



# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

КАЗАНСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Том 165

Книга 4

2023

# Ученые записки Казанского университета.

## Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2023

Т. 165, кн. 4

---

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

---

### Редакционная коллегия

Главный редактор

*Д.А. Таюрский* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

*А.М. Елизаров* (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*И.С. Александрова* (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*М.М. Арсланов* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Е. Бенова* – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

*Р.З. Даутов* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*А.Г. Егоров* – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Э. Лайтинен* – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

*Р.Х. Латыпов* – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*А.Г. Мельников* – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

*В.Н. Паймушин* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Ю.Г. Смирнов* – д-р физ.-мат., проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

*В.Ф. Тишкин* – д-р физ.-мат., чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

*О.Н. Шерстоков* – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Ю.В. Шестопалов* – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

*М. Шнейдер* – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

*Ю.И. Шокин* – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

---

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору

в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

---

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

---

Подписной индекс 19423. Цена свободная

---

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18  
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: [uz.ku@kpfu.ru](mailto:uz.ku@kpfu.ru); сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

---

Дата выхода в свет 29.12.2023.  
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 7,61. Уч.-изд. л. 5,79.  
Тираж 300 экз. Заказ 7/2

Отпечатано в типографии Издательства  
Казанского университета  
420008, Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541-7746 (Print)  
ISSN 2500-2198 (Online)

**Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.**

**Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki**

**[Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]**

**Peer-Reviewed Scientific Journal**

**2023**

**Vol. 165**

**no. 4**

---

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

---

**Editorial Board**

Editor-in-Chief

*Dmitrii A. Tayurskii* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

*Alexander M. Elizarov* (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Irina S. Aleksandrova* (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Marat M. Arslanov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Evgenia Benova* – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

*Rafail Z. Dautov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Andrey G. Egorov* – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Erkki Laitinen* – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

*Rustam Kh. Latypov* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Alexander G. Melnikov* – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

*Vitalii N. Paimushin* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Yury G. Smirnov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

*Vladimir F. Tishkin* – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Oleg N. Sherstyukov* – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Yury V. Shestopalov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

*Mikhail Shneider* – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

*Yury I. Shokin* – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

---

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education  
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,  
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

---

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich’s Periodicals Directory, WorldCat

---

Subscription index: 19423. Free price

---

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, 420008 Russia  
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: [uz.ku@kpfu.ru](mailto:uz.ku@kpfu.ru); сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

---

Date of publication: December 29, 2023.  
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional  
printing sheet: 7.61. Publisher’s signature: 5.79.  
Circulation: 300 copies. Order: 7/2

Printed in KFU Publishing House  
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, 420008  
Russia

© Kazan Federal University, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Азанов А.А., Лемешкова Е.Н.</i> Качественные свойства решения одной сопряжённой задачи тепловой конвекции.....	326
<i>Кривень Г.И., Шавелкин Д.С.</i> О локальной потере устойчивости модифицированных композитов с вискеризованными волокнами.....	344
<i>Лычев С.А.</i> Несовместные деформации гибких пластин.....	361
<i>Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.</i> Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства....	389
<i>Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В.</i> Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности.....	404

## CONTENTS

Azanov A.A., Lemeshkova E.N. Qualitative properties of the solution of a conjugate problem of thermal convection.....	326
Kriven G.I., Shavelkin D.S. On local stability loss of modified composites with whiskerized fibers .....	344
Lychev S.A. Incompatible deformations of elastic plates .....	361
Murashkin E.V., Radayev Y.N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space .....	389
Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental solutions of the equations of classical and generalized heat conduction models.....	404

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.956, 532.5.032

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.326-343

## КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

А. А. Азанов<sup>1</sup>, Е. Н. Лемешкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, 660041, Россия

<sup>2</sup>Сибирское отделение Российской академии наук, г. Красноярск, 660036, Россия

### Аннотация

Изучается совместная конвекция двух вязких теплопроводных жидкостей в трёхмерном слое с твёрдыми плоскими стенками. Предполагается, что поле скоростей подобно полю скоростей Хименца, а поле температур соответствует локальному нагреву (охлаждению) твёрдой нижней стенки. Эволюция этой системы описана уравнениями Обербека–Буссинеска в каждой жидкости. Возникающая нелинейная сопряжённая интегродифференциальная краевая задача является обратной, поскольку продольные градиенты давления должны находиться совместно с полем скоростей и температур. Для их нахождения поставлены интегральные условия переопределения, имеющие ясный физический смысл – замкнутость потока. Поставленная обратная начально-краевая задача описывает конвекцию в двухслойной системе, возникающую вблизи точки экстремума температуры на нижней твёрдой стенке. При малых числах Марангони задача аппроксимирована линейно (число Марангони играет роль числа Рейнольдса для уравнений Навье–Стокса). На основе полученных априорных оценок даны достаточные условия выхода нестационарного решения на стационарный режим с ростом времени.

**Ключевые слова:** модель Обербека–Буссинеска, тепловая конвекция, термокапиллярность, поверхность раздела, обратная задача, априорные оценки

### Введение

Рассмотрим решение уравнений Обербека–Буссинеска вида

$$\mathbf{u} = ((f(z, t) + h(z, t))x, (f(z, t) - h(z, t))y, -2 \int_0^z f(\xi, t) d\xi), \quad \bar{p} = \bar{p}(x, y, z, t), \quad (1)$$
$$\theta = a(z, t)x^2 + b(z, t)y^2 + q(z, t),$$

где  $\bar{p}$  – модифицированное давление.

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, по-видимому, впервые предложена в работе [1]. Было показано, что общая трёхмерная система уравнений вязкой магнитной гидродинамики редуцируется к замкнутой системе одномерных уравнений. Аналогичный результат для уравнений газовой динамики был получен в [2]. Более специальный случай представления поля скорости (1) для движения одной жидкости рассмотрен в [3, 4], причём давление

зависело лишь от вертикальной координаты и времени. Температура была распределена по квадратичному закону (1) только на свободных границах слоя  $z = \pm Z(t)$  и вызывала термокапиллярный эффект. Численное решение последней задачи с учётом общего распределения температуры  $\theta(z, y, z, t)$  в слое  $-Z(t) < z < Z(t)$  получено в статье [5]. Обстоятельный обзор точных решений системы уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от  $x$  и  $y$  дан в [6]. В [7] решение (1) применено для описания медленной конвекции одной жидкости в слое со свободной границей. Влиянию межфазной поверхностной энергии на стационарную конвекцию в рамках решения (1) посвящена работа [8]. Нестационарная ползущая конвекция в случае изотермической поверхности раздела для решения (1) изучена в статьях [9], [10]. Нелинейная стационарная задача о конвекции двух жидких сред численно исследована в [11]. В работе [11] решение линейной задачи (при малых числах Марангони) найдено в аналитическом виде, а нелинейная задача решена тау-методом. Установлено, что найденное решение нелинейной задачи при уменьшении числа Марангони стремится к решению задачи о ползущем течении. Проведён анализ влияния безразмерных физических и геометрических параметров на структуру течений в слоях. Отметим, что аналогичные двумерные задачи (решение (1) можно назвать трехмерным аналогом известного решения Хименца) в различных постановках изучены в монографии [12].

Течения типа Хименца известны как течения вблизи застойной или критической точки (точка, в которой скорость обращается в нуль) и служат предметом исследований по многим направлениям. Это может быть связано с управлением движением жидкости в различных аппаратах и устройствах промышленности, технологическими процессами. Течения типа Хименца можно наблюдать как в макромасштабах (например, использование технологий гидроразрыва пласта в нефтедобывающей промышленности), так и в микромасштабах (например, жидкостные биочипы в медицине). Изучение характеристик подобных течений необходимо для оценки технологических параметров, а также для прогнозирования динамики и эволюции жидкого слоя. Точные решения определяющих уравнений – наиболее эффективный способ исследования процессов в жидкости, а также получения оценочных характеристик. В настоящее время представлены решения задач, описывающих течения типа Хименца в различной геометрии: осесимметричный [13] и трёхмерный [14] аналоги решения Хименца, в том числе для течений в цилиндрической геометрии [15]. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, дан в [16].

В настоящей работе квадратичная зависимость по  $x$  и  $y$  температур в (1) служит дополнительным предположением и хорошо согласуется с условиями на поверхности раздела. В статье получены априорные оценки решения рассматриваемой задачи в равномерной метрике и даны достаточные условия, при которых решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим с ростом времени. Полученные результаты могут быть использованы для оценки интенсивности конвекции в микроканалах и нанотрубках.

## 1. Постановка задачи

Подстановка решения (1) в систему уравнений Обербека–Буссинеска и дальнейший анализ на совместность приводят к выводу, что и модифицированное давление в слоях является квадратичной функцией координат  $x$  и  $y$  [9]. Далее это решение применено для описания двухслойной термокапиллярной конвекции в слое  $-l_1 < z < l_2$ ,  $|x| < \infty$ ,  $|y| < \infty$ . Границы слоя  $z = l_1$ ,  $z = l_2$  – твёрдые неподвижные стенки, а  $z = 0$  – неподвижная поверхность раздела между

слоем  $-l_1 < z < 0$  и слоем  $0 < z < l_2$  жидкостей "1", "2". Эти теплопроводные вязкие жидкости имеют постоянные плотности  $\rho_j$  ( $\rho_2 < \rho_1$ ), кинематические вязкости  $\nu_j$ , температуропроводности  $\chi_j$  и коэффициенты тепловых расширений  $\beta_j$ ,  $j = 1, 2$ . На границе раздела  $z = 0$  поверхностное натяжение линейно зависит от температуры:  $\sigma(\theta_1) = \sigma_0 - \varkappa\theta_1(x, y, 0, t)$  с постоянными  $\sigma_0$  и  $\varkappa > 0$ .

**Замечание 1.** Чтобы поверхность раздела была плоской, достаточно предположить малость числа Бонда  $Bo = g(\rho_1 - \rho_2)l_1^2/\sigma_0$  и капиллярного числа  $Ca = \mu_1\chi_1/\sigma_0l_1$  (см. [13]).

Неизвестными согласно (1) являются функции  $f_j(z, t)$ ,  $h_j(z, t)$ ,  $a_j(z, t)$ ,  $b_j(z, t)$ ,  $q_j(z, t)$ , причём  $-l_1 \leq z \leq 0$  при  $j = 1$  и  $j = 2$  для  $0 \leq z \leq l_2$ . Пусть  $a^* = \max_{t \geq 0} (|\alpha_1(t)|, |\alpha_2(t)|)$ ,  $\theta^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_3(t)|$  – характерная температура, так что  $a^*l_1$  – характерный градиент температуры,  $\tau = \chi_1 l_1^{-2} t$  – характерное тепловое время конвекции. Для первого слоя при  $j = 1$  положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_1}, \quad -1 < \xi < 0, \quad f_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} MF_1(\xi, \tau), \quad h_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} MH_1(\xi, \tau), \\ a_1 &= a^* A_1(\xi, \tau), \quad b_1 = a^* B_1(\xi, \tau), \quad q_1 = \theta^* Q_1(\xi, \tau), \quad s_j = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} MS_j(\tau), \\ M &= \frac{\varkappa_1 a^* l_1^3}{\mu_1 \chi_1}, \quad P_1 = \frac{\nu_1}{\chi_1}, \quad L_1 = \frac{\rho_1 \beta_1 g l_1^2}{\varkappa_1}, \quad d = \frac{a^* l_1^2}{\theta^*}, \end{aligned}$$

а для второго слоя  $j = 2$  положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad f_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} MF_2(\xi, \tau), \quad h_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} MH_2(\xi, \tau), \\ a_2 &= a^* A_2(\xi, \tau), \quad b_2 = a^* B_2(\xi, \tau), \quad q_2 = \theta^* Q_2(\xi, \tau), \quad s_i = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} MS_k(\tau), \quad i = 3, 4, \\ P_2 &= \frac{\nu_2}{\chi_2}, \quad L_2 = \frac{\rho_1 \beta_2 g l_1 l_2}{\varkappa_1}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \end{aligned}$$

где  $M$  – число Марангони,  $P_1$  и  $P_2$  – числа Прандтля.

В безразмерных переменных температура на нижней стенке есть

$$\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y}, -1, \tau) = \frac{\theta(x, y, -l_1)}{\theta^*} = d\bar{\alpha}_1(\tau)\bar{x}^2 + d\bar{\alpha}_2(\tau)\bar{y}^2 + \bar{\alpha}_3(\tau), \quad (2)$$

где  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/a^*$ ,  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2/a^*$ ,  $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3/\theta^*$ ,  $\alpha_k = \text{const}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $\bar{x} = x/l_1$ ,  $\bar{y} = y/l_1$ . Поэтому  $A_1(-1) = d\bar{\alpha}_1 \equiv \alpha_1$ ,  $B_1(-1) = d\bar{\alpha}_2 \equiv \alpha_2$ ,  $Q_1(-1) = \bar{\alpha}_3 \equiv \alpha_3$ . Очевидно, что температурное поле на нижней твёрдой стенке имеет экстремум в точке  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ : при  $\alpha_1, \alpha_2 < 0$  – максимум, а при  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  – минимум, то есть решение (1), (2) описывает конвекцию вблизи критической точки  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

Предположим, что  $|M| \ll 1$ , и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} F_j &= F_j^{(0)} + MF_j^{(1)} + \dots, \quad H_j = H_j^{(0)} + MH_j^{(1)} + \dots, \\ A_j &= A_j^{(0)} + MA_j^{(1)} + \dots, \quad B_j = B_j^{(0)} + MB_j^{(1)} + \dots, \quad Q_j = Q_j^{(0)} + MQ_j^{(1)} + \dots, \\ S_i &= S_i^{(0)} + MS_i^{(1)} + \dots, \quad j = 1, 2, \quad i = \overline{1, 4}, \quad n = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Считая, что  $L_j = O(1)$  при  $M \rightarrow 0$ , в нулевом приближении получим линейную обратную задачу (индекс "0" опущен)

$$\begin{aligned} F_{1\tau} &= P_1 F_{1\xi\xi} - P_1 L_1 \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) + B_1(\xi, \tau)) d\xi - S_1(\tau), \\ H_{1\tau} &= P_1 H_{1\xi\xi} - P_1 L_1 \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) - B_1(\xi, \tau)) d\xi - S_2(\tau), \\ A_{1\tau} &= A_{1\xi\xi}, \quad B_{1\tau} = B_{1\xi\xi}, \quad Q_{1\tau} = Q_{1\xi\xi} + 2d(A_1 + B_1), \quad -1 < \xi < 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_{2\tau} &= \frac{P_2 l^2}{\chi} F_{2\xi\xi} - P_1 L_2 \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) + B_2(\xi, \tau)) d\xi - S_3(\tau), \\ H_{2\tau} &= \frac{P_2 l^2}{\chi} H_{2\xi\xi} - P_1 L_2 \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) - B_2(\xi, \tau)) d\xi - S_4(\tau), \\ A_{2\tau} &= \frac{l^2}{\chi} A_{2\xi\xi}, \quad B_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} B_{2\xi\xi}, \quad Q_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} Q_{2\xi\xi} + \frac{2d}{\chi} (A_2 + B_2), \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \quad (4)$$

На нижней твёрдой стенке  $\xi = -1$  выполнены условия прилипания и задана температура

$$\begin{aligned} F_1(-1, \tau) &= H_1(-1, \tau) = 0, \\ A_1(-1, \tau) &= \alpha_1(\tau), \quad B_1(-1, \tau) = \alpha_2(\tau), \quad Q_1(-1, \tau) = \alpha_3(\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Верхняя твёрдая стенка  $\xi = 1$  предполагается теплоизолированной, и на ней также выполнены условия прилипания

$$F_2(1, \tau) = H_2(1, \tau) = 0, \quad A_{2\xi}(1, \tau) = B_{2\xi}(1, \tau) = Q_{2\xi}(1, \tau) = 0. \quad (6)$$

На поверхности раздела  $\xi = 0$  имеем условия

$$\begin{aligned} F_1(0, \tau) &= F_2(0, \tau), \quad H_1(0, \tau) = H_2(0, \tau), \quad A_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \\ B_1(0, \tau) &= B_2(0, \tau), \quad Q_1(0, \tau) = Q_2(0, \tau), \quad lA_{2\xi}(0, \tau) - kA_{1\xi}(0, \tau) = 0, \\ lB_{2\xi}(0, \tau) - kB_{1\xi}(0, \tau) &= 0, \quad lQ_{2\xi}(0, \tau) - kQ_{1\xi}(0, \tau) = 0, \\ lF_{2\xi}(0, \tau) - \mu F_{1\xi}(0, \tau) &= \mu(A_1(0, \tau) + B_1(0, \tau)), \\ lH_{2\xi}(0, \tau) - \mu H_{1\xi}(0, \tau) &= \mu(A_1(0, \tau) - B_1(0, \tau)). \end{aligned} \quad (7)$$

Условия (7) являются следствиями непрерывности скорости, температуры и потоков тепла на поверхности раздела, а также динамического условия для касательных напряжений. При выводе последних двух условий учтена линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры. Условие для нормальных напряжений эквивалентно тому, что поверхность раздела остаётся плоской (см. замечание 1). Кроме того, выполняются начальные условия

$$\begin{aligned} F_j(\xi, 0) &= F_{0j}(\xi), \quad H_j(\xi, 0) = H_{0j}(\xi), \\ A_j(\xi, 0) &= A_{0j}(\xi), \quad B_j(\xi, 0) = B_{0j}(\xi), \quad Q_j(\xi, 0) = Q_{0j}(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где при  $j = 1$  переменная  $\xi \in (-1, 0)$ , при  $j = 2$  имеем  $\xi \in (0, 1)$ ; и условия переопределения

$$\int_{-1}^0 F_1(\xi, \tau) d\xi = \int_{-1}^0 H_1(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \int_0^1 F_2(\xi, \tau) d\xi = \int_0^1 H_2(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \quad (9)$$

Равенства (9), означающие замкнутость течения, позволяют определить неизвестные функции  $S_i(\tau)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Функции  $\alpha_1(\tau)$ ,  $\alpha_2(\tau)$ ,  $\alpha_3(\tau)$ ,  $F_{0j}(\xi, \tau)$ ,  $H_{0j}(\xi, \tau)$ ,  $A_{0j}(\xi, \tau)$ ,  $B_{0j}(\xi, \tau)$ ,  $Q_{0j}(\xi, \tau)$  являются заданными в своих областях определения. Для гладкого решения они должны удовлетворять условиям согласования, например,  $F_{01}(-1) = H_{01}(-1) = 0$ ,  $F_{02}(1) = H_{02}(1) = 0$ ,  $F_{01}(0) = F_{02}(0)$ ,  $H_{01}(0) = H_{02}(0)$  и т.д.

В заключение этого пункта приведём формулы для модифицированных давлений в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{\rho_1 \nu_1 \chi_1}{l_1^2} \text{МП}_1(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \tau), \quad \bar{p}_2 = \frac{\rho_2 \nu_2 \chi_2}{l_2^2} \text{МП}_2(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \tau), \\ \Pi_1 &= \left[ 2L_1 \int_0^\xi A_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 + S_2) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[ 2L_1 \int_0^\xi B_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 - S_2) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \\ &\quad - \frac{2F_1}{P_1} - \frac{2M}{P_1} \left( \int_0^\xi F_1 d\zeta \right)^2 + \frac{L_1}{d} \int_0^\xi Q_1 d\zeta + \Pi_{10}(\tau), \\ \Pi_2 &= \left[ \frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\xi A_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 + S_4) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[ \frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\xi B_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 - \right. \\ &\quad \left. - S_4) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \frac{2\chi F_2}{l^2} - \frac{2\chi^2 M}{l^4 P_2} \left( \int_0^\xi F_2 d\zeta \right)^2 + \frac{\chi\nu L_2}{dl^2} \int_0^\xi Q_2 d\zeta + \Pi_{20}(\tau), \end{aligned}$$

где  $\Pi_{10}(\tau)$  и  $\Pi_{20}(\tau)$  – произвольные функции времени.

## 2. Априорные оценки решения задачи (3)–(9)

Первым шагом будет получение априорных оценок для  $A_j(\xi, \tau)$ ,  $B_j(\xi, \tau)$  и их производных по  $\tau$  в равномерной метрике. Проведём рассуждения для  $A_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$ , удовлетворяющих сопряжённой задаче

$$\begin{aligned} A_{1\tau} &= A_{1\xi\xi}, \quad -1 < \xi < 0, \quad A_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} A_{2\xi\xi}, \quad 0 < \xi < 1, \\ A_1(\xi, 0) &= A_{01}(\xi), \quad A_2(\xi, 0) = A_{02}(\xi), \\ A_1(0, \tau) &= A_2(0, \tau), \quad lA_{2\xi}(0, \tau) = kA_{1\xi}(0, \tau), \\ A_1(-1, \tau) &= \alpha_1(\tau), \quad A_{2\xi}(1, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В первом слое произведём замену

$$A_1(\xi, \tau) = \bar{A}_1(\xi, \tau) + \alpha_1(\tau)\xi^2, \quad -1 \leq \xi \leq 0. \quad (11)$$

Тогда новая функция  $\bar{A}_1(\xi, \tau)$  будет удовлетворять неоднородному уравнению

$$\bar{A}_{1\tau} = \bar{A}_{1\xi\xi} - \alpha'_1(\tau)\xi^2 + 2\alpha_1(\tau) \equiv \bar{A}_{1\xi\xi} + N_1(\xi, \tau), \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{A}_1(\xi, 0) &= A_{01}(\xi) - \alpha_1(0)\xi^2 \equiv \bar{A}_{01}(\xi), \\ \bar{A}_1(-1, \tau) &= 0, \quad \bar{A}_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \quad lA_{2\xi}(0, \tau) = k\bar{A}_{1\xi}(0, \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим второе уравнение (10) и (12) на  $\frac{\chi}{l}A_2(\xi, \tau)$  и  $k\bar{A}_1(\xi, \tau)$  соответственно и проинтегрируем по  $\xi$  в своих областях определения. Сложив полученные равенства и используя условия (13),  $A_{2\xi}(1, \tau) = 0$ , получим, что для решения  $\bar{A}_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$  имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2(\xi, \tau) d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2(\xi, \tau) d\xi \right) + k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2(\xi, \tau) d\xi + \\ + l \int_0^1 A_{2\xi}^2(\xi, \tau) d\xi = k \int_{-1}^0 \bar{A}_1(\xi, \tau) N_1(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу трёх последних соотношений (13) имеет место неравенство [14]

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2 d\xi \geq \gamma_1 \left( k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2 d\xi \right), \\ \gamma_1 = [2 \max(1/k, 1/l)]^{-1} \min(1/k, l/\chi). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь из тождества (14) выведем неравенство

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2 d\xi \leq \left( \left( k \int_{-1}^0 \bar{A}_{01}^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_{02}^2 d\xi \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + k \int_0^\tau e^{\gamma_1 \tau} \left( \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau \right)^2 e^{-2\gamma_1 \tau} \equiv G_1(\tau) e^{-2\gamma_1 \tau}, \\ \gamma_1 = \min\left(\frac{1}{k}, \frac{l}{\chi}\right) [2 \max\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right)]^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

из которого следует ограниченность норм  $\bar{A}_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$  в  $L_2(-1, 0)$  и  $L_2(0, 1)$  при всех  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Для функций  $\bar{A}_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$  имеет место другое, отличное от (14) тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2(\xi, \tau) d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2(\xi, \tau) d\xi \right) + k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\tau}^2(\xi, \tau) d\xi + \\ + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_{2\tau}^2(\xi, \tau) d\xi = k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\tau}(\xi, \tau) N_1(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда следует оценка

$$k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2 d\xi \leq k \int_{-1}^0 \bar{A}_{01\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{02\xi}^2 d\xi + k \int_0^\tau \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \equiv G_2(\tau), \quad (18)$$

т. е. нормы  $\bar{A}_{1\xi}(\xi, \tau)$ ,  $A_{2\xi}(\xi, \tau)$  ограничены в  $L_2(-1, 0)$  и  $L_2(0, 1)$  при всех  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

В силу (16) и (17) имеем

$$\bar{A}_1^2(\xi, \tau) = 2 \int_{-1}^{\xi} \bar{A}_1 \bar{A}_{1\xi} d\xi \leq 2 \left( \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 \right)^{1/2} \left( \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \frac{2}{k} \sqrt{G_1(\tau)G_2(\tau)} e^{-\gamma_1 \tau},$$

или

$$|\bar{A}_1(\xi, \tau)| \leq \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2} \tag{19}$$

равномерно для всех  $\xi \in [-1, 0]$ ,  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Далее, используя третье равенство (13) и (19), получим

$$A_2^2(\xi, \tau) = \bar{A}_1^2(0, \tau) + 2 \int_0^{\xi} A_2 A_{2\xi} d\xi \leq 2 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right) \sqrt{G_1(\tau)G_2(\tau)} e^{-\gamma_1 \tau},$$

значит,

$$|A_2(\xi, \tau)| \leq \sqrt{2 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left( G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2} \tag{20}$$

при всех  $\xi \in [-1, 0]$ ,  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Ниже нам понадобятся оценки  $|A_{j\tau}(\xi, \tau)|$ ,  $j = 1, 2$ , аналогичные (19), (20). Они получаются путём дифференцирования задачи (10) по  $\tau$ . Действительно, для  $Z_j(\xi, \tau) = A_{j\tau}(\xi, \tau)$  имеем задачу (10) с начальными данными

$$\begin{aligned} Z_1(\xi, 0) &= A_{1\tau}(\xi, 0) = A_{01\xi\xi}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\ Z_2(\xi, 0) &= \frac{l^2}{\chi} A_{02\xi\xi}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |A_{2\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2 \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left( G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \end{aligned} \tag{22}$$

где  $G_3(\tau)$  совпадает с  $G_1(\tau)$  после замены  $\bar{A}_{01}(\xi)$  на  $\bar{Z}_1(\xi, 0) = A_{01\xi\xi}(\xi) - \bar{\alpha}'(0)\xi^2 + 2\bar{\alpha}(0)$ ,  $A_{02}(\xi)$  на  $Z_1(\xi, 0)$  из (21),  $N_1(\xi, \tau)$  на  $N_{1\tau}(\xi, \tau)$ ;  $G_4(\tau)$  совпадает с  $G_2(\tau)$  с теми же заменами.

**Замечание 2.** Из (11), (19) и (22) следуют априорные оценки

$$\begin{aligned} |A_1(\xi, \tau)| &\leq |\bar{\alpha}_1(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |A_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq |\alpha_1'(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \tag{23}$$

**Замечание 3.** Из уравнений (10) для  $A_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$  следуют априорные оценки  $|A_{1\xi\xi}|$ ,  $\xi \in [-1, 0]$ ;  $|A_{2\xi\xi}|$ ,  $\xi \in [0, 1]$  и всех  $\tau \in [0, \tau_0]$ , аналогичные оценкам (20) и (23).

Задача для неизвестных  $B_1(\xi, \tau)$ ,  $B_2(\xi, \tau)$  в точности совпадает с задачей (10) с заменой  $\alpha_1(\tau)$  на  $\alpha_2(\tau)$ ,  $A_{01}(\xi)$  на  $B_{01}(\xi)$ ,  $A_{02}(\xi)$  на  $B_{02}(\xi)$  и  $N_1(\xi, \tau)$  из (12)

на  $N_2(\xi, \tau) = -\alpha'_2(\tau)\xi^2 + 2\alpha_2(\tau)$ . Поэтому имеют место априорные оценки (см. (23), (20), (22))

$$\begin{aligned} |B_1(\xi, \tau)| &\leq |\alpha_2(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_5(\tau)G_6(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1\tau/2}, \\ |B_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq |\alpha'_2(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left( G_7(\tau)G_8(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1\tau/2}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0], \\ |B_2(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi}\right)} \left( G_5(\tau)G_6(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1\tau/2}, \\ |B_{2\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi}\right)} \left( G_7(\tau)G_8(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1\tau/2}, \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \quad (24)$$

Структура функций  $G_5(\tau)$ ,  $G_6(\tau)$  аналогична структуре  $G_1(\tau)$ ,  $G_2(\tau)$ , а  $G_7(\tau)$ ,  $G_8(\tau)$  аналогичны  $G_3(\tau)$ ,  $G_4(\tau)$ .

**Замечание 4.** Априорные оценки сопряжённой задачи для  $Q_1(\xi, \tau)$ ,  $Q_2(\xi, \tau)$  также аналогичны оценкам (24), нужно только учесть неоднородность уравнений, считая в правых частях  $A_j(\xi, \tau) + B_j(\xi, \tau)$ ,  $j = 1, 2$ , известными.

Приступим к получению априорных оценок решения обратной сопряжённой задачи для функций  $F_j(\xi, \tau)$ ,  $H_j(\xi, \tau)$ ,  $S_i(\xi, \tau)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , считая  $A_j(\xi, \tau)$ ,  $B_j(\xi, \tau)$  известными. Рассуждения приведём для функций  $F_1(\xi, \tau)$ ,  $\xi \in [-1, 0]$ ,  $F_2(\xi, \tau)$ ,  $\xi \in [0, 1]$  и  $S_1(\tau)$ ,  $S_3(\tau)$ . Для неизвестных  $H_1(\xi, \tau)$ ,  $H_2(\xi, \tau)$  и  $S_2(\tau)$ ,  $S_4(\tau)$  оценки получаются аналогичным образом.

Итак, обратная задача имеет вид

$$\begin{aligned} F_{1\tau} &= P_1 F_{1\xi\xi} - S_1(\tau) - P_1 L_1 \Psi_1(\xi, \tau), \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0], \\ F_{2\tau} &= \frac{P_2 l^2}{\chi} F_{2\xi\xi} - S_3(\tau) - P_1 L_2 \Psi_2(\xi, \tau), \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Psi_1(\xi, \tau) = \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) + B_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad (26)$$

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) + B_2(\xi, \tau)) d\xi,$$

$$\begin{aligned} F_1(-1, \tau) = 0, \quad F_2(1, \tau) = 0, \quad F_1(0, \tau) = F_2(0, \tau), \\ \mu F_{1\xi}(0, \tau) - l F_{2\xi} = -\mu \Psi_{1\xi}(0, \tau), \end{aligned} \quad (27)$$

$$F_1(\xi, 0) = F_{01}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad F_2(\xi, 0) = F_{02}(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad (28)$$

$$\int_{-1}^0 F_1(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \int_0^1 F_2(\xi, \tau) d\xi = 0. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что решение задачи (25)–(29) удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) + \mu \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi = \\ = -\mu F_{1\xi}(0, \tau) \Psi_{1\xi}(0, \tau) - \mu L_1 \int_{-1}^0 F_1 \Psi_1 d\xi - \frac{\nu L_2}{l} \int_0^1 F_2 \Psi_2 d\xi, \quad \nu = \nu_1/\nu_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы воспользовались тем, что  $\int_{-1}^0 S_1(\tau)F_{1\tau} d\xi = 0$  и  $\int_0^1 S_3(\tau)F_{2\tau} d\xi = 0$  (см. (29)).

Поскольку  $|F_1(0, \tau)| = \left| \int_{-1}^0 F_{1\xi} d\xi \right| \leq \left( \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi \right)^{1/2}$ , правая часть (30) оценивается сверху так

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + \frac{\mu L_2 \varepsilon_1^2}{2} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 \varepsilon_2^2}{2l} \int_0^1 F_2^2 d\xi + \Psi_3(\tau), \\ \Psi_3(\tau) &= \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi}^2(0, \tau) + \frac{\mu L_1}{2\varepsilon_1^2} \int_{-1}^0 \Psi_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2}{2l_2 \varepsilon_2^2} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi. \end{aligned} \tag{31}$$

Согласно [14] и граничным условиям (27)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi &\geq \left( \frac{4}{\pi^2} \max\left(\frac{2}{\mu}, \frac{1}{l}\right) \right)^{-1} \left( \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) \geq \\ &\geq \gamma_2 \left( \frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) \equiv \gamma_2 I, \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\gamma_2 = \min \left\{ \gamma_1; \left( \frac{4}{\pi^2} \max\left(\frac{2}{\mu}, \frac{1}{l}\right) \right)^{-1} \min\left(\frac{P_1}{2\mu}, \frac{P_2 l}{\chi}\right) \right\}. \tag{33}$$

**Замечание 5.** При учёте условий переопределения (29) постоянная  $\gamma_2$  в (32), (33) может быть увеличена (см. [14]).

Выбрав в (31), например,

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{\gamma_2}{2L_1 P_1} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_2 = \left( \frac{\gamma_2 \chi}{\nu L_2 P_2} \right)^{1/2},$$

из (30)–(33) выведем неравенство  $dI/d\tau + \gamma_2 I \leq 2\Psi_3(\tau)$ , откуда

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \leq \\ &\leq \left( \frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_{01}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_{02}^2 d\xi + \int_0^\tau e^{\gamma_2 \sigma} \Psi_3(\sigma) d\sigma \right) e^{-\gamma_2 \tau} \equiv G_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}. \end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, нормы в пространствах  $L_2(-1, 0)$  и  $L_2(0, 1)$  функций  $F_1(\xi, \tau)$ ,  $F_2(\xi, \tau)$  ограничены при всех  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Для оценки интегралов  $\int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi$ ,  $\int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi$  удобно сделать замену

$$F_1(\xi, \tau) = \overline{F}_1(\xi, \tau) - \Psi_{1\xi}(0, \tau)(2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi). \tag{35}$$

Тогда первое уравнение (25) примет вид

$$\begin{aligned} \overline{F}_{1\tau} &= P_1 \overline{F}_{1\xi\xi} - S_1(\tau) - P_1 L_1 \overline{\Psi}_1(\xi, \tau), \\ \overline{\Psi}_1(\xi, \tau) &= -\Psi_1(\xi, \tau) + \frac{6\Psi_{1\xi}(0, \tau)}{L_1} (2\xi + 1) - \frac{\Psi_{1\xi\tau}(0, \tau)}{P_1 L_1} (2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi), \\ &\xi \in (-1, 0), \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \tag{36}$$

четвёртое условие (27) станет однородным; изменится также и начальное условие (28)

$$\bar{F}_1(\xi, 0) = F_{01}(\xi) + \Psi_{1\xi}(0, 0)(2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi) \equiv \bar{F}_{01}(\xi). \quad (37)$$

Остальные равенства в (27)–(29) останутся без изменений.

Для решения  $\bar{F}_1(\xi, \tau)$ ,  $F_2(\xi, \tau)$  имеет место тождество (см. (17) для  $\bar{A}_1(\xi, \tau)$ ,  $A_2(\xi, \tau)$ )

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{P_1} \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \right) = \\ = -\mu L_1 \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau} \bar{\Psi}_1 d\xi - \frac{\nu L_2}{l} \int_0^1 F_{2\tau} \Psi_2 d\xi. \end{aligned} \quad (38)$$

Оно получается путём умножения уравнения (36) на  $\mu \bar{F}_{1\tau}/P_1$ , второго уравнения (25) на  $\chi F_{2\tau}/(P_2 l)$ , интегрирования по частям с учётом условий (27)–(29) и дальнейшего сложения результатов.

Правая часть тождества (38) допускает оценку сверху

$$\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{2P_2 l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi + \frac{\mu P_1 L_1}{2} \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{2\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi,$$

значит, из (38) следует неравенство при  $\tau \in [0, \tau_0]$

$$\begin{aligned} \mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \leq \mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{01\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{02\xi}^2 d\xi + \\ + \int_0^\tau \left( \mu P_1 L_1 \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi \right) d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\bar{F}_{01}(\xi)$  определена равенством (37). Согласно (35)

$$F_{1\xi}^2 \leq 2(\bar{F}_{1\xi}^2 + \Psi_{1\xi}^2(0, \tau)(6\xi^2 + 6\xi + 1)) \leq 2(\bar{F}_1^2 + \frac{1}{4}\Psi_{1\xi}^2(0, \tau)),$$

поэтому из (39) получим неравенство

$$\begin{aligned} \mu \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + 2l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \leq 2\mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{01\xi}^2 d\xi + 2l \int_0^1 F_{02\xi}^2 d\xi + \\ + \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi}^2(0, \tau) + 2 \int_0^\tau \left( \mu P_1 L_1 \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi \right) d\tau \equiv G_{10}(\tau), \end{aligned} \quad (40)$$

откуда и следует ограниченность в  $L_2(-1, 0)$  производной  $F_{1\xi}$  и в  $L_2(0, 1) - F_{2\xi}$ .

Из (34) и (40) следуют априорные оценки

$$\begin{aligned} |F_1(\xi, \tau)| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} \left( 2P_1 G_9(\tau) G_{10}(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad \xi \in [-1, 0], \\ |F_2(\xi, \tau)| \leq \sqrt{2} \left( \frac{P_2}{2\chi} G_9(\tau) G_{10}(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad \xi \in [0, 1], \end{aligned} \quad (41)$$

означающие ограниченность  $F_1$  и  $F_2$  в равномерных нормах  $C([-1, 0] \times [0, \tau_0])$ ,  $C([0, 1] \times [0, \tau_0])$ .

Ниже нам понадобятся начальные значения  $S_1(0)$ ,  $S_3(0)$  через входные данные задачи. Проинтегрировав уравнения (25), получим представления

$$\begin{aligned} S_1(\tau) &= P_1(F_{1\xi}(0, \tau) - F_{1\xi}(-1, \tau)) - P_1L_1 \int_{-1}^0 \Psi_1(\xi, \tau) d\xi, \\ S_3(\tau) &= \frac{P_2l^2}{\chi}(F_{2\xi}(1, \tau) - F_{2\xi}(0, \tau)) - P_1L_2 \int_0^1 \Psi_2(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \tag{42}$$

откуда следует, что искомые величины равны

$$\begin{aligned} S_1(0) &= P_1(F_{01\xi}(0) - F_{01\xi}(-1)) - P_1L_1 \int_{-1}^0 [A_{01}(\xi) + B_{01}(\xi)] d\xi, \\ S_3(0) &= \frac{P_2l^2}{\chi}(F_{02\xi}(1) - F_{02\xi}(0)) - P_1L_2 \int_0^1 [A_{02}(\xi) + B_{02}(\xi)] d\xi. \end{aligned} \tag{43}$$

Формулы (42) содержат неизвестные следы производных  $F_{1\xi}$ ,  $F_{2\xi}$  на концах отрезков  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  соответственно. Поэтому они не годятся для оценок  $|S_1(\tau)|$ ,  $|S_3(\tau)|$ ,  $\tau \in [0, \tau_0]$ . Приведём здесь другие представления, умножив первое уравнение (25) на  $\xi^2 + \xi^3$ , второе на  $\xi^2 - \xi^3$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{S_1(\tau)}{12} &= - \int_{-1}^0 (\xi^3 + \xi^2) F_{1\tau} d\xi + 6P_1 \int_{-1}^0 \xi F_1 d\xi - P_1L_1 \int_{-1}^0 (\xi^3 + \xi^2) \Psi_1 d\xi, \\ \frac{S_3(\tau)}{12} &= - \int_0^1 (\xi^3 - \xi^2) F_{2\tau} d\xi + \frac{6P_2l^2}{\chi} \int_0^1 \xi F_2 d\xi - P_1L_2 \int_0^1 (\xi^3 - \xi^2) \Psi_2 d\xi. \end{aligned} \tag{44}$$

Теперь ясно, что достаточно получить оценки  $F_{1\tau}$  в  $L_2(-1, 0)$ ,  $F_{2\tau}$  в  $L_2(0, 1)$ . Для этого продифференцируем по  $\tau$  уравнения (25), формулы (26), граничные условия (27), (29). При этом задача для новых функций  $F_{j\tau}$ ,  $j = 1, 2$ , останется прежней за исключением начальных условий (28). Они примут вид

$$\begin{aligned} F_{1\tau}(\xi, 0) &= P_1F_{01\xi\xi} - S_1(0) - P_1L_1\Psi_1(\xi, 0), \quad \xi \in [-1, 0], \\ F_{2\tau}(\xi, 0) &= \frac{P_2l^2}{\chi}F_{02\xi\xi} - S_3(0) - P_1L_2\Psi_2(\xi, 0), \quad \xi \in [0, 1], \end{aligned} \tag{45}$$

где  $S_1(0)$ ,  $S_3(0)$  определены в (43), а  $\Psi_1(\xi, 0)$ ,  $\Psi_2(\xi, 0)$  – в (26).

Обратившись к неравенству (34), где нужно заменить  $F_1$  на  $F_{1\tau}$ , а  $F_2$  на  $F_{2\tau}$ , получим

$$\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi \leq \bar{G}_9(\tau)e^{-\gamma_2\tau}. \tag{46}$$

Функция  $\bar{G}_9(\tau)$  совпадает с  $G_9(\tau)$  из (34) с заменой  $F_{01}(\xi)$  на  $F_{1\tau}(\xi, 0)$ ,  $F_{02}(\xi)$  на  $F_{2\tau}(\xi, 0)$  из (45), а функцию  $\Psi_3(\tau)$  из (31) заменит

$$\bar{\Psi}_3(\tau) = \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi\tau}^2(0, \tau) + \frac{\mu L_1}{2\varepsilon_1^2} \int_{-1}^0 \Psi_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\nu L_2}{2l\varepsilon_2^2} \int_0^1 \Psi_{2\tau}^2 d\xi.$$

Значит,

$$\int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi \leq \frac{2P_1}{\mu} \overline{G}_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}, \quad \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi \leq \frac{P_2 l}{\chi} \overline{G}_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}. \quad (47)$$

Из (44), (47) и (41) следует ограниченность при  $\tau \in [0, \tau_0]$  величин

$$\begin{aligned} \frac{|S_1(\tau)|}{12} &\leq 2 \left( \int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi \right)^{1/2} + 6P_1 \int_{-1}^0 \xi |F_1| d\xi + 2P_1 L_1 \int_{-1}^0 |\Psi_1| d\xi, \\ \frac{|S_3(\tau)|}{12} &\leq 2 \left( \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi \right)^{1/2} + \frac{6P_2 l^2}{\chi} \int_0^1 |F_2| d\xi + 2P_1 L_2 \int_0^1 |\Psi_2| d\xi. \end{aligned} \quad (7.46)$$

**Замечание 6.** Априорные оценки в сопряжённой задаче для  $H_1(\xi, \tau)$ ,  $H_2(\xi, \tau)$ ,  $S_2(\tau)$ ,  $S_4(\tau)$  аналогичны оценкам (41), (47) и (7.46) с заменой начальных условий  $F_{01}(\xi)$ ,  $F_{02}(\xi)$  на  $H_{01}(\xi)$ ,  $H_{02}(\xi)$ , функций  $\Psi_1(\xi, \tau)$ ,  $\Psi_2(\xi, \tau)$  на

$$\begin{aligned} \Psi_3(\xi, \tau) &= \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) - B_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad \xi \in [-1, 0], \\ \Psi_4(\xi, \tau) &= \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) - B_2(\xi, \tau)) d\xi, \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned}$$

### 3. Достаточные условия стремления решения задачи (3)–(9) при $\tau \rightarrow \infty$ к стационарному режиму

Предположим, что функции  $\alpha_i(\tau)$ ,  $\alpha'_i(\tau)$ ,  $\alpha''_i(\tau)$  в (5) определены для всех  $\tau \geq 0$ ,  $\tau_0 = \infty$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Укажем явную зависимость правых частей полученных априорных оценок от этих функций. Начнём с оценок (20), (23) и (24). В формулах для  $G_1(\tau)$  в (16) и  $G_2(\tau)$  в (18) потребуем сходимости интегралов

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \left( \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \right) d\sigma, \quad \int_0^\infty \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi d\sigma. \quad (48)$$

Из определения (12) функции  $N_1(\xi, \tau)$

$$\int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \leq 8(\alpha_1^2 + (\alpha'_1)^2),$$

поэтому (т. к.  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ ) интегралы (48) будут сходиться, если сойдутся интегралы

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha_1(\sigma) d\sigma, \quad \int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha'_1(\sigma) d\sigma. \quad (49)$$

Обратившись к оценке (22), видим, что для ограниченности функций  $G_3(\tau)$ ,  $G_4(\tau)$  при всех  $\tau \geq 0$  надо дополнительно к (49) потребовать сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha''_1(\sigma) d\sigma. \quad (50)$$

Значит, и в оценках  $|B_j|$ ,  $|Q_j|$ ,  $j = 1, 2$ ,  $\tau \in [0, \infty)$ , необходима сходимость интегралов типа (49), (50) для функций  $\alpha_i(\tau)$ ,  $i = 2, 3$ .

**Замечание 7.** Из сказанного выше следует, что  $\alpha_i^{(k)}(\tau) = e^{-\gamma_1\tau} a_i^k(\tau)$ ,  $\int_0^\infty |a_i^k(\tau)| d\tau < \infty$ , где  $i = 1, 2, 3$ ,  $k = 0, 1, 2$ .

Что касается зависимости правых частей оценок для  $|F_i|$ ,  $|H_i|$ ,  $|S_j|$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , от  $\alpha_i(\tau)$ , входящих в  $G_9(\tau)$ ,  $G_{10}(\tau)$ , ограниченность последних для всех  $\tau \geq 0$  связана со сходимостью интеграла

$$\int_0^\infty e^{\gamma_2\sigma} \Psi_3(\sigma) d\sigma. \tag{51}$$

Согласно (31), определению (26) функций  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , оценкам (20), (23) и замечанию 7 имеем

$$\Psi_3(\tau) \leq T_0(\tau)e^{-\gamma_1\tau}, \quad \int_0^\infty T_0(\sigma) d\sigma < \infty.$$

Обратившись к формуле (33) для  $\gamma_2$ , видим, что интеграл (51) сходится, так как  $\gamma_2 - \gamma_1 \leq 0$ .

Таким образом, справедлива

**Теорема.** Пусть интегралы (49) и (50) сходятся, тогда решение задачи (3)–(9) стремится к нулевому при  $\tau \rightarrow \infty$ , причем справедливы оценки скорости сходимости

$$\begin{aligned} |A_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/2}, & |B_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/2}, & |Q_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/2}, \\ |F_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/4}, & |H_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/4}, \\ |S_i(\tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2\tau/4}, & j = 1, 2 & \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned} \tag{52}$$

с некоторой положительной постоянной  $T_1$  и  $\tau \geq 0$ .

Теорема показывает, что в этих условиях с ростом времени происходит торможение жидкостей за счёт трения о стенки.

Пусть  $A_j^c(\xi)$ ,  $B_j^c(\xi)$ ,  $Q_j^c(\xi)$ ,  $F_j^c(\xi)$ ,  $H_j^c(\xi)$ ,  $S_i^c$ ,  $j = 1, 2$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , – стационарное решение задачи (3)–(7), (9) [11] ( $A_j^c(\xi) = \alpha_1$ ,  $B_j^c(\xi) = \alpha_2$ , функции  $F_j^c(\xi)$ ,  $H_j^c(\xi)$  – полиномы третьего порядка, а  $Q_j^c(\xi)$  – второго порядка). Рассмотрим разности  $\bar{A}_j(\xi, \tau) = A_j(\xi, \tau) - A_j^c(\xi)$ ,  $\bar{B}_j(\xi, \tau) = B_j(\xi, \tau) - B_j^c(\xi)$ ,  $\bar{Q}_j(\xi, \tau) = Q_j(\xi, \tau) - Q_j^c(\xi)$ ,  $\bar{F}_j(\xi, \tau) = F_j(\xi, \tau) - F_j^c(\xi)$ ,  $\bar{H}_j(\xi, \tau) = H_j(\xi, \tau) - H_j^c(\xi)$ ,  $\bar{S}_i(\tau) = S_i(\tau) - S_i^c$ . В силу линейности задачи (3)–(9) они являются решением этой же задачи с очевидным изменением начальных данных (8) и функций  $\alpha_n(\tau)$  на  $\alpha_n(\tau) - \alpha_n^c$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Поэтому (см. замечание 7), если

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\tau) - \alpha_n^c| &\leq a_n^0(\tau)e^{-\gamma_1\tau}, & |\alpha_n'(\tau)| &\leq a_n^1(\tau)e^{-\gamma_1\tau}, \\ |\alpha_n''(\tau)| &\leq a_n^2(\tau)e^{-\gamma_1\tau}, & \int_0^\infty |a_n^k(\tau)| d\tau &< \infty, \end{aligned} \tag{53}$$

то указанные разности удовлетворяют оценкам (52) с другой постоянной  $T_1$ . Итак, при условиях (53) нестационарное решение стремится к стационарному режиму при  $\tau \rightarrow \infty$  по экспоненциальному закону, и указанный стационарный режим является устойчивым.

### Заключение

Изучены качественные свойства решения обратной начально-краевой задачи, моделирующей медленную конвекцию в трёхмерном слое. В единой форме получены априорные оценки решения в равномерной метрике. На их основе указаны достаточные условия сходимости решения к стационарному режиму при больших временах. Полученные результаты представляют практический интерес, например, для оценки интенсивности конвекции в тонких микрослоях. Кроме того, они могут служить тестом при численном решении общей нелинейной задачи, поскольку интегральное условие переопределения имеет место и в этом случае.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н., профессору В. К. Андрееву за помощь и ценные советы при работе над статьей.

### Литература

1. *Lin C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 1957. V. 1. P. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
2. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механ. и техн. физ. 1989. № 2. С. 34–40.
3. *Pukhnachev V.V.* Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // Eur. J. Appl. Math. 2002. V. 13, No 2. P. 205–224. <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>.
4. *Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.* Mathematical Models of Convection. Berlin/Boston: De Gruyter, 2020. 417 p.
5. *Rezanova E.* Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // EPJ Web Conf. 2017. V. 159. Art. 00047. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715900047>.
6. *Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. техн. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
7. *Азанов А.А., Андреев В.К.* Решение задачи о ползущем движении жидкости со свободной границей со специальным полем скоростей в трёхмерной полосе // Некотор. акт. пробл. совр. матем. и матем. обр. Герц. чтен. 2021. Матер. научн. конф. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена. ВВМ. 2021. С. 42–54.
8. *Andreev V.K., Lemeshkova E.N.* Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2022. V. 63, No 1. P. 82–88. <https://doi.org/10.1134/S0021894422010138>.
9. *Andreev V.K.* On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface // J. Sib. Fed. Univ. Math & Phys. 2020. V. 13, No 6. P. 661–669. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-661-669>.
10. *Андреев В.К.* Решение трёхмерных уравнений тепловой конвекции и его интерпретация // Некотор. акт. пробл. совр. матем. и матем. обр. Герц. чтен. 2020. Матер. научн. конф. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена. ВВМ. 2020. С. 4–8.
11. *Андреев В.К., Лемешкова Е.Н.* Тепловая конвекция двух несмешивающихся жидкостей в трёхмерном канале с полем скоростей специального вида // ПММ. 2023. Т. 87, № 2. С. 200–210.
12. *Андреев В.К., Лемешкова Е.Н.* Линейные задачи конвективных движений с поверхностями раздела. Сиб. фед. ун-т, 2018. 204 с.

13. *Зейтулян Р.Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара-Марангони // УФН. 1998. Т. 168. С. 259–286.
14. *Андреев В.К.* О неравенстве типа Фридрикса для составных областей // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2009. Т. 2, №2. С. 146–157.
15. *Howann F.* Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // Z. Angew. Math. Mech. 1936. Bd. 16, H. 3. S. 153–164.  
<https://doi.org/10.1002/zamm.19360160304>.
16. *Davey A.* Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, No 4. P. 593–610. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000391>.
17. *Gorla R.S.R.* Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder // Dev. Mech. 1977. V. 9. P. 286–288.
18. *Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A.* Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // Interfacial Phenom. Heat Transfer. 2019. V. 7, No 4. P. 345–364.  
<https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>.

Поступила в редакцию 20.09.2023

Принята к публикации 15.11.2023

---

**Азанов Андрей Андреевич**, аспирант Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета

Сибирский федеральный университет

пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия

E-mail: [andreiazanov@mail.ru](mailto:andreiazanov@mail.ru)

**Лемешкова Елена Николаевна**, к.ф.-м.н., н.с. Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук

Сибирское отделение Российской академии наук

Академгородок, д. 50, стр. 44, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: [elena\\_cher@icm.krasn.ru](mailto:elena_cher@icm.krasn.ru)

## ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.326-343

**Qualitative Properties of the Solution of  
a Conjugate Problem of Thermal Convection**

A.A. Azanov<sup>a\*</sup>, E.N. Lemeshkova<sup>b\*\*</sup>

<sup>a</sup>Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia

<sup>b</sup>Institute of Computational Modelling, Siberian Branch,  
Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia

E-mail: \*andreiazanov@mail.ru, \*\*elena\_cher@icm.krasn.ru

Received September 20, 2023; Accepted November 15, 2023

**Abstract**

The joint convection of two viscous heat-conducting liquids in a three-dimensional layer bounded by flat solid walls was studied. The upper wall is thermally insulated, and the lower wall has a non-stationary temperature field. The liquids are immiscible and separated by a flat interface with complex conjugation conditions set on it. The evolution of this system in each liquid was described by the Oberbeck–Boussinesq equations. The solution of the problem was sought for velocities that are linear in two coordinates and temperature fields that are quadratic functions of the same coordinates. Thus, the problem was reduced to a system of 10 nonlinear integro-differential equations. Its conjugate and inverse nature is determined by the four functions of time. Integral redefinition conditions were set to find them. The physical meaning of the integral conditions is the closeness of the flow. The inverse initial-boundary value problem describes convection near the temperature extremum point on the lower solid wall in a two-layer system. For small Marangoni numbers, the problem was approximated linearly (the Marangoni number is analogous to the Reynolds number in the Navier–Stokes equations). Using the obtained a priori estimates, sufficient conditions were identified for the non-stationary solution to become a stationary one over time.

**Keywords:** Oberbeck–Boussinesq model, thermal convection, thermocapillarity, interface, inverse problem, a priori estimates

**Acknowledgments.** We thank V.K. Andreev (Doctor of Physics and Mathematics, Professor) for his valuable advice and help in writing this manuscript.

**References**

1. Lin C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
2. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, pp. 197–203. <https://doi.org/10.1007/BF00852164>.
3. Pukhnachev V.V. Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces. *Eur. J. Appl. Math.*, 2002, vol. 13, no. 2, pp. 205–224. <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>.

4. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Boston, De Gruyter, 2020. 417 p.
5. Rezanova E. Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries. *EPJ Web Conf.*, 2017, vol. 159, art. 00047. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715900047>.
6. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
7. Azanov A.A., Andreev V.K. A solution of the problem of creeping motion of a liquid with free boundary and velocity field of a special type in a three-dimensional band. *Nekotor. akt. probl. sovr. matem. i matem. obr. Gertz. chten. 2021. Mater. nauchn. konf.* [Some Key Problems of Modern Mathematics and Mathematics Education. Herzen Lectures, 2021: Proc. Sci. Conf.]. St. Petersburg, Izd. RGPU im. A.I. Gertsena, VVM, 2021, pp. 42–54. (In Russian)
8. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 1, pp. 82–88. <https://doi.org/10.1134/S0021894422010138>.
9. Andreev V.K. On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface. *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, 2020, vol. 13, no. 6, pp. 661–669. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-661-669>.
10. Andreev V.K. A solution of 3d equations of thermal convection and its interpretation. *Nekotor. akt. probl. sovr. matem. i matem. obr. Gertz. chten. 2020. Mater. nauchn. konf.* [Some Key Problems of Modern Mathematics and Mathematics Education. Herzen Lectures, 2020: Proc. Sci. Conf.]. St. Petersburg, RGPU im. A.I. Gertsena, VVM, 2020, pp. 4–8. (In Russian)
11. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. Thermal convection of two immiscible liquids in a 3D channel with a velocity field of a special type. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2023, vol. 87, no. 2, pp. 200–210. (In Russian)
12. Andreev V.K., Lemeshkova E.N. *Lineinye zadachi konvektivnykh dvizhenii s poverkhnostyami razdela* [Linear Problems of Convective Motions with Interfaces]. Sib. Fed. Univ., 2018. 204 p. (In Russian)
13. Zeytounian R.Kh. The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem. *Phys.-Usp.*, 1998, vol. 41, no. 3, pp. 241–267. <https://doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>.
14. Andreev V.K. On inequalities of the Friedrichs type for combined domains. *Zh. Sib. Fed. Univ. Mat. Fiz.*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 146–157. (In Russian)
15. Howann F. Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1936, Bd. 16, H. 3, S. 153–164. <https://doi.org/10.1002/zamm.19360160304>. (In German)
16. Davey A. Boundary-layer flow at a saddle point of attachment. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 4, pp. 593–610. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000391>.
17. Gorla R.S.R. Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder. *Dev. Mech.*, 1977, vol. 9, pp. 286–288.

18. Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A. Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity. *Interfacial Phenom. Heat Transfer*, 2019, vol. 7, no. 4, pp. 345–364.  
<https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>.

---

*Для цитирования:* Азанов А.А., Лемешкова Е.Н. Качественные свойства решения одной сопряжённой задачи тепловой конвекции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 326–343.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.326-343>.

*For citation:* Azanov A.A., Lemeshkova E.N. Qualitative properties of the solution of a conjugate problem of thermal convection. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 326–343.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.326-343>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.344-360

## О ЛОКАЛЬНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ

*Г. И. Кривень, Д. С. Шавелкин*

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
г. Москва, 125993, Россия*

### Аннотация

Исследованы критические сжимающие напряжения, при которых образец композитного материала, образованный модифицированными волокнами, остается прямым, в то время как волокна внутри материала изогнуты. Предположено, что рассматриваемый модифицированный композит состоит из трех фаз – волокна, вискеризованного межфазного слоя и матрицы. Рассмотрен частный пример композитного материала, который состоит из углеродного волокна, вискеризованного слоя, образованного углеродными нанотрубками и эпоксидной матрицей, и эпоксидной матрицы. Оценены физические параметры композитного материала, влияющие на критические сжимающие напряжения, и предложены методы их определения. Для определения эффективных свойств включения и связующего композитного материала использованы методы Фойхта и Рейса, а для оценки эффективных свойств межфазного вискеризованного слоя – метод трех фаз. Определены степени влияния длины волны волокна и фазового сдвига (параметров, характеризующих механизм разрушения композитного материала) на величину критического сжимающего напряжения. Установлено, при каких длинах волн происходит разрушение композитного материала. Также проведен анализ влияния объемного содержания модифицированного включения на минимальное критическое значение сжимающего напряжения. Полученные результаты для модифицированных композитов сравнены с результатами для классических композитов с аналогичным объемным содержанием включения.

**Ключевые слова:** композитный материал, устойчивость волокнистых композитов, модификация поверхности волокна, УНТ, метод трех фаз

### Введение

При сжимающем нагружении волокнистого композитного материала вдоль волокон реализуются различные механизмы разрушения материала, среди которых – сдвиговые разрушения в некоторой наклонной плоскости и поперечное растяжение (выпучивание слоя, расслоение). Оба механизма разрушения сопровождаются изгибом волокон, вызванным локальным выпучиванием волокна.

Известно, что для увеличения прочности на сжатие волокнистого композита необходимо применять волокна с высокими жесткостными характеристиками [1]. Например, прочность композитов из углеродных волокон вдвое превышает прочность на сжатие композитов из стеклянных волокон того же диаметра. В то же время увеличение жесткости матрицы не сопровождается увеличением прочности

волоконного композита на сжатие, а может даже привести к расслоению композита при относительно небольших нагрузках.

В последнее время широкое распространение в качестве армирующего материала, позволяющего улучшать свойства углеродного волокна, получили углеродные нанотрубки (УНТ) благодаря их исключительным механическим и физическим свойствам. Выращивание УНТ на поверхности волокна позволяет увеличить прочность связи между волокном и матрицей, что способствует повышению механических свойств и устойчивости композитных материалов [2]– [8]. Например, было показано [2], что модификация поверхности углеродного волокна углеродными нанотрубками позволяет увеличить модуль упругости более чем в полтора раза (с 390 ГПа до 600 ГПа), прочность при растяжении вдоль волокна – более чем в 1,1 раза [3,4]. Испытания, проведенные авторами работы [5], показали, что вискеризация волокна углеродными нанотрубками приводит к увеличению межфазной прочности композитного материала при продольном сдвиге на 206 % по сравнению с классическим волокнистым композитом. Аналогичные испытания, проведенные авторами работ [6, 7], показали увеличение межфазной прочности у вискеризованных композитов по сравнению с классическими на 175 % и 150 % соответственно.

В работе [8] описаны испытания на наноуровне по определению продольной и поперечной прочностей сжатия композитов из углеродных волокон с выращенными на их поверхности УНТ. Показано, что продольная прочность вискеризованного композита увеличивается на 43 % по сравнению с классическим композитом, а поперечная прочность в свою очередь увеличивается на 94 %.

В работе [9] выращивались УНТ на поверхности одного слоя ткани из углеродного волокна. Слои ткани с выращенными нанотрубками складывались стопками, образуя многослойные ткани, а затем уплотнялись для получения композитных ламинатов, армированных УНТ. Для изучения влияния УНТ на механические свойства были проведены испытания на сжатие и межслойный сдвиг. Оказалось, что модификация УНТ позволяет увеличить межслойную сдвиговую прочность на 108 %, прочность на сжатие в направлении поперек укладки ткани – на 32 % и прочность на сжатие в направлении вдоль укладки ткани – на 115 %.

Кроме экспериментальных исследований прочности модифицированных композитов с вискеризованными волокнами проводятся аналитические исследования эффективных свойств [10, 11], напряженно деформированных состояний в компонентах композитной структуры [12, 13] и разрабатываются методы оценки прочности модифицированных композитов при различных видах нагружения [14].

В настоящей работе изучено локальное выпучивание волокна, определено критическое сжимающее напряжение, при котором образец композитного материала прямой, в то время как волокна внутри материала изогнуты. Рассмотрен модифицированный композит, у которого на поверхности волокна выращены специальные наноструктуры – вискерсы. Таким образом, исследуемый композит состоит из трех фаз – волокна, вискеризованного слоя и матрицы. Для определения критического сжимающего напряжения использован метод, описанный в работе [1], который в свою очередь основан на энергетическом методе Тимошенко. Согласно методу, предложенному в этой работе, продольными напряжениями, действующими в матрице, можно пренебречь, а на значение критического напряжения влияют жесткость волокна при изгибе, модули упругости вдоль волокна и продольного сдвига матрицы. Полагаем, что модификация волокна вискерсами одновременно позволяет как увеличивать жесткость волокна при изгибе, так и улучшать эффективные характеристики связующего. Исследуемый модифицированный композит с вискеризованными волокнами обладает трансверсально-изотропными свойствами

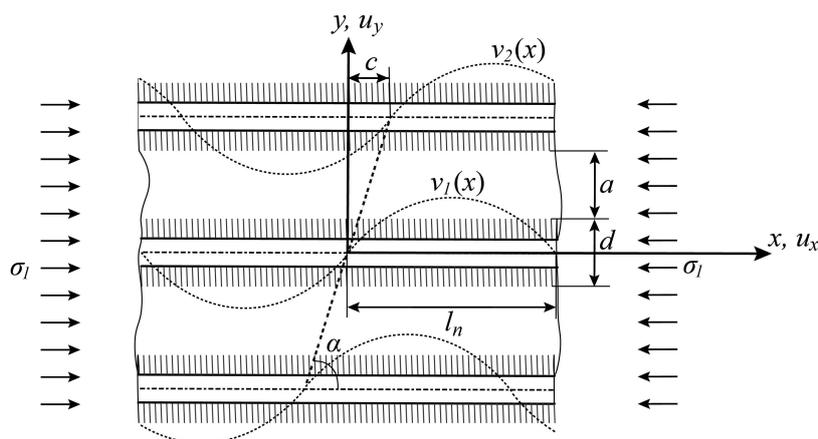


Рис. 1. Локальное выпучивание в однонаправленном слое волокон с выращенными на их поверхности вискерсами

с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси волокна, а вискеризованный слой – трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси вискерса. При оценке продольного модуля упругости модифицированного волокна использован метод Фойхта, который позволяет учитывать объемное содержание включения (волокна), а также модули продольного сдвига волокна и поперечного сдвига вискеризованного слоя. При оценке продольного модуля упругости связующего, состоящего из вискеризованного слоя и матрицы, также использован метод Фойхта, а при оценке продольного модуля сдвига – метод Рейса. Последний позволяет учитывать объемное содержание вискеризованного слоя и модули сдвига матрицы и поперечного сдвига вискеризованного слоя. Эффективные свойства вискеризованного слоя были получены по методу трех фаз, который позволяет учитывать размеры вискерсов (их диаметр и длины), объемное содержание вискерсов и физические свойства вискерсов и матрицы.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 показана модель локального выпучивания в однонаправленном слое волокон с вискерсами, выращенными на их поверхности. Прогиб модифицированных волокон при изгибе можно представить в виде функций  $v_1(x) = V \sin(\pi x/l_n)$ ,  $v_2(x) = V \sin(\pi(x - c)/l_n)$ , где  $V$  – неизвестное значение амплитуды, одинаковое для всех волокон,  $l_n$  – половина длины волны волокна,  $c = (a + d) \cot \alpha$  – фазовый сдвиг,  $a$  – толщина связующего слоя,  $d$  – диаметр включения (волокна или модифицированного волокна). В случае, когда  $c = 0$ , реализуется сдвиговой механизм разрушения в некоторой наклонной плоскости, а в случае, когда  $c = l_n$ , реализуется механизм разрушения, сопровождающийся выпучиванием слоя.

Для определения критического значения потери устойчивости воспользуемся формулой, полученной в работе [1]:

$$\sigma_1 = \frac{\pi^2 D_f}{\bar{l}_n^2 \bar{d}(1 + \bar{d})a^4} + \frac{G_m(1 + \bar{d})}{2\left(1 + \frac{\pi^2 G_m}{12\bar{l}_n^2 E_m}\right)} \left(1 + \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}\right) + \frac{2\bar{l}_n^2 E_m}{\pi^2(1 + \bar{d})} \left(1 - \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}\right), \quad (1)$$

где  $D_f = E_f \frac{\pi d^4}{64}$  – изгибная жесткость включения,  $E_f$  – модуль упругости вклю-

чения,  $E_m$  – модуль упругости связующего,  $G_m$  – модуль сдвига связующего,  $\bar{l}_n = l_n/a$ ,  $\bar{d} = d/a$ ,  $\bar{c} = c/a$ . Выражение (1) было получено с использованием энергетического метода Тимошенко [14] из следующего условия потери устойчивости:  $A = W$ , где  $A = \frac{\pi^2}{4l_n} \sigma_1 V^2 ad(1 + \bar{d})$  – работа внешних сил,  $W = W_f + W_m^s + W_m^e$  – энергия деформации,  $W_f = \frac{\pi^4}{4l_n^3} D_f V^2$  – энергия деформации изгиба включения,

$$W_m^s = \frac{adl_n}{2G_m} \left[ V \frac{\pi G_m (1 + \bar{d})}{2l_n (1 + \pi^2 a^2 G_m / (12l_n^2 E_m))} \right]^2 [1 + \cos(\pi c/l_n)]$$

– энергия деформации сдвига включения,

$$W_m^e = \frac{adl_n}{2E_m} \left[ \frac{\pi^2 a^2}{12l_n^2} \frac{\pi G_m (1 + \bar{d})}{2l_n (1 + \pi^2 a^2 G_m / (12l_n^2 E_m))} \right]^2 \times \\ \times [1 + \cos(\pi c/l_n)] + \frac{E_m^2}{a^2} V^2 [1 - \cos(\pi c/l_n)]$$

– энергия поперечного растяжения включения. При определении энергии деформации сдвига не учитывается продольное напряжение в матрице в силу его малости по сравнению с теми же напряжениями, действующими в связующем.

Исследуем критическое значение потери устойчивости композитного материала, где в качестве включения рассматривается волокно с выращенными на его поверхности специальными наноструктурами – вискерсами (волокно с вискеризованным слоем), а в качестве связующего – матрица с вискеризованным слоем.

## 2. Эффективные свойства включения и связующего

В рамках этой задачи считается, что вискеризованный слой входит в состав как включения, так и связующего. Таким образом, в модифицированном композите с вискеризованными волокнами включением является волокно с вискеризованным слоем, а связующим – матрица с вискеризованным слоем. На значение потери устойчивости оказывают влияние такие физические свойства составных частей композита, как продольный модуль упругости включения  $E_f$ , продольный модуль упругости связующего  $E_m$  и модуль сдвига связующего  $G_m$  вдоль волокна (см. формулу (1)). Эти эффективные свойства можно найти, используя различные модели осреднения.

Осреднения по Фойхту и Рейсу являются самыми простыми методами для определения эффективных свойств. Эти методы позволяют учитывать объемное содержание и модули составных частей:

$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{f}{\mu_1} + \frac{1-f}{\mu_2}, \quad (2)$$

$$E_{eff} = fE_1 + (1-f)E_2, \quad (3)$$

где  $\mu_{eff}$  – эффективный модуль сдвига,  $E_{eff}$  – эффективный модуль упругости,  $f$  – объемное содержание включения,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  – модуль сдвига включения и модуль сдвига связующего соответственно,  $E_1$  и  $E_2$  – модуль упругости включения и модуль упругости связующего соответственно.

Весь рассматриваемый композит обладает трансверсально-изотропными свойствами в плоскости, перпендикулярной оси волокна, а вискеризованный межфазный слой обладает такими свойствами в плоскости, перпендикулярной оси вискерса. Поэтому в том в случае, когда вискеризованный межфазный слой рассматривается как включение или как связующее всего композита, в формулах (2) и (3)

необходимо в качестве продольных свойств вискеризованного слоя принимать его поперечные свойства, рассчитанные для него отдельно. Выше было сказано, что методы Рейса и Фойхта позволяют учитывать только объемное содержание включения, в то время как метод трех фаз позволяет учитывать одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое модифицированного композита с вискеризованными волокнами. В связи с этим считаем уместным определять эффективные свойства межфазного слоя, используя метод трех фаз.

Метод трех фаз основан на разрешающих уравнениях классической теории упругости. Выражения, определяющие перемещения во включении, матрице и эквивалентной гомогенной среде, определяются из уравнения равновесия и имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши, найдем выражения для деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Для нахождения напряжений используем закон Гука

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}.\quad (6)$$

На основе условий непрерывности перемещений и напряжений на границе фаз и условия на бесконечности (внешнего граничного условия) сформируем систему алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби найдем все неизвестные константы, в число которых включены эффективные модули. Так, эффективный модуль упругости и эффективный коэффициент Пуассона найдем при решении задачи об одноосном растяжении вдоль вискерса, где положим, что вне ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ . А эффективный модуль продольного сдвига найдем при решении задачи чистого сдвига вдоль вискерса, где, в свою очередь, полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$ . Эффективный модуль плоской деформации найдем при решении задачи всесторонней нагрузки поперек вискерса, где полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_r = \varepsilon_0 r$ .

В случае, когда композитный материал состоит только из двух фаз – матрицы и вискерса, формулы для определения эффективных свойств имеют вид [15]

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b(1 - c_b)(\nu_b - \nu_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b)\mu_m/(k_b + \mu_b/3) + c_b\mu_m/(k_m + \mu_m/3) + 1}, \quad (7)$$

$$\nu_{12}^{eff} = c_b \nu_b + (1 - c_b) \nu_m + \frac{c_b(1 - c_b)(\nu_b - \nu_m)(\mu_m/(k_m + \mu_m/3) - \mu_m/(k_b + \mu_b/3))}{(1 - c_b)(\mu_m/(k_b + \mu_b/3)) + c_b(\mu_m/(k_m + \mu_m/3)) + 1}, \quad (8)$$

$$\mu_{12}^{eff} = \frac{\mu_b(1 + c_b) + \mu_m(1 - c_b)}{\mu_m(\mu_b(1 - c_b) + \mu_m(1 + c_b))}, \quad (9)$$

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}, \quad (10)$$

где  $\nu_m$  и  $\nu_b$  – коэффициенты Пуассона матрицы и вискерса соответственно,  $k_m$  и  $k_b$  – модули плоской деформации матрицы и вискерса соответственно,  $\mu_m$  и  $\mu_b$  – поперечные модули сдвига матрицы и вискерса соответственно,  $c_b$  – объемное содержание вискерсов в вискеризованном межфазном слое, определяемое по формуле

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}. \quad (11)$$

Здесь  $M_b$  – число вискерсов, выращенных на поверхности волокна;  $d_b$  – диаметр вискерса;  $l_b$  – длина вискерса;  $D$  – диаметр базового волокна.

Эффективный модуль поперечного сдвига найдем из решения задачи чистого сдвига поперек волокна, где положим, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформации  $\varepsilon_0$ , и перемещения вдали от включения имеют вид  $u_{rr}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$ ,  $u_{r\theta}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$ .

Общее решение для неоднородной среды имеет вид  $u_r = u_r(r) \cos 2\theta$ ,  $u_\theta = u_\theta(r) \sin 2\theta$ ,  $u_z = 0$ , где  $u_r(r)$  и  $u_\theta(r)$  – неизвестные функции. Для простоты введем обозначение  $u_r(r) = u(r)$ ,  $u_\theta(r) = w(r)$ .

По соотношениям деформации Коши (5) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = u', \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u - 2w}{r} \cos(2\theta), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta/r \right) = (-w' - 2u + w/r) \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

и с помощью закона Гука (6) вместе с соотношениями (12) определим неравные нулю компоненты напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = (C_{rr} u' + C_{r\theta} u - 2w/r) \cos(2\theta), \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (C_{r\theta} u' + C_{\theta\theta} u - 2w/r) \cos(2\theta), \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{r\theta} \left( -w' + \frac{w - 2u}{r} \right) \sin(2\theta). \quad (15)$$

Напряжения  $\sigma_w$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и  $\sigma_{r\theta}$  должны удовлетворять двум уравнениям из уравнений равновесия (4)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} = 0. \quad (16)$$

Оставшееся уравнение (4) равновесия выполняется тождественно.

Запишем уравнения равновесия (16) в перемещениях, учитывая соотношения (13)–(15):

$$\begin{aligned} C_{rr}(u''r^2 + u'r) - (4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u - 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w &= 0, \\ 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})u'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u + (w''r^2 + w'r)G_{r\theta} - (G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta})w &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решения дифференциальных уравнений (17) будем искать в виде  $u(r) = Fr^\lambda$ ,  $w(r) = Dr^\lambda$ , где  $F$  и  $D$  – неизвестные константы, для которых имеется линейная зависимость  $F = 2 \frac{G_{r\theta}\lambda + C_{r\theta}\lambda - G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}{C_{rr}\lambda^2 - 4G_{r\theta} - C_{\theta\theta}} D$ ,  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения, полученного из условия существования нетривиального нулевого решения системы уравнений [17], которое имеет вид

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0, \quad (18)$$

где

$$L = G_{r\theta}C_{rr}, M = 4(G_{r\theta} + C_{r\theta})^2 - C_{rr}(G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta}) - G_{r\theta}(4G_{r\theta} + C_{\theta\theta}), N = 9G_{r\theta}C_{\theta\theta}.$$

Очевидно, что корни  $\lambda$  выражения (18) зависят от свойств материалов. В классической теории упругости в соответствии с работами Хашина [16] и Цукрова [17] эти корни являются вещественными числами. В целом, для любых действительных корней  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  и  $\lambda_4$  выражения  $u(r)$  и  $w(r)$  имеют следующий вид

$$u(r) = F_1r^{\lambda_1} + F_2r^{\lambda_2} + F_3r^{\lambda_3} + F_4r^{\lambda_4}, \quad w(r) = D_1r^{\lambda_1} + D_2r^{\lambda_2} + D_3r^{\lambda_3} + D_4r^{\lambda_4}, \quad (19)$$

где  $\lambda^1$ ,  $\lambda^3$  – положительные, а  $\lambda^2$ ,  $\lambda^4$  – отрицательные величины.

С учетом (19) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче примут вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left( \phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos(2\theta) = \\ &= \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}}, \end{aligned}$$

$$u_\theta^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin(2\theta) = \sin(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}},$$

где  $D_1^{(i)}$ ,  $D_2^{(i)}$ ,  $D_3^{(i)}$ ,  $D_4^{(i)}$  – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;  $\lambda_j^{(i)}$  и  $\phi_j^{(i)} = 2 \frac{G_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \lambda_j^{(i)} - G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}{C_{rr}^{(i)} \lambda_j^{(i)2} - 4G_{r\theta}^{(i)} - C_{\theta\theta}^{(i)}}$  постоянны. Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r, \theta) = \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1}, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r, \theta) = \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2), \quad (21)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) = \sin(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (-\lambda_j^{(i)} - 2\phi_j^{(i)} - 1). \quad (22)$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(1)} - C_{23}^{(1)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон, материальные константы равны  $\lambda_1^{(i)} = 1$ ,  $\lambda_1^{(i)} = -1$ ,  $\lambda_1^{(i)} = 3$ ,  $\lambda_1^{(i)} = -3$ , так как в этом случае в силу законов Гука имеем равенства  $C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)}$ , или  $C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)}$ ;  $C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)}$ , или  $C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}$ .

С учетом соотношений (20)–(22) для деформаций выражения для определения напряжений в каждой из фаз (23), (24) приобретают явную форму как функции от координат  $r$  и  $\theta$  и зависят от констант  $D_1^{(1)}$ ,  $D_2^{(1)}$ ,  $D_3^{(1)}$ ,  $D_4^{(1)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ,  $D_3^{(2)}$ ,  $D_4^{(2)}$ ,  $D_1^{(N)}$ ,  $D_2^{(N)}$ ,  $D_3^{(N)}$ ,  $D_4^{(N)}$ . Эти неизвестные константы можно найти из следующих условий:

– условия несингулярности напряжений в центре волокна ( $r = 0$ ) для фазы 1:  $D_1^{(1)} = D_4^{(1)} = 0$ ;

– условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad u_\theta^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_\theta^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta),$$

$$\sigma_{r\theta}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta) \quad (i = 1, 2, 3, N);$$

– внешнего граничного условия на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \cos(2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \sin(2\theta);$$

– условия энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1})_{r=r_N} dS = 0,$$

где  $u_r^{eff}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$ ,  $u_\theta^{eff}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$ ,  $\sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff} \cos(2\theta)$ ,  $\sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff} \sin(2\theta)$ ,  $\mu_{23}^{eff}$  – эффективный поперечный модуль сдвига.

Таким образом, получили следующую систему из 8 уравнений с 8 неизвестными, среди которых  $D_1^{(1)}$ ,  $D_3^{(1)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ,  $D_3^{(2)}$ ,  $D_4^{(2)}$ ,  $D_4^{N+1}$  и эффективный

поперечный модуль сдвига  $\mu_{23}^{eff}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \phi_1^{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda(11)} + \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda(31)} - \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda(12)} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_1^{\lambda(22)} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_1^{\lambda(32)} \\
 - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_1^{\lambda(42)} = 0, \\
 \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda(12)} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda(22)} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda(32)} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda(42)} - \\
 - (-D_4^{(N+1)})/r_2^3 + r_2 \varepsilon_0 = 0, \\
 -D_1^{(1)} r_1^{\lambda(11)} - \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda(31)} - (-D_1^{(2)} r_1^{\lambda(12)} - D_2^{(2)} r_1^{\lambda(22)} - D_3^{(2)} r_1^{\lambda(32)} - D_4^{(2)} r_1^{\lambda(42)}) = 0, \\
 -D_1^{(2)} r_2^{\lambda(12)} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda(22)} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda(32)} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda(42)} - \\
 - (-D_4^{(N+1)})/r_2^3 - r_2 \varepsilon_0 = 0, \\
 D_1^{(1)} r_1^{\lambda(11)-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(11)} \phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda(31)-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(31)} \phi_3^{(1)} + \\
 + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_3^{(1)})) - D_1^{(2)} r_1^{\lambda(12)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + \\
 + D_2^{(2)} r_1^{\lambda(22)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\
 + D_3^{(2)} r_1^{\lambda(32)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\
 + D_4^{(2)} r_1^{\lambda(42)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) = 0, \\
 D_1^{(2)} r_2^{\lambda(12)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda(22)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + \\
 + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\
 + D_3^{(2)} r_2^{\lambda(32)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\
 + D_4^{(2)} r_2^{\lambda(42)-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + \\
 + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) - 2(3D_4^{(N+1)} r_2^{\lambda(4N+1)-1} + \varepsilon_0) \mu_{23}^{eff} = 0, \\
 C_{66}^{(1)} (D_1^{(1)} r_1^{\lambda(11)-1} (-\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)}) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda(31)-1} (-\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)})) - \\
 - C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_1^{\lambda(12)-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)}) + D_2^{(2)} r_1^{\lambda(22)-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) + \\
 + D_3^{(2)} r_1^{\lambda(32)-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_1^{\lambda(42)-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)})) = 0, \\
 C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_2^{\lambda(12)-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)}) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda(22)-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) + \\
 + D_3^{(2)} r_2^{\lambda(32)-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_2^{\lambda(42)-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)})) - \\
 - (4D_4^{(N+1)} \mu_{23}^{eff} r_2^{\lambda(4N+1)-1} - 4\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff}) = 0.
 \end{array} \right. \quad (25)$$

Эффективный модуль упругости поперек оси вискерса найдем по формуле [15]

$$E_{22}^{eff} = \frac{4\mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff}}{K_{23}^{eff} + \mu_{23}^{eff} + 4(\nu_{12}^{eff})^2 \mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff} / E_{11}^{eff}}. \quad (26)$$

Таким образом, определены все выражения, необходимые для расчета эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя, а также эффективных свойств включения, образованного волокном и вискеризованным слоем, и связующего, образованного вискеризованным слоем и матрицей.

### 3. Оценки критических значений потери устойчивости

Определим критическое значение сжимающего напряжения потери устойчивости для композитов, состоящих из волокна, на поверхности которых выращены УНТ. Такое модифицированное волокно погружено в матрицу. Физические и геометрические свойства композита, необходимые для проведения численного анализа, на частном примере приведены в таблице 1.

Объемное содержание вискерсов в межфазном слое принято предельным и равно 65 % (см. формулу (11)). Эффективные свойства вискеризованного межфазного

Табл. 1

Физические и геометрические свойства исследуемого композита

Параметры	Углеродное волокно	УНТ	Эпоксидная матрица
Продольный модуль Юнга, ГПа	241	1100	3
Поперечный модуль Юнга, ГПа	14,5	–	–
Модуль продольного сдвига, ГПа	22,8	–	–
Модуль поперечного сдвига, ГПа	4,8	–	–
Коэффициент Пуассона	0,27	0,14	0,3
Диаметр, мкм	5	0,00051	–
Длина, мкм	–	1	–

слюя были получены по формулам (25), (26), а эффективные свойства включения и связующего (продольный модуль упругости включения  $E_f$ , продольный модуль упругости связующего  $E_m$  и модуль сдвига связующего  $G_m$  вдоль волокна) – по формулам (2), (3). Критическое значение сжимающего напряжения потери устойчивости определяется минимизацией функции (1) относительно  $\bar{l}_n$  и  $\bar{c}$ .

Ниже приведены графики зависимостей сигма от фазового сдвига для различных длин волн (рис. 2). Объемное содержание включения (волокно с вискеризованным слоем) принималось равным 62 %. С увеличением длины волны возрастает амплитуда сжимающего напряжения и наблюдается уменьшение значения минимального критического напряжения. Так, при  $\bar{l}_n = 1$  минимальное критическое значение реализуется при  $\bar{c} = 1$  и равно 112 498 МПа (рис. 2 а), при  $\bar{l}_n = 10$  реализуется при  $\bar{c} = 20$  и равно 4 244 МПа (рис. 2 б), а при  $\bar{l}_n = 100$  реализуется при  $\bar{c} = 200$  и равно 3 153 МПа (рис. 2 в). Точка минимума функции одинакова для конкретных  $\bar{l}_n$ , поэтому мы можем найти  $\bar{l}_n$  при фиксированных  $\bar{c}$ .

Графики зависимости минимального критического значения сжимающего напряжения  $\sigma_{1min}$  от  $\bar{l}_n$  для классического и модифицированного композитов с объемным содержанием включения 62 % представлены на рис. 3. Известно, что типичным значением прочности на продольное сжатие для волокнистого композита, образованного углеродным волокном и эпоксидной матрицей, составляет величина порядка 1 200 МПа [1]. На графике рис. 3 видно, что при  $\bar{l}_n > 40$  кривая приближается к асимптоте и значение минимального критического сжимающего напряжения для классического композита составляет порядка 2 000 МПа. Это превышает типичные значения прочности, но для более точной оценки соответствия полученного результата и предложенного в работе [1] нам не хватает данных. Однако мы можем судить, при каких длинах волн волокна реализуется потеря устойчивости волокнистого композита при сжатии. Для модифицированного композита и классического волокнистого композита механизм потери устойчивости реализуется при  $\bar{l}_n > 40$ , и тогда значение  $\bar{l}_n$  не влияет на минимальное значение сжимающего напряжения. Из графиков также видно, что модификация поверхности углеродного волокна УНТ с максимально плотной упаковкой позволяет увеличить критическое значение сжимающего напряжения более чем в 1.5 раза по сравнению с классическим композитом с тем же объемным содержанием включения.

На рис. 4 для модифицированного композита с вискеризованными волокнами одновременно показаны график зависимости  $\sigma_{1min}$  от  $\bar{l}_n$  и график зависимости  $\bar{c}$  от  $\bar{l}_n$ . На графике видно, что в то время, как увеличение относительной величины фазового сдвига  $\bar{c}$  сопровождается увеличением  $\bar{l}_n$ , значение  $\sigma_{1min}$  остается практически постоянной величиной.

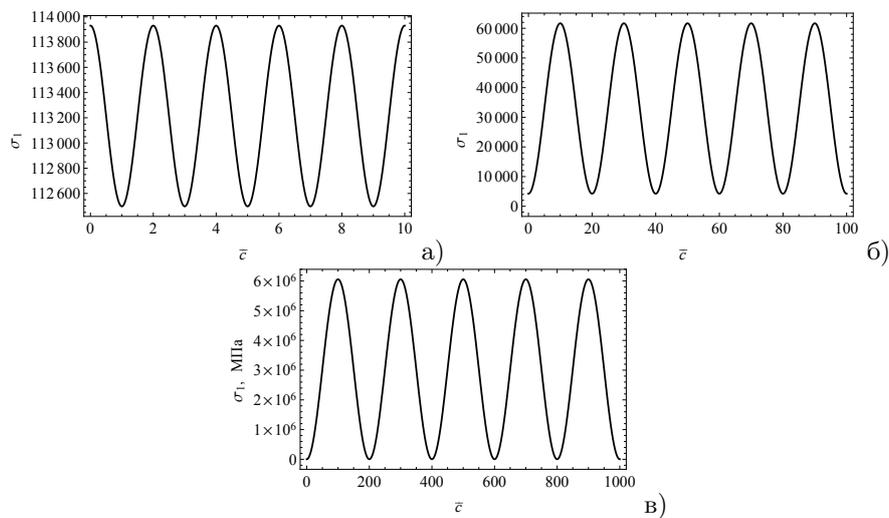


Рис. 2. Зависимость  $\sigma_1$  от фазового сдвига для различных длин волн а)  $\bar{l}_n = 1$ , б)  $\bar{l}_n = 10$ , в)  $\bar{l}_n = 00$

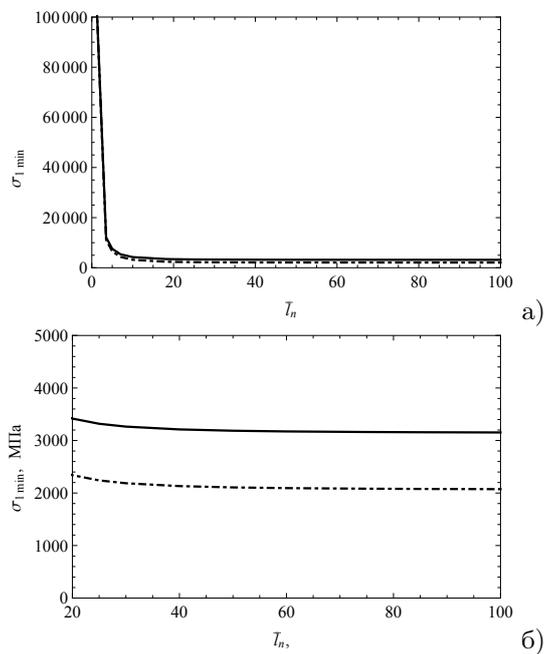


Рис. 3. Зависимость  $\sigma_{1min}$  от  $\bar{l}_n$  для модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия)

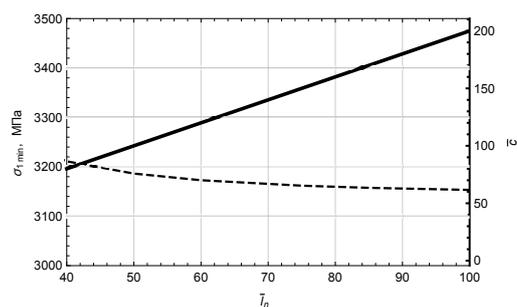


Рис. 4. Графики зависимости  $\sigma_{I min}$  от  $\bar{l}_n$  (пунктирная линия) и  $\bar{c}$  от  $\bar{l}_n$  (сплошная жирная линия)

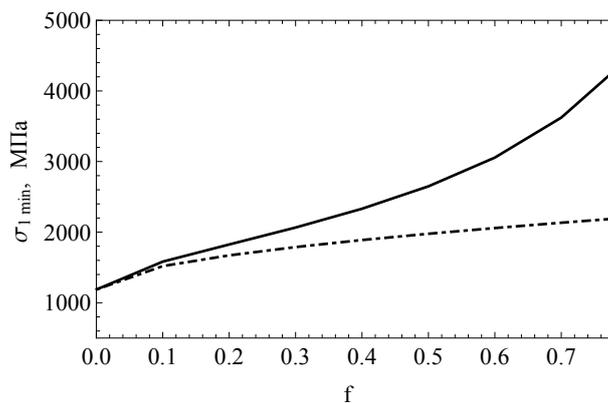


Рис. 5. Графики зависимости  $\sigma_{I min}$  от  $f$  для модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия)

Оценим влияние объемного содержания волокна, модифицированного УНТ, на критическое значение потери устойчивости. На рис. 5 приведены графики для классического и модифицированного композитов. Видно, что увеличение объемного содержания включения позволяет увеличить критическое значение потери устойчивости волокнистого композита при сжимающем нагружении вдоль волокна. Такой эффект наблюдается и для классического композита, и для модифицированного, однако при увеличении объемного содержания включения более 0.4 свойства модифицированного композита начинают значительно расти, в то время как для классического композита изменяются незначительно. А при достижении максимального значения объемного содержания, равного 0.78 (характерного для квадратной упаковки включения в композите), критическое значение потери устойчивости модифицированного композита превышает критическое значение потери устойчивости классического композита с тем же объемным содержанием включения более чем в 2 раза.

### Заключение

Исследована устойчивость композитного материала, состоящего из волокна, модифицированного межфазного слоя и матрицы, при сжимающих напряжениях вдоль волокна. Выявлено, что как для модифицированного, так и для классического композита механизм потери устойчивости реализуется при относительных дли-

нах волн, превышающих значение 40, и при этом последующее увеличение значения относительной длины волны не сопровождается изменением минимального критического сжимающего напряжения, но сопровождается увеличением относительной величины фазового сдвига. Анализ влияния объемного содержания модифицированного волокна на минимальные критические значения сжимающего напряжения показал, что устойчивость модифицированного композита может быть увеличена более чем в 2 раза по сравнению с устойчивостью аналогичного классического композита.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-3607.2022.1.1.

### Литература

1. *Vasiliev V. V., Morozov E. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures. Elsevier, 2018. 856 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
2. *Tsirka K., Tzounis L., Avgeropoulos A., Liebscher M., Mechtcherine V., Paipetis A.S.* Optimal synergy between micro and nano scale: Hierarchical all carbon composite fibers for enhanced stiffness, interfacial shear strength and Raman strain sensing // *Compos. Sci. Technol.* 2018. V. 165. P. 240–249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.07.003>.
3. *Fan W., Wang Y., Wang C., Chen J., Wang Q., Yuan Y., Niu F.* High efficient preparation of carbon nanotube-grafted carbon fibers with the improved tensile strength // *Appl. Surf. Sci.* 2016. V. 364. P. 539–551. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.12.189>.
4. *Guo J., Lu C., An F.* Effect of electrophoretically deposited carbon nanotubes on the interface of carbon fiber reinforced epoxy composite // *J. Mater. Sci.* 2012. V. 47. P. 2831–2836. <https://doi.org/10.1007/s10853-011-6112-5>.
5. *Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R.* Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites // *Carbon.* 2012. V. 50, No 10. P. 3949–3952. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023>.
6. *Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F.* Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers // *Carbon.* 2011. V. 49, No 14. P. 4665–4673. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064>.
7. *Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R.* Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid // *J. Mater. Sci.* 2009. V. 44, No 13. P. 3574–3577. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x>.
8. *Sharma S.P., Lakkad S.C.* Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites // *Surf. Coat. Technol.* 2010. V. 205, No 2. P. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055>.
9. *Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G.* Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition // *Mater. Sci. Eng.: A.* 2015. V. 626. P. 449–457. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044>.
10. *Lurie S.A., Minhat M.* Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // *Composites, Part B.* 2014. V. 61. P. 26–40. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021>.

11. *Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N.* Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method // *J. Eng. Math.* 2015. V. 95, No 31. P. 7–29. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0>.
12. *Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Кривень Г.И., Лыкосова Е.Д.* Напряженное состояние в элементах структуры модифицированных волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами // *Механ. композ. матер.* 2018. Т. 24, № 1. С. 122–144.
13. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N.* On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // *Int. J. Civ. Eng. Technol.* 2018. V. 9, No 6. P. 294–308.
14. *Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н.* О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // *Композиты и наноструктуры.* 2019. Т. 11, № 1. С. 1–15.
15. *Кристенсен Р.М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
16. *Hashin Z.* Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites // *Mech. Mater.* 1990. V. 8, No 4. P. 293–308. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L).
17. *Tsukrov I., Drach B.* Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // *Int. J. Solids Struct.* 2010. V. 47, No 1. P. 25–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005>.

Поступила в редакцию 23.09.2023

Принята к публикации 25.11.2023

---

**Кривень Галина Ивановна**, кандидат технических наук, старший преподаватель  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [Kriven\\_Galina@inbox.ru](mailto:Kriven_Galina@inbox.ru)

**Шавелкин Денис Сергеевич**, старший преподаватель  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [dshavelkin@inbox.ru](mailto:dshavelkin@inbox.ru)

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.344-360

**On Local Stability Loss of Modified Composites with Whiskerized Fibers***G.I. Kriven\* , D.S. Shavelkin\*\***Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*E-mail: \**Kriven\_Galina@inbox.ru*, \*\**dshavelkin@inbox.ru*

Received September 23, 2023; Accepted November 25, 2023

**Abstract**

This article examines the critical compressive stresses required for a modified fiber composite to remain straight while the fibers within it bend. It was assumed that the modified composite consists of three phases: fiber, whiskerized interfacial layer, and matrix. An example of a composite material made up of carbon fibers, a whiskerized layer of carbon nanotubes with an epoxy matrix, and an epoxy matrix was considered. Its physical parameters affecting the critical compressive stresses were assessed, and methods for determining them were proposed. The effective properties of the inclusion and binder composite material were identified using the Voigt and Reis methods. Similarly, the effective properties of the interfacial whiskerized layer were analyzed by the three-phase method. The influence of fiber wavelength and phase shift, which define the destruction of the composite material, on the critical compressive stress value was explored. The wavelengths at which the composite material is destroyed were found. The effect of the volume content of the modified inclusion on the minimum critical compressive stress value was shown. The results for the modified composites were compared with those for the classical composites with a similar volume content of inclusions.

**Keywords:** composite material, stability of fiber composites, fiber surface modification, CNTs, three-phase method

**Acknowledgments.** This study was supported by the grant of the President of the Russian Federation (project no. MK-3607.2022.1.1).

**Figure Captions**

Fig. 1. Local buckling in the unidirectional layer of fibers with whiskers grown on their surface.

Fig. 2. Dependence of  $\sigma_1$  on the phase shift for different wavelengths: a)  $\bar{l}_n = 1$ , b)  $\bar{l}_n = 10$ , c)  $\bar{l}_n = 00$ .

Fig. 3. Dependence of  $\sigma_{1min}$  on  $\bar{l}_n$  for the modified (solid line) and classical (dash-dotted line) composites.

Fig. 4. Graphs showing the dependence of  $\sigma_{1min}$  on  $\bar{l}_n$  (dashed line) and  $\bar{c}$  on  $\bar{l}_n$  (bold solid line).

Fig. 5. Graphs showing the dependence of  $\sigma_{1min}$  on  $f$  for the modified (solid line) and classical (dash-dotted line) composites.

## References

1. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures*. Elsevier, 2018. 856 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
2. Tsirka K., Tzounis L., Avgeropoulos A., Liebscher M., Mechtcherine V., Paipetis A.S. Optimal synergy between micro and nano scale: Hierarchical all carbon composite fibers for enhanced stiffness, interfacial shear strength and Raman strain sensing. *Compos. Sci. Technol.*, 2018, vol. 165, pp. 240–249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.07.003>.
3. Fan W., Wang Y., Wang C., Chen J., Wang Q., Yuan Y., Niu F. High efficient preparation of carbon nanotube-grafted carbon fibers with the improved tensile strength. *Appl. Surf. Sci.*, 2016, vol. 364, pp. 539–551. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.12.189>.
4. Guo J., Lu C., An F. Effect of electrophoretically deposited carbon nanotubes on the interface of carbon fiber reinforced epoxy composite. *J. Mater. Sci.*, 2012, vol. 47, pp. 2831–2836. <https://doi.org/10.1007/s10853-011-6112-5>.
5. Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites. *Carbon*, 2012, vol. 50, no. 10, pp. 3949–3952. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023>.
6. Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers. *Carbon*, 2011, vol. 49, no. 14, pp. 4665–4673. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064>.
7. Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid. *J. Mater. Sci.*, 2009, vol. 44, no. 13, pp. 3574–3577. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x>.
8. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites. *Surf. Coat. Technol.*, 2010, vol. 205, no. 2, pp. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055>.
9. Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G. Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition. *Mater. Sci. Eng.: A*, 2015, vol. 626, pp. 449–457. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044>.
10. Lurie S.A., Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites. *Composites, Part B*, 2014, vol. 61, pp. 26–40. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021>.
11. Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method. *J. Eng. Math.*, 2015, vol. 95, no. 31, pp. 7–29. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0>.
12. Lurie S.A., Rabinsky L.N., Kriven G.I., Lykosova E.D. Stress state in structural elements of modified fibrous composite materials with whiskerized fibers. *Mekh. Kompoz. Mater.*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 122–144. (In Russian)
13. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers. *Int. J. Civ. Eng. Technol.*, 2018, vol. 9, no. 6, pp. 294–308.
14. Lurie S.A., Kriven G.I., Rabinsky L.N. On strength of modified fiber composite with fuzzy fibers. *Kompoz. Nanostrukt.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 1–15. (In Russian)

15. Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the Mechanics of Composites]. Moscow, Mir, 1982. 334 p. (In Russian)
16. Hashin Z. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites. *Mech. Mater.*, 1990, vol. 8, no. 4, pp. 293–308.  
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L).
17. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Int. J. Solids Struct.*, 2010, vol. 47, no. 1, pp. 25–33.  
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005>.

---

**Для цитирования:** Кривень Г.И., Шавелкин Д.С. О локальной потере устойчивости модифицированных композитов с вискеризованными волокнами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 344–360.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.344-360>.

**For citation:** Kriven G.I., Shavelkin D.S. On local stability loss of modified composites with whiskerized fibers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 344–360.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.344-360>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.361-388

## НЕСОВМЕСТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

*С. А. Лычев*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, 119526, Россия*

### Аннотация

В статье развиваются методы математического моделирования несовместных конечных деформаций гибких пластин. Несовместные деформации моделируются в рамках дифференциально-геометрической теории непрерывно распределенных дефектов. Для построения уравнений равновесия используются асимптотические разложения конечных мер деформаций по двум малым параметрам. Первый из них характеризует порядок малости перемещений из отсчетной (самонапряженной) формы, а второй – толщину. Асимптотические порядки различны для прогибов и перемещений в плоскости пластины, а также их производных и выбраны таким образом, чтобы при дополнительных предположениях – о возможности пренебрежения отдельными слагаемыми получаемых выражений и о совместности деформаций – уравнения сводились бы к известной системе Фешля–фон Кармана.

### Введение

Упругие элементы микроэлектромеханических систем (МЭМС) в большинстве своем очень гибкие: они характеризуются большим отношением характерного размера в плане и толщины, которое может достигать десятков тысяч [1]. Для таких отношений, казалось бы, следует использовать классическую линейную (и очень простую) математическую модель мембраны, однако подобный путь в приложении к исследуемым явлениям приводит к неудовлетворительным результатам. Причин тому несколько. Во-первых, линейная модель мембраны предполагает задание натяжения, которое заранее неизвестно, и требует определения из условий закрепления. Переход к исследованию нелинейных уравнений Фешля–фон Кармана не спасает ситуацию, поскольку для краевых задач, порождаемых этими уравнениями, как правило, задаются краевые условия в терминах производных перемещений (или функции Эри), и для моделирования реального закрепления границы пластины требуется постановка интегральных краевых условий. Кроме того, применимость самих уравнений Фешля–фон Кармана, ввиду их асимптотической непоследовательности (отдельные члены отбрасываются без обоснования их малости), вызывает сомнения [2]. Во-вторых, полное игнорирование изгибной жесткости для ультратонких мембран оправдано для достаточно гладких по пространственным переменным и медленно изменяющимся во времени нагружениям. Вместе с тем в рамках технологических задач, возникающих при проектировании МЭМС, нельзя игнорировать локализацию воздействия. Подобная ситуация возникает, в частности, при разработке микроэлектромеханических узлов проекционной фотолитографии (на настоящий момент она является ключевой технологией

микроэлектроники) в силу ступенчатой структуры экранирующего слоя (шаблона) и коротких времен экспозиции. В этой связи использование как линейных, так и нелинейных классических моделей мембран и пластин при расчетах и проектировании деформируемых элементов МЭМС приводит к значительным погрешностям [3, 4]. В-третьих, неочевидна адаптация нелинейной теории несовместных деформаций [5–8] к моделям, которые получены не из общих соотношений нелинейной упругости, а посредством "очевидных" механических допущений и гипотез. Не имея ничего против этих допущений, которые доказали свою применимость за сотни лет их использования в расчетах на обычном для инженерии масштабном уровне, можно усомниться в адекватности их применения на уровне десятков и сотен нанометров. В то же время непосредственное использование нелинейных трехмерных уравнений, разумеется, приводит к вычислительной неудаче ввиду вырождения системы по малому параметру – толщине. В этой связи развитие теории тонкостенных тел, испытывающих конечные деформации, с учетом их возможной несовместности представляет собой актуальную задачу в рамках современной механики деформируемого твердого тела, равно как и в рамках теории технологических процессов. Этой задаче посвящена настоящая статья, в которой процедуры получения точных, асимптотических и редуцированных уравнений рассматриваются на примере круглой гибкой пластины. Уравнения равновесия выводятся из асимптотических разложений по двум малым параметрам. Первый параметр определяет степень малости перемещений, а второй – толщину. Меры несовместности деформаций, сформулированные в исходном виде в трехмерной постановке, естественно входят в полученные уравнения.

Теория гибких тонкостенных конструкций является классическим разделом механики деформируемого твердого тела, которому посвящен огромный объем публикаций в периодической печати и монографий [9–11]. Не имея возможности воспроизвести здесь сколь-нибудь полный обзор этой проблематики, укажем лишь некоторые источники, непосредственно связанные с настоящей работой. Уравнения для пластин, учитывающих конечные прогибы, впервые были получены Фешлем (без учета моментных составляющих) [12], а затем развиты фон Карманом [13]. Эти уравнения были получены "инженерными" методами, не претендующими на математическую строгость. В частности, вопрос о том, какая все же форма пластины – исходная или деформированная – использовалась для формулировки уравнений баланса, оказывался скрытым в тумане нестрогих рассуждений. Долгое время теория Фешля – фон Кармана оставалась в разряде "инженерных" методов расчета [14–16], хотя сами уравнения, ввиду их внутреннего математического изящества, стали предметом исследования чистых математиков [17–19]. Толчок к развитию строгого подхода к выводу уравнений для гибких пластин дали замечательные работы Съярле [2, 20, 21], в которых осуществлен детальный анализ процедур асимптотического вывода уравнений из точных трехмерных уравнений нелинейной теории упругости и выявлены асимптотически непоследовательные преобразования, приводящие к потере асимптотического порядка. Но даже не вполне корректно полученные уравнения Фешля – фон Кармана, будучи существенно нелинейными, привлекают значительное внимание в плане анализа характера бифуркации решений [22] и разнообразных численно-аналитических и вычислительных методов их решения [23–26].

Настоящая работа имеет следующую структуру. Сначала с учетом кинематических ограничений на допустимые поля перемещений, устанавливаемых гипотезами Кирхгофа – Лява, формулируются уравнения равновесия относительно компонент второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа. Затем строятся их асимптотики

по малому параметру, характеризующему перемещения, и выполняется "асимптотически непоследовательное" редуцирование к форме, обычно принимаемой в теории Фешля – фон Кармана. Таким образом, в явном виде оказываются сформулированы уравнения в трех формах: точной, асимптотической и редуцированной. Далее, следуя такой же методологии, строятся точные, асимптотические и редуцированные представления для тензоров деформаций, напряжений и результатов (сил и моментов), которые при подстановке в полученные до этого варианты уравнений равновесия дают набор различных постановок краевых задач: строгой, асимптотической и редуцированной. Поскольку все постановки идеологически связаны, оказывается возможной модификация соответствующих мер деформаций таким образом, чтобы учесть распределенные несовместные деформации. В качестве примера рассмотрен наиболее простой тип несовместности, порождаемый неоднородным расширением/сжатием. С точки зрения технологии такая несовместность характеризует неравномерные температурные поля, эволюционирующие в процессе изготовления тонкостенного элемента МЭМС. В завершение кратко описан итерационный алгоритм, позволяющий получать решения для краевых задач, порождаемых различными вариантами полученных уравнений для круглой пластины, жестко закрепленной на контуре.

### 1. Кинематика

Все представления формулируются в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , которые связаны с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Для координатных представлений полей используется нормированный локальный базис  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ , получаемый из прямоугольного базиса  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  преобразованиями:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Поле перемещений точек пластины  $\mathbf{u}$ , компоненты которого в базисе  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  обозначены символами  $U = U(r, \varphi, z)$ ,  $V = V(r, \varphi, z)$ ,  $W = W(r, \varphi, z)$  соответственно, аппроксимируются с учетом кинематических ограничений (гипотез), обычно принимаемых в теории пластин и оболочек Кирхгофа – Лява [10]:

$$\mathbf{u} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\varphi + W\mathbf{e}_z = (u - z\omega_{,r})\mathbf{e}_r + \left(v - \frac{z}{r}\omega_{,\varphi}\right)\mathbf{e}_\varphi + w\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Здесь  $u = u(r, \varphi)$  – радиальные, а  $v = v(r, \varphi)$  – окружные перемещения точек на поверхности осреднения,  $\omega = \omega(r, \varphi)$  – ее вертикальные перемещения (прогибы). При таких предположениях о допустимых полях перемещений их градиент  $\mathbf{D}$ , вычисляемый в цилиндрических координатах по формулам

$$\mathbf{D} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} U_{,r} & \frac{1}{r}(U_{,\varphi} - V) & U_{,z} \\ V_{,r} & \frac{1}{r}(U + V_{,\varphi}) & V_{,z} \\ W_{,r} & \frac{1}{r}W_{,\varphi} & W_{,z} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

может быть представлен в виде:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} u_{,r} - z w_{,rr} & \frac{1}{r}(u_{,\varphi} - v) + \frac{z}{r^2}(w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}) & -w_{,r} \\ \frac{z}{r^2}(w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}) + v_{,r} & \frac{1}{r}(u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2}(w_{,\varphi\varphi} + r w_{,r}) & -\frac{w_{,\varphi}}{r} \\ w_{,r} & \frac{1}{r}w_{,\varphi} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

**Замечание.** Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают матрицу линейного оператора в нормированном диадном базисе цилиндрической системы координат, т.е. если тензор имеет следующее диадное разложение:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & D_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_{r\varphi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{rz} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \\ & + D_{\varphi r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r + D_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \\ & + D_{zr} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + D_{z\varphi} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

то ему соответствует матрица

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{r\varphi} & D_{rz} \\ D_{\varphi r} & D_{\varphi\varphi} & D_{\varphi z} \\ D_{zr} & D_{z\varphi} & D_{zz} \end{bmatrix}.$$

Для симметрических тензоров элементы под главной диагональю заменяются символами "звездочка", т.е. если  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ , то

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{r\varphi} & D_{rz} \\ * & D_{\varphi\varphi} & D_{\varphi z} \\ * & * & D_{zz} \end{bmatrix}.$$

Тензорному полю градиента перемещений  $\mathbf{D}$  соответствует поле градиента деформации  $\mathbf{F}$ , которое вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{I}$  – единичный тензор, который в диадном разложении представляется единичной матрицей.

## 2. Асимптотические порядки

Основным инструментом в дальнейших построениях будет асимптотическое разложение по двум малым параметрам, а именно, параметру  $\varepsilon$ , характеризующему порядок малости перемещений, и толщине  $h$ . Спецификой теорий типа Кармана является директивное назначение порядка малости индивидуально каждой компоненте поля перемещений и их производных, и последующая "асимптотическая непоследовательность", при которой некоторые из термов вне зависимости от их асимптотических порядков полагаются малозначимыми и приравниваются нулю.

Асимптотические порядки перемещениям их производным назначаются согласно следующей таблице:

Табл. 1  
Асимптотические порядки перемещений и их производных

	$\cdot$	$\cdot, r$	$\cdot, \varphi$	$\cdot, rr$	$\cdot, r\varphi$	$\cdot, \varphi\varphi$
$u$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$			
$v$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$			
$w$	1	$\varepsilon$	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$

В соответствии с назначенными порядками могут быть построены асимптотические представления векторных и тензорных полей, производимых функциями перемещений. Будем использовать индексы над символами для указания асимптотического порядка элементов представлений. В частности, асимптотическое представление

градиента деформации имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^2,$$

где  $[\mathbf{F}^0]_{..} = O(1)$ ,  $[\mathbf{F}^1]_{..} = O(\varepsilon)$ ,  $[\mathbf{F}^2]_{..} = O(\varepsilon^2)$ . Элементы этих матриц согласно таблице 1 и соотношениям (3), (4) могут быть записаны следующим образом:

$$[\mathbf{F}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}^1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} - \frac{v}{r} & -w_{,r} \\ \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} & \frac{u}{r} - \frac{z}{r}w_{,r} & -\frac{1}{r}w_{,\varphi} \\ w_{,r} & \frac{1}{r}w_{,\varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{F}^2] = \begin{bmatrix} u_{,r} - zw_{,rr} & \frac{1}{r}u_{,\varphi} - \frac{z}{r}w_{,r\varphi} & 0 \\ v_{,r} - \frac{z}{r}w_{,r\varphi} & \frac{1}{r}v_{,\varphi} - \frac{z}{r^2}w_{,\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить соотношения, принимаемые в теориях типа Кармана, упростим асимптотические представления, оставив в них лишь члены с двумя последовательными асимптотическими порядками. При этом различные компоненты одного и того же тензора будут представлены с точностью до различных порядков малого параметра, что, конечно, не согласуется с общей идеологией построения асимптотик (для корректного представления тензора во всех его компонентах должны удерживаться члены одного порядка малости). Вместе с тем, для того, чтобы в итоге прийти к классическим уравнениям Фешля – фон-Кармана, мы вынуждены пойти на этот шаг. Подобные асимптотически некорректно построенные разложения будем называть редуцированными. В частности, для построения матрицы редуцированного градиента деформации  $[\mathbf{F}^r]$  возьмем матрицу  $[\mathbf{F}^0]$  и неполную матрицу  $[\mathbf{F}^1]$ , в которой пренебрежем элементом  $[\mathbf{F}^1]_{\varphi\varphi}$ , полагая, что он не вносит существенный вклад по сравнению с  $[\mathbf{F}^0]_{\varphi\varphi} = 1$ . Имеем:

$$[\mathbf{F}^r] = [\mathbf{F}^0] + \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{F}^1]_{r\varphi} & [\mathbf{F}^1]_{rz} \\ [\mathbf{F}^1]_{\varphi r} & 0 & [\mathbf{F}^1]_{\varphi z} \\ [\mathbf{F}^1]_{zr} & [\mathbf{F}^1]_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} - \frac{1}{r}v & -w_{,r} \\ \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} & 1 & -\frac{w_{,\varphi}}{r} \\ w_{,r} & \frac{w_{,\varphi}}{r} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ясно, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^1 + O(\varepsilon^2), \quad \text{в то время как} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^r + \boldsymbol{\delta},$$

где, вообще говоря,  $\boldsymbol{\delta} = O(\varepsilon)$ . Выяснить вопрос о том, насколько асимптотика оказалась "искаженной", можно из непосредственного сопоставления этих двух полей для конкретных решений краевых задач. Для полноты изложения приведем выражение для матрицы редуцированного градиента деформации при осевой симметрии:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{,r} \\ 0 & 1 & 0 \\ w_{,r} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия в отсчетном описании могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где  $\operatorname{div}$  – оператор дивергенции в отсчетных координатах,  $\mathbf{K}$  – плотность объемных сил,  $\mathbf{P}$  – тензор напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода. Поскольку для рассматриваемой круглой пластины отсчетными являются цилиндрические координаты, то

$$\begin{aligned} [\operatorname{div} \mathbf{P}]_r &= [\mathbf{P}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{rz,z} + \frac{1}{r} ([\mathbf{P}]_{rr} - [\mathbf{P}]_{\varphi\varphi}), \\ [\operatorname{div} \mathbf{P}]_\varphi &= [\mathbf{P}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{\varphi z,z} + \frac{1}{r} ([\mathbf{P}]_{\varphi r} + [\mathbf{P}]_{r\varphi}), \\ [\operatorname{div} \mathbf{P}]_z &= [\mathbf{P}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{zz,z} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{zr}. \end{aligned}$$

Для того чтобы в итоге прийти к уравнениям типа Кармана, следует записать уравнение равновесия (6) в терминах напряжений Пиола–Кирхгофа второго рода  $\mathbf{S}$ , которые связаны с  $\mathbf{P}$  соотношением

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

При этом уравнение (6) примет вид

$$\mathcal{L} \mathbf{S} + \mathbf{K} = \mathbf{0},$$

где  $\mathcal{L}$  – линейный дифференциальный оператор, действующий на  $\mathbf{S}$  по правилу

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}).$$

Явный вид этого оператора зависит от  $\mathbf{F}$  и, следовательно, может принимать различные формы для различных асимптотических представлений градиента деформации. Если в качестве  $\mathbf{F}$  взять выражение (4) без всяких упрощений, то получим следующие три дифференциальных выражения (линейных относительно компонент тензора напряжений):

$$\begin{aligned} [\mathcal{L} \mathbf{S}]_r &= (\underline{1} + u_{,r} - zw_{,rr}) \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \\ &+ \left( \frac{z}{r^2} zw_{,\varphi} - \frac{1}{r} (zw_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + \underline{v}) \right) \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\ &- \underline{w}_{,r} \left( [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left( \frac{2}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{2}{r} w_{,r\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{\varphi z} + \\ &+ \left( u_{,rr} - z w_{,rrr} + \frac{1}{r} (\underline{1} + u_{,r} - z w_{,rr}) \right) [\mathbf{S}]_{rr} - \left( 2w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) [\mathbf{S}]_{rz} - \\ &- \left( \frac{2z}{r^3} w_{,\varphi} - \frac{2z}{r^2} w_{,r\varphi} + \frac{2}{r} (z w_{,rr\varphi} - u_{,r\varphi} + v_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &- \left( \frac{1}{r} - \frac{2z}{r^3} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} (z w_{,r\varphi\varphi} - u_{,\varphi\varphi} + \underline{u} + 2v_{,\varphi} - z w_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \\ [\mathcal{L} \mathbf{S}]_\varphi &= \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + v_{,r} \right) \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \\ &+ \left( \underline{1} + \frac{1}{r} (\underline{u} + v_{,\varphi} - z w_{,r}) - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\ &- \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{2}{r} r w_{,r\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{rz} + \\ &+ \left( \frac{z}{r^2} w_{,r\varphi} - \frac{z}{r^3} w_{,\varphi} + v_{,rr} + \frac{1}{r} (v_{,r} - z w_{,rr\varphi}) \right) [\mathbf{S}]_{rr} - \left( \frac{2}{r} w_{,r} + \frac{2}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{\varphi z} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{2}{r} + \frac{2z}{r^3} w_{,\varphi\varphi} - \frac{2z}{r^2} w_{,r\varphi\varphi} + \frac{2}{r} (v_{,r\varphi} - z w_{,rr} + u_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \\
& + \left( \frac{z}{r^3} (w_{,\varphi} - w_{,\varphi\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (2u_{,\varphi} - 2z w_{,r\varphi} + v_{,\varphi\varphi} - \underline{v}) \right) [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \\
[\mathcal{L} \mathbf{S}]_z = & \underline{w}_r \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) + \\
& + \underline{1} \left( [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \\
& + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{rz} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

Термы с асимптотическими порядками не выше первого выделены знаком подчеркивания. Они в совокупности определяют асимптотическое представление первого порядка, которое далее будем обозначать символом  $\overset{a}{\mathcal{L}}$ .

Оператор  $\mathcal{L}$  допускает выделение части с асимптотическим порядком  $O(1)$ , которая есть ничто иное, как оператор дивергенции, характеризующий равновесие пластины в линейном приближении. Остаток, содержащий термы с коэффициентами, зависящими от компонент перемещений и их производных, обозначим символом  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathcal{A} \mathbf{S}.$$

Операторы  $\operatorname{div}$  и  $\mathcal{A}$  линейны относительно компонент второго тензора Пиола–Кирхгофа. Однако если считать, что напряжения зависят от перемещений, то, поскольку коэффициенты остатка  $\mathcal{A}$  также зависят от перемещений, этот оператор относительно последних оказывается нелинейным. Условно можно сказать, что  $\mathcal{A}$  характеризует "геометрическую нелинейность" упругой системы.

Использование редуцированного градиента деформации (5) вместо  $\overset{r}{\mathbf{F}}$  приводит к существенному упрощению первых двух компонент оператора  $\overset{r}{\mathcal{L}}$ :

$$\begin{aligned}
[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_r = & \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \frac{z w_{,\varphi} - r v}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\
& - w_{,r} \left( [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{rr} - \frac{r (z w_{,r\varphi} - r v_{,r}) - 2z w_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\
& - \frac{r w_{,rr} + w_{,r}}{r} [\mathbf{S}]_{rz} - \frac{z w_{,\varphi\varphi} - r (r + v_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + \frac{2w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_{\varphi} = & \frac{z w_{,\varphi}}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\
& - \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \frac{z (r w_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \\
& + \frac{2r^2 + z w_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{rz} + \frac{z w_{,\varphi} - r v}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} - \frac{r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi z}.
\end{aligned}$$

Третья компонента не изменяется:

$$[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_{\varphi} = [\mathcal{L} \mathbf{S}]_{\varphi}.$$

Соответствующий этим выражениям редуцированный оператор  $\overset{r}{\mathcal{L}}$  сохраняет главную (дивергентную) часть, но остаток  $\overset{r}{\mathcal{A}}$  становится более простым:

$$\overset{r}{\mathcal{L}}\mathbf{S} = \operatorname{div}\mathbf{S} + \overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}.$$

В рамках теории типа Кармана принято пренебрегать термами, в которых присутствуют произведения перемещений на касательные компоненты напряжений  $[\mathbf{S}]_{rz}$ ,  $[\mathbf{S}]_{\varphi z}$ , и термами, содержащими  $[\mathbf{S}]_{zz}$ . В следующих формулах, дающих явные выражения компонент редуцированного остатка, эти члены перечеркнуты:

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_r &= \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z,z}} \right) - \\ &\quad - w_{,r} \left( \cancel{[\mathbf{S}]_{zr,r}} + \frac{1}{r}\cancel{[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi}} + \cancel{[\mathbf{S}]_{zz,z}} \right) - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &\quad - \frac{rw_{,rr} + w_{,r}}{r} \cancel{[\mathbf{S}]_{rz}} - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + \frac{2w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_{\varphi} &= \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{rz,z}} \right) - \\ &\quad - \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( \cancel{[\mathbf{S}]_{zr,r}} + \frac{1}{r}\cancel{[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi}} + \cancel{[\mathbf{S}]_{zz,z}} \right) + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \\ &\quad + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{rz}} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} - \frac{rw_{,r} + w_{,\varphi\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_z &= w_r \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{rz,z}} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z,z}} \right) + \\ &\quad + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения вновь оказались подвергнутыми "асимптотически последовательному" преобразованию, обосновать которое сложно строго математическими методами, но можно оправдать тем фактом, что поставленные в итоге краевые задачи дают решение, близкое к ожидаемому. Приближенные выражения для компонент оператора  $\overset{r}{\mathcal{A}}$  записаны ниже:

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_r &\approx \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &\quad - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \end{aligned}$$

$$[\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_{\varphi} \approx \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi},$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_z &\approx w_r \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \\ &\quad + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Используя полученные упрощенные выражения, вновь сформулируем систему уравнений равновесия, которая оказывается упрощенным (в духе теории типа Кармана) аналогом полной системы (6):

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) - \\
& \quad - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_r = 0, \\
& [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi r} - \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \\
& \quad + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_{\varphi} = 0, \\
& [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\
& \quad + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_z = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Третье уравнение этой системы характеризует равновесие относительно оси  $z$ , что является наиболее важным в технической теории пластин. Это уравнение допускает дальнейшее эффективное преобразование, если выразить "плоские" компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кихгофа, а именно,  $[\mathbf{S}]_{rr}$ ,  $[\mathbf{S}]_{r\varphi}$ ,  $[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}$  через двумерную функцию напряжений (которая, тем не менее, может параметрически зависеть от переменной  $z$ ):

$$[\mathbf{S}]_{rr} = \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r}, \quad [\mathbf{S}]_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi}, \quad [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} = \psi_{,rr}.$$

Подстановка выражений "плоских" компонент напряжений в терминах функции Эри в третье уравнение дает

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left( \left( \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r} \right)_{,r} + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right)_{,\varphi} \right) + \\
& \quad + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( \left( \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right)_{,r} + \frac{1}{r}(\psi_{,rr})_{,\varphi} \right) + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) \left( \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r} \right) + \\
& \quad + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} \left( \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2}(\psi_{,rr}) + [\mathbf{K}]_z = 0.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что в этом выражении после раскрытия скобок третьи производные взаимно уничтожаются и левая часть уравнения может быть преобразована к виду:

$$[\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + L[w, \psi] + [\mathbf{K}]_z = 0,$$

где символом  $L$  обозначен нелинейный дифференциальный оператор, обычно возникающий в теории Кармана:

$$\begin{aligned}
L[w, \psi] = & \frac{1}{r}(w_{,r}\psi_{,rr} + \psi_{,r}w_{,rr}) + \frac{1}{r^2}(w_{,rr}\psi_{,\varphi\varphi} + \psi_{,rr}w_{,\varphi\varphi} - 2\psi_{,r\varphi}w_{,r\varphi}) + \\
& + \frac{2}{r^3}(w_{,r\varphi}\psi_{,\varphi} + \psi_{,r\varphi}w_{,\varphi}) - \frac{2}{r^4}\psi_{,\varphi}w_{,\varphi}.
\end{aligned}$$

Довольно сложный вид этого оператора может сделать его плохо узнаваемым, однако преобразование полярных переменных к декартовым

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(x, y)$$

приводит его к легко узнаваемому виду:

$$L[w, \psi] = \psi_{,yy} w_{,xx} + \psi_{,xx} w_{,yy} - 2\psi_{,xy} w_{,xy}.$$

Если из системы (7) исключить термы, асимптотический порядок которых выше первого, то придем к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\ + \frac{2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + [\mathbf{K}]_r = 0, \\ [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi r} - \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) - \\ - \frac{zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_{\varphi} = 0, \\ [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left( [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left( [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\ + \frac{w_{,r}}{r} [\mathbf{S}]_{rr} + [\mathbf{K}]_z = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

В первых двух уравнениях все еще остались слагаемые (они подчеркнуты), нетипичные для классической линейной теории пластин Софи-Жермен–Лаганжа (а именно, она используется в процессе "инженерного" вывода уравнений Кармана). Эти слагаемые характеризуют конечный поворот в плоскости, касательной к изогнутой срединной поверхности пластины, сопровождающий неосесимметричную деформацию. В дальнейшем, для того чтобы получить уравнения типа Кармана в привычном виде, нам придется их отбросить. Вместе с тем в осесимметричном случае подобных проблем не возникает вовсе (здесь следует отметить, что практически все статьи, посвященные решениям уравнений типа Кармана в цилиндрических координатах, ограничиваются случаем осевой симметрии). Действительно, при осевой симметрии система (7) сокращается до двух уравнений:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}]_{rr,r} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + [\mathbf{K}]_r = 0, \\ [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r}[\mathbf{S}]_{rr,r} + \left( \frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + [\mathbf{K}]_z = 0. \end{aligned}$$

При этом второе уравнение может быть один раз проинтегрировано: если умножить левую часть на  $r$ , то придем к соотношению

$$(r [\mathbf{S}]_{zr} + [\mathbf{S}]_{zr} + r w_{,r} [\mathbf{S}]_{rr})_{,r} + r [\mathbf{K}]_z = 0.$$

Следовательно (см. также [30]),

$$[\mathbf{S}]_{zr} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r}[\mathbf{S}]_{rr} = -\frac{1}{r} \int [\mathbf{K}]_z r dr.$$

#### 4. Меры деформации

В качестве меры деформаций, определяющей упругий отклик пластины на внешнее силовое воздействие, выберем тензор, энергетически сопряженный к второму тензору напряжений Пиола–Кирхгофа, а именно, тензор деформаций Грина–Сен-Венана:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (9)$$

Зная выражения для компонент градиента деформации (4), не составляет труда записать в явном виде компоненты тензора  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]_{rr} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{z}{r^2} (w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}) + v_{,r} \right)^2 + (u_{,r} - zw_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right), \\ [\mathbf{E}]_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} w_{,\varphi} w_{,r} + (u_{,r} - zw_{,rr} + 1) \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} + \frac{1}{r} (u_{,\varphi} - v - zw_{,r\varphi}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right) \left( \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (w_{,\varphi\varphi} + rw_{,r}) + 1 \right) \right), \\ [\mathbf{E}]_{rz} &= \frac{1}{2} \left( w_{,r} (zw_{,rr} - u_{,r}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} (zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - \frac{z}{r^3} (w_{,\varphi})^2 \right), \\ [\mathbf{E}]_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (w_{,\varphi\varphi} + rw_{,r}) + 1 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} (w_{,\varphi})^2 + \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (v - u_{,\varphi} + zw_{,r\varphi}) \right)^2 - 1 \right), \\ [\mathbf{E}]_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} w_{,r} (v - u_{,\varphi}) + \frac{z}{r} \left( w_{,r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} w_{,\varphi\varphi} \right) - \frac{1}{r^2} (uw_{,\varphi} + v_{,\varphi} w_{,\varphi}) \right), \\ [\mathbf{E}]_{zz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + w_{,r}^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Выписанные соотношения являются точными, но в них входят функции перемещений и их производных различных асимптотических порядков. Соблюдая асимптотическую идеологию построения уравнений, принятую в настоящей работе, выпишем меру деформаций в форме асимптотических приближений, порядки которых не превосходят  $O(\varepsilon^2)$ . Имеем:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{rv-2zw_{,\varphi}}{2r^2} & 0 \\ * & \frac{u-zw_{,r}}{r} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) & \frac{r^3 v_{,r} - 2r^2 zw_{,r\varphi} + r^2 u_{,\varphi} + w_{,\varphi} (w_{,r} (r^2 - z^2) + uz)}{2r^3} & -\frac{zw_{,\varphi}^2}{2r^3} \\ * & \frac{2r^2 (rv_{,\varphi} - zw_{,\varphi\varphi}) + r^2 w_{,\varphi}^2 + (ru - rz w_{,r})^2 + (rv - zw_{,\varphi})^2}{2r^4} & \frac{rv w_{,r} - u w_{,\varphi}}{2r^2} \\ * & * & \frac{1}{2} \left( \frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, асимптотически строгое приближение второго порядка для тензора деформаций Грина–Сен-Венана дается соотношением

$$\mathbf{E} = \overset{1}{\mathbf{E}} + \overset{2}{\mathbf{E}} + O(\varepsilon^3). \quad (11)$$

Мы же пойдем дальше, выполнив "асимптотически непоследовательные" построения, используя для определения тензора Грина–Сен-Венана не точное выражение для градиента места (4), а его редуцированный аналог (5). В результате получим следующее соотношение:

$${}^r[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) & -\frac{rv - 2zw_{,\varphi}}{2r^2} & -\frac{zw_{,\varphi}^2}{2r^3} \\ * & \frac{u - zw_{,r}}{r} & \frac{rvw_{,r} - uw_{,\varphi}}{2r^2} \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

которое, конечно, проще как точного (10), так и строгого асимптотического (11) представлений. Однако строго обосновать его не удастся и остается лишь выполнять проверку адекватности решений соответствующих краевых задач, подставляя найденные поля в точные или асимптотически строгие уравнения. Для полноты изложения приведем матрицу тензора Грина–Сен-Венана для случая осевой симметрии:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( (u_{,r} - zw_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right) & 0 & -\frac{1}{2} w_{,r} (u_{,r} - zw_{,rr}) \\ * & \frac{(u - zw_{,r})(-zw_{,r} + 2r + u)}{2r^2} & 0 \\ * & * & \frac{w_{,r}^2}{2} \end{bmatrix}$$

и его редуцированного аналога (деформации фон Кармана)

$${}^r[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2} - zw_{,rr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u - zw_{,r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 5. Законы состояния

Для замыкания системы уравнения равновесия требуется дополнить уравнениями состояния, которые можно определить в рамках теории простого гиперупругого материала. Идеология этой теории предполагает достаточно произвольный выбор функций, конкретизирующих форму потенциала запасаемой упругой энергии (при известных ограничениях индифферентности и положительной определенности). Для того чтобы не сильно удаляться от теорий типа Кармана, будем использовать весьма частный вид потенциала, а именно, потенциал Сен-Венана–Кирхгофа:

$$W = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E}. \quad (13)$$

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – материальные константы, аналогичные константам Ламе, используемым в линейной теории упругости изотропного тела.

Потенциалу Сен-Венана–Кирхгофа соответствует (получается из формулы Дойля–Эриксона) закон состояния, линейно связывающий тензор деформаций  $\mathbf{E}$  со вторым тензором напряжений Пиола–Кирхгофа:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (14)$$

Явные точные выражения для компонент тензора напряжений представлены ниже:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}]_{rr} &= \mu \left( \left( \frac{z(w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi})}{r^2} + v_{,r} \right)^2 + (u_{,r} - z w_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{r\varphi} &= \mu \left( \frac{1}{r} w_{,r} w_{,\varphi} + (u_{,r} - z w_{,rr} + 1) \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right) \left( 1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}) \right) \right), \\
[\mathbf{S}]_{rz} &= -\mu \left( w_{,r} (u_{,r} - z w_{,rr}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} (r v_{,r} - z w_{,r\varphi}) + \frac{z}{r^3} w_{,\varphi}^2 \right), \\
[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} &= \mu \left( \left( 1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right)^2 - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi z} &= \mu \left( \frac{z}{r} \left( w_{,r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} w_{,\varphi\varphi} \right) + \frac{1}{r} w_{,r} (v - u_{,\varphi}) - \frac{1}{r^2} (u w_{,\varphi} + v_{,\varphi} w_{,\varphi}) \right), \\
[\mathbf{S}]_{zz} &= \mu \left( \frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
s &= (u_{,r} - z w_{,rr} + 1)^2 + 2w_{,r}^2 - 2 + \left( 1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) + \frac{z}{r} w_{,r} - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left( \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right)^2 + \left( v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right)^2.
\end{aligned}$$

Асимптотические представления первого и второго порядков даются формулами:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}]^1 &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{r} (u - z w_{,r}) & -\frac{\mu}{r^2} (r v - 2z w_{,\varphi}) & 0 \\ * & \frac{\lambda + 2\mu}{r} (u - z w_{,r}) & 0 \\ * & * & \frac{\lambda}{r} (u - z w_{,r}) \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{S}]_{rr}^2 &= \mu \left( \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2z w_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{r\varphi}^2 &= \mu \left( v_{,r} - \frac{2z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r} u_{,\varphi} + w_{,\varphi} \left( \left( \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) w_{,r} + \frac{z}{r^3} u \right) \right), \\
[\mathbf{S}]_{rz}^2 &= -\frac{\mu z w_{,\varphi}^2}{r^3}, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}^2 &= \mu \left( \frac{2}{r^2} (r v_{,\varphi} - z w_{,\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left( \frac{1}{r} u - \frac{z}{r} w_{,r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} v - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right)^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi z}^2 &= \frac{\mu}{r^2} (r v w_{,r} - u w_{,\varphi}), \\
[\mathbf{S}]_{zz}^2 &= \mu \left( \frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overset{2}{s} = 2 \left( u_{,r} - zw_{,rr} + w_{,r}^2 + \frac{1}{r} v_{,\varphi} - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 \right) + \\ + \left( \frac{1}{r} u - \frac{z}{r} w_{,r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} v - \frac{z}{r} w_{,\varphi} \right)^2 + \frac{z^2}{r^4} w_{,\varphi}^2. \end{aligned}$$

Итак, точные и асимптотические представления для компонент тензора напряжений получены. Осталось лишь построить редуцированное представление, для чего следует подставить в закон состояния (14) редуцированный тензор деформаций (12). Имеем:

$$[\overset{r}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mu \left( \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & -\frac{\mu}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu}{r^3} zw_{,\varphi}^2 \\ * & \frac{2\mu}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & \frac{\mu}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\overset{r}{s} = \frac{z^2}{r^4} w_{,\varphi}^2 + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} + \frac{2}{r} (u - zw_{,r}).$$

Полученное выражение содержит различные произведения, а также степени перемещений и их производных, в связи с чем оно может быть приведено к более простой форме за счет отбрасывания термов, асимптотический порядок которых выше второго. В итоге приходим к следующему асимптотическому представлению редуцированного тензора напряжений:

$$[\overset{r1}{\mathbf{S}}] = [\overset{1}{\mathbf{S}}], \quad [\overset{r2}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)}{2} \overset{r2}{s} & 0 & -\frac{\mu zw_{,\varphi}^2}{r^3} \\ * & \frac{1}{2} \lambda \overset{r2}{s} & \frac{\mu (rvw_{,r} - uw_{,\varphi})}{r^2} \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\overset{r2}{s} = \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr}.$$

Суммируя асимптотические представления, приходим к так называемому тензору напряжений Кармана:

$$[\overset{k}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mu \left( \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & -\frac{\mu}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu}{r^3} zw_{,\varphi}^2 \\ * & \frac{2\mu}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & \frac{\mu}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

При выводе соотношений для асимптотических и редуцированных представлений напряжений в качестве отправной точки был использован частный вид потенциала запасенной упругой энергии (13). Это позволило прийти в итоге к классической формулировке напряжений Кармана (15). Конечно, можно воспользоваться другими формулировками для потенциала запасенной упругой энергии, например, потенциалом Муни–Ривлина. Однако в этом случае получим иные выражения для компонент редуцированных напряжений, поскольку в исходных соотношениях для законов состояния будут использованы все алгебраические инварианты тензора деформаций, а их асимптотические и редуцированные представления будут отличаться от (15).

## 6. Результаты

Для получения двумерных уравнений равновесия, которые чаще всего используются при моделировании полей в пластинах и оболочках, следует произвести осреднение уравнений равновесия (8) по толщине пластины, что сводится к вычислению моментов (в математическом смысле) левых и правых частей этих уравнений по переменной  $z$  в пределах  $(-h/2, h/2)$ . Интегрирование (8) с весом 1 приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathfrak{T}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathfrak{T}]_{rr} - [\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi}) + \mathfrak{E}_r + [\mathfrak{D}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathfrak{T}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi r} + \mathfrak{E}_\varphi + [\mathfrak{D}]_\varphi &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{zr} + L[w, \hat{\psi}] + [\mathfrak{D}]_z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

а интегрирование первых двух уравнений (8) с весом  $z$  дает:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathfrak{M}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathfrak{M}]_{rr} - [\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi}) + \mathfrak{E}_r + [\mathfrak{Q}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathfrak{M}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi r} + \mathfrak{E}_\varphi + [\mathfrak{Q}]_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\hat{\psi} = \int_{-h/2}^{h/2} \psi dz, \quad \mathfrak{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} dz, \quad \mathfrak{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} z dz, \quad \mathfrak{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{K} dz, \quad \mathfrak{Q} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{K} z dz,$$

а  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\varphi$ ,  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\varphi$  — соответствующие интегралы от зачеркнутых термов в уравнениях (8). Если предположить, что касательные напряжения  $[\mathbf{S}]_{rz}$ ,  $[\mathbf{S}]_{\varphi z}$  распределены по толщине непрерывно, а их значения на лицевых поверхностях пластины обращаются в ноль, то

$$[\mathfrak{T}]_{rz,z} = [\mathfrak{T}]_{\varphi z,z} = 0, \quad [\mathfrak{M}]_{rz,z} = -[\mathfrak{T}]_{rz}, \quad [\mathfrak{M}]_{\varphi z,z} = -[\mathfrak{T}]_{\varphi z}.$$

Полагая (здесь уже без всякого аналитического обоснования), что термами  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\varphi$ ,  $\mathfrak{E}_r$ ,  $\mathfrak{E}_\varphi$  можно пренебречь, приходим к системе пяти уравнений:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{r\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}([\mathfrak{T}]_{rr} - [\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi}) + [\mathfrak{D}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \frac{2}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi r} + [\mathfrak{D}]_\varphi &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{zr} + L[w, \hat{\psi}] + [\mathfrak{D}]_z &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{r\varphi,\varphi} - [\mathfrak{T}]_{rz} + \frac{1}{r}([\mathfrak{M}]_{rr} - [\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi}) + [\mathfrak{Q}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi,\varphi} - [\mathfrak{T}]_{\varphi z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi r} + [\mathfrak{Q}]_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Легко видеть, что первые два уравнения (18) по форме совпадают с уравнениями плоской теории упругости в полярных координатах, а последние три без учета оператора  $L[\cdot, \cdot]$  — с классическими уравнениями равновесия линейной теории пластин. Следует отметить, что эта система, которая представляет уравнения

Фешля – фон Кармана, точно как первая асимптотика (правда, в этом случае не требуется учитывать оператор  $L[\cdot, \cdot]$ ), но не является математически строгой второй асимптотикой ввиду того, что в процессе ее вывода некоторые термы отбрасывались без должного обоснования. Валидацию этих уравнений следует основывать на конкретных расчетах, сопоставляя их результаты с аналогичными расчетами по полной асимптотической или точной системе уравнений, либо путем непосредственной оценки энергетического вклада отброшенных термов, явные выражения для которых приведены выше.

Результантами будем называть моменты (в математическом смысле) распределений напряжений по толщине пластины. Соответственно, момент нулевого порядка характеризует средние по толщине напряжения, умноженные на толщину пластины. В технической теории такие средние принято называть усилиями в плоскости осреднения. Однако следует отметить, что в приводимых далее соотношениях используются напряжения Пиола – Кирхгофа второго рода, в отличие от линейной теории пластин, в которой фигурируют напряжения Коши. Кроме того, ввиду нелинейной зависимости компонент напряжений от переменной  $z$ , эти соотношения требуют дополнительного асимптотического разложения по второму малому параметру – толщине. Итак, моменты нулевого порядка задаются двумерным тензорным полем

$$\mathfrak{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}^k dz = \overset{0}{\mathfrak{T}} + \overset{2}{\mathfrak{T}},$$

где  $\overset{0}{\mathfrak{T}}$  – результат интегрирования термов, не содержащих переменную  $z$ , а  $\overset{2}{\mathfrak{T}}$  – результат интегрирования термов, содержащих переменную  $z^2$ :

$$[\overset{0}{\mathfrak{T}}] = h \begin{bmatrix} \frac{\lambda u}{r} + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(2u_{,r} + w_{,r}^2) & -\frac{\mu v}{r} & 0 \\ * & \frac{u(\lambda+2\mu)}{r} + \lambda\left(u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2}\right) & \frac{\mu}{r^2}(rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\overset{2}{\mathfrak{T}}] = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)w_{,\varphi}^2}{2r^4} & 0 & 0 \\ * & \frac{\lambda w_{,\varphi}^2}{2r^4} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

В классической теории компонентами  $\overset{2}{\mathfrak{T}}$  пренебрегают.

Моменты первого порядка характеризуют двумерные тензорные поля, значения которых в технической теории называются изгибающими и крутящими моментами:

$$\mathfrak{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}^k z dz,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda w_{,r}}{r} - (\lambda + 2\mu)w_{,rr} & \frac{2\mu w_{,\varphi}}{r^2} & -\frac{\mu w_{,\varphi}^2}{r^3} \\ * & -\frac{(\lambda+2\mu)w_{,r}}{r} - \lambda w_{,rr} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

В осесимметричном случае  $[\mathfrak{M}]^2 = [0]$ , а остальные матрицы компонент оказываются диагональными:

$${}^0[\mathfrak{M}] = h \begin{bmatrix} \frac{\lambda u}{r} + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(2u_{,r} + w_{,r}^2) & 0 & 0 \\ * & \frac{u(\lambda+2\mu)}{r} + \lambda\left(u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2}\right) & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda w_{,r}}{r} - (\lambda + 2\mu)w_{,rr} & 0 & 0 \\ * & -\frac{(\lambda+2\mu)w_{,r}}{r} - \lambda w_{,rr} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что компоненты  $[\cdot]_{zz}$  всех результатов оказались равными нулю из-за того, что соответствующая компонента редуцированного тензора напряжений (Кармана) была положена (без должного асимптотического обоснования) равной нулю. Здесь мы попадаем в проблемное место, характерное для всех теорий типа Кирхгофа–Лява, в том числе линейных: кинематическая гипотеза, утверждающая о неизменности длины нормального элемента, не согласуется со статической гипотезой об отсутствии обжатия по толщине.

## 7. Несовместные деформации

Несовместные деформации характеризуют деформированное состояние среды локально, при этом сама такая локальная деформация (т.е. деформация, ассоциированная с инфинитезимальной окрестностью материальной точки) вовсе не обязательно должна быть геометрически согласована с локальными деформациями окрестностей соседних точек. Образно говоря, деформируемое тело получает внутренние источники напряжений, которые исчезнут, если позволить телу распасться на бесконечно малые элементы и позволить им деформироваться независимо. Разрушение закаленного стекла вследствие удара дает наглядную иллюстрацию этого соображения. Если предположить, что для описания отклика тела достаточно формализовать деформации, как локальные, так и глобальные, в терминах линейных операторов над векторным пространством, касательным к телу, то для учета несовместности достаточно заменить аргумент в функционале отклика с градиента деформации  $\mathbf{F}$  на композицию  $\mathbf{F} \circ \mathfrak{K}$ , где  $\mathfrak{K}$  – поле импланта [8], характеризующего локальную деформацию. На это поле, вообще говоря, накладывается лишь требование гладкости, и, в отличие от градиента деформации, оно не может быть представлено градиентом какого-либо векторного поля. Формально это означает, что если условие  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  выполняется во всех точках, то условие  $\nabla \times \mathfrak{K} = \mathbf{0}$  истинно только в исключительных случаях; вообще говоря,  $\nabla \times \mathfrak{K} \neq \mathbf{0}$ . Для учета импланта в рамках теории, развиваемой в настоящей работе, следует изменить выражение для тензора деформаций Грина–Сен-Венана (9) следующим образом:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \left( \mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathfrak{K} - \mathbf{I} \right).$$

Это, конечно, приведет к существенному изменению выражений для всех компонент тензора деформаций. Однако качественно показать сущность несовместных деформаций можно на простом примере, в котором мы предположим, что в каждой точке имплант – шаровой тензор. Тогда

$$\mathfrak{K} = \mathbf{I} \theta,$$

где  $\theta = \theta(r, \varphi, z)$  – некоторое скалярное поле, которое можно ассоциировать с объемной усадкой материала (его можно также интерпретировать как результат неоднородных температурных деформаций). Тогда выражение для полного тензора деформаций (который в этом случае более уместно назвать тензором локальной дисторсии [8]) принимает вид:

$$\mathbf{E}^* = \theta \mathbf{E} + \frac{\theta - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Ему соответствуют следующие выражения для запасенной упругой энергии:

$$W^* = \left( \frac{\lambda\theta}{2} + \mu(\theta - 1) \right) \mathbf{I} : \mathbf{E} + \mu\theta^2 \mathbf{E} : \mathbf{E} + \frac{3}{2} \mu(\theta - 1)^2$$

и напряжений Пиола – Кирхгофа:

$$\mathbf{S}^* = \theta (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}) + \frac{\theta}{2} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I}.$$

Опуская довольно очевидные выкладки, приводящие к модифицированным (с учетом импланта) выражениям для точных и асимптотических представлений напряжений, приведем окончательный результат для напряжений Кармана:

$$[\mathbf{S}]^k = \begin{bmatrix} \mu\theta \left( \frac{z^2 w^2}{r^4} \varphi + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda\theta}{2} \frac{r}{s} + s_0 & -\frac{\mu\theta}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu\theta}{r^3} zw_{,\varphi}^2 \\ * & \frac{2\mu\theta}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda\theta}{2} \frac{r}{s} + s_0 & \frac{\mu\theta}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$s_0 = \frac{\theta}{2} (3\lambda + 2\mu).$$

Конкретную зависимость  $\theta = \theta(r, \varphi, z)$  можно получить, например, из решения эволюционной задачи [8], в которой моделируется технологический процесс создания тонкостенного элемента за счет аддитивного присоединения материала (в частности, технологии CVD, PVD).

## 8. Итерационный алгоритм построения решения краевых задач

Решение уравнений типа Кармана представляет известную проблему, связанную с их существенной нелинейностью. Известны различные способы построения численных и численно-аналитических алгоритмов их решений [23–26, 29, 31]. В рамках настоящей статьи развивается методика численно-аналитического решения, в аналитической части которой используются явные представления операторов, обратных к дифференциальным операторам, порождаемым линейными частями уравнений. В численной части реализуется идеология метода последовательных приближений по нелинейной части задачи. При этом для стабилизации итерационного процесса используется регуляризация, позволяющая избежать его вычислительной неустойчивости.

Вначале рассмотрим осесимметричный (одномерный) случай и сформулируем краевую задачу в наиболее простом виде (именно так она записывается в большинстве исследований):

$$D\nabla^2 \nabla^2 \omega - hL[\psi, \omega] = q, \quad (19)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{E}{2} L[\omega, \omega] = 0. \quad (20)$$

Здесь  $D$  – цилиндрическая жесткость,  $\omega$  – прогибы,  $h$  – толщина пластины,  $\psi$  – функция напряжений,  $q$  – интенсивность поперечной нагрузки,  $E$  – модуль Юнга;

$$\nabla^2 \nabla^2 f = f_{,rrrr} + \frac{2f_{,rrr}}{r} - \frac{f_{,rr}}{r^2} + \frac{f_{,r}}{r^3},$$

$$L[f, g] = \frac{1}{r} (f_{,r} g_{,rr} + f_{,rr} g_{,r}).$$

Уравнения дополняются краевыми условиями (без ограничения общности можем считать опорный контур окружностью единичного радиуса)

$$\omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad u|_{r=0} = 0,$$

$$\omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = u|_{r=1} = 0$$

и условиями нормировки функции напряжений

$$\psi|_{r=0} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = O(1).$$

В осесимметричном случае выражение для радиального смещения на границе может быть выражено через функцию напряжений:

$$u = \frac{1}{E} (r \psi_{,rr} - \nu \psi_{,r}).$$

Следовательно, краевые условия принимают вид

$$\omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad \omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = 0,$$

$$\psi|_{r=0} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = (\psi_{,rr} - \nu \psi_{,r})|_{r=1} = 0.$$

**Замечание.** Здесь и далее используются технические характеристики упругости  $E$ ,  $\nu$ ,  $D$ , которые связаны с используемыми ранее модулями Ламе соотношениями (двумерный вариант):

$$E = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad D = \frac{\mu h^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Прежде чем перейти к описанию итерационного процесса, построим операторы, обратные к линейным частям (19), (20). Дифференциальные выражения для этих частей одинаковы – оба представлены бигармонической операцией, но их области определения различаются, поскольку различаются краевые условия для прогибов  $\omega$  и функции напряжений  $\psi$ . Оба оператора,  $(\nabla^2 \nabla^2)_{\omega}^{-1}$ ,  $(\nabla^2 \nabla^2)_{\psi}^{-1}$ , могут быть представлены единообразно как интегральные операторы

$$(\nabla^2 \nabla^2)_{\omega, \psi}^{-1} q = \int_0^r q(\zeta) K_{\omega, \psi}(\zeta, r) \zeta d\zeta + \int_r^1 q(\zeta) K_{\omega, \psi}(r, \zeta) \zeta d\zeta, \quad (21)$$

но с различными ядрами

$$K_{\omega}(\zeta, r) = \frac{h}{8D} (2(\zeta^2 + r^2) \ln r + (\zeta^2 + 1)(1 - r^2)),$$

$$K_{\psi}(\zeta, r) = \frac{h}{8D} \left( 2(\zeta^2 + r^2) \ln r + \frac{3 - \nu - \zeta^2(1 + \nu)}{1 - \nu} (1 - r^2) \right).$$

Используя второй оператор, можно сразу исключить одну из искомым функций,

$$\psi = -\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega, \omega]],$$

и в итоге прийти к одному уравнению:

$$\nabla^2\nabla^2\omega = \frac{1}{D} \left( q + hL[-\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega, \omega], \omega]] \right). \quad (22)$$

Для его решения организуем итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} [q], \\ \omega_{k+1} &= \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} \left[ q + hL[-\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega_k, \omega_k], \omega_k]] \right], \end{aligned}$$

в ходе которого получается последовательность решений  $(\omega_0, \omega_1, \dots)$ . Эта последовательность сходится достаточно быстро, если на каждом шаге правая часть уравнения (22) мало отличается от  $q$ . Вместе с тем, именно случаи, когда нелинейный терм проявляет себя значительно, наиболее интересны. Для преодоления проблемы расходимости предлагается использовать регуляризацию итерационного процесса, идея которой подобна методу суммирования Фейера (средних арифметических). При этом на каждом шаге вычисляется выражение

$$\omega_{k+1} = \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} \left[ q + hL \left[ -\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi} L[\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \omega_k] \right] \right],$$

где  $\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k]$  – регуляризатор итерационного процесса, использующий ”память” о всех предыдущих итерациях и создающий ”вычислительную вязкость” в алгоритме:

$$\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k] = \sum_{n=1}^k \zeta_n \omega_n.$$

Последовательность весовых множителей  $(\zeta_n)_{n=1}^k$  задает глубину ”памяти”. Если

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n < k, \end{cases}$$

то регуляризатор не вносит никаких поправок в итерации, если же  $\forall n \quad \zeta_n = 1/k$ , то регуляризатор учитывает всю предысторию итерационного процесса и осуществляет наилучшее сглаживание его вариативности. Конечно, в этом случае требуется большее число итераций. Можно использовать промежуточные варианты. Выбор конкретного вида последовательности весовых множителей  $(\zeta_n)_{n=1}^k$  зависит от величины вклада нелинейных операторов в решение и в конечном итоге от отношения ожидаемого прогиба к характерному размеру пластины.

Для того чтобы показать, как приведенный выше алгоритм может быть применен для решения краевых задач, порождаемых другими вариантами рассмотренных выше уравнений, остановимся подробнее на системе, эквивалентной (19), (20), но сформулированной относительно функций прогибов и радиальных перемещений:

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( u_{,r} + \frac{1}{2}\omega_{,r}^2 \right) \left( \omega_{,rr} + \nu \frac{\omega_{,r}}{r} \right) + \frac{u}{r} \left( \frac{\omega_{,r}}{r} + \nu \omega_{,rr} \right) \right] &= q, \quad (23) \\ u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} + \omega_{,r}\omega_{,rr} + \frac{\omega_{,r}^2}{2r} (1-\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Краевые условия, соответствующие жесткому закреплению круглой пластины на контуре, записываются в виде

$$\begin{aligned} \omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad \omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = 0, \\ u|_{r=0} = O(1), \quad u|_{r=1} = 0. \end{aligned}$$

Эту систему можно записать формально следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1[\omega] + \mathfrak{N}_1[u, \omega] &= q, \\ \mathfrak{L}_2[u] + \mathfrak{N}_2[\omega] &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$  – линейные дифференциальные операторы,  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$  – нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 &= D\nabla^2\nabla^2, \quad \mathfrak{N}_1 = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( u_{,r} + \frac{1}{2}\omega_{,r}^2 \right) \left( \omega_{,rr} + \nu \frac{\omega_{,r}}{r} \right) + \frac{u}{r} \left( \frac{\omega_{,r}}{r} + \nu\omega_{,rr} \right) \right], \\ \mathfrak{L}_2 &= u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2}, \quad \mathfrak{N}_2 = \omega_{,r}\omega_{,rr} + \frac{\omega_{,r}^2}{2r} (1-\nu). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, построим итерационную последовательность

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mathfrak{L}_1^{-1}q, \\ \omega_{k+1} &= \mathfrak{L}_1^{-1} \left[ q - \mathfrak{N}_1[\mathfrak{L}_2^{-1}[-\mathfrak{N}_2[\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \omega_k]]] \right]. \end{aligned}$$

Осталось лишь уточнить явное представление операторов  $\mathfrak{L}_1^{-1}, \mathfrak{L}_2^{-1}$ . Первый, будучи обратным к бигармоническому, определяется формулой (21) (с точностью до множителя  $D$ ), а второй может быть записан в той же форме, что и (21), но с ядром

$$K_u(\zeta, r) = \frac{\zeta(r^2 - 1)}{2r}.$$

В случаях иных редуцированных или асимптотических представлений, обсуждаемых в первой части работы, изменяются только явные формы нелинейных операторов  $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ , а структура алгоритма остается той же.

Для реализации алгоритма важна вычислительная эффективность реализации обратных операторов  $\mathfrak{L}_1^{-1}, \mathfrak{L}_2^{-1}$ . Использование аналитических представлений на каждой итерации приводит к катастрофическому усложнению формул, вычисляемых в результате точного интегрирования. Заметим, что подобная проблема сопровождает большинство итерационно-аналитических методов решения уравнений Фешля–фон-Кармана (см., например, [25]). Вместе с тем сохранение аналитической формы промежуточных результатов ничего не дает, поскольку ответ в итоге все равно имеет численный характер. В этой связи предлагается сразу отказаться от аналитических представлений функций, попадающих под действие интегралов, и представить их кусочными интерполяциями, т.е. интерполяционными многочленами, задаваемыми над интервалами разбиения области интегрирования и используемыми в квадратурных формулах. Тогда на каждом шаге итерационного процесса будут производиться вычисления с массивом числовых величин одной и той же размерности, представляющих интерполяции промежуточных и окончательного результатов.

Сходимость итерационного процесса зависит от того, насколько начальное приближение  $\omega_0$  отличается от итогового  $\omega_k$ . Для больших величин прогибов это отличие может быть очень значительным, и даже с использованием регуляризатора

итерационный процесс может расходиться. В этом случае следует воспользоваться нулевым приближением  $\omega_0^*$ , более "близким" к ожидаемому  $\omega_k$ . Поскольку отличие  $\omega_0$  от  $\omega_k$  с точки зрения механики определяется влиянием "плоских" компонент напряжений  $[\mathbf{S}]_{rr}$ ,  $[\mathbf{S}]_{r\varphi}$ ,  $[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}$ , следует попытаться учесть их хотя бы приближенно уже на первой итерации. Этого можно достичь, если воспользоваться гипотезой о том, что напряжения можно приблизить однородным натяжением:

$$[\mathbf{S}]_{rr} \approx T, \quad [\mathbf{S}]_{r\varphi} \approx 0, \quad [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} \approx T, \quad T = \text{Const.}$$

Тогда уравнение (19) преобразуется в линейное:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - hT\nabla^2\omega = q,$$

и в итерационном расчете вместо операторов  $\mathfrak{L}_1$ ,  $\mathfrak{N}_1$  можно взять операторы

$$\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{L}_1 - hT\nabla^2, \quad \mathfrak{N}_1^* = \mathfrak{N}_1 + hT\nabla^2.$$

В этом случае при больших прогибах влияние нелинейного оператора  $\mathfrak{N}_1^*$  уменьшается, что приводит к стабилизации вычислительного алгоритма. Оператор, обратный к  $\mathfrak{L}_1^*$ , также может быть представлен в интегральной форме (21), но с ядром

$$K_2(\zeta, r) = \frac{h}{\chi^2 D} \left\{ \frac{I_0(\chi\zeta) + I_0(\chi r) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi\zeta) I_0(\chi r) K_1(\chi)}{\xi I_1(\chi)} - I_0(\chi\zeta) K_0(\chi r) - \ln r \right\}.$$

Здесь  $\chi = \sqrt{T/D}$ ,  $I_0(z)$ ,  $I_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя первого рода (функции Инфельда),  $K_0(z)$ ,  $K_1(z)$  — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда). Приближенное значение для  $T$  может быть приближенно вычислено по "инженерным" формулам.

Для перехода к двумерному случаю требуются лишь соответствующие двумерные линейные обратные операторы. Для круглой жестко закрепленной пластины ядра этих операторов определяются соответствующими фундаментальными решениями линейных краевых задач. В частности, оператор, обратный к бигармоническому, в единичном круге имеет вид [27]:

$$(\nabla^2\nabla^2)^{-1} q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 q(\zeta, \phi) K_3(r, \varphi; \zeta, \phi) \zeta d\zeta d\phi,$$

где

$$K_3(r, \varphi; \zeta, \phi) = \frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{16\pi} \left( \frac{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} - 1 + \ln \left( \frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} \right) \right).$$

Для практики важно исследовать изгиб пластины при условиях закрепления, отличных от идеальных. В этом случае также можно построить двумерный оператор, обратный к бигармоническому, если в качестве ядра взять следующую функцию [28, р. 1011]:

$$K_4(r, \varphi; \zeta, \phi) = \frac{1}{16\pi} \left\{ (r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)) \left( \frac{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} - 1 + \ln \left( \frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} \right) \right) + \frac{2}{1 - \gamma} (\zeta^2 - 1)(r^2 - 1) \times \right. \\ \left. \times \left( {}_2F_1 \left( 1, \frac{1 - \gamma}{2}, \frac{3 - \gamma}{2}; r\zeta e^{-i(\varphi - \phi)} \right) + {}_2F_1 \left( 1, \frac{1 - \gamma}{2}, \frac{3 - \gamma}{2}; r\zeta e^{i(\varphi - \phi)} \right) - 1 \right) \right\}.$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент, характеризующий упругий отклик контура на поворот сечения пластины,  ${}_2F_1(\dots)$  — гипергеометрическая функция Гаусса.

### Заключение

Исследование упругого деформирования гибких пластин — классический, но все еще далекий от завершения раздел нелинейной механики твердого деформируемого тела, который на настоящий момент содержит много открытых проблем. В настоящей работе предприняты шаги к решению некоторых из них. Кратко сформулируем итоги.

1. Построена иерархическая система представлений для полей, характеризующих напряженно-деформированное состояние круглой гибкой пластины, которая начинается с точных уравнений трехмерной нелинейной теории упругости и заканчивается редуцированными двумерными уравнениями типа Кармана. Эта иерархия схематично показана на рис. 1.

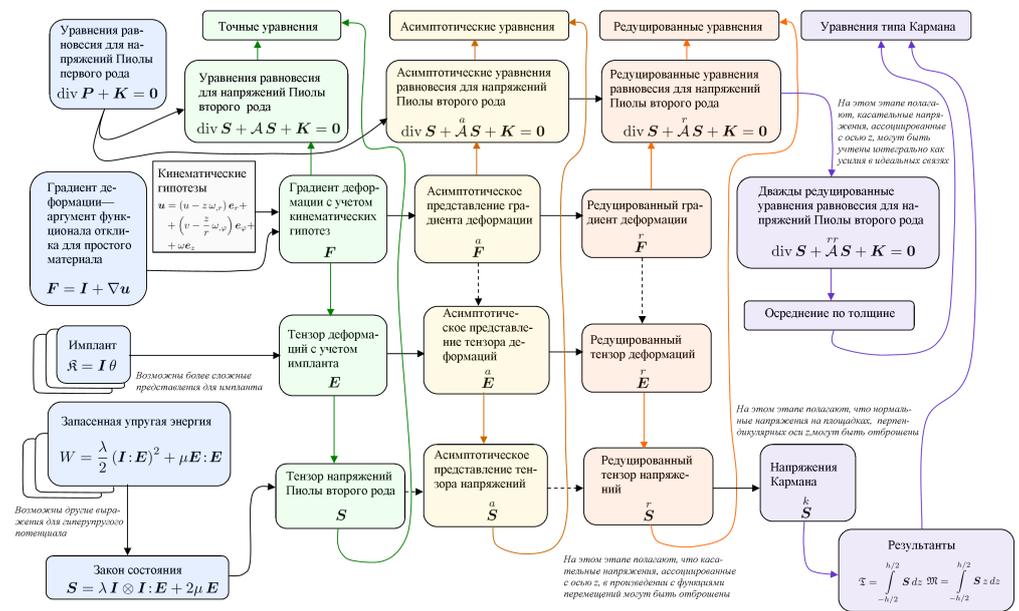


Рис. 1. Иерархия уравнений, характеризующих напряженно-деформированное состояние круглой гибкой пластины

2. Развѣт численно-аналитический метод, позволяющий найти распределения полей напряжений и деформаций на различных уровнях этой диаграммы.

Естественно было бы пожелать теперь произвести серию вычислительных экспериментов и дать оценки погрешностям, возникающим ввиду асимптотических и не совсем асимптотических упрощений. Однако исследование подобного рода не может вместиться в отдельный раздел и будет полноценно представлено в следующих публикациях.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

#### Список литературы

1. *Zorman C., Mehregany M.* Material aspects of micro- and nanoelectromechanical systems // Springer Handbook of Nanotechnology. Bhushan B. (Ed.). Ser.: Springer Handbooks. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 333–356. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9_11).
2. *Ciarlet P.G.* A justification of the von Kármán equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1980. V. 73, No 4. P. 349–389. <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
3. *Дедкова А.А., Глаголев П.Ю., Гусев Е.Э., Дюжнев Н.А., Куреев В.Ю., Лычев С.А., Товарнов Д.А.* Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных характеристик // ЖТФ. 2021. Т. 91, № 10. С. 1454–1465. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
4. *Бычков П.С., Лычев С.А., Бут Д.К.* Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристаллизации меди в областях сложной формы // Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. 2019. Т. 25, № 4. С. 48–73.
5. *Manzhurov A.V., Lychev S.A.* On the equilibrium of accreted plates // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics / Ed. by A.V. Manzhurov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elite Publ. House Pvt Ltd., 2011. P. 294–300.
6. *Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжуров А.В.* Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. №2. С. 199–208.
7. *Lychev S.* Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM. 2014. V. 94, No 1–2. P. 118–129. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
8. *Lychev S., Koifman K.* Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. De Gruyter, 2019. 388 p. <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
9. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1956. 210 с.
10. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 580 p.
11. *Freund L.B., Suresh S.* Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge Univ. Press, 2004. 750 p.
12. *Föppl A.* Vorlesungen über Technische Mechanik. Bd. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907.
13. *Kármán T.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 4. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910.

14. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
15. Феодосьев В.И. Осесимметричные гибкие оболочки. В кн.: Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: МАШГИЗ, 1958.
16. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: МАШГИЗ, 1962. 455 с.
17. Knightly G.H. An existence theorem for the von Kármán equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 27, No 3. P. 233–242. <https://doi.org/10.1007/BF00290614>.
18. Naumann J. An existence theorem for the v. Kármán equations under the condition of free boundary // Apl. Mat. 1974. V. 19, No 1. P. 17–27.
19. Bilbao S., Thomas O., Touzé C., Ducceschi M. Conservative numerical methods for the Full von Kármán plate equations // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2015. V. 31, No 6. P. 1948–1970. <https://doi.org/10.1002/num.21974>.
20. Ciarlet P.G., Rabie P. Les équations de von Kármán. Springer, 2006. 181 p.
21. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Theory of Shells. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Soc. Ind. Appl. Math., 2022.
22. Borisovich A., Janczewska J. Stable and unstable bifurcation in the von Kármán problem for a circular plate // Abstr. Appl. Anal. 2005. V. 2005, No 8. Art. 845303. <https://doi.org/10.1155/AAA.2005.889>.
23. Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Föppl–von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 91. P. 8–21. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
24. Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // Numer. Algorithms. 2018. V. 79. P. 993–1020. <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
25. Frakes J.P., Simmonds J.G. Asymptotic solutions of the von Karman equations for a circular plate under a concentrated load // J. Appl. Mech. 1985. V. 52, No 2. P. 326–330. <https://doi.org/10.1115/1.3169048>.
26. Dickey R.W. Nonlinear bending of circular plates // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30, No 1. P. 1–9.
27. Michell J.H. The flexure of a circular plate // Proc. London Math. Soc. 1902. V. s1-34, No 1. P. 223–228. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-34.1.223>.
28. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2016. 1643 p. <https://doi.org/10.1201/b19056>.
29. Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Föppl–von Kármán equations governing deflections of a thin flat plate // Int. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47, No 3. P. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
30. Reissner E. On finite deflections of circular plates // Proc. Symp. Appl. Math. 1949. V. 1. P. 213–219.
31. Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Sci. China: Phys., Mech. Astron. 2016. V. 59, No 2. Art. 624602. <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.

Поступила в редакцию 1.10.2023  
Принята к публикации 12.11.2023

Сергей Александрович Лычев, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН  
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия  
E-mail: [lychevsa@mail.ru](mailto:lychevsa@mail.ru)

ISSN 2541–7746 (Print)  
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2023, vol. 165, no. 4, pp. 361–388

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.361-388

### Incompatible Deformations of Elastic Plates

*S.A. Lychev*

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics,  
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia  
E-mail: [lychevsa@mail.ru](mailto:lychevsa@mail.ru)*

Received October 1, 2023; Accepted November 12, 2023

#### Abstract

This article considers the methods for mathematical modeling of incompatible finite deformations of elastic plates by using the principles of the differential geometry theory underlying continuously distributed defects. Equilibrium equations were derived by asymptotic expansions of the finite strain measures with respect to two small parameters. One parameter defines the order of smallness of displacements from the reference shape (self-stressed state), while the other specifies the thickness. Asymptotic orders were different for the deflections and displacements in the plate plane, as well as for their derivatives. They were selected in such a way that, with additional assumptions on the possibility of ignoring certain terms in the resulting expressions and the compatibility of deformations, the equations could be reduced to the system of Föppl–von Kármán equations.

**Keywords:** theory of thin-walled elastic structures, incompatible finite deformations of elastic plates, mathematical modeling methods, theory of continuously distributed defects, system of Föppl–von Kármán equations, numerical and analytical method, iteration algorithm

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00457).

#### Figure Captions

Fig. 1. Hierarchy of the equations for the circular elastic plate in a stress-strain state.

#### References

1. Zorman C., Mehregany M. Material aspects of micro- and nanoelectromechanical systems. In: Bhushan B. (Ed.) *Springer Handbook of Nanotechnology*. Ser.: Springer Handbooks. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, pp. 333–356. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9_11).
2. Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1980, vol. 73, no. 4, pp. 349–389. <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.

3. Dedkova A.A., Glagolev P.Yu., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Yu., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of deformation of round thin-film membranes and experimental determination of their effective characteristics. *Zh. Tekh. Fiz.*, 2021, vol. 91, no. 10, pp. 1454–1465. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>. (In Russian)
4. Bychkov P.S., Lychev S.A., Bout D.K. Experimental methodology for determining the evolution of the bending shape of a thin substrate during electrocrystallization of copper in complex-shaped areas. *Vestn. Samar. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 48–73. (In Russian)
5. Manzhairov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates. In: Manzhairov A.V., Gupta N.K., Indeitsev D.A. (Eds.) *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*. Delhi, Elite Publ. House Pvt Ltd., 2011, pp. 294–300.
6. Lychev S.A., Lycheva T.N., Manzhairov A.V. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333. <https://doi.org/10.3103/S002565441102021X>.
7. Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM*, 2014, vol. 94, nos. 1–2, pp. 118–129. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
8. Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. De Gruyter, 2019. 388 p. <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
9. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1956. 210 p. (In Russian)
10. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, McGraw-Hill, 1959. 580 p.
11. Freund L.B., Suresh S. *Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution*. Cambridge Univ. Press, 2004. 750 p.
12. Föppl A. *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Bd. 5. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1907. (In German)
13. Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Bd. 4. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1910. (In German)
14. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii* [Mechanics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1977. 488 p. (In Russian)
15. Feodos'ev V.I. Axisymmetric flexible shells. In: *Raschety na prochnost' v mashinostroenii* [Strength Calculations in Mechanical Engineering]. Vol. 2. Moscow, MASHGIZ, 1958. (In Russian)
16. Andreeva L.E. *Uprugie elementy priborov* [Elastic Elements of Instruments]. Moscow, MASHGIZ, 1962. 455 p. (In Russian)
17. Knightly G.H. An existence theorem for the von Kármán equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1967, vol. 27, no. 3, pp. 233–242. <https://doi.org/10.1007/BF00290614>.
18. Naumann J. An existence theorem for the v. Kármán equations under the condition of free boundary. *Apl. Mat.*, 1974, vol. 19, no. 1, pp. 17–27.
19. Bilbao S., Thomas O., Touzé C., Ducceschi M. Conservative numerical methods for the Full von Kármán plate equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 2015, vol. 31, no. 6, pp. 1948–1970. <https://doi.org/10.1002/num.21974>.
20. Ciarlet P.G., Rabie P. *Les équations de von Kármán*. Springer, 2006. 181 p. (In French)
21. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity: Theory of Shells*. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Soc. Ind. Appl. Math., 2022.

22. Borisovich A., Janczewska J. Stable and unstable bifurcation in the von Kármán problem for a circular plate. *Abstr. Appl. Anal.*, 2005, vol. 2005, no. 8, art. 845303. <https://doi.org/10.1155/AAA.2005.889>.
23. Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Föppl–von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2017, vol. 91, pp. 8–21. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
24. Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach. *Numer. Algorithms*, 2018, vol. 79, pp. 993–1020. <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
25. Frakes J.P., Simmonds J.G. Asymptotic solutions of the von Karman equations for a circular plate under a concentrated load. *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 2, pp. 326–330. <https://doi.org/10.1115/1.3169048>.
26. Dickey R.W. Nonlinear bending of circular plates. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 30, no. 1, pp. 1–9.
27. Michell J.H. The flexure of a circular plate. *Proc. London Math. Soc.*, 1902, vol. s1-34, no. 1, pp. 223–228. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-34.1.223>.
28. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. 2nd ed. New York, Chapman and Hall/CRC Press, 2016. 1643 p. <https://doi.org/10.1201/b19056>.
29. Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Föppl–von Kármán equations governing deflections of a thin flat plate. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
30. Reissner E. On finite deflections of circular plates. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 213–219.
31. Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Sci. China: Phys., Mech. Astron.*, 2016, vol. 59, no. 2, art. 624602. <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.

---

⟨ **Для цитирования:** Лычев С.А. Несовместные деформации гибких пластин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 361–388. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>. ⟩

⟨ **For citation:** Lychev S.A. Incompatible deformations of elastic plates. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 361–388. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.4

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ, ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ЗЕРКАЛЬНЫМ ОТРАЖЕНИЯМ ПРОСТРАНСТВА

*Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев*

*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, 119526, Россия*

### Аннотация

Рассмотрен вариант теории теплопроводности, в рамках которого вектор потока тепла имеет вес  $-1$ . С этим псевдовектором ассоциируются псевдоинварианты, чувствительные к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Основной целью исследования является построение вектора теплового потока, алгебраически подобного вектору микроповорота. Во главу угла исследования положено измерение элементарных объемов и площадей с помощью псевдоинвариантов, чувствительных к зеркальным отражениям. Для представления спинорных перемещений выбраны контравариантный псевдовектор микроповорота веса  $+1$ . Как следствие, тепловой поток и плотность массы оказались псевдотензорными величинами нечетного веса. В качестве термодинамического потенциала использована свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице дублетного псевдоинвариантного объема, а в качестве функциональных аргументов выбраны температура, симметричные части и сопутствующие векторы для линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линеаризация. Продемонстрировано, что для упругих микрополярных тел коэффициент теплопроводности и теплоемкость оказались псевдоскалярами нечетного веса, проявляющими чувствительность к указанным выше преобразованиям пространства.

**Ключевые слова:** теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное отражение, полуизотропное тело

### Введение

Термомеханическая обработка материалов и метаматериалов играет исключительно важную роль в современной технологической практике. Современные конструкционные метаматериалы проявляют сложные термомеханические свойства, в том числе аномальные с точки зрения классической механики сплошных сред. Математическое моделирование процессов технологической обработки и последующей эксплуатации изделий из указанных материалов требует привлечения методов современной термодинамики, геометрии и псевдотензорного исчисления. Большинство биоматериалов и метаматериалов с точки зрения их термомеханических свойств оказывается чувствительным к преобразованиям, изменяющим на противоположную ориентацию трехмерного пространства. Наличие микроструктуры в таких материалах требует привлечения теорий микрополярных тел.

Микрополярное твердое деформируемое тело, определяющие постоянные которого ротационно-инвариантны и при этом чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, называется полуизотропным (гиротропным, ацентрически изотропным, ротационно инвариантным). Материалы могут проявлять полуизотропность в микромасштабе (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в макромасштабе (кости, пористые материалы, витые композиты, содержащие волокна или включения) [1–3]. Полуизотропные тела из-за отсутствия геометрической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы.

Простейшим геометрическим объектом, реагирующим на изменение ориентации пространства, является псевдоскаляр нечетного веса. Аппарат алгебры и анализа псевдотензоров (относительных тензоров) достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению (например, [8–15]). Псевдотензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала [16–20]. Использование алгебры и анализа псевдотензоров [9, 11, 13] позволяет получить геометрически и физически непротиворечивые формулировки теорий микрополярных тел, которые могут быть легко трансформированы к формулировкам в терминах абсолютных тензоров с помощью целых степеней псевдоскалярных единиц. Однако, как показывает литературный поиск, подавляющее большинство математических теорий разрабатывается в терминах абсолютных тензоров [4–7] и лишь сравнительно малое число публикаций посвящено описанию в терминах псевдотензоров [16–20]. Совсем отсутствуют публикации по возможной псевдовекторной природе теплового потока при распространении тепла в микрополярных телах. Устранение указанного пробела собственно и является одной из основных целей настоящей работы.

Описание микрополярного континуума базируется на двух фундаментальных аспектах: выборе способа представления трансляционных и спинорных перемещений и выборе способа измерения элементарных объемов и площадей. В конвенциональных микрополярных теориях механики деформируемых сред [4–7] обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), наиболее просто задаваемых псевдовекторами. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора  $\phi^{k [+1]}$  положительного веса  $+1$  посвящены работы [16–19], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор  $\phi_k [-1]$  отрицательного веса  $-1$ , посвящены работы [20, 21]. Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений  $\phi^k$  (или  $\phi_k$ ).

Выбор тензорных измерений элементарных объемов и площадей также имеет исключительное значение в микрополярных теориях упругости [4–6]. Например, при выборе естественных элементов объема и площади тензор силовых напряжений становится псевдотензором положительного веса  $+1$ , что продемонстрировано в монографии Я. Схоутена [9] и работах [22, 23]. В данной статье для измерения элементарных объемов и площадей использованы дублетный элемент объема<sup>1</sup> и специально подобранный элемент площади. При этом существенно использованы терминология и понятия из работ [11, 27]. Минимальные сведения, обеспечивающие абсолютные тензорные элементы объема и площади, имеются в [8, см. приложение Дж. Л. Эриксона] и монографии [11]. В качестве термодинамического потенциала

<sup>1</sup>Термин "дублетный" продиктован прочтением классической монографии Г.Б. Гуревича [13, с. 93].

принята свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице псевдоинвариантного объема, а в качестве функциональных аргументов выбраны температура, симметричные части и сопутствующие векторы для линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линеаризация. Продемонстрировано, что для упругих микрополярных тел коэффициент теплопроводности и теплоемкость оказываются псевдоскалярами нечетного веса, проявляющими чувствительность к указанным выше преобразованиям пространства.

### 1. Псевдотензоры в $N$ -мерном пространстве

Подробное изложение основ алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [8–15] и в статьях [16, 17, 24–26]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, в обозначениях отражаться не будет.

Обобщенная дельта Кронекера (абсолютный тензор) является одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии ориентируемых пространств  $\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M}$ . Обобщенную дельту Кронекера можно определить в  $N$ -мерном пространстве для  $M \leq N$  согласно следующему правилу

$$\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M} = \begin{cases} +1, & \text{если } k_1, k_2, \dots, k_M \text{ – различные натуральные} \\ & \text{числа } 1, 2, \dots, N \text{ и если } h_1, h_2, \dots, h_M \text{ является} \\ & \text{четной перестановкой } k_1, k_2, \dots, k_M; \\ -1, & \text{если } k_1, k_2, \dots, k_M \text{ – различные натуральные} \\ & \text{числа } 1, 2, \dots, N \text{ и если } h_1, h_2, \dots, h_M \text{ является} \\ & \text{нечетной перестановкой } k_1, k_2, \dots, k_M; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

С помощью абсолютного тензора  $\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M}$ , определенного в соответствии с (1), нетрудно задать альтернирующие псевдотензоры (символы перестановок)

А. Ковариантный псевдотензор  $\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_M}$  веса  $-1$

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_M} = \delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{12 \dots M}. \quad (2)$$

В. Контравариантный псевдотензор  $\epsilon^{k_1 k_2 \dots k_M}$  веса  $+1$

$$\epsilon^{k_1 k_2 \dots k_M} = \delta_{12 \dots M}^{k_1 k_2 \dots k_M}. \quad (3)$$

Косое произведения  $N$  абсолютных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$  в  $N$ -мерном пространстве можно определить согласно [27]

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N] = e_{i_1 i_2 \dots i_N} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_N^{i_N}, \quad (4)$$

где  $e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ,  $e = e_{12 \dots N}$  – псевдоскаляр веса  $+1$ .  $e = e_{12 \dots N}$  позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и разделить локальные базисные системы на право- и левоориентированные. В самом деле, если в качестве системы векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$  принять векторы ковариантного базиса  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  в  $N$ -мерном пространстве, то на основании (4) найдем

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N] = e. \quad (5)$$

Важно также отметить, что для символов перестановок (2) и (3) нарушаются правила жонглирования индексами. Поднимать или опускать индексы у символов перестановок необходимо согласно правилу

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N} = e^{-2} g_{h_1 k_1} g_{h_2 k_2} \dots g_{h_N k_N} \epsilon^{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (6)$$

В трехмерном пространстве фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса +1 (5) и две псевдоскалярные единицы определим согласно [21]:

$$e = \mathbf{1}_1 \cdot (\mathbf{2} \times \mathbf{3}), \quad \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} = e, \quad \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} = e^{-1}. \quad (7)$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (7) определяет ориентации координатных систем, т.е. для правоориентированных  $-\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} > 0$ , для левоориентированных  $-\begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} < 0$ .

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, то есть

$$\nabla_k \begin{matrix} [\pm g] \\ 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [\pm g] \\ 0 \end{matrix},$$

где  $\nabla_k$  – оператор ковариантного дифференцирования в метрике  $g_{js}$ .

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\text{w.g.t} \left( \begin{matrix} [g] \\ 1 \end{matrix} \right) = g.$$

Пользуясь псевдоскалярными единицами, можно определить абсолютные  $e$ -тензоры (тензоры перестановок, дискриминантные тензоры) следующими равенствами:

$$e_{ijk} = \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} \epsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} \epsilon^{ijk}.$$

В последних равенствах выполняется правило баланса весов [24–26]. В самом деле,

$$\text{w.g.t}(e_{ijk}) = \text{w.g.t} \left( \begin{matrix} [+1] \\ 1 \end{matrix} \epsilon_{ijk} \right) = 0, \quad \text{w.g.t}(e^{ijk}) = \text{w.g.t} \left( \begin{matrix} [-1] \\ 1 \end{matrix} \epsilon^{ijk} \right) = 0.$$

## 2. Тензорные элементы площади в $N$ -мерном пространстве

В  $N$ -мерном евклидовом пространстве выберем криволинейную систему координат  $x^k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Рассмотрим погруженное в него многообразие (поверхность)  $\Sigma$  размерности  $M$  ( $M \leq N$ ). Пусть многообразие  $\Sigma$  задано его гауссовой параметризацией  $u^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, M$ ):

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M). \quad (8)$$

В формуле (8)  $x^k$  являются внешними координатами для  $\Sigma$ , а  $u^\alpha$  – внутренними.

Тензорный элемент объема, следуя работам А. Пуанкаре [28, 29], задается согласно [30, 31] в виде

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx_1^{i_1} dx_2^{i_2} \dots dx_M^{i_M}. \quad (9)$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется альтернирование.

Несложно заметить, что формулу (9) можно представить в следующем виде [11, с. 256–257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_M}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} du_1^{\gamma_1} du_2^{\gamma_2} \dots du_M^{\gamma_M}, \quad (10)$$

или, перейдя в (10) к символам перестановок, получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(du^\gamma). \quad (11)$$

В случае  $M = N$  с учетом формулы (11) имеем

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau^{[-1]12\dots N} \epsilon^{[+1]i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (12)$$

где  $d\tau^{[-1]12\dots N}$  – естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса  $-1$ , который определяется следующим образом

$$d\tau^{[-1]12\dots N} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N. \quad (13)$$

Опустив в формуле (12) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (6), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^2 d\tau^{[-1]12\dots N} \epsilon_{[-1]i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau_{12\dots N} \epsilon_{[-1]i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (14)$$

где  $d\tau_{12\dots N}^{[+1]}$  – дублетный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса  $+1$ .

С помощью псевдоскаляров  $d\tau^{[-1]12\dots N}$ ,  $d\tau_{12\dots N}^{[+1]}$  и псевдоскалярных единиц  $1$  можно образовать абсолютный скаляр  $d\tau$ , являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = 1 d\tau^{[-1]12\dots N} = 1 d\tau_{12\dots N}^{[+1]}.$$

### 3. Тензорные элементы объема и площади поверхности в трехмерном пространстве

Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем поверхность, заданную естественной (гауссовой) параметризацией  $u^1, u^2$ . Для этого случая в формулах раздела 3 примем  $N = 3, M = 2$ . Тогда тензорный элемент площади поверхности (10) преобразуется к виду [30, 31]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2,$$

а для ковариантного тензорного элемента площади, опустив индексы у  $d\tau^{ij}$  в соответствии с правилом жонглирования индексами (14), придем к тензорному элементу площади  $d\tau_{ij}$ .

Антисимметричным абсолютным тензорам  $d\tau^{ij}$  и  $d\tau_{ij}$  сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$dA_k^{[-1]} = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \quad dA^k^{[+1]} = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} d\tau_{ij}. \quad (15)$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} dA_k &= \frac{1}{2} e_{kij} d\tau^{ij}, \\ dA^k &= \frac{1}{2} e^{kij} d\tau_{ij}. \end{aligned} \quad (16)$$

Векторные (16) и псевдовекторные (15) элементы площади поверхности связаны между собой соотношениями:

$$dA_k = \begin{matrix} [+1] & [-1] \\ 1 & \end{matrix} dA_k, \quad dA^k = \begin{matrix} [-1] & [+1] \\ 1 & \end{matrix} dA^k.$$

Пседоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами:

$$dA^{[-1]} = (\text{sgn } e) \sqrt{g^{sk} dA_s^{[-1]} dA_k^{[-1]}}, \quad (17)$$

$$dA^{[+1]} = (\text{sgn } e) \sqrt{g_{sk} dA^s dA^k}. \quad (18)$$

И тот, и другой элемент площади (17) и (18) оказались чувствительными к изменению ориентации координатной системы.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k}. \quad (19)$$

Использував введенные выше определения для элементов площади (17), (18) и (19), можно показать, что

$$\left( \begin{matrix} [\pm 1] \\ dA \end{matrix} \right)^2 = \frac{1}{2} \begin{matrix} [\pm 2] \\ 1 \end{matrix} d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

#### 4. Баланс энтропии и приведенное уравнение энергии для тел, чувствительных к зеркальным преобразованиям пространства

Рассмотрим распространение тепла в средах, термомеханические характеристики которых проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного евклидова пространства. Элементарные площади и объемы будем измерять следующими псевдоинвариантными элементами:

$$\begin{matrix} [+1] & [+1] \\ dA, & d\tau. \end{matrix} \quad (20)$$

Количество тепла  $Q$ , поступающее через фиксированную замкнутую поверхность  $\partial$  в единицу времени, с учетом (20) будет определяться соотношением

$$Q = \oint_{\partial} h^{[-1]k} n_k^{[+1]} dA, \quad (21)$$

где  $h^{[-1]k}$  – псевдовектор потока тепла,  $n_k$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial$  (абсолютный вектор [22, 32]).

Баланс весов в соотношении (21) основан на предположении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

откуда следует, что

$$\text{w.g.t} \left( h^{[-1]k} n_k^{[+1]} dA \right) = 0.$$

Важно отметить, что в этом случае вектор потока тепла оказывается псевдовектором отрицательного веса  $-1$ .

Аналогичным образом можно показать, что для плотности  $\rho$ , тензора силовых  $t^{ik}$  и моментных  $\mu_{,k}^i$  напряжений справедливы равенства

$$\text{w.g.t}(\rho) = -1, \quad \text{w.g.t}(t^{ik}) = -1, \quad \text{w.g.t}(\mu_{,k}^i) = -2. \quad (22)$$

В рамках развиваемой схемы исследования, учитывая (22), уравнение баланса энтропии принимает вид

$${}^{[-1]}_{\rho} \dot{s} = -\nabla_j {}^{[-1]} J^j + {}^{[-1]}_{\rho} \sigma + {}^{[-1]}_{\rho} \xi, \quad (23)$$

где  ${}^{[-1]} J^j$  – псевдовектор потока энтропии,  $\xi$  – неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы),  $\sigma$  – контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что  $s$ ,  $\xi$  и  $\sigma$  являются абсолютными скалярами. В дальнейшем изложении будем полагать, что  $\sigma = 0$ , т.е. отсутствует лучистое тепло.

В качестве термодинамического потенциала выберем свободную энергию Гельмгольца  $\psi$  как функцию термодинамических переменных состояния:

$$\psi = \bar{\psi}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]i}, \kappa_i, \theta).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Здесь в качестве термодинамических переменных, кроме температуры, выбраны симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa_{(kl)}^{[+1]} = \nabla_{(k} \phi_{l)}^{[+1]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l^{[+1]} + \nabla_l \phi_k^{[+1]}), \quad (24)$$

а также сопутствующие псевдовектор и вектор:

$$\varphi^{[+1]i} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ikl} \epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \kappa^{[+1][kl]}. \quad (25)$$

В термомеханике континуума абсолютная температура  $\theta$  определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (внутренней энергии  $u$ ) по энтропии  $s$ , т.е.

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]i}, \kappa_i, s)}{\partial s}, \quad \inf \theta > 0. \quad (26)$$

Из определения (26) видно, что независимо от выбора веса элементарного объема

$$\text{w.g.t}(\theta) = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что абсолютная температура является абсолютным скаляром.

Хорошо известно, что выполняются также соотношения

$$s = \bar{s}(\epsilon_{(kl)}, \kappa_{(kl)}^{[+1]}, \varphi^{[+1]i}, \kappa_i, \theta), \quad \bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}.$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} S^{[-1]} &= \frac{[-1]}{\rho} \bar{s}, & \Psi^{[-1]} &= \frac{[-1]}{\rho} \bar{\psi}, & \Xi^{[-1]} &= \frac{[-1]}{\rho} \bar{\xi}. \end{aligned} \quad (27)$$

Приведенное уравнение баланса энергии с учетом (24), (25) и (27) примет вид

$$\begin{aligned} -(\partial_t \Psi^{[-1]} + S^{[-1]} \partial_t \theta) + \frac{[-1]}{t} {}^{(ij)} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{[-2]}{\mu} {}^{(ik)} \partial \kappa_{(ik)} + \\ + \frac{[-2]}{\tau_i} \partial \varphi^{[+1]}_i + \frac{[-1]}{\mu} \partial \kappa_i - \theta^{-1} h^i \nabla_i \theta = \frac{[-1]}{\Xi} \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $\partial_t$  – производная по времени при фиксированных координатах  $x^k$ ,  $\frac{[-2]}{\tau_i}$  – ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2 \frac{[-2]}{\tau_i} = -\epsilon_{ijk} t^{[jk]}, \quad \frac{[-1]}{t} {}^{[jk]} = -\epsilon^{jki} \frac{[-2]}{\tau_i}. \quad (29)$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (29) в виде

$$2 \mu^{[-1]}_i = \epsilon^{iks} \mu^{[-2]}_{[ks]}, \quad \mu^{[-2]}_{[js]} = \epsilon_{jsi} \mu^{[-1]}_i.$$

В приближении малых деформаций мы считаем  $\dot{a} = \partial_t a$ .

### 5. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения зеркально-чувствительного микрополярного термоупругого континуума

Для необратимых термодинамических процессов при условии выполнения фундаментального термодинамического неравенства определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{[-1]}{t} {}^{(ij)} &= \frac{\partial \Psi^{[-1]}}{\partial \epsilon_{(ij)}}, & \frac{[-2]}{\mu} {}^{(ik)} &= \frac{\partial \Psi^{[-1]}}{\partial \kappa_{(ik)}^{[+1]}}, \\ \frac{[-2]}{\tau_i} &= \frac{\partial \Psi^{[-1]}}{\partial \varphi^{[+1]}_i}, & \mu^{[-1]}_i &= \frac{\partial \Psi^{[-1]}}{\partial \kappa_i}, \\ S^{[-1]} &= -\frac{\partial \Psi^{[-1]}}{\partial \theta}, & J^{[-1]}_j &= \frac{[-1]}{J} {}^j (\nabla_k \ln \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо уравнение

$$\frac{[-1]}{\Xi} = -\theta^{-2} h^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} \frac{[-1]}{J} {}^j \nabla_j \theta = -\frac{[-1]}{J} {}^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta. \quad (31)$$

На основании уравнения баланса энтропии (23) в силу (30), (31) и при условии, что

$$\theta \frac{[-1]}{J} {}^j = \frac{[-1]}{h} {}^j,$$

получим уравнение теплопроводности (справедливое также и в геометрически нелинейном случае)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \kappa_{(ik)}^{[+1]}} \partial \kappa_{(ik)}^{[+1]} + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \varphi_i^{[+1]}} \partial \varphi_i^{[+1]} + \\ + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \kappa_i} \partial \kappa_i + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \theta} \partial \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^{[-1]j}. \end{aligned} \quad (32)$$

Линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию для анизотропного микрополярного термоупругого континуума можно принять в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = 2 \Psi = \frac{E^{[-1]}(ik)(lm)}{I} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{[-3]}(ik)(lm)}{II} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \\ + \frac{E^{[-2]}(ik)(lm)}{III} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \frac{E^{[-2]}(ik)l}{IV} \epsilon_{(ik)} \varphi_l^{[+1]} + \frac{E^{[-3]}(ik)l}{V} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \varphi_l^{[+1]} + \\ + \frac{E^{[-1]}(ik)l}{VI} \epsilon_{(ik)} \kappa_l + \frac{E^{[-2]}(ik)l}{VII} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \kappa_l + \frac{E^{[-3]}(ik)}{VIII} \varphi_i^{[+1]} \varphi_k^{[+1]} + \frac{E^{[-1]}(ik)}{IX} \kappa_i \kappa_k + \\ + \frac{E^{[-2]}(ik)}{X} \varphi_i \kappa_k + \frac{E^{[-1]}(ik)}{XI} \epsilon_{(ik)} \theta + \frac{E^{[-1]}(ik)}{XII} \kappa_{(ik)} \theta + \\ + \frac{E^{[-1]}(ik)}{XIII} \varphi_i \theta + \frac{E^{[-1]}(ik)}{XIV} \kappa_i \theta + \frac{E^{[-1]}}{XV} \theta^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $\frac{E^{[-1]}(ik)(lm)}{I}$ ,  $\frac{E^{[-3]}(ik)(lm)}{II}$ ,  $\frac{E^{[-2]}(ik)(lm)}{III}$ ,  $\frac{E^{[-2]}(ik)l}{IV}$ ,  $\frac{E^{[-3]}(ik)l}{V}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)l}{VI}$ ,  $\frac{E^{[-2]}(ik)l}{VII}$ ,  $\frac{E^{[-3]}(ik)}{VIII}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{IX}$ ,  $\frac{E^{[-2]}(ik)}{X}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XI}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XII}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XIII}$ ,  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XIV}$ ,  $\frac{E^{[-1]}}{XV}$  – определяющие тензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума,  $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$  – малый температурный инкремент (считается малой первого порядка),  $\theta_0$  – референциальная температура.

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$h^{[-1]k} = -\frac{E^{[-1]}(ik)}{XVI} \nabla_i \theta, \quad (34)$$

где  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XVI}$  – псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что в (34)

псевдотензор коэффициентов теплопроводности  $\frac{E^{[-1]}(ik)}{XVI}$ , вообще говоря, проявляет чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (32) с учетом (33) и (34) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{E^{[-1]}(ij)}{XI} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{1}{2} \frac{E^{[-2]}(ij)}{XII} \partial \kappa_{(ij)}^{[+1]} + \frac{1}{2} \frac{E^{[-2]}(ij)}{XIII} \partial \varphi_i^{[+1]} + \\ + \frac{1}{2} \frac{E^{[-1]}(ij)}{XIV} \partial \kappa_i + \theta_0^{-1} C \partial \theta = \theta_0^{-1} \frac{E^{[-1]}(j)s}{XVI} \nabla_j \nabla_s \theta, \end{aligned}$$

где  $C$  – теплоемкость в расчете на единицу дублетного элемента объема.

Отметим, что для полуизотропного тела псевдотензор коэффициентов теплопроводности является шаровым, т. е.

$$\underset{\text{XVI}}{E}^{j_s} = \lambda \overset{[-1]}{g}^{j_s}.$$

Коэффициент теплопроводности  $\lambda$  является псевдоскаляром отрицательного веса  $-1$ , чувствительным к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. То же самое касается и теплоемкости  $\overset{[-1]}{C}$ .

### Заключение и выводы

В работе рассмотрен вариант теории теплопроводности микрополярной упругой среды, в рамках которого вектор потока тепла имеет вес  $-1$ . С этим псевдовектором ассоциируются псевдоинварианты, чувствительные к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

- A. Продемонстрирована возможность приписать вектору теплового потока псевдотензорный вес  $-1$ , что делает его алгебраически подобным псевдовектору микроповорота.
- B. Введены псевдоскалярный элемент объема и псевдовекторный элемент площади, обеспечивающие построение псевдовектора потока тепла веса  $-1$ . С этой же целью спинорные перемещения представлены контравариантным псевдовектором веса  $+1$ .
- C. Предложена псевдоквадратичная форма для свободной энергии Гельмгольца, включающая XV определяющих псевдотензоров.
- D. Получено нелинейное уравнение теплопроводности. Выполнена его линейризация с учетом линейного закона теплопроводности Фурье. Показано, что коэффициент теплопроводности трактуется как псевдоскаляр веса  $-1$ , чувствительный к преобразованиям зеркального отражения и инверсиям трехмерного пространства. То же самое касается и теплоемкости.

**Благодарности.** Авторы благодарят проф. С. А. Лурье за полезные дискуссии по широкому спектру проблем механики деформируемого твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No 23-21-00262).

### Литература

1. *Lakes R.* Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // *Int. J. Mech. Sci.* 2001. V. 43, No 7. P. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. *Mackay T.G., Lakhtakia A.* Negatively refracting chiral metamaterials: A review // *SPIE Rev.* 2010. V. 1, No 1. Art. 018003. <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. *Tomar S.K., Khurana A.* Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // *Appl. Math. Modell.* 2013. V. 37, No 22. P. 9409–9418. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.

4. *Besdo D.* Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums // *Acta Mech.* 1974. V. 20, No 1. P. 105–131. <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
5. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
7. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
8. *Truesdell C., Toupin R.* The classical field theories // Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. by S. Flügge. Book Ser.: Encyclopedia of Physics. V. III/1. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–902. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2).
9. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
10. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
11. *Synge J.L., Schild A.* Tensor Calculus. New York: Dover Publ., 1978. 334 p.
12. *Das A.J.* Tensors. The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics. Berlin: Springer Sci. & Bus. Media, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
13. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.
14. *Veblen O., Thomas T.Y.* Extensions of relative tensors // *Trans. Am. Math. Soc.* 1924. V. 26, No 3. P. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
15. *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во ин. лит., 1948. 139 с.
16. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. и пластичн.* 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
17. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
18. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2020. № 4 (46). С. 16–24. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.
19. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation // *Mech. Solids.* 2023. V. 58, No 3. P. 802–813. <http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
20. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 6. P. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
21. *Radaev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // *Mech. Solids.* 2023. V. 58, No 5. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
22. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // *Пробл. прочн. и пластичн.* 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.

23. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations // *Mech. Solids*. 2023. V. 58, No 1. P. 153–160.  
<http://dx.doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
24. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 1 (51). С. 17–26.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
25. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 2 (52). С. 106–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
26. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 2 (52). С. 118–127.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
27. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
28. *Poincaré H.* Sur les résidus des intégrales doubles // *Acta Math*. 1887. Т. 6. P. 321–380.
29. *Poincaré H.* Analysis situs // *J. École Polytech*. 1895. Т. 2, No 1. P. 1–123.
30. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mech. Solids*. 2022. V. 57, No 2. P. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. *Мурашкин Е.В.* О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2021. № 1 (47). С. 114–121. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.

Поступила в редакцию 28.09.2023

Принята к публикации 15.11.2023

---

**Мурашкин Евгений Валерьевич**, к.ф.-м.н., с.н.с. Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН  
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия  
E-mail: [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru)

**Радаев Юрий Николаевич**, д.ф.-м.н., проф., в.н.с. Института проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН  
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия  
E-mail: [radaev@ipmnet.ru](mailto:radaev@ipmnet.ru)

---

---

ISSN 2541–7746 (Print)  
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403

---

---

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403

**Heat Conduction of Micropolar Solids  
Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space**

*E.V. Murashkin\**, *Y.N. Radayev\*\**

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics,  
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia  
E-mail: \*murashkin@ipmnet.ru, \*\*radayev@ipmnet.ru*

Received September 28, 2023; Accepted November 15, 2023

**Abstract**

This article considers a variant of the heat conduction theory of thermal conductivity, in which the heat flux pseudovector has a weight of  $-1$ . The pseudoinvariants associated to the heat flux pseudovector are sensitive to mirror reflections and inversions of three-dimensional space. The primary purpose of the study was to find a heat flux vector that is algebraically equivalent to the microrotation pseudovector and to measure elementary volumes and areas using pseudoinvariants that are sensitive to mirror reflections. To represent spinor displacements, a contravariant microrotation pseudovector with a weight of  $+1$  was selected. Thus, the heat flux and mass density were expressed as odd-weight pseudotensors. The Helmholtz free energy per unit doublet pseudoinvariant volume was employed as the thermodynamic state potential of the following functional arguments: absolute temperature, symmetric parts, and accompanying vectors for the linear asymmetric strain tensor and the wryness pseudotensor. The results obtained show that the thermal conductivity coefficient and heat capacity of elastic micropolar solids are pseudoscalars of odd weight, indicating their sensitivity to mirror reflections.

**Keywords:** heat conduction, micropolarity, volume tensor element, heat flux pseudotensor, mirror reflection, semi-isotropic solid

**Acknowledgments.** We thank Professor S.A. Lurie for insightful discussions on a wide range of topics related to the mechanics of deformable solids. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262).

**References**

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T.G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: A review. *SPIE Rev.*, 2010, vol. 1, no. 1, art. 018003. <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S.K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium. *Appl. Math. Modell.*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9409–9418. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.

4. Besdo D. Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. <https://doi.org/10.1007/BF01374965>. (In German)
5. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Berlin, Springer, 1972. 285 p.
6. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986. 383 p.
7. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
8. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. In: Flügge S. (Ed.) *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. Book Ser.: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2).
9. Schouten J.A. *Tenzornyi analiz dlya fizikov* [Tensor Analysis for Physicists]. Moscow, Nauka, 1965. 456 p. (In Russian)
10. Sokolnikoff I.S. *Tenzornyi analiz. Teoriya i primeneniya v geometrii i v mekhanike sploshnykh sred* [Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua]. Moscow, Nauka, 1971. 376 p. (In Russian)
11. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978. 334 p.
12. Das A.J. *Tensors. The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin, Springer Sci. & Bus. Media, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
13. Gurevich G.B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov* [Foundations of the Theory of Algebraic Invariants]. Moscow, Leningrad, OGIZ, GITTL, 1948. 408 p. (In Russian)
14. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
15. Veblen O. *Invarianty differentsial'nykh kvadratichnykh form* [Invariants of Quadratic Differential Forms]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1948. 139 p. (In Russian)
16. Radayev Y.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media. *Probl. Prochn. Plast.*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>. (In Russian)
17. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a micropolar theory of growing solids. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
18. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On the theory of linear micropolar hemitropic media. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2020, no. 4(46), pp. 16–24. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>. (In Russian)
19. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. <http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
20. Murashkin E.V., Radaev Y.N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
21. Radaev Y.N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
22. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Schouten's force stress tensor and affiner densities of positive weight. *Probl. Prochn. Plast.*, 2022, vol. 84, no. 4, pp. 545–558. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>. (In Russian)

23. Murashkin E.V., Radayev Y.N. The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 153–160.  
<http://dx.doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
24. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 1(51), pp. 17–26.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
25. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 2(52), pp. 106–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>. (In Russian)
26. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Applications to continuum mechanics. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 2(52), pp. 118–127.  
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
27. Rosenfeld B.A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966. 648 p. (In Russian)
28. Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles. *Acta Math.*, 1887, t. 6, pp. 321–380. (In French)
29. Poincaré H. Analysis situs. *J. École Polytech.*, 1895, t. 2, no. 1, pp. 1–123. (In French)
30. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786.  
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Murashkin E.V., Radaev Y.N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. Murashkin E.V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3D materials. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2021, no. 1(47), pp. 114–121. (In Russian)

---

**Для цитирования:** Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 389–403.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.

**For citation:** Murashkin E.V., Radayev Y.N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403.  
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 536.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.404-414

## ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ И ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*А. А. Орехов, Л. Н. Рабинский, Г. В. Федотенков*

*Московский авиационный институт, г. Москва, 125993, Россия*

### Аннотация

Приведены математические постановки задач нестационарной теплопроводности, соответствующие моделям классической теплопроводности на основе закона Фурье, обобщённой теплопроводности на основе закона Каттанео–Вернотта–Лыкова (модель Максвелла–Каттанео) и обобщённым моделям Грина–Нагди II-го и III-го типов. С использованием интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и Лапласа по времени построены фундаментальные решения уравнений классической и обобщённых моделей теплопроводности Максвелла–Каттанео, Грина–Нагди II-го типа и Грина–Нагди III-го типа. Представлены и проанализированы графические результаты. Показаны отличия рассмотренных моделей теплопроводности и даны рекомендации по их применению в практических расчётах.

**Ключевые слова:** классическая теплопроводность, теория Максвелла–Каттанео, закон Каттанео–Вернотта–Лыкова, теория Грина–Нагди, обобщённая теплопроводность, дифференциальные уравнения, интегральные преобразования

### Введение

Классическая теория теплопроводности предполагает теоретически необоснованную неограниченную скорость распространения тепла. Надо отметить, что хотя указанное следствие из теории и не реализуется на практике, классическая теплопроводность достаточно точно описывает процессы, время протекания которых достаточно велико. Например, в квазистатических и статических задачах для тел достаточно больших размеров с помощью классической теории решение можно получить с достаточной степенью точности.

Чтобы снять противоречие, связанное с бесконечностью скорости распространения тепла, были сформулированы неклассические теории теплопроводности, называемые также обобщёнными моделями теплопроводности. Одними из наиболее часто применимых обобщённых теорий теплопроводности являются теории Максвелла–Каттанео и Грина–Нагди. Эти теории играют важную роль практически во всех текущих исследованиях в области обобщённой теплопроводности.

Обобщённая модель теплопроводности Максвелла–Каттанео основана на использовании закона теплопроводности Каттанео–Вернотта–Лыкова. Она учитывает время релаксации теплового потока. Вследствие этого соответствующее уравнение имеет гиперболический тип в отличие от уравнения классической теплопроводности, являющегося уравнением параболического типа.

Также широкое распространение получила модель теплопроводности Грина–Нагди. Существуют три альтернативных теории, которые Грин и Нагди назвали теориями I-го, II-го и III-го типов. В основе теории Грина–Нагди лежит закон Фурье, в правой части записи которого имеется градиент температурного смещения, пропорциональный свободному пробегу частиц. Это слагаемое вносит ощутимый вклад в температуру на масштабах, сопоставимых с длиной свободного пробега молекул.

Следует отметить, что варианты подобных обобщённых теорий, их понимание и объяснение в последние годы вызывают огромный интерес. В настоящей статье построены фундаментальные решения уравнений обобщённых теорий теплопроводности Максвелла–Каттанео и Грина–Нагди. Проведён анализ полученных решений в сравнении с решением классического уравнения теплопроводности.

## 1. Классическая и обобщенная модели теплопроводности

**1.1. Общее уравнение теплопроводности.** Для вывода линеаризованного уравнения теплопроводности можно воспользоваться вторым законом термодинамики, математическим выражением которого является уравнение баланса энтропии [1]

$$\rho T_0 \dot{S} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q^{(e)}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $T_0$  – начальная температура,  $S$  – удельная энтропия,  $\mathbf{q} = q^i \mathbf{e}_i$  – вектор объемной плотности теплового потока,  $q^{(e)}$  – массовая плотность объёмных источников тепла. Здесь и далее точка над функцией означает её производную по времени.

К уравнению (1) следует добавить физический закон для энтропии [1]

$$S = \frac{c_\varepsilon}{T_0} \vartheta, \quad (2)$$

где  $c_\varepsilon$  – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации,  $\vartheta = T - T_0$  – приращение температуры.

Подставив (2) в (1), придем к общему уравнению теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho q^{(e)}. \quad (3)$$

Из этого уравнения вытекают как классическая, так и различные обобщённые теории. Различия между ними состоят в разных законах теплопроводности, связывающих приращение температуры  $\vartheta$  с плотностью теплового потока  $\mathbf{q}$ .

**1.2. Классическая модель теплопроводности.** В этом случае связь между  $\vartheta$  и  $\mathbf{q}$  выражается классическим законом теплопроводности Фурье, который в случае изотропной среды имеет вид [1, 2]

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad} \vartheta. \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), придем к классическому уравнению теплопроводности параболического типа

$$\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} = \kappa \Delta \vartheta + \rho q^{(e)}, \quad (5)$$

где  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  – оператор Лапласа.

**1.3. Модель теплопроводности Максвелла–Каттанео.** В этой модели изменение температуры и плотность теплового потока связывает закон Каттанео–Вернотта–Лыкова [3–5]

$$\mathbf{q} + t_R \dot{\mathbf{q}} = -\kappa \text{grad } \vartheta. \quad (6)$$

Здесь  $t_R$  – время релаксации тепловых потоков, т. е. период времени, за который амплитудные значения возмущений в выведенных из состояния равновесия физических систем уменьшатся в  $e$  раз ( $e$  – основание натурального логарифма).

Применим к (6) оператор  $\text{div}$ :

$$-\text{div } \mathbf{q} = t_R \text{div } \dot{\mathbf{q}} + \kappa \Delta \vartheta. \quad (7)$$

Подставим (7) в (3) и выразим оттуда  $-\text{div } \dot{\mathbf{q}}$ :

$$-\text{div } \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta - \rho q^{(e)}}{t_R}. \quad (8)$$

Продифференцируем (3) по времени и подставим (8) в полученное уравнение. Придем к уравнению теплопроводности Максвелла–Каттанео

$$\rho c_\varepsilon (\dot{\vartheta} + t_R \ddot{\vartheta}) = \kappa \Delta \vartheta + \rho (q^{(e)} + t_R \dot{q}^{(e)}). \quad (9)$$

Уравнение (9) имеет гиперболический тип. Отметим, что получим классическое уравнение теплопроводности (5), положив в (9)  $t_R = 0$ .

**1.4. Модели теплопроводности Грина–Нагди.** Существуют три типа модели теплопроводности Грина–Нагди [6–8]. Модель первого типа по существу совпадает с классической моделью теплопроводности, в основе которой лежит закон Фурье (4). Модели второго и третьего типа сильно отличаются, поскольку они основаны на дополнительном параметре теплового состояния, названным "тепловое смещение"  $\alpha(\mathbf{x}, t)$ , которое определяется так [6–8]:

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^t \vartheta d\xi, \quad \alpha_0 = \alpha|_{t=0}. \quad (10)$$

Модель Грина–Нагди III-го типа характеризуется следующим законом теплопроводности

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad } \vartheta - \tilde{\kappa} \text{grad } \alpha, \quad (11)$$

где  $\tilde{\kappa}$  – скорость теплопроводности. Если в (11) положить  $\tilde{\kappa} = 0$ , то придём к классической модели теплопроводности Фурье (модель Грина–Нагди I-го типа). Если же в (11) положить  $\kappa = 0$ , то получим модель теплопроводности Грина–Нагди II-го типа. Отметим, что из (10) следует

$$\dot{\alpha} = \vartheta. \quad (12)$$

Продифференцируем (11) по времени и применим к полученному равенству оператор  $\text{div}$ . С учётом (12) получим

$$\text{div } \dot{\mathbf{q}} = -\kappa \Delta \dot{\vartheta} - \tilde{\kappa} \Delta \vartheta. \quad (13)$$

Подставив (13) в уравнение (3), предварительно продифференцированное по времени, придём к уравнению теплопроводности Грина–Нагди III-го типа

$$\rho c_\varepsilon \ddot{\vartheta} = \kappa \Delta \dot{\vartheta} + \tilde{\kappa} \Delta \vartheta + \rho \dot{q}^{(e)}. \quad (14)$$

Отметим, что если в (14) положить  $\tilde{\kappa} = 0$  и проинтегрировать полученное уравнение по времени, то получим классическое уравнение теплопроводности (5). Если же в (14) положить  $\kappa = 0$ , то придём к уравнению теплопроводности Грина–Нагди II-го типа

$$\rho c_\varepsilon \ddot{\vartheta} = \tilde{\kappa} \Delta \vartheta + \rho \dot{q}^{(e)}. \quad (15)$$

Отметим, что уравнения (14) и (15) имеют гиперболический тип, а также, что уравнение нестационарной теплопроводности теории Грина–Нагди II-го типа – единственное из всех уравнений, имеющее вид классического волнового уравнения. При этом величина  $c_T^2 = \tilde{\kappa}/\rho c_\varepsilon$  имеет размерность квадрата скорости:  $[c_T^2] = [l^2/c^2]$ .

На основе представленных выше моделей рассмотрим нестационарные процессы распространения тепла в неограниченной теплопроводной среде. Введём декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$ . В дальнейшем всем функциям, переменным и параметрам придадим безразмерную форму. Для этого используем систему безразмерных величин (размерные величины обозначены символом «\*»):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad z = \frac{z^*}{L}, \quad t = \frac{c_T t^*}{L}, \quad c_T^2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho c_\varepsilon}, \\ \vartheta &= \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_T L}, \quad q^{(e)} = \frac{q^{*(e)} L}{c_\varepsilon c_T T_0}, \quad t_R = \frac{c_T t_R^*}{L}. \end{aligned} \quad (16)$$

где  $L$  – характерная длина.

В безразмерных величинах (16) уравнения представленных выше теорий теплопроводности примут следующий вид.

Классическая теория

$$\dot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta = q^{(e)}. \quad (17)$$

Теория Максвелла–Каттанео

$$\dot{\vartheta} + t_R \ddot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta = q^{(e)} + t_R \dot{q}^{(e)}. \quad (18)$$

Теория Грина–Нагди III-го типа

$$\ddot{\vartheta} - \kappa \Delta \dot{\vartheta} - \Delta \vartheta = \dot{q}^{(e)}. \quad (19)$$

Теория Грина–Нагди II-го типа

$$\ddot{\vartheta} - \Delta \vartheta = \dot{q}^{(e)}. \quad (20)$$

В случае неограниченной среды положим, что решения уравнений (17)–(20) должны удовлетворять условию ограниченности на бесконечности

$$\vartheta|_{r \rightarrow \infty} = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Не умаляя общности, положим, что начальные условия являются нулевыми

$$\vartheta|_{t=0} = \dot{\vartheta}|_{t=0} = 0.$$

В противном случае задачу всегда можно свести к нулевым начальным условиям с помощью элементарной замены искомой функции

$$\vartheta = \tilde{\vartheta} + f(x, y, z) + tg(x, y, z), \quad f(x, y, z) = \vartheta|_{t=0}, \quad g(x, y, z) = \dot{\vartheta}|_{t=0}.$$

Отметим, что в случае классического уравнения теплопроводности (17) необходимо только одно начальное условие  $\vartheta|_{t=0} = 0$ .

## 2. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенных теорий теплопроводности

При исследовании нестационарных процессов в теплопроводной среде удобно использовать фундаментальные решения (функции влияния) соответствующих начально-краевых задач. Имея функции влияния, можно построить решения любых задач из заданного класса в квадратурах. Фундаментальные решения – это обобщённые функции, которые являются ограниченными на бесконечности решениями уравнений (17)–(20) с нулевыми начальными условиями и специальными правыми частями вида  $\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)$ , где  $\delta$  – дельта-функция Дирака [9–12]. Для решения этих задач используем интегральные преобразования Фурье по координатам и Лапласа по времени [9–12]:

$$f^{FL}(q_1, q_2, q_3, s) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y, z, t) e^{i(q_1x + q_2y + q_3z) + st} dx dy dz dt,$$

где  $q_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , – параметры преобразований Фурье,  $s$  – параметр преобразования Лапласа, верхний знак « $F$ » у функции означает её преобразование по Фурье, а « $L$ » – преобразование по Лапласу.

Далее воспользуемся следующими известными свойствами интегральных преобразований и дельта-функции Дирака [9–12]:

$$[\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t)]^{FL} = 1, (\Delta f)^F = -q^2 f^F, \left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\right)^L = s^n f^L, \quad (21)$$

где  $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ . Третья формула в (21) записана с учётом нулевых начальных условий.

**2.1. Фундаментальное решение классического уравнения теплопроводности.** Задача о фундаментальном решении  $G_1(x, y, z, t)$  для уравнения классической теплопроводности имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 - \kappa \Delta G_1 &= \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t); \\ G_1|_{t=0} &= 0, \quad G_1|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \end{aligned} \quad (22)$$

Применив интегральные преобразования Фурье и Лапласа к (22), с учётом (21) найдем

$$G_1^{FL} = \frac{1}{s + \kappa q^2}. \quad (23)$$

Оригинал функции (23) определяется последовательным обращением интегральных преобразований Лапласа и Фурье. В результате получим фундаментальное решение классического уравнения теплопроводности

$$G_1(r, t) = \frac{e^{-r^2/4\kappa t}}{8(\kappa\pi t)^{3/2}}.$$

**2.2. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео.** Поставим задачу о фундаментальном решении  $G_2(x, y, z, t)$  для уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео

$$\begin{aligned} \dot{G}_2 + t_R \ddot{G}_2 - \kappa \Delta G_2 &= \delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t); \\ G_2|_{t=0} = \dot{G}_2|_{t=0} &= 0, \quad G_2|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \end{aligned} \quad (24)$$

Применив к (24) интегральные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$G_2^{FL} = \frac{1}{s + t_R s^2 + \kappa q^2}. \quad (25)$$

Последовательно обратив в (25) сначала преобразование Фурье, а затем преобразование Лапласа, получим

$$G_2(r, t) = \frac{e^{-\alpha t}}{4\pi\kappa r} \left[ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2 - \beta^2}} I_1 \left( \alpha\sqrt{t^2 - \beta^2} \right) H(t - \beta) + \delta(t - \beta) \right],$$

$$\alpha = 1/2t_R, \quad \beta = r\sqrt{t_R/\kappa},$$

где  $I_1(x)$  – модифицированная функция Бесселя первого рода,  $H(x)$  – функция Хевисайда.

**2.3. Фундаментальные решения уравнений теплопроводности Грина–Нагди II-го и III-го типов.** Рассмотрим уравнение (20) теории теплопроводности Грина–Нагди II-го типа. Обозначим соответствующее фундаментальное решение  $G_{32}$  и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{32} - \Delta G_{32} &= \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t); \\ G_{32}|_{t=0} = \dot{G}_{32}|_{t=0} &= 0, \quad G_{32}|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение (26), как и ранее, построим с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа. В пространстве изображений найдем

$$G_{32}^{FL} = \frac{1}{s^2 + q^2}. \quad (27)$$

Оригинал (27) не составляет труда построить аналитически с помощью последовательного обращения сначала преобразования Фурье

$$G_{32}^L = \frac{e^{-sr}}{4\pi r},$$

а затем преобразования Лапласа

$$G_{32}(x, y, z, \tau) = \frac{\delta(\tau - r)}{4\pi r}.$$

Перейдём теперь к уравнению теории Грина–Нагди III-го типа. Соответствующее фундаментальное решение обозначим  $G_{33}$ . Оно является решением следующей задачи

$$\begin{aligned} \ddot{G}_{33} - \kappa\Delta\dot{G}_{33} - \Delta G_{33} &= \delta(x) \delta(y) \delta(z) \delta(t); \\ G_{33}|_{t=0} = \dot{G}_{33}|_{t=0} &= 0, \quad G_{33}|_{r \rightarrow \infty} = O(1). \end{aligned} \quad (28)$$

Применив к (28) интегральные преобразования Фурье по координатам и Лапласа по времени, найдем

$$G_{33}^{FL} = \frac{1}{s^2 + \kappa s q^2 + q^2}. \quad (29)$$

В этом случае построение оригиналов аналитическими способами затруднено. Поэтому применим численно-аналитический способ обращения. Построим аналитически оригинал (29) по Лапласу:

$$G_{33}^F = \frac{2e^{-t\frac{\kappa q^2}{2}}}{\sqrt{q^2(q^2\kappa^2 - 4)}} \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{q^2(q^2\kappa^2 - 4)}}{2} t \right).$$

Оригинал по Фурье вычислим аналитически с использованием формулы обратного преобразования и перехода в пространстве параметров преобразования к сферическим координатам:

$$G_{33}(r, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{33}^F(q, t) e^{-i(q_1 x + q_2 y + q_3 z)} dq_1 dq_2 dq_3,$$

$$q_1 = q \cos \alpha \sin \beta, \quad q_2 = q \sin \alpha \sin \beta, \quad q_3 = q \cos \beta, \quad \alpha \in (-\pi, \pi], \quad \beta \in [0, \pi],$$

$$q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2},$$

$$G_{33}(r, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{\infty} q^2 G_{33}^F(q, t) H_2(q, x, y) dq,$$

$$H_2(q, x, y) = \int_0^{\pi} H_1(q \sin \beta, x, y) e^{-iq_3 z \cos \beta} \sin \beta d\beta,$$

$$H_1(q, x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iq(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} d\alpha = 2\pi J_0\left(q\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

где  $J_0(x)$  – функция Бесселя I-го рода.

С помощью замены переменной  $u = \cos \beta$  интеграл  $H_2(q, x, y)$  вычислим аналитически:

$$H_2(q, x, y) = \frac{4\pi}{qr} \sin(qr).$$

Окончательно для оригинала  $G_{33}(r, t)$  получим следующую формулу

$$G_{33}(r, t) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{\infty} q G_{33}^F(q, t) \sin(qr) dq. \quad (30)$$

Интеграл в (30) вычислим приближённо, путём замены несобственного интеграла определённым:

$$G_{33}(r, t) \approx \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^Q q G_{33}^F(q, t) \sin(qr) dq, \quad Q \gg 1. \quad (31)$$

### 3. Анализ результатов

Рассмотрим теплопроводную среду, заполненную дюралюминием с размерными параметрами

$$\rho = 2780 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad T_0 = 300 \text{ К}, \quad \kappa^* = 134 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \Lambda^* = 4.94 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}},$$

$$c_\varepsilon = 920 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}}, \quad t_R^* = 10^{-5} \text{ с}, \quad \tilde{\kappa}^* = 5 \cdot 10^5 \frac{\text{г}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}, \quad L = 1 \text{ м},$$

чему согласно (16) соответствуют следующие безразмерные величины:

$$\kappa = 0.442, \quad tR = 4.42 \cdot 10^{-6}.$$

На рис. 1 представлено сравнение распределений фундаментальных решений  $G_1(r, t)$  и  $G_2(r, t)$  по радиусу  $r$  в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют классической модели теплопроводности (функция  $G_1$ ), а пунктирные – модели теплопроводности Максвелла–Каттанео (функция  $G_2$ ). Видно, что отличие в результатах проявляется только на начальном временном промежутке длительностью порядка  $20t_R$ . В дальнейшем решения практически совпадают.

На рис. 2 показана оценка практической сходимости приближенной формулы (31) в зависимости от значения верхнего предела интегрирования  $Q$ . Сплошная

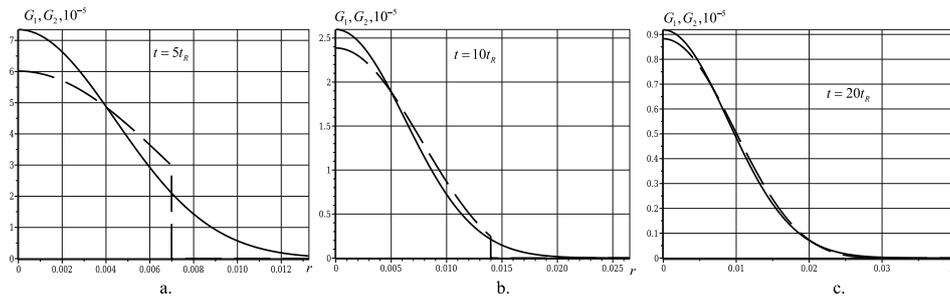


Рис. 1. Фундаментальные решения уравнений классической теории и теории Максвелла–Каттанео

кривая соответствует функции  $G_{33}(r, 4)$ , построенной при  $Q = 10$ , пунктирная – при  $Q = 20$ , штрихпунктирная – при  $Q = 30$ . Видно, что все три кривые практически совпали, следовательно, для получения результата с достаточной степенью точности в данном случае можно ограничиться значением  $Q = 20$ .

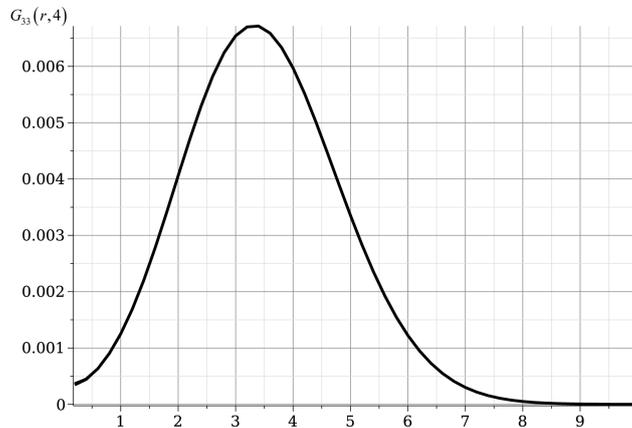


Рис. 2. Влияние параметра  $Q$

На рис. 3 представлено сравнение распределений фундаментальных решений  $G_1(r, t)$  и  $G_{33}(r, t)$  по радиусу  $r$  в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют классической модели теплопроводности (функция  $G_1$ ), а пунктирные – модели теплопроводности Грина–Нагди III-го типа (функция  $G_{33}$ ).

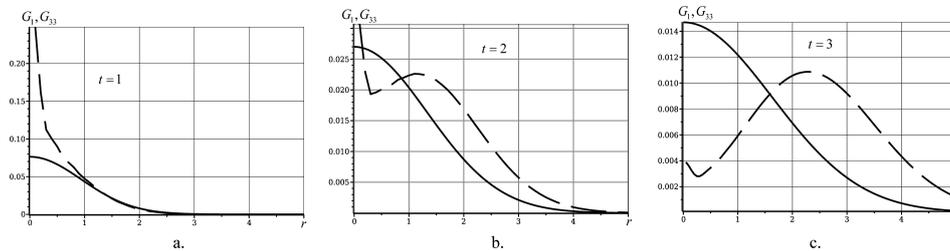


Рис. 3. Фундаментальные решения уравнений классической теории и теории Грина–Нагди III-го типа

### Заключение

Построены фундаментальные решения уравнений для трёх вариантов обобщённой теории теплопроводности: теории Максвелла–Каттанео, Грина–Нагди II типа и Грина–Нагди III-го типа. Показано, что основные отличия в результатах проявляются на начальном временном этапе, длительность которого составляет порядка двадцати–тридцати времен релаксации. На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что обобщённые теории следует привлекать в задачах о кратковременных интенсивных источниках тепла, например, при импульсном лазерном нагреве. Если рассматриваются задачи о длительном, плавно изменяющемся нагреве, то можно ограничиться классической теорией теплопроводности. Что касается теории Грина–Нагди, то на основе построенных решений однозначного определения относительно её применимости в практических задачах дать не удаётся. Для этого требуется проведение дополнительных исследований.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках Государственного задания (FSFF-2023-0004).

### Литература

1. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Математические основы термоупругости: учебное пособие. М.: МАИ, 2021. 92 с.
2. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Термоупругость. Одномерные нестационарные задачи: учебное пособие. М.: МАИ, 2023. 95 с.
3. *Cataneo C.* A form of heat conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1958. V. 247. P. 431–433.
4. *Vernotte P.* Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1958. T. 246, No 22. P. 3154–3155.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. *Green A.E., Naghdi P.M.* A re-examination of the basic postulates of thermomechanics // *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 1991. V. 432, No 1885. P. 171–194. <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012>.
7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // *J. Elasticity.* 1993. V. 31. P. 189–208. <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
8. *Green A.E., Naghdi P.M.* On undamped heat waves in an elastic solid // *J. Therm. Stresses.* 1992. V. 15, No 2. P. 253–264. <https://doi.org/10.1080/01495739208946136>.
9. *Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotkov G.* Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution // *Symmetry.* 2022. V. 14, No 4. Art. 650. <https://doi.org/10.3390/sym14040650>.
10. *Fedotkov G., Rabinskiy L., Lurie S.* Conductive heat transfer in materials under intense heat flows // *Symmetry.* 2022. V. 14, No 9. Art. 1950. <https://doi.org/10.3390/sym14091950>.
11. *Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotkov G.V., Hein T.Z.* Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 60, No 8. P. 1912–1919. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080229>.
12. *Dobryanskiy V.N., Fedotkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N.* Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 63, No 7. P. 1832–1841. <https://doi.org/10.1134/S1995080222100079>.

Поступила в редакцию 10.10.2023  
Принята к публикации 20.11.2023

**Орехов Александр Александрович**, к.т.н., доцент кафедры «Проектирование сложных технических систем» Московского авиационного института

Московский авиационный институт  
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: *orekhovaa2@mail.ru*

**Рабинский Лев Наумович**, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения» Московского авиационного института

Московский авиационный институт  
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: *rabinskiy@mail.ru*

**Федотенков Григорий Валерьевич**, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института

Московский авиационный институт  
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: *greghome@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)  
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)  
2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.404-414

**Fundamental Solutions of the Equations of  
Classical and Generalized Heat Conduction Models**

*A.A. Orekhov\**, *L.N. Rabinskiy\*\**, *G.V. Fedotenkov\*\*\**

*Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993 Russia*  
E-mail: *\*orekhovaa2@mail.ru*, *\*\*rabinskiy@mail.ru*, *\*\*\*greghome@mail.ru*

Received October 10, 2023; Accepted November 20, 2023

**Abstract**

This article presents the mathematical formulations of transient heat conduction problems corresponding to the models of classical heat conduction using the Fourier law and generalized heat conduction based on the Cattaneo–Vernotta–Lykov law (Maxwell–Cattaneo model), as well as the generalized Green–Nagdy type II and III models. The Fourier transforms in spatial coordinates and the Laplace transforms in time were used to obtain the fundamental solutions of the equations of the Maxwell–Cattaneo and Green–Nagdy type II and III models of classical and generalized heat conduction. The results were displayed graphically and analyzed. Differences between the considered heat conduction models were shown, and suggestions for their practical application were given.

**Keywords:** classical heat conduction, Maxwell–Cattaneo theory, Cattaneo–Vernott–Lykov law, Green–Nagdy theory, generalized heat conduction, differential equations, integral transformations

**Acknowledgments.** This study was supported by the state assignment (project no. FSFF-2023-0004).

### Figure Captions

Fig. 1. Fundamental solutions of the equations of the classical heat conduction theory and the Maxwell–Cattaneo theory.

Fig. 2. Effect of the parameter  $Q$ .

Fig. 3. Fundamental solutions of the equations of the classical heat conduction theory and the Green–Nagdy theory of type III.

### References

1. Vestyak V.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Matematicheskie osnovy termouprugosti: uchebnoe posobie* [Mathematical Foundations of Thermoelasticity]. Moscow, MAI, 2021. 92 p. (In Russian)
2. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Termouprugost'. Odnomernye nestatsionarnye zadachi: uchebnoe posobie* [Thermoelasticity. One-Dimensional Non-Stationary Problems: A Text Book]. Moscow, MAI, 2023. 95 p. (In Russian)
3. Cataneo C. A form of heat conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 247, pp. 431–433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1985, t. 246, no. 22, p. 3154–3155. (In French)
5. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. Shk., 1967. 600 p. (In Russian)
6. Green A.E., Naghdi P.M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1991, vol. 432, no. 1885, pp. 171–194. <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012>.
7. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208. <https://doi.org/10.1007/BF00044969>.
8. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid. *J. Therm. Stresses*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 253–264. <https://doi.org/10.1080/01495739208946136>.
9. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 4, art. 650. <https://doi.org/10.3390/sym14040650>.
10. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 9, art. 1950. <https://doi.org/10.3390/sym14091950>.
11. Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 60, no. 8, pp. 1912–1919. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080229>.
12. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1832–1841. <https://doi.org/10.1134/S1995080222100079>.

**Для цитирования:** Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 404–414. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414>.

**For citation:** Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental solutions of the equations of classical and generalized heat conduction models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414>. (In Russian)



Индекс 19423