение, в частности, является актуальным в отношении исследований в области механики жидкости. Регулярно осуществляемое изучение динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях к настоящему времени привело к получению ряда содержательных результатов, выявлению новых гидромеханических эффектов (см., например, [1–5], а также [6–38] и представленную там литературу). В частности, наряду с другими результатами, обнаружены эффекты парадоксального поведения твердого включения в вибрирующей жидкости [1–3, 6–8], “самопроизвольного” перехода твердого тела в колеблющейся вязкой жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [28], преимущественно однонаправленного вращения твердого тела и вязкой жидкости [31]. Установлено наличие “разрешенных” и “запрещенных” состояний подвергающейся периодическим по времени воздействиям гидромеханической системы, для которых решение задачи о движении системы соответственно существует и не существует [3]. Обнаружен эффект “левитации” жидкости [5]. Построена математическая модель гидромеханического аналога “маятника Капицы” [3, 36]. Введены основополагающие понятия однородных и неоднородных колебаний жидкости, определены количественные характеристики неоднородности колебаний жидкости [3]. Доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [3, 9].

В настоящей работе рассмотрена задача о движении вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях на жидкость со стороны находящегося в ней твердого тела, которое пульсирует и совершает вращательное движение. Воздействия, испытываемые жидкостью, могут характеризоваться как наличием, так и отсутствием выделенного направления в пространстве. Выявлены новые гидромеханические эффекты. В частности, обнаружен эффект, состоящий в том, что (на фоне колебаний) часть жидкости совершает стационарное вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего (по времени) вращения твердого тела.

1. Постановка задачи

Имеется несжимаемая вязкая жидкость, окружающая твердое тело – бесконечно длинный круговой цилиндр Ξ радиуса A (рис. 1). Ось тела Ξ находится на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z . Тело Ξ совершает вращательное движение вокруг оси Z с угловой скоростью Ω . Радиус A и угловая скорость Ω заданным образом периодически с периодом T изменяются со временем t (среднее значение угловой скорости Ω может быть как отличным от нуля, так и равным нулю). Жидкость занимает область $Q : A < R < B$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, θ , Z – цилиндрическая система координат; B – функция t , связанная с радиусом A условием постоянства разности $B^2 - A^2$). Жидкость граничит с твердым телом Ξ и с пустотой (твердая граница Γ_s и свободная граница Γ_f жидкости характеризуются соотношениями $R = A$, $R = B$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $-\infty < Z < \infty$).

Требуется определить периодическое по времени осесимметричное, плоское движение жидкости со свободной границей, обусловленное испытываемыми жидкостью воздействиями со стороны находящегося в ней твердого тела.

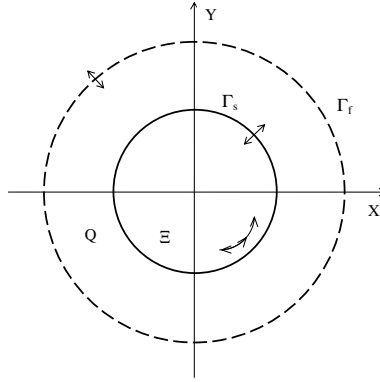


Рис. 1. Гидромеханическая система

Пусть $\tau = t/T$; $0 \leq \varepsilon < 1$ – параметр; $g = \sin 2\pi\tau$; $h = \sin(2\pi\tau + \varphi)$ (φ – постоянная); $a = A/\hat{A} = 1 + \varepsilon g$ ($\hat{A} > 0$ – постоянная, значение A при $\varepsilon = 0$ (значение A в отсутствие пульсаций тела Ξ)); $\hat{B}$ – постоянная, значение B при $\varepsilon = 0$; $\varkappa = \hat{B}/\hat{A}$; $b = B/\hat{B} = \sqrt{a^2 + \varkappa^2 - 1}/\varkappa$; $\omega = \Omega T = \hat{\omega} [h + \varepsilon(\varkappa - 1)s]$ ($\hat{\omega} > 0$, s – постоянные); σ, ρ и ν – коэффициент поверхностного натяжения, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно; $Re = \hat{A}^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $r = R/\hat{A}$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ – единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания r и θ соответственно; $\mathbf{V}$ – ско-

рость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\hat{A} = v_r(r, \tau)\mathbf{e}_r + v_\theta(r, \tau)\mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = T^2 P/(\rho\hat{A}^2) = p(r, \tau)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho\hat{A}^3)$.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в } Q; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q; \quad (2)$$

$$v_r = \frac{da}{d\tau}, \quad v_\theta = \omega a \quad \text{на } \Gamma_s \quad (\text{при } r = a); \quad (3)$$

$$v_r = \kappa \frac{db}{d\tau}, \quad p - \frac{2}{Re} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\lambda}{\kappa b} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \quad \text{на } \Gamma_f \quad (\text{при } r = \kappa b). \quad (4)$$

Отметим, что в задаче (1)–(4) испытываемые жидкостью периодические по времени воздействия со стороны тела Ξ при $s \neq 0$ характеризуются наличием, а при $s = 0$ – отсутствием выделенного направления в пространстве.

2. Решение задачи

Согласно (2)–(4) имеем

$$v_r = w/r, \quad (5)$$

где

$$w = a(da/d\tau) = \kappa^2 b(db/d\tau).$$

Из (1), (3)–(5) следует

$$p = \frac{\lambda}{\kappa b} - \frac{2}{Re} \frac{d}{d\tau} \ln b - \frac{dw}{d\tau} \ln \frac{r}{\kappa b} + w^2 \frac{r^2 - \kappa^2 b^2}{2\kappa^2 b^2 r^2} + \int_{\kappa b}^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr'; \quad (6)$$

$$Re \, r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau} = r^2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + (1 - Re \, w) r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (1 + Re \, w) v_\theta \quad \text{в } Q; \quad (7)$$

$$v_\theta = \omega a \quad \text{при } r = a; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \quad \text{при } r = \kappa b. \quad (9)$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [37, 38]. Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Используя (7)–(10), в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) получим

$$Re \, r^2 \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_N}{\partial r} + v_N = -N Re \frac{dg}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \quad \text{в } \bar{Q}; \quad (11)$$

$$v_N = (1 - N) \hat{\omega} h + N \left[g \left(\hat{\omega} h - \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) + \hat{\omega} (\kappa - 1) s \right] \quad \text{при } r = 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial r} - \frac{v_N}{r} = -N \frac{g}{\kappa r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \quad \text{при } r = \kappa. \quad (13)$$

Здесь $\bar{Q}$ – область $1 < r < \kappa$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$).

Пусть $N = 0$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_0 = \widehat{\omega} \operatorname{Imag} \left[\frac{I_2(q\kappa)K_1(qr) + K_2(q\kappa)I_1(qr)}{Q_1} e^{i(2\pi\tau + \varphi)} \right], \quad (14)$$

где $q = (1 + i)\sqrt{\pi Re}$; I_1, I_2, K_1, K_2 – модифицированные функции Бесселя;

$$Q_1 = I_2(q\kappa)K_1(q) + K_2(q\kappa)I_1(q).$$

Пусть $N = 1$. Проведем усреднение (11)–(13) по безразмерному времени τ . В результате этого найдем

$$r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + r \frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = Re \left\langle \frac{dg}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \right\rangle \quad \text{в } \bar{Q}; \quad (15)$$

$$\bar{v} = \left\langle g(\widehat{\omega}h - \frac{\partial v_0}{\partial r}) \right\rangle + \widehat{\omega}(\kappa - 1)s \quad \text{при } r = 1; \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{v}}{r} = -\frac{1}{\kappa r^2} \left\langle g(r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0) \right\rangle \quad \text{при } r = \kappa. \quad (17)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$; $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \operatorname{Real}(\tilde{v}e^{4\pi i\tau}), \quad (18)$$

где $\tilde{v}$ – функция r . Из (15)–(17) следует

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \widehat{\omega} [\cos \varphi + (\kappa - 1)s + \frac{1}{2} \operatorname{Real} \frac{e^{i\varphi} q Q_2}{Q_1}] r - \\ &- \frac{1}{2} \pi Re \widehat{\omega} \operatorname{Imag} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{Q_1} [I_2(q\kappa)G_K + K_2(q\kappa)G_I] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_2 &= I_2(q\kappa)K_0(q) - K_2(q\kappa)I_0(q); \\ G_I &= I_1(qr) - I_1(q)r - qr \int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'} dr'; \\ G_K &= K_1(qr) - K_1(q)r + qr \int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'} dr' \end{aligned}$$

(I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя).

Формулами

$$v_\theta = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (20)$$

и (5), (6), (14), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии (происходящих на фоне колебаний) необычных стационарных вращательных течений жидкости.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях $\kappa - 1$. Пусть $\chi = (\kappa - r)/(\kappa - 1)$. Используя (5), (14) и (18)–(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \varepsilon \widehat{\omega} [s - \pi Re(\sin \varphi) \chi] (\kappa - 1) \mathbf{e}_\theta \quad \text{при } \kappa - 1 \rightarrow 0. \quad (21)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении безразмерная скорость $\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta$ совпадает с безразмерной средней по времени угловой скоростью вращения жидкости вокруг оси Z .

Согласно (21) (на фоне колебаний) при любом значении $Re > 0$ имеет место следующее. Если $s \neq 0$, то при $\chi \sin \varphi = 0$ (то есть при $\sin \varphi = 0$, $1 \leq r < \varkappa$ и при $r = \varkappa$, $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$) средняя (по времени) угловая скорость вращения жидкости равна (отличной от нуля) средней угловой скорости вращения тела Ξ . Если $s \sin \varphi < 0$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость “обгоняет” твердое тело. Если $s \sin \varphi > 0$, и $|s| > \pi Re |\sin \varphi|$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость “отстает” от твердого тела. Если $s \sin \varphi > 0$, и $|s| < \pi Re |\sin \varphi|$, то при $r = r^* = \varkappa - (\varkappa - 1)s/(\pi Re \sin \varphi)$ угловая скорость жидкости равна нулю; при $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $r^* < r < \varkappa$ жидкость “отстает” от твердого тела; при $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения тела Ξ ; для $s = \pi Re \sin \varphi$ выполняется $r^* = 1$, и угловая скорость жидкости равна нулю при $r = 1$. Если $s = 0$, то при $1 \leq r < \varkappa$ направление вращения жидкости определяется знаком $\sin \varphi$ (при $\sin \varphi < 0$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}_\theta$, при $\sin \varphi > 0$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}_\theta$); при $r = \varkappa$ угловая скорость вращения жидкости равна нулю.

Представляется интересным отметить следующее. При $s \sin \varphi > 0$, $|s| < \pi Re |\sin \varphi|$ для больших значений $Re |\sin \varphi|$ разность $\varkappa - r^*$ является малой по сравнению с разностью $\varkappa - 1$; это соответствует наличию такого движения жидкости, что (на фоне колебаний) в “очень тонкой области” $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , а в “основной области” $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердого тела (рис. 2).

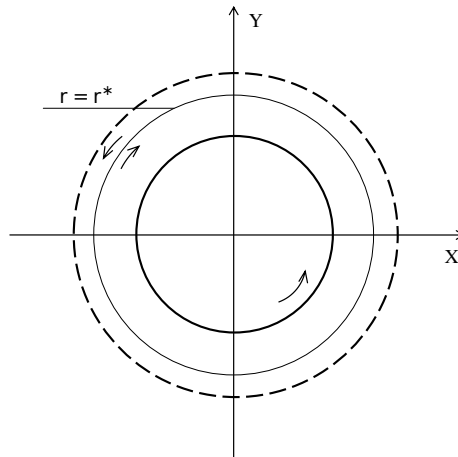


Рис. 2. Пример качественной картины среднего движения гидромеханической системы

Заключение

Проведенное исследование позволило обнаружить новые эффекты необычного, парадоксального движения жидкости при периодических по времени воздействиях. Рассмотрена динамика вязкой жидкости, обусловленная как воздействиями, характеризующимися наличием выделенного направления в пространстве, так и воздействиями, характеризующимися отсутствием такого направления. Из представленного в работе следует, что воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут порождать качественные изменения в движении жидкости; по достигаемому влиянию на динамику гидромеханических систем такие воздействия способны эффективно конкурировать, например, со стационарными воздействиями на системы (см. также [3, 5]).

Настоящей работой, в частности, продемонстрировано, как “не имеющим направления” создается “имеющее направление”. Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий. Гидромеханическая система, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит отклики (реакции на воздействия), которые характеризуются наличием выделенного направления в пространстве и выражаются в том, что свободные части системы (части системы, движение которых не задано) – в том числе жидкие слои – на фоне колебаний совершают среднее движение. Это находится в непосредственной связи со следующим обобщенным принципом среднего движения: основополагающей причиной того, что не имеющими выделенного направления в пространстве периодическими по времени (колебательными, вибрационными) воздействиями на гидромеханическую систему порождается среднее по времени движение свободных частей системы, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях (см. также [3]).

Результаты настоящей работы, в частности, могут использоваться при проведении направленных экспериментальных исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем, при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами, при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на периодические по времени воздействия.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Челомей В.Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
3. Сенницкий В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Междунар. журн. прикл. и фундам. иссл. 2017. № 8 (ч. 1). С. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>.
4. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.210>.
5. Сенницкий В.Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>.
6. Сенницкий В.Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.

7. Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
8. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. О движении твёрдого тела в вибрирующей жидкости // Конвект. течен. Пермь: изд. Перм. пед. ин-та, 1987. С. 61–71.
9. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
10. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory // Proc. 14 IMACs Congr. on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, GA: Ga. Inst. Technol., 1994. P. 59–68.
11. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Q. 1994. V. 4, No 1. P. 221–225.
12. Kozlov V.G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhys. Lett. 1996. V. 36, No 9. P. 651–656.
<https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
13. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Cryst. Growth. 1997. V. 180, No 3–4. P. 648–659.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(97\)00294-7](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(97)00294-7).
14. Иванова А.А., Козлов В.Г., Эвеск П. Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998, № 4. С. 29–39.
15. Любимов Д.В., Перминов А.В., Черепанов А.А. Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // Вибрационные эффекты в гидродинамике: Сб. статей / Пермь: Перм. ун-т, 1998. С. 204–221.
16. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
17. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. АН СССР. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
18. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I. Non-uniform heating // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 159–183. <https://doi.org/10.1017/S0022112006001418>.
19. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. V. 73, No 1. P. 72–78. <https://doi.org/10.1115/1.1992516>.
20. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaeu S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. V. 18. Art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
21. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J.C., Yan Y., Saghir Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. V. 19. Art. 017111. <https://doi.org/10.1063/1.2409622>.
22. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 31–40.
23. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration // Acta Astronaut. 2012. V. 79. P. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.

24. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 63–73.
25. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Sci. Technol. 2013. V. 25, No 2. P. 121–126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>.
26. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 55–63.
27. Алабузев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. механ. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.16>.
28. Сенников В.Л. О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>.
29. Kozlov V., Vlasova O. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2015. V. 27, No 4. P. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
30. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation // Fluid Dyn. Res. 2016. V. 48, No 5. Art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
31. Сенников В.Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.210>.
32. Власова О.А., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49.
33. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // Вычисл. механ. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>.
34. Щипицын В.Д. Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 15. С. 43–46. <https://doi.org/10.21883/PJTf.2020.15.49749.18349>.
35. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // Пермск. гидродинам. научн. чтен. Сб. статей по матер. VIII Всероссийск. конф., посвящ. памяти проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. Отв. ред. Т.П. Любимова. Пермь: ПГНИУ, 2022. С. 254–261.
36. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007>.
37. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 352 с.
38. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.

Поступила в редакцию 08.11.2023

Принята к публикации 19.01.2024

Сенницкий Владимир Леонидович, старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: sennitskii@yandex.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.99-110

On the Motion of a Viscous Liquid with a Free Boundary

V.L. Sennitskii

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Received November 8, 2023; Accepted January 19, 2024

Abstract

The problem of the non-stationary flow of a viscous liquid with an external free boundary around a moving solid cylindrical body was formulated and solved. The liquid is subject to periodic impacts with or without the predominant direction in space. To formulate the problem, the Navier–Stokes equation, the continuity equation, and the equation of conditions at both the solid and free boundaries of the liquid were used. New hydro-mechanical effects were discovered.

Keywords: viscous liquid, solid body, free boundary, periodic impacts, predominant direction in space, rotatory motion

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Hydromechanical system.

Fig. 2. A qualitative representation of the mean motion of the hydromechanical system.

References

1. Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67. (In Russian)
2. Chelomey V.N. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 336 p. (In Russian)
3. Sennitskii V.L. Paradoxal motion of a liquid. *Mezhdunar. Zh. Prikl. Fundam. Issled.*, 2017, no. 8, pt. 1, pp. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>. (In Russian)
4. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional flow of a viscous fluid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 326–330. <https://doi.org/10.1134/S1990478921020149>.

5. Sennitskii V.L. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>. (In Russian)
6. Sennitskii V.L. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 5, pp. 620–623. <https://doi.org/10.1007/BF00915307>.
7. Lugovtsov B.A., Sennitskii V.L. Motion of a body in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 2, pp. 314–317. (In Russian)
8. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherpanov A.A. On the motion of a rigid body in a vibrating liquid. In: *Konvektivnye techeniya* [Convective Flows]. Perm, Izd. Permsk. Pedagog. Inst., 1987, pp. 61–71. (In Russian)
9. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, vol. 319, no. 1, pp. 117–119. (In Russian)
10. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory. *Proc. 14 IMACS Congr. on Computational and Applied Mathematics*. Atlanta, GA, Ga. Inst. Technol., 1994, pp. 59–68.
11. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems. *Microgravity Q.*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 221–225.
12. Kozlov V.G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. *Europhys. Lett.*, 1996, vol. 36, no. 9, pp. 651–656. <https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
13. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase. *J. Cryst. Growth*, 1997, vol. 180, nos. 3–4, pp. 648–659. [https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(97\)00294-7](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(97)00294-7).
14. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, no. 4, pp. 488–496. <https://doi.org/10.1007/BF02698213>.
15. Lyubimov D.V., Perminov A.V., Cherepanov A.A. Generation of mean flows near fluid interface in a vibration field. In: *Vibratsionnye efekty v gidrodinamike: Sb. statei* [Vibration Effects in Hydrodynamics: A Collection of Articles]. Perm, Permsk. Univ., 1998, pp. 204–221. (In Russian)
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh pol'yakh* [Dynamics of Interfaces in Vibration Fields]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 216 p. (In Russian)
17. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 6, pp. 311–314. <https://doi.org/10.1134/1.1958123>.
18. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I. Non-uniform heating. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 564, pp. 159–183. <https://doi.org/10.1017/S0022112006001418>.
19. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. *J. Appl. Mech.*, 2006, vol. 73, no. 1, pp. 72–78. <https://doi.org/10.1115/1.1992516>.
20. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
21. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J.C., Yan Y., Saghir Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, art. 017111. <https://doi.org/10.1063/1.2409622>.

22. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational hydrodynamic interaction between a sphere and the boundaries of a cavity. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 194–202. <https://doi.org/10.1134/S001546280802004X>.
23. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronaut.*, 2012, vol. 79, pp. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.
24. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 889–897. <https://doi.org/10.1134/S0015462810060062>.
25. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. *Microgravity Sci. Technol.*, 2013, vol. 25, no. 2, pp. 121–126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>.
26. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 773–780. <https://doi.org/10.1134/S002189441405006X>.
27. Alabuzhev A.A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151–161. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.16>. (In Russian)
28. Sennitskii V.L. On a prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous fluid. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>. (In Russian)
29. Kozlov V., Vlasova O. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.*, 2015, vol. 27, no. 4, pp. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
30. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dyn. Res.*, 2016, vol. 48, no. 5, art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
31. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 284–288. <https://doi.org/10.1134/S1990478917020144>.
32. Vlasova O.A., Kozlov V.G., Kozlov N.V. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 59, no. 2, pp. 219–228. <https://doi.org/10.1134/S0021894418020050>.
33. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Numerical study of the effect of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>. (In Russian)
34. Shchipitsyn V.D. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, no. 8, pp. 771–774. <https://doi.org/10.1134/S1063785020080143>.
35. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. *Permsk. gidrodinam. nauchn. chten. Sb. statei po mater. VIII Vserossiisk. konf., posvyashch. pamyati prof. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskogo i D.V. Lyubimova* [Scientific Lectures on Hydrodynamics in Perm: Proc. VIII All-Russ. Conf. in Memory of Professors G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, and D.V. Lyubimov]. Lyubimova T.P. (Ed.). Perm, PGNIU, 2022, pp. 254–261. (In Russian)

36. Kapitza P.L. Pendulum with a vibrating suspension. *Usp. Fiz. Nauk*, 1951, vol. 44, no. 1, pp. 7–20. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007>. (In Russian)
37. Kryloff N.M., Bogoliuboff N.N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku* [Introduction to Non-Linear Mechanics]. Moscow, Izhevsk, NITs “Regulyarn. Khaot. Din.”, 2004. 352 p. (In Russian)
38. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations]. Moscow, GIF-ML, 1958. 408 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Сенницкий В.Л. О движении вязкой жидкости со свободной границей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 99–110. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>. ⟩

⟨ **For citation:** Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.54

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.111-122

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

П.Л. Шабалин, Р.Р. Фаизов

*Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Казань, 420043, Россия*

Аннотация

Изучена неоднородная краевая задача Гильберта для верхней полуплоскости с конечным индексом и краевым условием на вещественной оси для одного обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярной точкой на вещественной оси. Получена структурная формула общего решения этого уравнения при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу логарифмического порядка сопутствующей краевой задачи Гильберта для аналитических функций. Эта формула и результаты по разрешимости задачи Гильберта теории аналитических функций применены при решении поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, обобщенные аналитические функции, сингулярная точка, бесконечный индекс, целые функции уточненного нулевого порядка

Введение

В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ обозначим верхнюю полуплоскость символом E , вещественную ось – символом $\Gamma = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$. В области E рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной точкой

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{za(z)}{|z|^2}. \quad (1)$$

Здесь $a(z), F(z) \in C(\bar{E} \setminus \{0\})$, $a(z)$ – функция, ограниченная в $\bar{E}$. Мы исследуем задачу Гильберта с краевым условием на Γ и непрерывным коэффициентом и правой частью в классе решений $U(z)$ системы (1). Решение краевой задачи построим с использованием структурной формулы общего решения системы (1). Мы выведем эту формулу при ограничениях, допускающих бесконечный индекс сопутствующей задачи Гильберта для аналитических функций.

Теория обобщенных систем Коши – Римана

$$\partial_{\bar{z}}U + A(z)U + B(z)\bar{U} = F(z), \quad z \in G,$$

с коэффициентами из $L^p(G)$, $p > 2$, в случае, когда область G конечна или из $L^p(G) \cap L^{p'}(G)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$, для неограниченной области и краевых задач для них изложена в монографии [1]. Аппарат, введенный И. Н. Векуа, применяется к прикладным задачам теории поверхностей, теории оболочек [1], в частности,

к нелинейным задачам равновесия тонких упругих оболочек [2,3]. Изучению эллиптической системы, коэффициенты которой обращаются в бесконечность степенного (не ниже первого) порядка в изолированных точках (сингулярные точки) или на некоторой линии L (L – сингулярная линия), и краевых задач для её решений посвящены, например, работы [4–17].

Отметим, что в приведенных выше работах рассмотрены задачи, приводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. Н. Р. Раджабов [16] заметил, что при определенных условиях на коэффициенты системы краевая задача с конечным индексом для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией может трансформироваться в аналогичную задачу теории аналитических функций, но с бесконечным индексом. Развитие данной работы содержится в статьях А. Б. Расулова [16,17], в которых приведены формулы общего решения и обсуждены вопросы разрешимости краевых задач. Подробные исследования разрешимости краевых задач для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующих задач для аналитических функций, содержатся в работах [18–21].

1. Решение эллиптической системы

Проведем решение уравнения (1), следуя методу, разработанному А. Б. Расуловым и И. Н. Дорофеевой в [15]. При этом в отличие от [14,15] сингулярная точка в нашей работе лежит на границе, а не внутри полуплоскости, а функция $a(z)$ не предполагается непрерывной в замкнутой полуплоскости.

Именно, мы будем считать, что для функции $a(z)$ существует аналитическая в E , непрерывная в $\overline{E} \setminus \{0\}$ функция $b(z)$, удовлетворяющая условиям

$$b(z) = b + o(1), \quad z \rightarrow 0, \quad y \neq 0; \quad (2)$$

$$b(z) = O(|z|^{-\beta}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \beta > 0, \quad (3)$$

граничные значения функции $b(z)$ (т. е. функция $b(x)$) непрерывны по Гёльдеру с показателем γ на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, включая концы, в точке $x = 0$ функция $b(x)$ имеет односторонние мнимые пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} b(x) = ib^{\pm}. \quad (4)$$

Кроме того, потребуем, чтобы для $A(z)$ существовали такие числа $p > 2$, $1 < p' < 2$, что

$$A_0(z) := \frac{z(a(z) - b(z))}{|z|^2} \in L^p(E) \cap L^{p'}(E), \quad p > 2, \quad 1 < p' < 2. \quad (5)$$

Таким образом, в отличие от [15] мы отказались от непрерывности $a(z)$ на Γ . Это изменение повлияет на вывод формулы общего решения уравнения (1) и при решении краевой задачи приведет к случаю бесконечного индекса.

Введем семейство областей $E_\varepsilon = E \cap \{z : \varepsilon < |z| < 1/\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Мы должны доказать (см. [15]), что для оператора Векуа

$$(T_\varepsilon A)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} \frac{A(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}$$

в условиях (2)–(5) существует равномерный предел

$$\Omega(z) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon A)(z), \quad z \in K, \quad (6)$$

на любом компакте $K \in E$, и этот предел удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}}\Omega(z) = A(z), \quad z \in E.$$

Для правой части уравнения (1) потребуем выполнения условия

$$e^{-\Omega(z)}F(z) \in L^p(\overline{E_\varepsilon}) \cap L^q(\overline{E_\varepsilon}), \quad p > 2, \quad 1 < q < 2,$$

для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда общее решение уравнения (1) в E можно представить следующей формулой [15]

$$U(z) = e^{\Omega(z)}[(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \quad z \in E,$$

где $\phi(z)$ – функция, аналитическая в E .

Докажем существование и найдем предел (6). Граница области E_ε состоит из двух отрезков вещественной оси $[-1/\varepsilon, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ и двух полуокружностей $l_\varepsilon = \{z : z = \varepsilon e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ и $L_\varepsilon = \{z : z = e^{i\theta}/\varepsilon, 0 < \theta < \pi\}$. Следуя [15], представим $T_\varepsilon A$ в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon A_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \frac{b(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

где

$$I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\varepsilon, \delta}} \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \frac{b(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad E_{\varepsilon, \delta} = E_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta\}.$$

С учетом равенства $\partial_{\bar{\zeta}} \ln |\zeta| = \zeta / (2|\zeta|^2)$ после применения формулы Грина и перехода к пределу по $\delta \rightarrow 0$ при условии (2) получим

$$I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial E_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta - 2b(z) \ln |z|. \quad (7)$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$ – фиксированная точка из компакта K . Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon < |z| < 1/\varepsilon$. Рассмотрим криволинейные интегралы, входящие в правую часть формулы (7). Для интеграла по дуге окружности l_ε с учетом (2) выведем оценку

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{l_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta| d\zeta}{\zeta - z} \right| = \frac{b \ln \varepsilon}{\pi} \left| \int_{l_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = O(\varepsilon \ln \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для интеграла по дуге L_ε при достаточно малых ε в силу (3) получим

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta| d\zeta}{\zeta - z} \right| = O(\varepsilon^\beta \ln(1/\varepsilon)), \quad \beta > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теперь очевидно следующее асимптотическое равенство

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{l_\varepsilon} + \int_{L_\varepsilon} \right) \frac{b(\zeta) \ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

В равенстве (7), приняв во внимание (8), перейдем к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $z \in K$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(z) = -2b \ln |z| + \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi|}{\xi - z} d\xi, \quad (9)$$

причем несобственные интегралы с бесконечным пределом в формуле (9) сходятся в силу условий (3), (4) и условия Гёльдера с показателем γ на интервалах интегрирования для функции $b(\xi)$. Для интегралов типа Коши с плотностью, имеющей в начале координат разрыв логарифмического порядка, справедливы асимптотические формулы И. М. Мельника (см., например, [22], с. 68), из которых с учетом формулы (4) выведем

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi| d\xi}{\xi - z} = \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{z} - (b^- + b^+) \ln \frac{1}{z} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (10)$$

Регулярные слагаемые в правой части равенства (10) на контуре интегрирования удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ (см. [22], с. 73). Таким образом, как и в [15], но при условиях (2)–(4) получена формула

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= H(z) - 2b(z) \ln \frac{1}{|z|}, \\ H(z) &= (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi|}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) и формулы Сохоцкого выведем асимптотику в окрестности $t = 0$ для граничных значений $\Omega(z)$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|} + i2(b^- - b^+) \ln \frac{1}{|t|} + O(1), & t \rightarrow 0-, \\ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{t} + i(b^+ - b^-) \ln \frac{1}{t} + O(1), & t \rightarrow 0+. \end{cases} \quad (12)$$

Итак, мы доказали, что при условиях (2)–(4) функция $I_\varepsilon^+(z)$ равномерно сходится на компакте к пределу (9). Следовательно (см. [14], [15]), общее решение уравнения (1) в области E задается формулами вида

$$U(z) = e^{\Omega(z)} [(T(e^{-\Omega} F))(z) + \phi(z)], \quad (13)$$

где $\Omega(z)$ – функция (11), интегральный оператор Векуа

$$(TA_0)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_E \frac{A_0(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad z \in E,$$

действует [1] из $L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$, в класс Гёльдера $H(\overline{E})$, $\phi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в области E и непрерывная в $\overline{E}$.

Теорема 1. Пусть коэффициент $A(z)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям (2)–(5) и $(e^{-\Omega} F)(z) \in L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$. Тогда общее решение уравнения (1) в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$ задается формулой (13), в которой $\phi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в E .

2. Решение задачи Гильберта

В классе решений (13) уравнения (1) рассмотрим в полуплоскости E задачу Гильберта с краевым условием на вещественной оси

$$Re [e^{-i\alpha(t)}U(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (14)$$

непрерывным по Гёльдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом $e^{-i\alpha(t)}$ и правой частью $f(t)$. Подставив функцию (13) в условие (14), получим краевое условие задачи Гильберта для определения функции $\phi(z)$, аналитической в полуплоскости

$$\begin{aligned} Re [e^{-i\alpha^*(t)}\phi(t)] &= f^*(t), \quad t \in \Gamma, \quad \alpha^*(t) = \alpha(t) - Im \Omega(t), \\ f^*(t) &= f(t)e^{-Re \Omega(t)} - Re [e^{-i\alpha^*(t)}(T(e^{-\Omega}F))(t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формул (12), (15) выведем равенства

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ 2(b^+ - b^-) \ln \frac{1}{|t|} + \varphi(t), & t \in (-1, 0), \\ (b^- - b^+) \ln \frac{1}{t} + \varphi(t), & t \in (0, 1), \\ \varphi(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (16)$$

$$f^*(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ f(t) \exp \left\{ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|} \right\} + \psi(t), & t \in (-1, 0), \\ f(t) \exp \left\{ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{t} \right\} + \psi(t), & t \in (0, 1), \\ \psi(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (17)$$

в которых функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, т. е. принадлежат классу H_Γ . Таким образом, задачу (14) сводим к краевой задаче Гильберта (15)–(17) для функций, аналитических в верхней полуплоскости, с бесконечным индексом и точкой двустороннего завихрения логарифмического порядка в начале координат.

Впервые задачу Гильберта для полуплоскости с точкой завихрения логарифмического порядка на бесконечности решил П. Ю. Алекна [23], позднее другим методом – А. Г. Алехно [24], но мы используем формулу общего решения и условия разрешимости этой задачи из работ [25, 26]. При помощи конформного автоморфизма полуплоскости $\zeta = -1/z$ перепишем краевое условие задачи Гильберта в виде

$$Re [e^{-i\alpha^*(-1/\tau)}\Phi(\tau)] = f^*(-1/\tau), \quad \tau \in \Gamma, \quad \Phi(\zeta) = \phi(-1/\zeta),$$

при этом

$$\alpha^*(-1/\tau) = \begin{cases} (b^- - b^+) \ln |\tau| + \varphi(-1/\tau), & \tau \in (-\infty, -1), \\ \varphi(-1/\tau), & \tau \in (-1, 1), \\ 2(b^+ - b^-) \ln \tau + \varphi(-1/\tau), & \tau \in (1, +\infty), \end{cases}$$

$$f^*(-1/\tau) = \begin{cases} f(-1/\tau) \exp\left\{\frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2(|\tau|)\right\} + \psi(-1/\tau), & \tau \in (-\infty, -1), \\ \psi(-1/\tau), & \tau \in (-1, 1), \\ f(-1/\tau) \exp\left\{\frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2(\tau)\right\} + \psi(-1/\tau), & \tau \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, получили краевое условие задачи Гильберта для полуплоскости с бесконечным индексом логарифмического порядка и точкой двустороннего завихрения на бесконечности.

Сначала рассмотрим однородную задачу

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha^*(-1/\tau)} \Phi(\tau)] = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (18)$$

общее решение которой в классе ограниченных функций, аналитических в верхней полуплоскости, представлено [25] в наших обозначениях формулой

$$\Phi(\zeta) = -ie^{iG(\zeta)} F(\zeta), \quad \zeta \in E, \quad G(\zeta) := \frac{\zeta}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^*(-1/\tau)}{\tau(\tau - \zeta)} d\tau.$$

Здесь $F(\zeta)$ – сужение на верхнюю полуплоскость целой функции уточненного нулевого порядка $\rho(r) \leq \ln \ln^2 r / \ln r$, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{Im} F(\tau) = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (19)$$

$$|F(t)| \leq C \exp\left\{\frac{3(b^+ - b^-)}{2\pi} \ln^2 |\tau|\right\}, \quad |\tau| > 1. \quad (20)$$

Также в [26] проведено полное исследование разрешимости задачи (18) в классе ограниченных функций, аналитических в полуплоскости, из которого следует, что если $b^+ - b^- > 0$, то задача (18) имеет бесконечное множество решений; если же $b^+ - b^- = 0$, то задача (18) имеет решение, единственное с точностью до произвольного постоянного сомножителя A , вида $\Phi(\zeta) = ie^{iG(\zeta)} A$; если $b^+ - b^- < 0$, то в классе ограниченных аналитических функций задача неразрешима.

Общее решение однородной задачи

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha^*(\tau)} \Phi(\tau)] = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (21)$$

соответствующей (15), очевидно, определится формулой

$$\phi(z) = -ie^{iG(-1/z)} F(-1/z), \quad z \in E. \quad (22)$$

Картина разрешимости однородной задачи (21) такая же, как у задачи (18).

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (15) при условии, что соответствующая однородная задача (21) разрешима, т. е. выполнено условие $b^+ - b^- \geq 0$. Для построения частного решения неоднородной задачи нам понадобится каноническое решение однородной задачи (21), т. е. ограниченное решение, для которого входящая в формулу общего решения целая функция уточненного нулевого порядка $\rho(r) \leq \ln \ln^2 r / \ln r$, $F_0(\zeta)$ кроме условий (19), (20), дополнительно удовлетворяет ограничениям

$$F_0(\tau) \neq 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{G(\tau)}|}{F_0(\tau)} = m, \quad 0 < m < \infty; \quad \frac{|e^{G(\tau)}|}{F_0(\tau)} \in H_\Gamma.$$

Такая функция введена в [26] формулой

$$F_0(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{r_k e^{i\varphi}}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{r_k e^{-i\varphi}}\right), \quad r_k = e^{((k-1/2)/\lambda_0)},$$

с $\lambda_0 = (b^- - b^+)/2\pi$ и произвольно фиксированным φ , $0 < \varphi < \pi$. Теперь каноническое решение задачи (21) можно представить формулой

$$\phi_0(z) = -ie^{iG(-1/z)} F_0(-1/z), \quad z \in E.$$

Следовательно [26], в качестве частного решения неоднородной задачи (15) можно взять функцию

$$\phi(z) = \phi_0(z) \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f^*(t) |e^{G(-1/t)}| dt}{F_0(-1/t)(t-z)}. \quad (23)$$

Остается записать формулу общего решения задачи (15) в виде суммы общего решения (22) однородной задачи и частного решения неоднородной задачи (23)

$$\phi(z) = -ie^{iG(-1/z)} \left[F(-1/z) + F_0(-1/z) \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f^*(t) |e^{G(-1/t)}| dt}{F_0(-1/t)(t-z)} \right]. \quad (24)$$

Ясно, что краевая задача для обобщенных аналитических функций разрешима, если разрешима краевая задача, и имеет столько решений в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$, сколько ограниченных решений имеет краевая задача. Итак, доказана следующая

Теорема 2. Пусть для коэффициента уравнения (1) выполнены условия (2)–(5) и $(e^{-\Omega}F)(z) \in L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$. Тогда

1) если $b^- - b^+ > 0$, то задача Гильберта (14) имеет бесконечное множество решений $U(z)$, определенных формулой (13) с функцией $\phi(z)$ в виде (24);

2) если $b^- - b^+ = 0$, то задача Гильберта (14) имеет единственное решение вида (13), где следует взять $F(-1/z) = F_0(-1/z) = A$, A – произвольная вещественная постоянная.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00212.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Веква И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Timergaliev S.N. On existence of solutions of nonlinear equilibrium problems on shallow inhomogeneous anisotropic shells of the Timoshenko type // Russ. Math. 2019. V. 63, No 8. P. 38–53. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1908005X>.
3. Timergaliev S.N. On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges // Differ. Equations. 2021. V. 57, No 4. P. 488–506. <https://doi.org/10.1134/s0012266121040066>.

4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: АН Таджик. ССР, 1963. 183 с.
5. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. I. Душанбе: ТГУ, 1980. 126 с.
6. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. II. Душанбе: ТГУ, 1981. 170 с.
7. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. III. Душанбе: ТГУ, 1982. 170 с.
8. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 300–305.
9. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: АН ТаджикНИИНТИ, 1993. 244 с.
10. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equations. 2004. V. 196, No 1. P. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>.
11. Mezirani A. Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane // Complex Var. Elliptic Equations. 2008. V. 53, No 12. P. 1111–1130. <https://doi.org/10.1080/17476930802509239>.
12. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 637–650. <https://doi.org/10.1134/S0374064116050083>.
13. Фёдоров Ю.С., Расулов А.Б. Задачи типа Гильберта для уравнения Коши–Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 140–144. <https://doi.org/10.31857/S0374064121010143>.
14. Расулов А.Б., Дорофеева И.Н. Интегральные представления для обобщенного уравнения Коши–Римана с сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Вестн. МЭИ. 2020. № 1. С. 105–108. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2020-1-105-108>.
15. Дорофеева И.Н., Расулов А.Б. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Коши–Римана со сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60, № 10. С. 1734–1740. <https://doi.org/10.31857/S0044466920100075>.
16. Расулов А.Б. Задача Римана на полуокружности для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1290–1292.
17. Расулов А.Б. Интегральные представления и задача линейного сопряжения для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярным многообразием // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 270–275.
18. Шабалин П.Л. Краевая задача Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Матем. физ. и комп. моделиров. 2022. Т. 25, № 4. С. 15–28. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.2>.
19. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem with a condition on the real axis for generalized analytic functions with a singular curve // Sib. Math. J. 2023. V. 64, No. 2. P. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020155>.

20. Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Римана в полуплоскости для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Изв. вузов. Матем. 2023. № 3. С. 78–89. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-78-89>.
21. Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер.: Матем. Механ. Информатика. 2023. Т. 23, № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>.
22. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
23. Алекна П.Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Liet. Mat. Rinkiny. 1977. V. 17, No 1. P. 5–11.
24. Алехно А.Г. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка // Докл. АН БССР. 2009. Т. 53, № 2. С. 5–10.
25. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка // Изв. вузов. Матем. 2016. № 1. С. 36–48.
26. Шабалин П.Л., Фатыхов А.Х. Неоднородная краевая задача Гильберта с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка // Изв. вузов. Матем. 2021. № 1. С. 64–80. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-1-64-80>.

Поступила в редакцию 15.11.2023

Принята к публикации 06.03.2024

Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия

E-mail: pavel.shabalin@mail.ru

Фаизов Рафаэль Рустамович, аспирант

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия

E-mail: rafael.faizov@yandex.com

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.111-122

**The Hilbert Problem in a Half-Plane for Generalized Analytic Functions
with a Singular Point on the Real Axis**

*P.L. Shabalin**, *R.R. Faizov***

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia

E-mail: **pavel.shabalin@mail.ru*, ***rafael.faizov@yandex.com*

Received November 15, 2023; Accepted March 6, 2024

Abstract

This article analyzes the inhomogeneous Hilbert boundary value problem for an upper half-plane with the finite index and boundary condition on the real axis for one generalized Cauchy–Riemann equation with a singular point on the real axis. A structural formula was obtained for the general solution of this equation under restrictions leading to an infinite index of the logarithmic order of the accompanying Hilbert boundary value problem for analytic functions. This formula and the solvability results of the Hilbert problem in the theory of analytic functions were applied to solve the set boundary value problem.

Keywords: Hilbert boundary value problem, generalized analytic functions, singular point, infinite index, entire functions of refined zero order

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00212).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 512 p. (In Russian)
2. Timergaliev S.N. On existence of solutions of nonlinear equilibrium problems on shallow inhomogeneous anisotropic shells of the Timoshenko type. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 8, pp. 38–53. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1908005X>.
3. Timergaliev S.N. On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges. *Differ. Equations*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 488–506. <https://doi.org/10.1134/s0012266121040066>.
4. Mikhailov L.G. *Novye klassy osobyykh integral'nykh uravnenii i ego primeneniya k differentsial'nykh uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami* [New Classes of Special Integral Equations and Their Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1963. 183 p. (In Russian)
5. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavleniye i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami*

- [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. I. Dushanbe, TGU, 1980. 126 p. (In Russian)
6. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavlenie i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. II. Dushanbe, TGU, 1981. 170 p. (In Russian)
 7. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavlenie i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. III. Dushanbe, TGU, 1982. 170 p. (In Russian)
 8. Rajabov N.R. Integral representations and boundary value problems for the generalized Cauchy–Riemann system with a singular line. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, vol. 267, no. 2, pp. 300–305. (In Russian)
 9. Usmanov Z.D. *Obobshchennye sistemy Koshi–Rimana s singulyarnoi tochkoi* [Generalized Cauchy–Riemann Systems with a Singular Point]. Dushanbe, Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1993. 244 p. (In Russian)
 10. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *J. Differ. Equations*, 2004, vol. 196, no. 1, pp. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>.
 11. Meziani A. Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane. *Complex Var. Elliptic Equations*, 2008, vol. 53, no. 12, pp. 1111–1130. <https://doi.org/10.1080/17476930802509239>.
 12. Rasulov A.B., Soldatov A.P. Boundary value problem for a generalized Cauchy–Riemann equation with singular coefficients. *Differ. Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 616–629. <https://doi.org/10.1134/S0012266116050086>.
 13. Fedorov Yu.S., Rasulov A.B. Hilbert type problem for a Cauchy–Riemann equation with singularities on a circle and at a point in the lower-order coefficients. *Differ. Equations*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 127–131. <https://doi.org/10.1134/S0012266121010122>.
 14. Rasulov A.B., Dorofeeva I.N. Integral representations for the generalized Cauchy–Riemann equation with a supersingular point on a half-plane. *Vestn. MEI*, 2020, no. 1, pp. 105–108. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2020-1-105-108>. (In Russian)
 15. Dorofeeva I.N., Rasulov A.B. Dirichlet problem for a generalized Cauchy–Riemann equation with a supersingular point on a half-plane. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1679–1685. <https://doi.org/10.1134/S0965542520100073>.
 16. Rasulov A.B. The Riemann problem on a semicircle for a generalized Cauchy–Riemann system with a singular line. *Differ. Equations*, 2004, vol. 40, no. 9, pp. 1364–1366. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7>.
 17. Rasulov A.B. Integral representations and the linear conjugation problem for a generalized Cauchy–Riemann system with a singular manifold. *Differ. Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 306–312. <https://doi.org/10.1007/BF02754217>.
 18. Shabalin P.L. Hilbert boundary value problem for a class of generalized analytic functions with a singular line. *Mat. Fiz. Komp'yut. Model.*, 2022, vol. 25, no. 4, pp. 15–28. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.2>. (In Russian)

19. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem with a condition on the real axis for generalized analytic functions with a singular curve. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020155>.
20. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem in a half-plane for generalized analytic functions with a singular line. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2023, no. 3, pp. 78–89. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-78-89>. (In Russian)
21. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line. *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser.: Mat. Mekh. Inf.*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 58–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>. (In Russian)
22. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)
23. Alekna P.Ju. Hilbert boundary value problem with infinite logarithmic order index for a half-plane. *Liet. Mat. Rinkiny*, 1977, vol. 17, no. 1, pp. 5–11. (In Russian)
24. Alekhno A.G. Hilbert boundary value problem with infinite index of logarithmic order. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 2009, vol. 53, no. 2, pp. 5–10. (In Russian)
25. Salimov R.B., Shabalin P.L. On solvability of homogeneous Riemann–Hilbert problem with discontinuities of coefficients and two-sided curling at infinity of a logarithmic order. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 30–41. <https://doi.org/10.3103/S1066369X16010047>.
26. Shabalin P.L., Fatykhov A.K. Inhomogeneous Hilbert boundary value problem with several points of logarithmic turbulence. *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 57–71. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21010059>.

Для цитирования: Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Гильберта в полуплоскости для обобщённых аналитических функций с сингулярной точкой на вещественной оси // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 111–122. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.111-122>.

For citation: Shabalin P.L., Faizov R.R. The Hilbert problem in a half-plane for generalized analytic functions with a singular point on the real axis. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 111–122. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.111-122>. (In Russian)

