



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

КАЗАНСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Том 165

Книга 2

2023

Ученые записки Казанского университета.

Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2023

Т. 165, кн. 2

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Г.В. Абгарян (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Егоров – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат., проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат., чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстюков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 11.12.2023.
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6,22. Уч.-изд. л. 4,73.
Тираж 300 экз. Заказ 43/12

Отпечатано в типографии Издательства
Казанского университета
420008, Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.

Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

[Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]

Peer - Reviewed Scientific Journal

2023

Vol. 165

no. 2

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Garnik V. Abgaryan (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Andrey G. Egorov – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich’s Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, 420008 Russia
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: December 11, 2023.
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional
printing sheet: 6.22. Publisher’s signature: 4.73.
Circulation: 300 copies. Order: 43/12

Printed in KFU Publishing House
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, 420008
Russia

© Kazan Federal University, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Андреев А.О., Нефедьев Ю.А., Демина Н.Ю.</i> Создание метода изолинейного моделирования протяженных малых небесных тел	105
<i>Даутов Р.З., Иванова М.В.</i> Консервативная схема метода конечных элементов для уравнения Кирхгофа	115
<i>Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е.</i> Решения Дирихле функционально-дифференциальных уравнений не запаздывающего типа	132
<i>Заботин И.Я., Шульгина О.Н., Яруллин Р.С.</i> Релаксационный вариант метода отсечений с аппроксимацией области ограничений	143
<i>Коростелева Д.М., Соловьев С.И.</i> Математическое моделирование собственных колебаний пологой оболочки с присоединённым осциллятором	153
<i>Липич А.О., Медведик М.Ю.</i> Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы	167

CONTENTS

Andreev A.O., Nefedyev Yu.A., Demina N.Yu. Development of an isoline modeling method for extended small celestial objects	105
Dautov R.Z., Ivanova M.V. A conservative finite element scheme for the Kirchhoff equation	115
Evlampiev N.P., Mokeichev V.S., Filippov I.E. Dirichlet solutions of functional differential equations without delay	132
Zabotin I.Ya., Shulgina O.N., Yarullin R.S. A relaxed version of the cutting method with approximation of the constraint region.....	143
Korosteleva D.M., Solov'ev S.I. Mathematical modeling of eigenvibrations of the shallow shell with an attached oscillator.....	153
Lapich A.O., Medvedik M.Y. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem for objects of arbitrary shape	167

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 523.34

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.105-114

СОЗДАНИЕ МЕТОДА ИЗОЛИНЕЙНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОТЯЖЕННЫХ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

А. О. Андреев¹, Ю. А. Нефедьев², Н. Ю. Демина²

¹*Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Работа сфокусирована на создании метода моделирования протяженных малых небесных объектов (extended small celestial – ESC-объекты), к которым в первую очередь относятся кометные системы. Особое внимание уделено возможности анализа структуры и изучению физических свойств таких небесных тел, учитывая, что современные теории образования Солнечной системы показывают достаточно сложную эволюционную динамику. Так как все объекты Солнечной системы эволюционно связаны, создание моделей и изучение структуры различных протяженных небесных объектов позволяет оценить общие эволюционные процессы, происходившие в Солнечной системе. Метод изолинейного моделирования (isolinear modeling – ИМ-метод) был протестирован на практике и позволил оценить активность процессов, происходящих при движении ESC-объектов в пространстве. Следует отметить, что ИМ-метод особенно важен при анализе долгопериодических комет, которые во многих случаях только единожды пересекают перигелий своей орбиты в обозримый промежуток существования человеческой цивилизации.

Ключевые слова: изолинейное моделирование, протяженный небесный объект, кометная система

Введение

Изучение структуры и физических свойств ESC-объектов помогает понять эволюцию формирования всей планетной составляющей Солнечной системы [1]. Наиболее интенсивные исследования атмосфер ESC-объектов, их структуры и планетофизики обычно проводятся по наблюдениям короткопериодических околоземных комет [2]. Однако необходимо отметить две эволюционные проблемы кометной астрономии. Первая заключается в том, что современные данные сравнения параметров комет, околоземных и имеющих большие гелиоцентрические расстояния, показали различную степень их активности [3]. Вторая проблема состоит в том, что основная масса кометного вещества сосредоточена в двух разных областях пространства, причем одна является источником долгопериодических комет (Oort Cloud), а другая – короткопериодических (Kuiper Belt) [4]. Поэтому для решения этих проблем являются важными исследования как короткопериодических,

так и долгопериодических комет. В работе построена изолинейная модель короткопериодической кометы Mrkos (Mrkos short-period – MSP-комета). Полученные результаты моделирования изолиний MSP-кометы позволили получить ее структурную модель, имеющую более точную структуру, чем в работах предыдущих авторов [4, 5]. Поскольку ядро MSP-кометы является элементом динамической эволюции и процессов в Солнечной системе [6], изучение его модели позволит уточнить теорию его формирования и эволюции. При выполнении работ по изучению ESC-объектов нужно учитывать тот факт, что определенные небесные тела являются межзвездными образованиями [7].

1. Метод изолинейного моделирования

В настоящее время структурное яркостное изолинейное моделирование (SBI-моделирование) является основным методом для исследования сложных космических объектов [8]. Основой SBI-моделирования является псевдосоляризация эффект [9], который заключается в преобразовании системы снимка объекта и последующем анализе полученных изображений, то есть имитации затемнения более светлых областей наблюдаемого изображения и осветлении более темных зон. Моделируя экспозицию программным способом (аналогично процессу проявления астрономических фотопластинок), можно выполнить полную трансформацию световых градиентов снимка. Для построения отдельной SBI-модели определяют соответствующий ей интервал световой плотности изображения. Таким образом, каждая изолиния обладает производной выбранной световой плотностью. При построении изолиний для использования компьютерной техники был разработан специальный программный комплекс. В анализе астрономических снимков он использует возможности компьютерных графических пакетов обработки изображений, с помощью которых можно построить имитационную SBI-модель, перебирая световые параметры для яркостных областей. Алгоритм создания имитационной SBI-модели для кометы MSP характеризуется следующим:

- А. Получение цифровых световых параметров кометы MSP с астрономических изображений выполнялось с использованием сканера A3 Microtek XL1000. Этот прибор имеет разрешение получаемого изображения 2300×4900 dpi и оптическую плотность 3,9 D.
- В. Для выделения изолиний (областей снимка одинаковой яркостной плотности) с требуемыми параметрами использовался специальный автоматизированный компьютерный комплекс. С его помощью из первоначального изображения с применением графических программ складывалось изображение с противоположными яркостными характеристиками. В результате создавалась окончательная SBI-модель и выполнялся ее анализ.

2. Анализ SBI-модели кометы MSP

Комета MSP является актуальным объектом для изучения. Она относится к объектам из семейства Юпитера. Плоскости орбит комет этого семейства расположены под небольшим углом к плоскости эклиптики и достаточно стабильны в своей динамике.

На рис. 1 изображена SBI-модель изучаемой кометы. Точность нанесения изолиний равна 0.051 звездных величин. При исследовании SBI-модели с использованием специального автоматизированного программного комплекса получены следующие результаты.

Качественные параметры изолиний остаются стабильными и при увеличении значений световых параметров. Однако при таких трансформациях яркостных параметров уменьшается ширина изолиний. С другой стороны, происходит увеличение точности структуры самих изолиний, что важно для изучения разнородных сложных систем кометных тел.

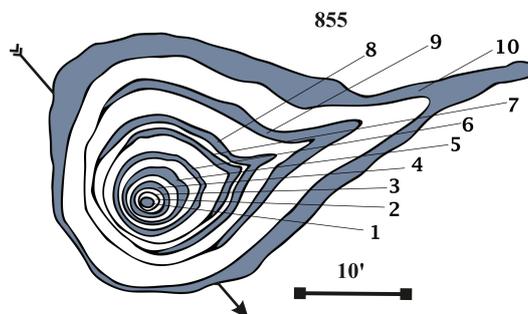


Рис. 1. SBI-модель кометы MSP

На рис. 2 представлены динамические изменения структуры кометы MSP, демонстрирующие преобразование области от кометного ядра к внешним областям. В центре SBI-модели изолинии приближаются по структуре к кольцевым системам. При этом чем ближе мы продвигаемся к центру кометного ядра, тем тоньше становятся кольцевые изолинии. Если двигаться в обратном направлении, то начинают проявляться формирующиеся элементы кометного хвоста, и можно наблюдать утолщение изолиний. Данный процесс можно наблюдать в SBI-моделях 845, 849 и 851. Здесь хорошо видны элементы большого и малого хвостовых систем.

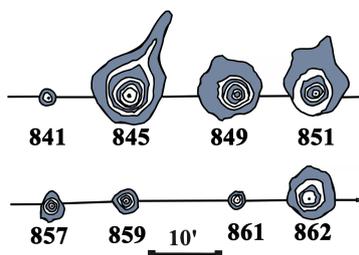


Рис. 2. Эволюционная диаграмма кометы MSP

Полученные модели изолиний показали неоднородность процессов образования газовых компонент ядром кометы под действием солнечного градиента. Это можно объяснить эффектом Ярковского. Так как ядро кометы вращается при ее движении в пространстве, то происходит и разное воздействие солнечного градиента на разные зоны кометного ядра. Соответственно изменяется и интенсивность газовой выделения для различных областей ядра кометы. Таким образом, формирование головы кометы имеет более сложную природу, чем общее сублимирование газов из кометного ядра. Здесь важное значение имеет перераспределение газо-пылевого вещества, излученного кометой. Каждый структурный элемент SBI-модели образуется в зависимости от направления излученного вещества и массы кометы. При этом изменение структуры элементов модели показывает дрейф зон ядра, излучающих

кометное вещество. Анализ рис. 2 показал, что некоторые структурные параметры SBI-модели имеют вытянутости не в сторону от Солнца, а под другими направлениями. Такое явление можно объяснить влиянием на направление излучения кометного вещества самообразованных достаточно сильных потоков, причем это влияние сохраняется практически до полного прекращения газового испускания кометы. По изучению параметров асимметрии изолиний по отношению к геометрическому центру головы кометы можно вычислить среднюю скорость излучения кометного вещества из исследуемой области ядра. Данную работу предполагается выполнить на следующих этапах исследования SBI-моделей.

Заключение

Изучение короткопериодических комет связано с развитием теории эволюции Солнечной системы. В настоящее время современные компьютерные технологии используются для исследования астрономических снимков, на которых имеются изображения уникальных космических явлений. Такие астроснимки наблюдали в течение больших временных промежутков, и вид небесной сферы, зафиксированной на них, невозможно получить заново. Анализ космических снимков является актуальной и востребованной задачей. В работе построена структурная модель кометы MSP. Сравнение созданной SBI-модели с параметрическими моделями, построенными другими авторами [10, 11], показало, что она более точная в структурном плане при изучении световых параметров. Четко видно последовательное изменение структуры кометы MSP от центральной области к внешним ее слоям в зависимости от времени наблюдения. Около ядра кометы MSP изолинии имеют кольцеобразный вид. Если в центре модели изолинии имеют структуру, похожую на тонкие кольца, то во внешних областях кометы проявляются образования, характерные для кометного хвоста, и происходит укрупнение изолиний. Можно обнаружить малый и большой хвостовые структуры и хорошо выраженное кометное ядро. В перспективе созданный нами ИМ-метод позволит исследовать структуру различных ESC-объектов и по полученным результатам анализа модели определять динамические характеристики. С другой стороны, оценка степени активности ESC-объектов позволяет решать задачи по исследованию структурной эволюции в Солнечной системе.

Разработанный ИМ-метод с успехом можно использовать и для исследования сложных астрофизических объектов. Для этого необходимо создать цифровую SBI-модель световых характеристик космического тела и на их основе построить изолинейную модель. Данный метод является актуальным и для анализа метеороидов различной природы [12–15], селенодезических систем [16–20], галактических объектов [21], планетных систем [22], изучения динамики и кинематики космических тел [23] как дополнение к регрессионному [24] и фрактальному анализам [25], для исследования активных образований на поверхности Солнца [26].

Все вышеописанное важно для создания виртуальных обсерваторий и построения единых электронных систем цифровых данных. Объединенные цифровые библиотеки позволяют использовать разнородные космические наблюдения в интернете. Цифровые базы виртуальных обсерваторий можно также использовать для осуществления космических миссий и проведения современных космических наблюдений.

Основной вывод: результаты работы могут использоваться при подготовке космических миссий к телам Солнечной системы и создании новых цифровых библиотек параметров небесных объектов.

Благодарности. Данная работа была поддержана грантом РФФ 22-72-10059.

Литература

1. DiSanti M.A., Bonev B.P., Russo N.D., Vervack R.J. Jr., Gibb E.L., Roth N.X., McKay A.J., Kawakita H., Feaga L.M., Weaver H.A. Hypervolatiles in a Jupiter-family comet: Observations of 45P/Honda–Mrkos–Pajdušáková using iSHELL at the NASA-IRTF // *Astron. J.* 2017. V. 154, No 6. Art. 246. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa8639>.
2. Dlugach J.M., Ivanova O.V., Mishchenko M.I., Afanasiev V.L. Retrieval of microphysical characteristics of particles in atmospheres of distant comets from ground-based polarimetry // *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.* 2018. V. 205. P. 80–90. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2017.10.002>.
3. Lis D.C., Biver N., Bockelée-Morvan D., Hartogh P., Bergin E.A., Blake G.A., Crovisier J., de Val-Borro M., Jehin E., Küppers M., Manfroid J., Moreno R., Rengel M., Szutowicz S. A Herschel study of D/H in water in the Jupiter-family comet 45P/Honda–Mrkos–Pajdušáková and prospects for D/H measurements with CCAT // *Astrophys. J., Lett.* 2013. V. 774, No 1. Art. L3. URL: <https://doi.org/10.1088/2041-8205/774/1/L3>.
4. Moulane Y., Jehin E., Opitom C., Pozuelos F.J., Manfroid J., Benkhaldoun Z., Daassou A., Gillon M. Monitoring of the activity and composition of comets 41P/Tuttle–Giacobini–Kresak and 45P/Honda–Mrkos–Pajdusakova // *Astron. Astrophys.* 2018. V. 619. Art. A156. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833582>.
5. Mumma M.J., Dello Russo N., DiSanti M.A., Magee-Sauer K., Novak R.E., Brittain S., Rettig T., McLean I.S., Reuter D.C., Xu L.H. Organic composition of C/1999 S4 (LINEAR): A comet formed near Jupiter? // *Science*. 2001. V. 292, No 5520. P. 1334–1339. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1058929>.
6. Sergienko M.V., Sokolova M.G., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O. The κ -Cygmid meteor shower and its relationship with near-Earth asteroids // *Astron. Rep.* 2020. V. 64, No 12. P. 1087–1092. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920120124>.
7. Usanin V., Nefedyev Y., Andreev A. Use of long-term nongravitational force models for fitting astrometric observations of comet Encke // *Adv. Space Res.* 2017. V. 60, No 5. P. 1101–1107. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.05.039>.
8. Pennetta M. Beach erosion in the Gulf of Castellammare di Stabia in response to the trapping of longshore drifting sediments of the Gulf of Napoli (southern Italy) // *Geosciences*. 2018. V. 8, No 7. Art. 235. URL: <https://doi.org/10.3390/geosciences8070235>.
9. Nefedyev Y., Andreev A., Hudec R. Isodensity analysis of comets using the collection of digitized Engelhardt Astronomical Observatory photographic plates // *Astron. Nachr.* 2019. V. 340, No 7. P. 698–704. URL: <https://doi.org/10.1002/asna.201913677>.
10. Cai-pin L., Hiroshi K. The structure of dust tails of comets II. The tail and dust content of comet Arend-Roland // *Chin. Astron. Astrophys.* 1983. V. 7, No 1. P. 11–18. URL: [https://doi.org/10.1016/0275-1062\(83\)90024-3](https://doi.org/10.1016/0275-1062(83)90024-3).
11. Fulle M., Sedmak G. Photometrical analysis of the Neck-Line Structure of Comet Bennett 1970II // *Icarus*. 1988. V. 74, No 3. P. 383–398. URL: [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(88\)90110-8](https://doi.org/10.1016/0019-1035(88)90110-8).
12. De La Morena C., Andreev A.O., Nefedyev Y.A., Akhmedshina E.N., Nefediev L.A. The analysis of Venus' physical surface using methods of fractal geometry // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020. V. 1697, No 1. Art. 012019. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1697/1/012019>.
13. Usanin V., Nefedyev Y., Andreev A. Use of long-term models for analysis of comet Encke's motion // *Adv. Space Res.* 2016. V. 58, No 11. P. 2400–2406. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.07.031>.

14. *Sokolova M.G., Nefedev Y.A., Varaksina N.Y.* Asteroid and comet hazard: Identification problem of observed space objects with the parental bodies // *Adv. Space Res.* 2014. V. 54, No 11. P. 2415–2418. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.08.002>.
15. *Sokolova M.G., Kondratyeva E.D., Nefedev Y.A.* A comparative analysis of the D-criteria used to determine genetic links of small bodies // *Adv. Space Res.* 2013. V. 52, No 7. P. 1217–1220. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.06.027>.
16. *Андреев А.О., Неведьев Ю.А., Неведьев Л.А., Ахмедшина Е.Н., Демина Н.Ю., Загидуллин А.А.* Использование многопараметрического анализа и фрактальной геометрии для исследования структуры лунной поверхности // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2020. Т. 162, кн. 2. С. 223–236. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.223-236>.
17. *Petrova N., Zagidullin A., Nefedev Y., Kosulin V., Andreev A.* The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results // *Adv. Space Res.* 2017. V. 60, No 10. P. 2303–2313. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.08.014>.
18. *Churkin K.O., Andreev A.O., Nefedev Yu.A., Petrova N.K., Demina N.Yu.* Studies of modern star catalogs based on photoelectric observations of lunar occultations of stars // *Astron. Rep.* 2018. V. 62, No 12. P. 1042–1049. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772918120016>.
19. *Andreev A.O., Nefedev Yu.A., Demina N.Yu., Nefediev L.A., Petrova N.K., Zagidullin A.A.* Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system // *Astron. Rep.* 2020. V. 64, No 9. P. 795–803. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920100017>.
20. *Petrova N.K., Nefedev Yu.A., Andreev A.O., Zagidullin A.A.* Lunar-based measurements of the Moon's physical libration: Methods and accuracy estimates // *Astron. Rep.* 2020. V. 64, No 12. P. 1078–1086. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920120094>.
21. *Varaksina N.Y., Nefedev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A.* Lorentzian' analysis of the accuracy of modern catalogues of stellar positions // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. V. 661, No 1. Art. 012015. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012015>.
22. *Lapaeva V.V., Meregina V.P., Nefedev Y.A.* Study of the local fluctuations of the Earth's crust using data of latitude observations // *Geophys. Res. Lett.* 2005. V. 32, No 24. Art. L24304. URL: <https://doi.org/10.1029/2005GL024316>.
23. *Nefedev Yu.A., Andreev A.O., Petrova N.K., Demina N.Yu., Zagidullin A.A.* Creation of a global selenocentric coordinate reference frame // *Astron. Rep.* 2018. V. 62, No 12. P. 1016–1020. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772918120119>.
24. *Demin S.A., Panischev O.Yu., Nefedev Yu.A.* Auto-and cross-correlation analysis of the QSOs radio wave intensity // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. V. 661, No 1. Art. 012003. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012003>.
25. *Varaksina N.Y., Nefedev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A.* Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. V. 661, No 1. Art. 012014. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012014>.
26. *Demin S.A., Nefedev Y.A., Andreev A.O., Demina N.Y., Timashev S.F.* Non-stationarity and cross-correlation effects in the MHD solar activity // *Adv. Space Res.* 2018. V. 61, No 2. P. 639–644. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.06.055>.

Поступила в редакцию 10.04.2023
Принята к публикации 27.04.2023

Андреев Алексей Олегович, Институт цифровых технологий и экономики

Казанский государственный энергетический университет

ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия

E-mail: *alexey-andreev93@mail.ru*

Нефедьев Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор Астрономической обсерватории им. В.П. Энгельгардта

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *star1955@yandex.ru*

Демина Наталия Юрьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт физики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *ynu357@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 2, pp. 105–114

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.105-114

Development of an Isoline Modeling Method for Extended Small Celestial Objects

A.O. Andreev^{a}, Yu.A. Nefedyev^{b**}, N.Yu. Demina^{b***}*

^a*Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: **alexey-andreev93@mail.ru, **star1955@yandex.ru, ***ynu357@mail.ru*

Received April 10, 2023; Accepted April 27, 2023

Abstract

This article presents a method for modeling extended small celestial (ESC) objects, which are mainly cometary systems. Special attention was given to the possibility of analyzing their structure and physical properties in line with the modern theories of the Solar System's formation suggesting a rather complicated evolutionary dynamics. Modeling and investigating the structure of different extended celestial objects advance our understanding of the general evolutionary processes that have taken place in the Solar System because all its objects are evolutionarily related. The isoline modeling (IM) method was tested on the real comet data and proved effective in assessing the activity of the processes that occur as ESC objects move in space. The IM method is particularly useful for studying long-period comets that, in many cases, cross the perihelion only once within a foreseeable period of human existence.

Keywords: isoline modeling, extended celestial object, cometary system

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-72-10059).

Figure Captions

Fig. 1. SBI model of MSP comet.

Fig. 2. Diagram of the evolution of MSP comet.

References

1. DiSanti M.A., Bonev B.P., Russo N.D., Vervack R.J. Jr., Gibb E.L., Roth N.X., McKay A.J., Kawakita H., Feaga L.M., Weaver H.A. Hypervolatiles in a Jupiter-family comet: Observations of 45P/Honda–Mrkos–Pajdušáková using iSHELL at the NASA-IRTF. *Astron. J.*, 2017, vol. 154, no. 6, art. 246. URL: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa8639>.
2. Dlugach J.M., Ivanova O.V., Mishchenko M.I., Afanasiev V.L. Retrieval of microphysical characteristics of particles in atmospheres of distant comets from ground-based polarimetry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf.*, 2018, vol. 205, pp. 80–90. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2017.10.002>.
3. Lis D.C., Biver N., Bockelée-Morvan D., Hartogh P., Bergin E.A., Blake G.A., Crovisier J., de Val-Borro M., Jehin E., Küppers M., Manfroid J., Moreno R., Rengel M., Szutowicz S. A Herschel study of D/H in water in the Jupiter-family comet 45P/Honda–Mrkos–Pajdušáková and prospects for D/H measurements with CCAT. *Astrophys. J., Lett.*, 2013, vol. 774, no. 1, art. L3. URL: <https://doi.org/10.1088/2041-8205/774/1/L3>.
4. Moulane Y., Jehin E., Opitom C., Pozuelos F.J., Manfroid J., Benkhaldoun Z., Daassou A., Gillon M. Monitoring of the activity and composition of comets 41P/Tuttle–Giacobini–Kresak and 45P/Honda–Mrkos–Pajdusakova. *Astron. Astrophys.*, 2018, vol. 619, art. A156. URL: <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833582>.
5. Mumma M.J., Dello Russo N., DiSanti M.A., Magee-Sauer K., Novak R.E., Brittain S., Rettig T., McLean I.S., Reuter D.C., Xu L.H. Organic composition of C/1999 S4 (LINEAR): A comet formed near Jupiter? *Science*, 2001, vol. 292, no. 5520, pp. 1334–1339. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1058929>.
6. Sergienko M.V., Sokolova M.G., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O. The κ -Cygnid meteor shower and its relationship with near-Earth asteroids. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 12, pp. 1087–1092. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920120124>.
7. Usanin V., Nefedyev Y., Andreev A. Use of long-term nongravitational force models for fitting astrometric observations of comet Encke. *Adv. Space Res.*, 2017, vol. 60, no. 5, pp. 1101–1107. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.05.039>.
8. Pennetta M. Beach erosion in the Gulf of Castellammare di Stabia in response to the trapping of longshore drifting sediments of the Gulf of Napoli (southern Italy). *Geosciences*. 2018, vol. 8, no. 7, art. 235. URL: <https://doi.org/10.3390/geosciences8070235>.
9. Nefedyev Y., Andreev A., Hudec R. Isodensity analysis of comets using the collection of digitized Engelhardt Astronomical Observatory photographic plates. *Astron. Nachr.*, 2019, vol. 340, no. 7, pp. 698–704. URL: <https://doi.org/10.1002/asna.201913677>.
10. Cai-pin L., Hiroshi K. The structure of dust tails of comets II. The tail and dust content of comet Arend-Roland. *Chin. Astron. Astrophys.*, 1983, vol. 7, no. 1, pp. 11–18. URL: [https://doi.org/10.1016/0275-1062\(83\)90024-3](https://doi.org/10.1016/0275-1062(83)90024-3).
11. Fulle M., Sedmak G. Photometrical analysis of the Neck-Line Structure of Comet Bennett 1970II. *Icarus*, 1988, vol. 74, no. 3, pp. 383–398. URL: [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(88\)90110-8](https://doi.org/10.1016/0019-1035(88)90110-8).
12. De La Morena C., Andreev A.O., Nefedyev Y.A., Akhmedshina E.N., Nefediev L.A. The analysis of Venus' physical surface using methods of fractal geometry. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1697, no. 1, art. 012019. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1697/1/012019>.
13. Usanin V., Nefedyev Y., Andreev A. Use of long-term models for analysis of comet Encke's motion. *Adv. Space Res.*, 2016, vol. 58, no. 11, pp. 2400–2406. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2016.07.031>.

14. Sokolova M.G., Nefedev Y.A., Varaksina N.Y. Asteroid and comet hazard: Identification problem of observed space objects with the parental bodies. *Adv. Space Res.*, 2014, vol. 54, no. 11, pp. 2415–2418. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2014.08.002>.
 15. Sokolova M.G., Kondratyeva E.D., Nefedev Y.A. A comparative analysis of the D-criteria used to determine genetic links of small bodies. *Adv. Space Res.*, 2013, vol. 52, no. 7, pp. 1217–1220. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2013.06.027>.
 16. Andreev A.O., Nefedev Yu.A., Nefediev L.A., Ahmedshina E.N., Demina N.Yu., Zagidullin A.A. The use of multi-parameter analysis and fractal geometry for investigating the structure of the lunar surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 223–236. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.223-236>. (In Russian)
 17. Petrova N., Zagidullin A., Nefedev Y., Kosulin V., Andreev A. The analytical and numerical approaches to the theory of the Moon's librations: Modern analysis and results. *Adv. Space Res.*, 2017, vol. 60, no. 10, pp. 2303–2313. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.08.014>.
 18. Churkin K.O., Andreev A.O., Nefedev Yu.A., Petrova N.K., Demina N.Yu. Studies of modern star catalogs based on photoelectric observations of lunar occultations of stars. *Astron. Rep.*, 2018, vol. 62, no. 12, pp. 1042–1049. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772918120016>.
 19. Andreev A.O., Nefedev Yu.A., Demina N.Yu., Nefediev L.A., Petrova N.K., Zagidullin A.A. Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 9, pp. 795–803. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920100017>.
 20. Petrova N.K., Nefedev Yu.A., Andreev A.O., Zagidullin A.A. Lunar-based measurements of the Moon's physical libration: Methods and accuracy estimates. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 12, pp. 1078–1086. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772920120094>.
 21. Varaksina N.Y., Nefedev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A. Lorentzian' analysis of the accuracy of modern catalogues of stellar positions. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2015, vol. 661, no. 1, art. 012015. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012015>.
 22. Lapaeva V.V., Meregina V.P., Nefedev Y.A. Study of the local fluctuations of the Earth's crust using data of latitude observations. *Geophys. Res. Lett.*, 2005, vol. 32, no. 24, art. L24304. URL: <https://doi.org/10.1029/2005GL024316>.
 23. Nefedev Yu.A., Andreev A.O., Petrova N.K., Demina N.Yu., Zagidullin A.A. Creation of a global selenocentric coordinate reference frame. *Astron. Rep.*, 2018, vol. 62, no. 12, pp. 1016–1020. URL: <https://doi.org/10.1134/S1063772918120119>.
 24. Demin S.A., Panishev O.Yu., Nefedev Yu.A. Auto-and cross-correlation analysis of the QSOs radio wave intensity. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2015, vol. 661, no. 1, art. 012003. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012003>.
 25. Varaksina N.Y., Nefedev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A. Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2015, vol. 661, no. 1, art. 012014. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/661/1/012014>.
 26. Demin S.A., Nefedev Y.A., Andreev A.O., Demina N.Y., Timashev S.F. Non-stationarity and cross-correlation effects in the MHD solar activity. *Adv. Space Res.*, 2018, vol. 61, no. 2, pp. 639–644. URL: <https://doi.org/10.1016/j.asr.2017.06.055>.
-

Для цитирования: Андреев А.О., Неведьев Ю.А., Демина Н.Ю. Создание метода изолинейного моделирования протяженных малых небесных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 105–114. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.105-114>.

For citation: Andreev A.O., Nefedyev Yu.A., Demina N.Yu. Development of an isoline modeling method for extended small celestial objects. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 105–114. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.105-114>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.115-131

КОНСЕРВАТИВНАЯ СХЕМА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА

Р. З. Даутов, М. В. Иванова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Предложена неявная двухслойная схема метода конечных элементов для решения уравнения Кирхгофа, которое представляет собой нелинейное нелокальное уравнение гиперболического типа и включает интеграл Дирихле. Дискретная схема сформулирована в терминах решения задачи и его производной по переменной времени и обеспечивает сохранение полной энергии на дискретном уровне. Показано, что решение схемы на слое по времени может быть эффективно получено методом Ньютона, несмотря на нелокальность уравнения. На основе решения тестовых задач с гладкими решениями установлено, что схема позволяет определить как решение задачи, так и его производную по времени с погрешностью порядка $O(h^2 + \tau^2)$ в среднеквадратической норме, где τ и h характеризуют шаги сетки по времени и пространству соответственно.

Ключевые слова: уравнение Кирхгофа, метод конечных элементов, метод Петрова–Галеркина, неявная схема, метод Ньютона

Введение

1. Следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right) \Delta u = f, \quad x \in \Omega \subset R^d, \quad (1)$$

известное как уравнение Кирхгофа, при $d = 1$ и краевом условии $u|_{\partial\Omega} = 0$ было получено в 1876 г. Кирхгофом [1] как нелинейная модель поперечных колебаний струны, закрепленной в конечных точках. Уравнение Кирхгофа изучалось Бернштейном [2] и Похожаевым [3, 4] в специальном классе аналитических функций, см. также статью Лионса [5].

В последние годы большое внимание уделяется изучению нелокальных уравнений различных типов, включающих интеграл Дирихле. Интерес к таким задачам связан как с моделированием разнообразных физических и биологических явлений, так и с рядом интересных математических особенностей этих задач. В связи с этим отметим статью [6], посвященную изучению корректности уравнения (1), обзорную работу [7] и обзор литературы в [8], а также статьи [9–12], в которых рассматривались уравнения, более общие, чем (1).

2. В цитированных выше работах основное внимание уделялось изучению существования, единственности и асимптотики решения нелокальной задачи с интегралом Дирихле. Поскольку (1) является уравнением гиперболического типа, то для его приближенного решения могут быть использованы соответствующие известные

численные методы. Однако существенная особенность уравнения (1) в виде интегрального коэффициента приводит к необходимости его отдельного рассмотрения. Численному решению таких задач посвящено лишь небольшое число работ. Среди известных нам отметим: статьи [13, 14], посвященные соответственно обоснованию конформного и смешанного методов конечных элементов для решения эллиптического уравнения, соответствующего (1), и статьи [15–17], посвященные исследованиям неявных дискретных методов решения уравнений параболического типа. Еще меньше работ посвящено решению гиперболического уравнения (1) [18–20]. В статье [18] предложен спектральный метод Галеркина для решения одномерной задачи Кирхгофа (1) и получены априорные оценки погрешности решения модифицированной разностной схемы Кранка–Николсона. В статье [19] также для решения одномерной задачи (1), предварительно сведенной к системе уравнений первого порядка, построена и численно исследована консервативная конечно-разностная схема. Для решения двумерного уравнения (1) с затуханием в [20] предложен и исследован неконформный метод конечных элементов, основанный на четырехугольных квадратичных элементах.

Поскольку уравнение Кирхгофа описывает консервативные системы, следует отметить, что в практических вычислениях консервативные численные схемы его решения являются более предпочтительными, чем неконсервативные: при прочих равных условиях они более точны. Ключевым моментом является то, что такие схемы сохраняют некоторые важные инвариантные свойства дифференциального уравнения и более точно воспроизводят особенности решения при вычислениях на больших отрезках времени. Для решения уравнения Кирхгофа нам известна только консервативная конечно-разностная схема для одномерной задачи [19].

3. Основной целью настоящей работы является численное исследование точности предлагаемого нами двухслойного консервативного неявного метода конечных элементов решения уравнения (1) в произвольной области Ω . Первоначально введением новой неизвестной $v = \partial u / \partial t$ уравнение сводится к системе уравнений, которая далее аппроксимируется на основе комбинации метода конечных элементов (по пространственным переменным) и метода Петрова–Галеркина (по временной переменной). На основе решения ряда тестовых задач с гладкими решениями показано, что такая схема позволяет определить как решение задачи, так и его производную по времени с погрешностью порядка $O(h^2 + \tau^2)$ в среднеквадратической норме, где τ и h характеризуют шаги сетки по времени и пространству соответственно.

1. Постановка задачи

1.1. Исходная задача. Пусть $T > 0$, Ω – ограниченная область в R^d с липшицевой границей Γ , $d \geq 1$. Обозначим через $Q_T = \Omega \times (0, T]$ цилиндр в R^{d+1} с боковой поверхностью $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T]$. Через u' далее будем обозначать производную по времени t функции $u(x, t)$, определенной в области Q . Рассмотрим уравнение Кирхгофа

$$u''(x, t) - (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

при краевых условиях Дирихле¹:

$$u(x, t) = \gamma(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T. \quad (3)$$

¹Для удобства изложения будем считать, что функция γ определена в Q_T .

В начальный момент времени $t = 0$ решение уравнения и его производная по времени считаются известными:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u'(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь ∇u означает градиент функции u ,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right), \quad \|\nabla u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

$|a| = (a \cdot a)^{1/2}$ есть длина вектора a , $a \cdot b = \sum_i a_i b_i$ – скалярное произведение векторов a и b .

Отметим одно важное свойство рассматриваемой задачи (см., например, [5]). Пусть данные задачи γ и f не зависят от времени, т. е. $\gamma = \gamma(x)$ и $f = f(x)$. Тогда в силу краевого условия (3) имеем $u'(x, t) = 0$ на Γ_T . Умножим уравнение (2) на $u'(x, t)$ и проинтегрируем полученное равенство по области Ω . В результате получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u'(x, t))^2 dx + (1 + \|\nabla u\|^2) \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla u'(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f(x) u(x, t) dx, \quad (5)$$

поскольку согласно формуле Остроградского–Гаусса

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \zeta(x, t) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla \zeta(x, t) dx, \quad (6)$$

если ζ обращается в нуль на Γ . Определим функцию $\Pi(s) = s + s^2/2$. Теперь легко видеть, что равенству (5) можно придать вид

$$\frac{d}{dt} E(u(t), u'(t)) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

где функционал (полной энергии) E определяется следующим образом:

$$E(u(t), u'(t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u'(x, t))^2 dx + \Pi(\|\nabla u\|^2) - \int_{\Omega} f(x) u(x, t) dx,$$

а $u(t)$ означает функцию u в момент времени t . Из (7) следует равенство

$$E(u(t), u'(t)) = E(u_0, v_0) \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

которое принято называть законом сохранения (полной) энергии.

Для определения дискретного метода решения сформулированной задачи (2)–(4) нам понадобится его обобщенная формулировка. С этой целью введем дополнительные обозначения и определим пространства функций.

1.2. Пространства функций. Используем стандартное обозначение $L_2(\Omega)$ для пространства функций, измеримых в области Ω и интегрируемых в ней с квадратом. Через $H^1(\Omega)$ обозначим пространство Соболева первого порядка, через $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}$ – его подпространство. Для сокращения записи положим

$$H = L_2(\Omega), \quad V = H^1(\Omega), \quad V^0 = H_0^1(\Omega).$$

Через (\cdot, \cdot) обозначим как скалярное произведение в H , т. е.

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v dx,$$

так и отношение двойственности между пространством V^0 и его сопряженным $H^{-1}(\Omega)$. Пусть также

$$(\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Далее для заданной функции u переменных $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ под $u(t)$, $t \in [0, T]$ будем понимать функцию $x \rightarrow u(x, t)$, $x \in \Omega$. Подобные функции, определенные на $[0, T]$ со значениями в некотором банаховом пространстве B функций от x , будем рассматривать как элементы пространства $L_p(0, T; B)$. Напомним, что $L_p(0, T; B)$ есть пространство (классов) измеримых функций $[0, T] \rightarrow B$ таких, что

$$\|u\|_{L_p(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p \, dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

При $p = \infty$ норма в нем определяется функционалом $\text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_B$ (подробнее см., например, [13, с. 469]). Отметим, что $L_p(0, T; L_p(\Omega)) = L_p(Q)$.

1.3. Обобщенное решение задачи. Относительно исходных данных задачи будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(H) $f \in L_2(0, T; H)$, $u_0 \in V$, $v_0 \in H$, γ является следом на $\Gamma \times [0, T]$ некоторой функции η из $L_{\infty}(0, T; V)$ такой, что $\eta' \in L_{\infty}(0, T; H)$.

Обобщенное решение задачи (2)–(4) будем искать в классе функций, гарантирующих конечность функционала энергии $E(u(t), u'(t))$ почти всюду на $(0, T)$. Это приводит к ограничениям $u \in L_{\infty}(0, T; V)$, $u' \in L_{\infty}(0, T; H)$.

Введем новую неизвестную $v = u'$ и запишем исходную задачу в виде системы

$$v'(t) - (1 + \|\nabla u\|^2) \Delta u(t) = f(t), \quad (8)$$

$$u'(t) = v(t), \quad (9)$$

$$u - \gamma \in L_{\infty}(0, T; V^0), \quad u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0,$$

где $t \in (0, T)$. Для определения обобщенного решения задачи умножим обе части уравнения (8) на произвольную функцию $\zeta \in L_1(0, T; V^0)$, проинтегрируем полученное равенство по области Q_T и учтем равенство (6). Аналогично умножим равенство (9) на произвольную функцию $\eta \in L_1(0, T; H)$. В результате придем к следующим тождествам:

$$\int_0^T (v'(t), \zeta(t)) \, dt + \int_0^T a(u(t), \zeta(t)) \, dt = \int_0^T (f(t), \zeta(t)) \, dt, \quad (10)$$

$$\int_0^T (u'(t), \eta(t)) \, dt = \int_0^T (v(t), \eta(t)) \, dt. \quad (11)$$

Здесь использовано обозначение

$$a(u, \zeta) = (1 + \|\nabla u\|^2) (\nabla u, \nabla \zeta).$$

Определение 1. Пару функций u и v , удовлетворяющих условиям

$$u - \gamma \in L_{\infty}(0, T; V^0), \quad v, u' \in L_{\infty}(0, T; H), \quad v' \in L_{\infty}(0, T; V^*), \\ u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0,$$

а также тождествам (10) и (11) для всех $\zeta \in L_1(0, T; V^0)$ и $\eta \in L_1(0, T; H)$, назовем обобщенным решением задачи (2)–(4).

Заметим, что при выполнении условий (H_1) , (H_2) данное определение корректно в том смысле, что все слагаемые в (10), (11) являются конечными, а начальные условия имеют смысл (см., например, обсуждение обобщенной формулировки гиперболической задачи в [21, Замечание 1.1, с. 21]).

Далее будем предполагать, что определенное выше обобщенное решение существует (это так по крайней мере для достаточно гладких исходных данных u_0 , v_0 , f [5]), и сосредоточимся на его приближенном определении.

2. Определение неявной схемы МКЭ

Укажем способ дискретизации поставленной выше задачи, обеспечивающий сохранение энергии на дискретном уровне. Его можно рассматривать как метод Петрова–Галеркина, основанный на аппроксимациях, принятых в методе конечных элементов. Полностью дискретную схему получим последовательной дискретизацией задачи сначала по пространственным переменным, а затем – по переменной времени. Для облегчения изложения далее будем предполагать, что Ω является многогранником в R^d .

2.1. Полудискретная схема МКЭ. Пусть $h > 0$ означает максимальный размер конечных элементов (симплексов в R^d), $T_h = \{K_1, K_2, \dots, K_\ell\}$ – множество конечных элементов (отрезков при $d = 1$, треугольников при $d = 2$, тетраэдров при $d = 3$), образующих, как это принято в МКЭ, точное разбиение (триангуляцию) области Ω . Множество всех вершин симплексов из T_h обозначим ω_h и назовем сеткой узлов на Ω . Пусть $\omega_h = \{a_i\}_{i=1}^N$, $N = N(h)$. Далее для удобства изложения предположим, что внутренние узлы сетки имеют номера от 1 до n , а граничные (лежащие на Γ) – от $n + 1$ до N .

На основе триангуляции T_h определим пространство конечных элементов

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) : v_h|_K \in P_1 \quad \forall K \in T_h\},$$

где P_1 есть множество алгебраических многочленов первой степени, т. е. функций вида $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_dx_d$. Определим также его подпространство

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h : v_h|_\Gamma = 0\}.$$

Пространства V_h и V_h^0 будем рассматривать как аппроксимации пространств $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$ соответственно. Отметим, что $V_h \subset H^1(\Omega)$, $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

Через $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^N$ обозначим базис Лагранжа в V_h , т. е. множество таких функций $\varphi_i \in V_h$, что $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$, где δ_{ij} – символ Кронекера. В этом базисе произвольная функция $v_h \in V_h$ имеет представление

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^N v_i \varphi_i(x), \tag{12}$$

где $v_i = v_h(a_i)$, $i = 1, \dots, N$. Вектор-столбец коэффициентов $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$ принято называть вектором узловых параметров функции $v_h \in V_h$. Будем использовать запись $v \Leftarrow v_h$. Функцию u_I из V_h назовем интерполянтом функции $u \in C(\bar{\Omega})$, если $u_I(a_i) = u(a_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Далее через u_{0h} и v_{0h} обозначим функции из V_h , являющиеся некоторыми аппроксимациями функций u_0 и v_0 соответственно. Через γ_h обозначим функцию $[0, T] \rightarrow V_h$ такую, что $\gamma_h(t)$ есть некоторая аппроксимация $\gamma(t)$. Например, их можно определить как наилучшие среднеквадратические приближения или как интерполянты соответствующих функций.

Определение 2. Функции u_h, v_h из $L_\infty(0, T; V_h)$ такие, что

$$u_h - \gamma_h \in L_\infty(0, T; V_h^0), \quad u'_h, v'_h \in L_\infty(0, T; V_h),$$

удовлетворяющие условиям $u_h(0) = u_{0h}$, $v_h(0) = v_{0h}$, а также тождествам

$$\begin{aligned} \int_0^T (v'_h(t), \zeta(t)) dt + \int_0^T a(u_h(t), \zeta(t)) dt &= \int_0^T (f(t), \zeta(t)) dt, \\ \int_0^T (u'_h(t), \eta(t)) dt &= \int_0^T (v_h(t), \eta(t)) dt \end{aligned}$$

для всех $\zeta \in L_1(0, T; V_h^0)$, $\eta \in L_1(0, T; V_h)$ назовем приближенным решением задачи (2)–(4) по методу конечных элементов.

2.2. Неявная схема. Пусть $\tau > 0$. На отрезке $[0, T]$ определим сетку узлов $\omega_\tau = \{t_j, j = 0, 1, \dots, M\}$ с шагами $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $\tau_j \leq \tau$. Через $S^1(0, T; V_h)$ обозначим множество всех функций, непрерывных на $[0, T]$ и линейных на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ со значениями в V_h . Функция $u_{h\tau}$ из $S^1(0, T; V_h)$ имеет представление

$$u_{h\tau}(t) = u_h^{j-1} + (u_h^j - u_h^{j-1}) \frac{t - t_{j-1}}{\tau_j}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad (13)$$

где $u_h^j = u_{h\tau}(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, M$.

Определим также пространство $S(0, T; V_h)$ как множество функций $\zeta : [0, T] \rightarrow V_h$, являющихся постоянными на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$. Отметим, что обобщенная производная функции из $S^1(0, T; V_h)$ принадлежит $S(0, T; V_h)$.

Искомую дискретную схему для задачи (2)–(4) определим следующим образом:

Определение 3. Найти функции $u_{h\tau}, v_{h\tau}$ из $S^1(0, T; V_h)$ такие, что

$$u_{h\tau} - \gamma_{h\tau} \in S^1(0, T; V_h^0), \quad u_{h\tau}(0) = u_{0h}, \quad v_{h\tau}(0) = v_{0h},$$

которые удовлетворяют тождествам

$$\int_0^T (v'_{h\tau}(t), \zeta(t)) dt + \int_0^T a(u_{h\tau}(t), \zeta(t)) dt = \int_0^T (f(t), \zeta(t)) dt, \quad (14)$$

$$\int_0^T (u'_{h\tau}(t), \eta(t)) dt = \int_0^T (v_{h\tau}(t), \eta(t)) dt \quad (15)$$

для всех $\zeta \in S(0, T; V_h^0)$, $\eta \in S(0, T; V_h)$.

Рассмотрим реализацию этой схемы. Пусть в момент времени t_{j-1} решение схемы, а именно, пара функций $u_h^{j-1} = u_{h\tau}(t_{j-1})$, $v_h^{j-1} = v_{h\tau}(t_{j-1})$, известно. Это так при $j = 1$, поскольку в силу начальных условий имеем $u_h^0 = u_{0h}$, $v_h^0 = v_{0h}$. Выберем в тождествах (14) и (15) функции $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ равными нулю всюду, кроме отрезка $[t_{j-1}, t_j]$, на котором примем их равными соответственно произвольно зафиксированным $\zeta_h \in V_h^0$ и $\eta_h \in V_h$. Тогда придем к следующим равенствам:

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (v'_{h\tau}(t), \zeta_h) dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(u_{h\tau}(t), \zeta_h) dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (f(t), \zeta_h) dt, \quad (16)$$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (u'_{h\tau}(t), \eta_h) dt = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (v_{h\tau}(t), \eta_h) dt. \quad (17)$$

Воспользуемся здесь формулой (13) для представления $u_{h\tau}(t)$ и аналогичной формулой для $v_{h\tau}(t)$. Учитывая, что

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(u_{h\tau}(t), \zeta_h) dt = \tau_j \int_0^1 a(\sigma u_h^j + (1-\sigma)u_h^{j-1}, \zeta_h) d\sigma,$$

после вычисления остальных интегралов в (16) и (17) придем к следующим уравнениям, справедливым для всех $j = 1, \dots, M$:

$$\left(\frac{v_h^j - v_h^{j-1}}{\tau_j}, \zeta_h \right) + \int_0^1 a(\sigma u_h^j + (1-\sigma)u_h^{j-1}, \zeta_h) d\sigma = (\bar{f}^j, \zeta_h), \quad (18)$$

$$\left(\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\tau_j}, \eta_h \right) = \left(\frac{v_h^j + v_h^{j-1}}{2}, \eta_h \right). \quad (19)$$

Здесь использовано обозначение

$$\bar{f}^j = \int_0^1 f(\sigma t_j + (1-\sigma)t_{j-1}) d\sigma.$$

В силу произвольности $\eta_h \in V_h$ из (19) следует равенство

$$\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\tau_j} = \frac{v_h^j + v_h^{j-1}}{2}.$$

Найдем отсюда v_h^j и подставим полученное выражение в (18). В результате придем к уравнению для определения искомого неизвестного u_h^j :

$$\frac{1}{\bar{\tau}_j} \left(\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\tau_j} - v_h^{j-1}, \zeta_h \right) + \int_0^1 a(\sigma u_h^j + (1-\sigma)u_h^{j-1}, \zeta_h) d\sigma = (\bar{f}^j, \zeta_h), \quad (20)$$

где $\bar{\tau}_j = \tau_j/2$, ζ_h – произвольная функция из V_h^0 . Уравнение (20) сводится к системе (нелинейных) алгебраических уравнений. После его решения найдем u_h^j , а потом определим v_h^j по формуле

$$v_h^j = \frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\bar{\tau}_j} - v_h^{j-1}.$$

2.3. Сохранение энергии на дискретном уровне.

Теорема 1. Пусть $f = f(x)$, $\gamma = \gamma(x)$, $u_{h\tau}, v_{h\tau}$ – решения схемы (14), (15). Тогда $E(u_{h\tau}(t), v_{h\tau}(t)) = E(u_{0h}, v_{0h})$ для всех $t \in \omega_\tau$.

Доказательство. Поскольку γ не зависит от t , $\gamma_{h\tau}$ совпадает с γ_h и также не зависит от t . Поэтому $u'_{h\tau}(t) \in V_h^0$ для всех t . Это позволяет выбрать в (14) и (15) пробные функции равными

$$\zeta(t) = \begin{cases} u'_{h\tau}(t), & t \leq t_j, \\ 0, & t > t_j, \end{cases} \quad \eta(t) = \begin{cases} v'_{h\tau}(t), & t \leq t_j, \\ 0, & t > t_j, \end{cases}$$

где $j \geq 1$. В результате придем к следующим равенствам

$$\begin{aligned} \int_0^{t_j} (v'_{h\tau}(t), u'_{h\tau}(t)) dt + \int_0^{t_j} a(u_{h\tau}(t), u'_{h\tau}(t)) dt &= \int_0^{t_j} (f, u'_{h\tau}(t)) dt, \\ \int_0^{t_j} (u'_{h\tau}(t), v'_{h\tau}(t)) dt &= \int_0^{t_j} (v_{h\tau}(t), v'_{h\tau}(t)) dt. \end{aligned}$$

Очевидно, из них вытекает соотношение

$$\int_0^{t_j} (v_{h\tau}(t), v'_{h\tau}(t)) dt + \int_0^{t_j} a(u_{h\tau}(t), u'_{h\tau}(t)) dt = \int_0^{t_j} (f, u'_{h\tau}(t)) dt. \quad (21)$$

Преобразуем это равенство. Заметим, что

$$(v(t), v'(t)) = 1/2 d/dt (v(t), v(t)), \quad a(w(t), w'(t)) = \frac{d}{dt} \Pi(\|\nabla w(t)\|^2).$$

Поэтому равенство (21) можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{t_j} \frac{d}{dt} E(u_{h\tau}(t), v_{h\tau}(t)) dt = 0.$$

Следовательно, $E(u_{h\tau}(t_j), v_{h\tau}(t_j)) = E(u_{0h}, v_{0h})$, $j = 1, \dots, M$. \square

2.4. Реализация дискретной схемы. Рассмотрим вопросы, возникающие при решении уравнения (20). Для определенности будем считать, что $\gamma_{h\tau}$ есть интерполянт γ . В этом случае условие $u_{h\tau} - \gamma_{h\tau} \in S_m^1(0, T; V_h^0)$ равносильно условиям $u_h^j|_\Gamma = \gamma_n(t_j)$ для всех j или условиям $u_h^j(a_i) = \gamma(a_i, t_j)$ для всех $n+1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq M$. Поэтому согласно (12) неизвестная функция u_h^j имеет представление

$$u_h^j(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) + \sum_{i=n+1}^N \gamma_i^j \varphi_i(x), \quad \gamma_i^j = \gamma(a_i, t_j), \quad (22)$$

где $u_i = u_h^j(a_i)$. Обозначим через $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n, \gamma_{n+1}^j, \dots, \gamma_N^j)^T$ вектор узловых параметров u_h^j , а через $u = (u_1, \dots, u^j)^T$ – его неизвестные узловые параметры. Поскольку функции из V_h^0 равны нулю на границе Γ , то

$$\zeta_h(x) = \sum_{i=1}^n \zeta_i \varphi_i(x) \quad \forall \zeta_h \in V_h^0.$$

Поэтому уравнение (20) эквивалентно системе равенств

$$\frac{1}{\bar{\tau}_j} \left(\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\tau_j} - v_h^{j-1}, \varphi_i \right) + \int_0^1 a(\sigma u_h^j + (1-\sigma)u_h^{j-1}, \varphi_i) d\sigma - (\bar{f}^j, \varphi_i) = 0, \quad (23)$$

где $1 \leq i \leq n$, u_h^j задана формулой (22).

Обозначим через $F_i(u)$ левую часть (23), а через $F(u)$ – вектор-функцию длины n с компонентами $F_i(u)$. Тогда решение уравнения (20) равносильно решению системы алгебраических уравнений

$$F(u) = 0, \quad u \in R^n. \quad (24)$$

Для реализации итерационных методов решения уравнения (24) необходимы удобные для использования формулы вычисления вектора $F(u)$ при заданном векторе u . Для их получения определим матрицы M (матрицу масс) и K (матрицу жесткости)

$$M = \{(\varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^N, \quad K = \{(\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)\}_{i,j=1}^N.$$

Эти матрицы могут быть экономно вычислены стандартной процедурой сборки матриц, принятой в МКЭ. Это относится также к вектору (сил) g с компонентами

$$g_i = (\bar{f}^j, \varphi_i) = \int_\Omega \bar{f}^j \varphi_i dx, \quad 1 \leq i \leq N,$$

для вычисления которого используются квадратурные формулы. По определению

$$(u_h, \eta_h) = Mu \cdot v, \quad (\nabla u_h, \nabla \eta_h) = Ku \cdot v, \quad (25)$$

где $u \Leftrightarrow u_h$, $\eta \Leftrightarrow \eta_h$.

1. *Вычисление $F(u)$.* Учитывая, что вектор узловых параметров φ_i совпадает с ортом i -ой оси в R^N , то согласно первой формуле (25) имеем

$$\frac{1}{\bar{\tau}_j} \left(\frac{u_h^j - u_h^{j-1}}{\tau_j} - v_h^{j-1}, \varphi_i \right) = \frac{1}{\bar{\tau}_j} \left(\frac{1}{\tau_j} M(\bar{u} - u^{j-1}) - Mv^{j-1} \right)_i, \quad (26)$$

где $u^{j-1} \Leftrightarrow u_h^{j-1}$, $v^{j-1} \Leftrightarrow v_h^{j-1}$. Под интегралом во втором слагаемом в (23) стоит многочлен третьей степени от σ . Поэтому интеграл можно точно вычислить при помощи квадратурной формулы Симпсона. Учтем, что $\|\nabla u_h^j\|^2 = |K\bar{u}|^2$, $(\nabla u_h^j, \nabla \varphi_i) = (K\bar{u})_i$, и определим величины

$$\lambda^j = 1 + K\bar{u} \cdot \bar{u}, \quad \lambda^{j+1/2} = 1 + \frac{1}{4} K(\bar{u} + u^{j-1}) \cdot (\bar{u} + u^{j-1}). \quad (27)$$

Теперь нетрудно вычислить

$$\begin{aligned} \int_0^1 a(\sigma u_h^j + (1-\sigma)u_h^{j-1}, \varphi_i) d\sigma &= \frac{1}{6} a(u_h^j, \varphi_i) + \frac{4}{6} a\left(\frac{u_h^j + u_h^{j-1}}{2}, \varphi_i\right) + \frac{1}{6} a(u_h^{j-1}, \varphi_i) = \\ &= \left(\frac{\lambda^j}{6} K\bar{u} + \frac{\lambda^{j+1/2}}{3} K(\bar{u} + u^{j-1}) + \frac{\lambda^{j-1}}{6} K u^{j-1} \right)_i. \end{aligned} \quad (28)$$

Из формул (23), (26) и (28) следует, что компоненты $F(u)$ равны

$$\begin{aligned} F_i(u) &= \left(\frac{1}{\bar{\tau}_j \tau_j} M(\bar{u} - u^{j-1}) - \frac{1}{\bar{\tau}_j} Mv^{j-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda^j}{6} K\bar{u} + \frac{\lambda^{j+1/2}}{3} K(\bar{u} + u^{j-1}) + \frac{\lambda^{j-1}}{6} K u^{j-1} - g \right)_i, \end{aligned}$$

где $1 \leq i \leq n$. Отметим, что $F_i(u)$ зависит от всех компонент u , поскольку величины λ^j и $\lambda^{j+1/2}$ зависят от всех компонент u (см. (27)). Следствием этого является полная заполненность матрицы Якоби $F'(u)$. Это делает непрактичным использование при больших значениях n итерационных методов, требующих вычисления матрицы Якоби (например, метода Ньютона).

2. *Переформулировка дискретной задачи.* Дадим эквивалентную формулировку дискретной задачи (24). Для этого введем две новые неизвестные $\lambda = \lambda^j$, $\mu = \lambda^{j+1/2}$ и расширенный вектор неизвестных $U = (u, \lambda, \mu)$. Расширенная система уравнений для определения U включает следующие $n+2$ уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\bar{\tau}_j \tau_j} M(\bar{u} - u^{j-1}) - \frac{1}{\bar{\tau}_j} Mv^{j-1} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{6} K\bar{u} + \frac{\mu}{3} K(\bar{u} + u^{j-1}) + \frac{\lambda^{j-1}}{6} K u^{j-1} - g \right)_i = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{1}{12} \left(1 + K\bar{u} \cdot \bar{u} \right) - \frac{1}{12} \lambda = 0, \quad (30)$$

$$\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{4} K(\bar{u} + u^{j-1}) \cdot (\bar{u} + u^{j-1}) \right) - \frac{2}{3} \mu = 0, \quad (31)$$

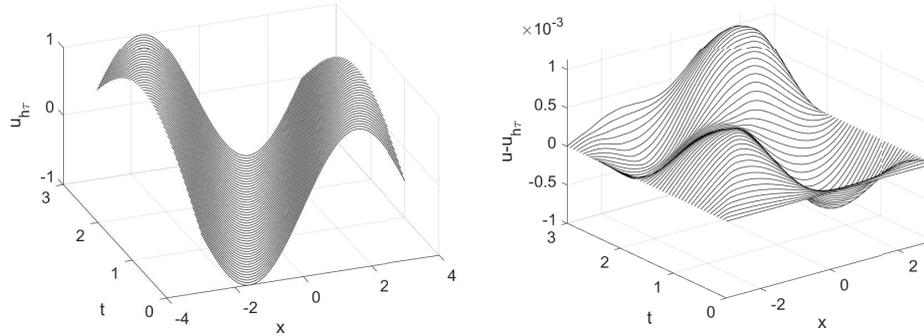


Рис. 1. Приближенное решение тестовой задачи 1 при $t = T$ (слева) и его погрешность (справа) на сетке узлов с шагами $h = 1/40$, $\tau = 3h/8$

где $\lambda^{j-1} = 1 + K u^{j-1} \cdot u^{j-1}$. Запишем эту систему в виде $\Phi(U) = 0$. Матрица Якоби этой расширенной системы является симметричной разреженной невырожденной матрицей вида²

$$\Phi'(U) = \begin{pmatrix} A & b & c \\ b^T & -1/12 & 0 \\ c^T & 0 & -2/3 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{\bar{\tau}_j \tau_j} M + \left(\frac{\lambda}{6} + \frac{\mu}{3} \right) K,$$

$$b = \frac{1}{6} K \bar{u}, \quad c = \frac{1}{3} K (\bar{u} + u^{j-1}),$$

поскольку A является разреженной симметричной положительно-определенной матрицей. Для решения системы (29)–(31) уже можно использовать метод Ньютона. На k -ой итерации он сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$F'(U^{(k)})(U^{(k+1)} - U^{(k)}) = -F(U^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

для нахождения приближения $U^{(k+1)}$ к решению U . Начальное приближение можно выбрать (например) с предыдущего слоя по времени.

3. Вычислительные эксперименты

Представим результаты решения тестовых задач с известными точными решениями. Вычисления были организованы с целью определения максимального порядка точности схемы на гладких решениях в среднеквадратичной норме и сеточной равномерной норме.

Функции в начальных условиях дискретной схемы равны интерполантам u_0 и v_0 . Для решения расширенной системы нелинейных алгебраических уравнений на каждом слое времени использован итерационный метод Ньютона с начальным приближением с предыдущего слоя. Во всех рассмотренных случаях метод сошелся квадратично. Итерации завершались следующим образом: после того как равномерная норма разности соседних итераций становилась меньше 10^{-8} , выполнялась еще одна итерация. При таком условии итерационный метод не оказывал влияния на погрешность схемы.

Приближенный метод зависит от двух параметров h и τ . Учитывая приближения, использованные при построении схемы, естественно ожидать, что погрешность

²Верхний индекс T означает операцию транспонирования.

Табл. 1

Нормы погрешности и порядки сходимости решения теста 1 при $\tau = 3h/8$

h	$L(u)$	$\alpha_{L(u)}$	$L(v)$	$\alpha_{L(v)}$	$C(u)$	$\alpha_{C(u)}$	$C(v)$	$\alpha_{C(v)}$
1/10	1.13 e-1	—	1.14 e-1	—	2.86 e-2	—	5.59 e-2	—
1/20	2.83 e-2	1.99	2.90 e-2	1.98	7.06 e-3	2.02	1.34 e-2	2.06
1/40	7.09 e-3	2.00	7.29 e-3	1.99	1.75 e-3	2.01	3.41 e-3	1.98
1/80	1.77 e-3	2.00	1.83 e-3	2.00	4.40 e-4	1.99	8.51 e-4	2.00
1/160	4.44 e-4	2.00	4.57 e-4	2.00	1.10 e-4	2.00	2.12 e-4	2.01

решения в среднеквадратичной норме имеет второй порядок малости как по h , так и по τ , т. е. справедлива оценка

$$L(u) = \|u - u_{h\tau}\|_{L_2(Q)} \leq C (h^2 + \tau^2). \quad (32)$$

Для экспериментальной проверки этой оценки были проведены следующие вычисления: для набора точек сетки $n = n_1, n_2, \dots$ (в одном направлении) и соответствующих им шагов сетки $h = h_1, h_2, \dots$ при $\tau = ch$ были найдены приближенные решения задачи с известным точным решением и вычислены величины $L(u)$ и $L(v)$. Одновременно были вычислены погрешности $C(u)$ и $C(v)$, где

$$C(u) = \max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq j \leq M} |u(a_i, t_j) - u_{h\tau}(a_i, t_j)|. \quad (33)$$

Для вычисления интегралов в определениях $L(u)$ и $L(v)$ использована высокоточная составная квадратурная формула. В предположении $E_h \approx Ch^\alpha$, где E_h — любая из указанных выше норм, и что постоянная C слабо зависит от h , были найдены значения α_i по формуле

$$\alpha_i = \log (E_{h_{i+1}}/E_{h_i}) / \log (h_{i+1}/h_i).$$

Значения $\alpha_i \approx 2$ соответствуют ожидаемому значению $\alpha = 2$.

Вычислениями было подтверждено, что предложенная схема сохраняет полную энергию (с точностью до ошибок округления). Как в одномерном, так и двумерном случаях был решен ряд задач при различных шагах сетки с исходными данными, удовлетворяющими условиям теоремы 1. По найденным решениям была вычислена вариация функционала энергии

$$\Delta E = \max_{t \in \omega_\tau} E_h(u_{h\tau}(t), v_{h\tau}(t)) - \min_{t \in \omega_\tau} E_h(u_{h\tau}(t), v_{h\tau}(t)).$$

Во всех случаях она имела порядок $10^{-16} \sim 10^{-12}$ в зависимости от шага h , что свидетельствует о постоянности функционала энергии.

Тестовая задача 1. Рассмотрим одномерное уравнение Кирхгофа на отрезке $[-4, 4]$ при $T = 3$ с точным решением $u(x, t) = \sin(x - t)$. Для решения задачи была использована равномерная сетка узлов с шагами h и τ . На рис. 1 представлен график приближенного решения и его погрешности. В таблице 1 указана зависимость от h норм погрешности (32), (33), а также соответствующих им значений α .

Тестовая задача 2. Рассмотрим двумерное уравнение Кирхгофа в квадрате $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$ при $T = 2$ с точным решением $u(x, y, t) = \sin(2x + 2y) \cos(t)$. Область Ω разбивалась на треугольные конечные элементы на основе равномерной ортогональной сетки из $(n + 1) \times (n + 1)$ узлов после деления одним и тем же способом каждого элементарного квадрата со стороной h на два треугольника. Равномерная сетка узлов использовалась также по переменной t (с шагом τ).

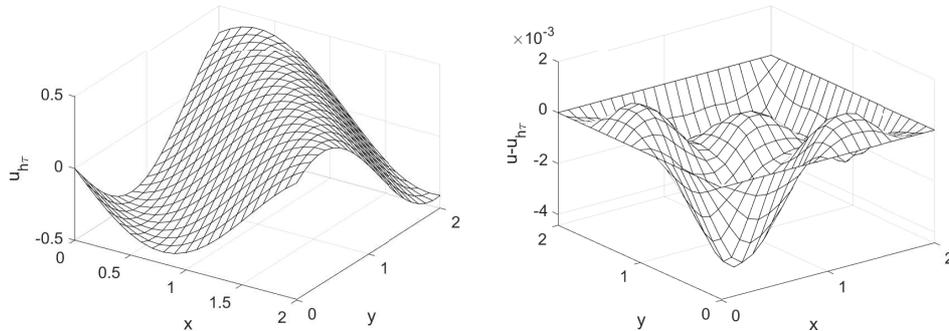


Рис. 2. Приближенное решение тестовой задачи 2 при $t = T$ (слева) и его погрешность (справа) на сетке узлов с шагами $h = 1/20$, $\tau = h$

Табл. 2

Нормы погрешности и порядки сходимости решения теста 2 при $\tau = h$

h	$L(u)$	$\alpha_{L(u)}$	$L(v)$	$\alpha_{L(v)}$	$C(u)$	$\alpha_{C(u)}$	$C(v)$	$\alpha_{C(v)}$
1/20	1.33 e-2	—	4.68 e-2	—	1.01 e-2	—	7.59 e-2	—
1/40	3.33 e-3	1.99	1.15 e-2	2.02	2.41 e-3	2.07	2.19 e-2	1.80
1/80	8.20 e-4	2.02	2.85 e-3	2.01	5.02 e-4	2.26	5.28 e-3	2.05
1/100	5.23 e-4	2.01	1.81 e-3	2.01	3.19 e-4	2.03	3.39 e-3	1.99

На рис. 2 представлены график приближенного решения и его погрешности на грубой сетке узлов. В таблице 2 указана зависимость от h норм погрешности (32), (33), а также соответствующих им значений α .

Результаты, аналогичные приведенным выше, были получены при решении других тестовых задач с гладкими решениями. Из них следует, что предложенная схема позволяет определить как решение задачи, так и его производную по времени с погрешностью порядка $O(h^2 + \tau^2)$ в среднеквадратической норме.

Заключение

Предложена неявная двухслойная схема МКЭ для решения нелинейного уравнения Кирхгофа. Дискретная схема определяется в терминах решения задачи и его производной по переменной времени. Показано, что она обеспечивает сохранение полной энергии на дискретном уровне. Проведено численное исследование точности предложенной схемы. Численным решением ряда тестовых задач, имеющих гладкие решения, показано, что она позволяет определить как решение задачи, так и его производную по времени с погрешностью порядка $O(h^2 + \tau^2)$ в среднеквадратической норме.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Литература

1. *Kirchhoff G.* Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 1: Mechanik. Leipzig: B.G. Teubner, 1876. 466 S.
2. *Бернштейн С.Н.* Новые приложения почти независимых величин // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 2. С. 137–150.
3. *Рогожаев S.I.* On a class of quasilinear hyperbolic equations // Math. USSR-Sb. 1975. V. 25, No 1. P. 145–158. URL: <https://doi.org/10.1070/SM1975v025n01ABEH002203>.
4. *Похожаев С.И.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С. 101–108.
5. *Lions J.L.* On some questions in boundary value problems of mathematical physics. Ser.: North-Holland Mathematics Studies. Vol. 30: Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations. De La Penha G.M., Medeiros L.A.J. (Eds.). Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1978. P. 284–346. URL: [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)70870-3](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70870-3).
6. *Arosio A., Panizzi S.* On the well-posedness of the Kirchhoff string // Trans. Am. Math. Soc. 1996. V. 348, No 1. P. 305–330.
7. *Arosio A.* Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces // Proc. 2nd Workshop on Functional-Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations. ICTP, Trieste, Jan. 25–29, 1993. Tutschke W., Mshimba A. (Eds.). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1995. P. 220–254. URL: <https://doi.org/10.1142/2927>.
8. *Lin X., Li F.* Global existence and decay estimates for nonlinear Kirchhoff-type equation with boundary dissipation // Differ. Equations Appl. 2013. V. 5, No 2. P. 297–317. URL: <https://doi.org/10.7153/dea-05-18>.
9. *Carrier G.F.* On the non-linear vibration problem of the elastic string // Q. Appl. Math. 1945. V. 3, No 2. P. 157–165.
10. *Cousin A.T., Frota C.L., Lar'kin N.A., Medeiros L.A.* On the abstract model of the Kirchhoff–Carrier equation // Commun. Appl. Anal. 1997. V. 1, No 3. P. 389–404.
11. *Cordeiro S.M.S., Pereira D.C., Ferreira J., Raposo C.A.* Global solutions and exponential decay to a Klein–Gordon equation of Kirchhoff–Carrier type with strong damping and nonlinear logarithmic source term // Partial Differ. Equations Appl. Math. 2021. V. 3. Art. 100018. URL: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2020.100018>.
12. *Зайцев В.В., Никулин А.В., Никулин В.В.* Нелинейный резонанс в струнном ЭМР // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2005. Т. 39, № 5. С. 125–130.
13. *Gudi T.* Finite element method for a nonlocal problem of Kirchhoff type // SIAM J. Numer. Anal. 2002. V. 50, No 2. P. 657–668. URL: <https://doi.org/10.1137/110822931>.
14. *Dond A.K., Pani A.K.* A priori and a posteriori estimates of conforming and mixed FEM for a Kirchhoff equation of elliptic type // Comput. Methods Appl. Math. 2017. V. 17, No 2. P. 217–236. URL: <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0041>.
15. *Srivastava V., Chaudhary S., Kumar V.V.K.S., Srinivasan B.* Fully discrete finite element scheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy // J. Appl. Math. Comput. 2017. V. 53, No 1–2. P. 413–443. URL: <https://doi.org/10.1007/s12190-015-0975-6>.
16. *Kundu S., Chaudhary S., Pani A., Khebhareon M.* Fully discrete finite element scheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy // Numer. Funct. Anal. Optim. 2016. V. 22, No 37. P. 719–752.

17. *Chaudhary S., Srivastava V., Kumar V.V.K.S.* Finite element scheme with Crank–Nicolson method for parabolic nonlocal problems involving the Dirichlet energy // *Int. J. Comput. Methods.* 2017. V. 14, No 5. Art. 1750053. URL: <https://doi.org/10.1142/S0219876217500530>.
18. *Peradze J.* A numerical algorithm for the nonlinear Kirchhoff string equation // *Numer. Math.* 2005. V. 102, No 2. P. 311–342. URL: <https://doi.org/10.1007/s00211-005-0642-1>.
19. *Bilbao S., Smith J.* Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings // *Acta Acust. Acust.* 2005. V. 91, No 2. P. 299–311.
20. *Shi D., Wu Y.* Nonconforming quadrilateral finite element method for nonlinear Kirchhoff-type equation with damping // *Math. Methods Appl. Sci.* 2020. V. 43, No 5. P. 2558–2576. URL: <https://doi.org/10.1002/mma.6065>.
21. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / под ред. О.А. Олейник; пер. с фр. Л.Р. Волевич. М.: Мир, 1972. 587 с.

Поступила в редакцию 10.07.2023

Принята к публикации 15.07.2023

Даутов Рафаил Замилович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: rafail.dautov@gmail.com

Иванова Мария Валерьевна, студентка 2 курса магистратуры, Институт вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: mashylik.1503@gmail.com

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.115-131

A Conservative Finite Element Scheme for the Kirchhoff Equation*R.Z. Dautov**, *M.V. Ivanova****Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: **rafail.dautov@gmail.com, **mashylik.1503@gmail.com*

Received July 10, 2023; Accepted July, 15, 2023

Abstract

This article presents an implicit two-layer finite element scheme for solving the Kirchhoff equation, a nonlinear nonlocal equation of hyperbolic type with the Dirichlet integral. The discrete scheme was designed considering the solution of the problem and its derivative for the time variable. It ensures total energy conservation at a discrete level. The use of the Newton method was proven to be effective for solving the scheme on the time layer despite the nonlocality of the equation. The test problems with smooth solutions showed that the scheme can define both the solution of the problem and its time derivative with an error of $O(h^2 + \tau^2)$ in the root-mean-square norm, where τ and h are the grid steps in time and space, respectively.

Keywords: Kirchhoff equation, finite element method, Petrov–Galerkin method, implicit scheme, Newton method

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Figure Captions

Fig. 1. Approximate solution of test problem 1 at $t = T$ (on the left) and its error (on the right) on the grid of nodes with step size $h = 1/40$, $\tau = 3h/8$.

Fig. 2. Approximate solution of test problem 2 at $t = T$ (on the left) and its error (on the right) on the grid of nodes with step size $h = 1/20$, $\tau = h$.

References

1. Kirchhoff G. *Vorlesungen über mathematische Physik*. Bd. 1: Mechanik. Leipzig, B.G. Teubner, 1876. 466 S. (In German)
2. Bernstein S.N. Nouvelles applications des grandeurs aléatoires presque indépendantes. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1940, vol. 4, no. 2, pp. 137–150. (In Russian and French)
3. Pohožaev S.I. On a class of quasilinear hyperbolic equations. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 25, no. 1, pp. 145–158. URL: <https://doi.org/10.1070/SM1975v025n01ABEH002203>.
4. Pokhozhaev S.I. The Kirchhoff quasilinear hyperbolic equation. *Differ. Equations*, 1985, vol. 21, no. 1, pp. 82–87.

5. Lions J.L. On some questions in boundary value problems of mathematical physics. Ser.: North-Holland Mathematics Studies. Vol. 30: Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations. De La Penha G.M., Medeiros L.A.J. (Eds.). Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1978, pp. 284–346. URL: [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)70870-3](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70870-3).
6. Arosio A., Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1996, vol. 348, no. 1, pp. 305–330.
7. Arosio A. Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces. *Proc. 2nd Workshop on Functional-Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations. ICTP, Trieste, Jan. 25–29, 1993*. Tutschke W., Mshimba A. (Eds.). River Edge, NJ, World Sci. Publ., 1995, pp. 220–254. URL: <https://doi.org/10.1142/2927>.
8. Lin X., Li F. Global existence and decay estimates for nonlinear Kirchhoff-type equation with boundary dissipation. *Differ. Equations Appl.*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 297–317. URL: <https://doi.org/10.7153/dea-05-18>.
9. Carrier G.F. On the non-linear vibration problem of the elastic string. *Q. Appl. Math.*, 1945, vol. 3, no. 2, pp. 157–165.
10. Cousin A.T., Frota C.L., Lar'kin N.A., Medeiros L.A. On the abstract model of the Kirchhoff–Carrier equation. *Commun. Appl. Anal.*, 1997, vol. 1, no. 3, pp. 389–404.
11. Cordeiro S.M.S., Pereira D.C., Ferreira J., Raposo C.A. Global solutions and exponential decay to a Klein–Gordon equation of Kirchhoff–Carrier type with strong damping and nonlinear logarithmic source term. *Partial Differ. Equations Appl. Math.*, 2021, vol. 3. Art. 100018. URL: <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2020.100018>.
12. Zaitsev V.V., Nikhulin A.V., Nikhulin V.V. Nonlinear resonance in a string resonator. *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2005, vol. 39, no. 5, pp. 125–130. (In Russian)
13. Gudi T. Finite element method for a nonlocal problem of Kirchhoff type. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2002, vol. 50, no. 2, pp. 657–668. URL: <https://doi.org/10.1137/110822931>.
14. Dond A.K., Pani A.K. A priori and a posteriori estimates of conforming and mixed FEM for a Kirchhoff equation of elliptic type. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 217–236. URL: <https://doi.org/10.1515/cmam-2016-0041>.
15. Srivastava V., Chaudhary S., Kumar V.V.K.S., Srinivasan B. Fully discrete finite element scheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy. *J. Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 53, nos. 1–2, pp. 413–443. URL: <https://doi.org/10.1007/s12190-015-0975-6>.
16. Kundu S., Chaudhary S., Pani A., Khebchareon M. Fully discrete finite element scheme for nonlocal parabolic problem involving the Dirichlet energy. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2016, vol. 22, no. 37, pp. 719–752.
17. Chaudhary S., Srivastava V., Kumar V.V.K.S. Finite element scheme with Crank–Nicolson method for parabolic nonlocal problems involving the Dirichlet energy. *Int. J. Comput. Methods*, 2017, vol. 14, no. 5, art. 1750053. URL: <https://doi.org/10.1142/S0219876217500530>.
18. Peradze J. A numerical algorithm for the nonlinear Kirchhoff string equation. *Numer. Math.*, 2005, vol. 102, no. 2, pp. 311–342. URL: <https://doi.org/10.1007/s00211-005-0642-1>.
19. Bilbao S., Smith J. Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings. *Acta Acust. Acust.*, 2005, vol. 91, no. 2, pp. 299–311.

-
20. Shi D., Wu Y. Nonconforming quadrilateral finite element method for nonlinear Kirchhoff-type equation with damping. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, vol. 43, no. 5, pp. 2558–2576. URL: <https://doi.org/10.1002/mma.6065>.
21. Lions J.L. *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems]. Oleinik O.A. (Ed.), Volevich L.R. (Transl.). Moscow, Mir, 1972. 587 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Даутов Р.З., Иванова М.В. Консервативная схема метода конечных элементов для уравнения Кирхгофа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 115–131. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.115-131>.

For citation: Dautov R.Z., Ivanova M.V. A conservative finite element scheme for the Kirchhoff equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 115–131. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.115-131>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.132-142

РЕШЕНИЯ ДИРИХЛЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Н. П. Евлампиев¹, В. С. Мокейчев², И. Е. Филиппов²

¹ООО "Блиц-М", г. Казань, 420066, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия существования решения Дирихле, разработан метод для вычисления решений Дирихле функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим линейным отклонением аргумента.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, решение Дирихле, опережение аргумента, линейное отклонение аргумента, символ псевдодифференциального оператора

Введение

Среди дифференциальных уравнений (кратко ДУ) одного аргумента, не являющихся обыкновенными, наибольшее развитие получили ДУ с отклонениями аргумента. Это ДУ вида

$$P(t, d/dt)y(t) = \Phi\left(t, y(h_0(t)), \dots, y^{(n)}(h_n(t))\right), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где

$$P(t, d/dt)y(t) = y^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} C_j(t)y^{(j)}(t),$$

$\Phi(t, x_1, \dots, x_{n+1})$, $C_j(t)$, $h_j(t)$ – известные функции, не зависящие от y . Функции $h_j(t) - t$ называются отклонениями аргумента. Если $h_j(t) - t \leq \tau < 0$ при всех $t \geq 0$, то говорят, что ДУ – с запаздывающим аргументом.

Теория ДУ с запаздывающим аргументом практически не отличается от теории линейных обыкновенных ДУ. Убедимся в этом.

Положим известными $y(\xi) = \psi_0(\xi)$, ..., $y^{(n)}(\xi) = \psi_n(\xi)$ при $\xi \leq 0$. Чтобы вычислить $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, решим задачу Коши для обыкновенного ДУ

$$P(t, d/dt)y(t) = \Phi\left(t, \psi(h_0(t)), \dots, \psi^{(n)}(h_n(t))\right), \quad t \in [0, \tau], \quad y^{(j)}(+0) = y_{0,j},$$

$j = 0, \dots, n - 1$, в котором правая часть известна, а $y_{0,j}$ произвольно зафиксированы. Найдем $y(t)$, $t \in [0, \tau]$, и $y(t)$ при $t \leq \tau$. Чтобы вычислить $y(t)$, $t \in [\tau, 2\tau]$, следует использовать условия Коши $y^{(j)}(\tau+0) = y^{(j)}(\tau-0)$, $j = 0, \dots, n-1$. Получим $y(t)$ при $t \leq 2\tau$. Аналогично вычислим $y(t)$, $t \leq k\tau$, $k = 3, \dots$

Если хотя бы одно отклонение не является запаздыванием, то проблема разрешимости ДУ (1.1) резко усложняется. Проблема разрешимости таких ДУ стала актуальной, когда появились математические модели, в которых одно из отклонений является опережением, то есть $h_k(t) - t > 0$. Методы решения таких ДУ изложены в [1]. Этому удалось добиться при $t \in (a, b)$ и конечных a, b после замены начальных условий Коши на $(b - a)$ -периодические.

В случае $h_j(t) = \lambda_j t + a_j$, λ_j, a_j – числа при всех j , отклонения называются линейными. Отклонение $\lambda_j t - t$ аргумента $t > 0$ не может быть запаздыванием, если $\lambda_j > 1$.

Во втором параграфе обзорной статьи [2] С. Адамс пишет, что уравнение $f(qx) - f(x) = 0$, отмеченное Бербиджем в 1815 г., является первым " q -разностным" уравнением, появившимся в литературе. Там же Адамс отмечает, что в 1924 г. П. Фламаном [3] было проведено единственное тщательно выполненное исследование (с точки зрения аналитических решений) разрешимости уравнения $f^{(1)}(x) = a(x)f(qx) + b(x)$, $|q| < 1$, где $a(x)$ и $b(x)$ – аналитические в такой замкнутой односвязной области D , что $qx \in D$ при всех $x \in D$. По-видимому, ДУ Амбарцумяна $y^{(1)}t + y(t) = by(\lambda t)$, $t \geq 0, \lambda > 1$, – первая математическая модель с линейным отклонением аргумента. Она построена в 1944 г. (подробности см. в [4, 5]). В этой модели $y(t)$ – плотность распределения случайной величины. Поэтому к ДУ Амбарцумяна добавлялись условия $y(t) \geq 0, \int_0^{+\infty} y(t)dt = 1$. Полученную задачу мы называем задачей Амбарцумяна. Г. И. Русаков [5] записал решение задачи Амбарцумяна в виде функционального ряда. В работах [6–10] проведено дальнейшее изучение и обобщение задачи Амбарцумяна.

В настоящей статье изложена теория дифференциального уравнения

$$P(d/dt)y(t) + (P_1(d/dt)y)(\lambda t) = 0, \quad t \geq 0,$$

в котором

$$P(\xi) = \xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \geq 1;$$

и

$$P_1(\xi) = \xi^q + b_{q-1}\xi^{q-1} + \dots + b_0, \quad q \geq 0,$$

– символы дифференциальных операторов $P(d/dt)$, $P_1(d/dt)$, $((d/dt)^k y)(\lambda t) = y^{(k)}(\lambda t)$, $a_j, b_j, \lambda > 1$ – числа. Всюду $N = \max(n, q)$.

1. Понятие λ -независимости

Определение 2.1. Числа d_1, d_2 называются λ -независимыми, если не существует целого p , при котором $d_1 = \lambda^p d_2$; в противном случае числа d_1, d_2 называются λ -зависимыми; а числа d_1, \dots, d_s – попарно λ -независимыми, если

$$d_k \neq \lambda^p d_j \quad \text{при всех } p \in Z \text{ и всех } k \neq j.$$

Здесь и далее Z – множество всех целых чисел.

Легко видеть, что в отличие от λ -независимости свойство λ -зависимости транзитивно, то есть если d_1, d_2 λ -зависимы и d_2, d_3 λ -зависимы, то d_1, d_3 λ -зависимы.

Определение 2.2. Подмножество D_1, \dots, D_l множества $D = \{d_1, \dots, d_s\} \subset Z$ называется λ -разбиением D , если

$$1) \quad D_k \cap D_j = \emptyset \quad \text{при } k \neq j, \quad \bigcup_{k=1}^l D_k = D;$$

2) из того, что $d_m \in D_k, d_j \in D_r$, следует, что d_m, d_j λ -зависимы при $k = r$ и λ -независимы при $k \neq r$.

Теорема 1. *Для каждого D существует λ -разбиение.*

Доказательство. Зафиксируем $d_1 \in D$ и найдем все числа $d_{r_1} \in D$, λ -зависимые от d_1 . Полученное множество обозначим D_1 . Если D/D_1 не пусто, то зафиксируем $d_2 \in D/D_1$ и найдем все λ -зависимые от d_2 числа $d_{r_2} \in D/D_1$. Полученное множество обозначим D_2 . Продолжив этот процесс, докажем теорему. Отметим, что в случае конечности D количество множеств D_r также конечно, причём λ -разбиение единственно. \square

Здесь и далее \square означает конец доказательства текущего результата.

2. Решение Дирихле уравнения $P(d/dt)y(t) = by(\lambda t)$, $t \geq 0$

Определение 3.1. $y(t)$ называется решением Дирихле уравнения, если

1) существует такое a , что

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t), \quad (3.1)$$

α_k – некоторые постоянные;

2)

$$P(d/dt)y(t) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} P(d/dt) \left(\alpha_k \exp(a\lambda^k t) \right) = by(\lambda t); \quad (3.2)$$

3) ряд сходится при каждом $t \geq 0$.

Число a в (3.1) называется показателем решения Дирихле.

Для приложений интересен случай $a < 0$. Наиболее просто решения Дирихле уравнения (3.2) находятся в случае, когда степень $P_1(\xi)$ равна нулю.

Теорема 2. *Справедливы утверждения:*

1) ДУ имеет решение Дирихле с показателем $a < 0 \Leftrightarrow$ имеет решение линейная система алгебраических уравнений

$$P(a\lambda^k)\alpha_k = b\alpha_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

2) Количество линейно независимых решений Дирихле уравнения (3.2) равно количеству попарно λ -независимых отрицательных корней символа $P(\xi)$.

Доказательство. Пусть $y_0(t)$ – решение вида (3.1) уравнения (3.2). Докажем, что α_k , $k = 0, 1, \dots$, – решение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (3.3).

В силу (3.2) имеем $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a\lambda^k t) \equiv 0$, где $\beta_k = P(a\lambda^k)\alpha_k - b\alpha_{k-1}$, $\alpha_{-1} = 0$, причём $|\beta_k| \leq C$. Проинтегрировав это тождество q раз от 0 до $+\infty$, получим $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \lambda^{-kq} \exp(a\lambda^k t) \equiv 0$. Зафиксируем q так, чтобы $\sum_{k=0}^{+\infty} |\beta_k| \lambda^{-kq} < +\infty$. Тогда при каждом целом $r \geq 0$

$$\sum_{k=r+1}^{+\infty} \beta_k \lambda^{-kq} \exp(a(\lambda^k - \lambda^r)t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

С другой стороны, $\beta_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \exp(a(\lambda^k - \lambda^0)t) = 0$. После перехода к пределу при $t \rightarrow +\infty$ получим $\beta_0 = 0$. Аналогично докажем, что $\beta_1 = 0$, и так далее. Поэтому $y_0(t)$ ненулевое, если $P(a\lambda^k) = 0$ при некотором k .

Обратно, пусть при некотором $a < 0$ существует $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ – ненулевое решение системы уравнений (3.3). Так как $\lambda > 1$, $a < 0$, $|P(a\lambda^k)| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t)$ сходится, и его сумма – решение Дирихле для (3.2).

Отметим, что система уравнений имеет ненулевое решение только при тех показателях a , для которых

$$P(a\lambda^k) = 0 \quad \text{хотя бы при одном целом } fk \geq 0. \quad (3.4)$$

Действительно, если $P(a\lambda^k) \neq 0$, $k = 0, 1, \dots$, то из равенств (3.3) и $\alpha_0 = 0$ следует, что $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots$. Итак, если $P(\xi)$ не имеет отрицательных корней, то у (3.2) отсутствуют решения Дирихле с отрицательным показателем.

Изучим два случая.

1) $P(\xi)$ имеет единственный отрицательный корень d_1 . Положив $a = d_1$, $\alpha_0 = 1$, получим решение системы уравнений (3.3): $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = b^n \left(\prod_{j=1}^n P(d_1\lambda^j) \right)^{-1}$, а значит, и решение Дирихле $y_{d_1}(t)$ с показателем $a = d_1$ для (3.2). Выясним, существует ли решение Дирихле с другим отрицательным показателем $a_0 < 0$.

Если $y_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a_0\lambda^k t)$, то в силу теоремы 2 $P(a_0\lambda^k)\beta_k = b\beta_{k-1}$, $\beta_{-1} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Так как $P(\xi)$ имеет единственный отрицательный корень d_1 , то $a_0\lambda^{k_0} = d_1$ при некотором целом $k_0 \geq 1$, и $P(a_0\lambda^k) \neq 0$, если $k \neq k_0$. Тогда $0 = b\beta_{k_0-1}$, $\beta_{k_0-2} = 0, \dots, \beta_0 = 0$, $\beta_{k_0} = C_2$ – постоянная. Следовательно, $\beta_{k_0} = \alpha_0 C_2$, $\beta_{k_0+r} = \alpha_r C_2$, $r = 1, 2, \dots$, $y_{a_0}(t) = C_2 y_{d_1}(t)$.

2) символ $P(\xi)$ имеет $m \geq 2$ отрицательных корней $d_1 > d_2 > \dots > d_m$. В силу (3.4) система (3.3) имеет ненулевое решение только при следующих значениях показателя Дирихле: $a_{r,j} = d_j \lambda^{-r}$, $j = 1, \dots, m$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Положим $a = d_1$ и рассмотрим систему уравнений

$$P(d_1)\alpha_0 = 0, \dots, P(d_1\lambda^k)\alpha_k = b\alpha_{k-1}. \quad (3.5)$$

Если d_1 попарно λ -независимы от $\lambda_2, \dots, \lambda_m$, то

$$P(d_1\lambda^k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Действительно, в случае $P(d_1\lambda^{k_0}) = 0$ при некотором $k_0 \geq 1$ получим $d_1\lambda^{k_0} < d_1$ и $d_1\lambda^{k_0} = d_r$ для некоторого $r \leq m$, то есть d_1, d_r – λ -зависимы, что является противоречием.

В силу (3.6) система (3.5) имеет решение, определяемое равенствами (3.3) при $a = d_1$, $\alpha_0 = 1$, с помощью которого находится решение Дирихле $y_{d_1}(t)$ с показателем d_1 . Как установлено в первом случае, каждое решение Дирихле с показателем $d_1\lambda^{-p}$, где $p \in Z$, имеет вид $C_3 y_{d_1}(t)$, C_3 не зависит от t .

Предположим, что d_1 λ -зависит от d_j , $j \geq 2$. Обозначим $I_1 = \{j : \lambda\text{-зависимы } d_1, d_j\}$. Отметим, что $1 \in I_1$, так как $d_1 = d_1\lambda^0$. Введём показатель Дирихле $d_0 = \min_{j \in I_1} d_j$. Если бы существовало $k_0 \geq 1$, при котором $P(d_0\lambda^{k_0}) = 0$, то получили бы $\tilde{d}_0 = d_0\lambda^{k_0} < d_0$, причём d_1, d_0 λ -зависимы. Тогда d_1, \tilde{d}_0 λ -зависимы, противоречие. Следовательно, $P(d_0\lambda^k) \neq 0$ при $k \geq 1$. Поэтому решение системы (3.6), в которой d_1 заменено на d_0 , имеет вид $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = b^n \left(\prod_{j=1}^n P(d_0\lambda^j) \right)^{-1}$,

и ему соответствует решение Дирихле $y_{d_0}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t)$, так как имеет вид (3.1). Как и ранее, легко проверим, во-первых, что соответствующие $d_j \in I_1$ решения Дирихле уравнения (3.2) имеют вид $y_{d_j}(t) = C_j y_{d_0}(t)$, C_j не зависят от t . Во-вторых, показатель Дирихле $d_j \lambda^{-r}$ не индуцирует нового решения Дирихле, то есть $y_{d_0}(t) = C_j y_{d_j \lambda^{-r}}(t)$ при целых $r > 0, j \in I_1$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось записать максимальное количество линейно независимых решений Дирихле. Выделим λ -разбиение D_1, \dots, D_s множества $D = \{d_1, \dots, d_m\}$ и зафиксируем наибольшее $a_j \in D_j$. Как было доказано ранее, все решения Дирихле, определяемые точками из D_j , с точностью до постоянного множителя совпадают с решением Дирихле $y_{a_j}(t)$. Поэтому линейно независимыми могут быть только $y_{a_1}(t), \dots, y_{a_s}(t)$. Предположим, что $C_1 y_{a_1}(t) + \dots + C_s y_{a_s}(t) \equiv 0$. Перепишем это равенство в виде

$$C_1 \alpha_{0,1} \exp(a_1 t) + C_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k,1} \exp(a_1 \lambda^k t) + \sum_{j=2}^s C_j \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,j} \exp(a_j \lambda^k t) \equiv 0,$$

то есть

$$C_1 \alpha_{0,1} + C_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k,1} \exp((a_1 \lambda^k - a_1)t) + \sum_{j=2}^s C_j \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{k,j} \exp((a_j \lambda^k - a_1)t) \equiv 0. \quad (3.7)$$

В этих формулах $0 > a_1 > \dots > a_s$, $a_j \lambda^k - a_1 < 0$ при всех $k \geq 1, j \geq 1$. Поэтому после перехода к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в (3.7) получим $C_1 \alpha_{0,1} = 0$. Однако $\alpha_{0,1} \neq 0$, следовательно, $C_1 = 0$. Аналогично докажем $C_2 = \dots = C_s = 0$. \square

Замечание 3.1. В теореме 2 указано не только количество линейно независимых решений Дирихле ДУ (3.1), но и установлен их явный вид: каждому подмножеству $D_j, j = 1, \dots, l$, λ -разбиения множества всех отрицательных корней символа $P(\xi)$ соответствует семейство решений Дирихле

$$C \left(\exp(d_{j_0} t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b^k \prod_{j=1}^k (P(d_{j_0} \lambda^j))^{-1} \exp(d_{j_0} \lambda^k t) \right),$$

C – произвольно зафиксированная постоянная, и $d_{j_0} = \min_{d_k \in D_j} d_k$. В силу линейности ДУ (3.2), если $y_1(t), \dots, y_s(t)$ – частные решения ДУ (3.2), то их линейная комбинация – также решение ДУ (3.2).

Замечание 3.2. Ненулевое решение Дирихле $y(t)$ ДУ (3.2) знакопостоянное в случае $\text{sgn} P(a\lambda^k) = \text{sgn}(b)$, $k = 1, 2, \dots$, поэтому существует решение Дирихле $y(t)$, для которого $y(t) > 0$, $\int_0^{+\infty} y(t) dt = 1$.

Замечание 3.3. Из приведенных рассуждений следует, что в (3.2) t можно считать комплексным аргументом: тогда вместо записи $\text{Re } a < 0, t \geq 0$ следует использовать $\text{Re}(at) < 0$.

Замечание 3.4. Пока неизвестно, существуют ли у ДУ (3.2) решения, не являющиеся решениями Дирихле.

3. Неоднородное ДУ

Речь пойдёт о ДУ

$$P(d/dt)x(t) = bx(\lambda t) + f(t), \quad \lambda > 1, \quad (4.1)$$

в котором b, λ не зависят ни от x , ни от t , а $f(t)$ не зависит от $x(t)$.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \exp(a\lambda^k t), \quad \operatorname{Re}(at) < 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |f_k| \lambda^{-kn} < +\infty. \quad (4.2)$$

Напомним, n – степень многочлена $P(\xi)$. Из предположения (4.2), в частности, следует, что аргумент в (4.1) можно считать комплексным.

Предположим, что $x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a\lambda^k t)$ – решение ДУ (4.1), где β_k не зависят от t . Формальные действия приведут к равенствам

$$P(a\lambda^k)\beta_k = b\beta_{k-1} + f_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4.3)$$

где β_k не зависят от t . Так как $|P(\xi)| \geq |\xi|^n/2$ при $|\xi| \geq M_0$, то $|P(a\lambda^k)| \geq 2|\lambda^{kn}|$, если $k \geq M_1$. Следовательно,

$$|\beta_k| \leq |2b| |\lambda^{-kn}| |\beta_{k-1}| + 2|f_k| |\lambda^{-k}|$$

при всех $k \geq M_1$, и

$$S_{M, M_1} \equiv \sum_{k=M_1}^M |\beta_k| \leq 2|b| |\lambda^{-M_1}| \sum_{k=M_1-1}^M |\beta_{k-1}| + 2|f_k| |\lambda^{-kn}|,$$

$$S_{M, M_1} (1 - 2|b| \lambda^{-M_1}) \leq 2|b| \lambda^{-M_1} |\beta_{M_1-1}| + \sum_{k=0}^{+\infty} 2|f_k| |\lambda^{-kn}|.$$

Поэтому при всех достаточно больших M и некотором M_1 имеем $S_{M, M_1} \leq b_{M_1}$, где b_{M_1} не зависит от M , то есть ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k$ абсолютно сходится. Отсюда и из ограниченности $|\exp(a\lambda^k t)|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k \exp(a\lambda^k t)$, так как $\operatorname{Re}(at) < 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3. Если выполняется (4.2) и система уравнений (4.3) имеет решение, то ДУ (4.1) имеет решение Дирихле с показателем a .

4. Общий случай

Речь пойдёт о ДУ

$$P(d/dt)y(t) = (P_1(d/dt)y)(\lambda t), \quad t \geq 0, \quad \lambda > 1, \quad n > q. \quad (5.1)$$

Напомним, что n, q – степени многочленов $P(\xi)$, $P_1(\xi)$ соответственно. В случае $n \leq q$ заменой $\lambda t = \tau$ придём к уравнению "запаздывающего" типа.

В рассматриваемом случае под решением Дирихле с показателем a понимается функция

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \exp(a\lambda^k t), \quad (5.2)$$

где α_k не зависят от t и λ и удовлетворяют условиям $|\alpha_k| \leq \lambda^j$ при некотором j ,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(d/dt) \left(\alpha_k \exp(a\lambda^k t) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P_1(d/d\tau) \left(\alpha_k \exp(a\lambda^k \tau) \right) \Big|_{\tau=\lambda t}. \quad (5.3)$$

Теорема 4. ДУ (5.1) имеет решение Дирихле с показателем $a < 0 \Leftrightarrow$ разрешима система уравнений

$$P(a\lambda^k)\alpha_k = P_1(a\lambda^{k-1})\alpha_{k-1}, \quad \alpha_{-1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, докажем, что если ДУ (5.1) имеет решение Дирихле (5.2), то выполняются условия (5.4).

Предположим, что система (5.4) имеет решение. Очевидно, что при всех достаточно больших $k \geq M$ выполняются оценки $|P(a\lambda^k)| \geq (1/2)|a\lambda^k|^n$, $|P_1(a\lambda^k)| \leq 2|a\lambda^k|^q$. Учитывая их и неравенство $\lambda > 1$, получим $\sum_{k=0}^{+\infty} |\alpha_k| < +\infty$ и сходимость ряда из (5.2). Его сумма является решением Дирихле с показателем a для ДУ (5.1). \square

Ниже $D = \{d_{1,0}, \dots, d_{m,0}\}$ – множество всех отрицательных корней символа $P(\xi)$, и D_1, \dots, D_l – его λ -разбиение.

Теорема 5. Существуют $y_{d_1}(t), \dots, y_{d_l}(t)$ – линейно независимые решения Дирихле с отрицательными показателями $d_j \in D_j, j = 1, \dots, l$.

Доказательство. Итак, $P(d_j) = 0$. Зафиксируем наибольшее k_j так, чтобы $P(d_j\lambda^{k_j}) = 0$, $P(d_j\lambda^k) \neq 0$ при $k \geq k_j + 1$. Легко проверить, что при $a = d_j$ решением системы уравнений (5.4) будет

$$\alpha_k = 0 \text{ при } k \leq k_j - 1; \quad \alpha_{k_j} = 1; \quad \alpha_{k_j+r} = \prod_{s=1}^r \left(P_1(d_j\lambda^{k_j+s-1}) / P(d_j\lambda^{k_j+s}) \right), \quad r = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Поэтому $y_{d_j}(t) = \exp(d_j\lambda^{k_j}t) + \sum_{r=1}^{+\infty} \alpha_{k_j+r} \exp(d_j\lambda^{k_j+r}t)$ – решение Дирихле для ДУ (5.1) с показателем d_j .

Пусть $c \in D_j$, то есть $P(c) = 0$. Зафиксируем наибольшее k_c , при котором $P(c\lambda^{k_c}) = 0$, $P(c\lambda^{k_c+r}) \neq 0$, $r = 1, 2, \dots$. В этом случае при $a = c$ решением системы (5.4) будет

$$\tilde{\alpha}_k = 0 \text{ при } k \leq k_c - 1; \quad \tilde{\alpha}_{k_c} = 1; \quad \tilde{\alpha}_{k_c+r} = \prod_{s=1}^r \left(P_1(d_j\lambda^{k_c+s-1}) / P(d_j\lambda^{k_c+s}) \right), \quad r = 1, 2, \dots$$

Так как d_j, c λ -зависимы, то $c = d_j\lambda^{k_0}$ при некотором целом k_0 . Поэтому $P(d_j\lambda^{k_c+k_0}) = 0$, $P(d_j\lambda^{k_c+k_0+r}) \neq 0$, $r = 1, 2, \dots$. В силу (5.5) получим $k_c + k_0 \leq k_1$. Если бы $k_c + k_0 < k_1$, то в силу $P(c\lambda^{k_c+r}) \neq 0$, $r = 1, 2, \dots$, при $r = k_1 - (k_c + k_0)$ получили бы $P(d_j\lambda^{k_1}) \neq 0$. Это противоречие. Следовательно, $k_c + k_0 = k_1$, и $y_c(t) = y_{d_j}(t)$.

Изменив j , получим решения Дирихле $y_{d_1}(t), \dots, y_{d_l}(t)$ с наибольшими k_j , при которых $P(d_j \lambda^{k_j}) = 0$, $P(d_j \lambda^{k_j+r}) \neq 0$, $r = 1, 2, \dots$. Докажем их линейную независимость.

Числа $d_1 \lambda^{k_1}, \dots, d_l \lambda^{k_l}$ различные, так как в противном случае получили бы парную λ -зависимость. Поэтому после перенумерации имеем

$$d_1 \lambda^{k_1} > \dots > d_l \lambda^{k_l}. \quad (5.6)$$

Предположим, что $C_1 y_{d_1}(t) \equiv \sum_{j=2}^l C_j y_{d_j}(t)$, C_j не зависят от t . Тогда

$$C_1 = -C_1 \sum_{r=1}^{+\infty} \exp(d_1(\lambda^{k_1+r} - \lambda^{k_1})t) + \sum_{j=2}^l C_j \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_{k_j} \exp(d_j \lambda^{k_j+r} - d_1 \lambda^{k_1})(t).$$

Переходя здесь к пределу при $t \rightarrow +\infty$ и учитывая, что $\lambda > 1$, $\sum |\alpha_k| < +\infty$, и условие (5.6), получим $C_1 = 0$. Аналогично докажем, что $C_j = 0$ при $j \geq 2$. \square

Замечание 5.1. Так как ДУ (5.1) линейное, то $A_1 y_{d_1}(t) + \dots + A_l y_{d_l}(t)$ – решение ДУ (5.1) при любых постоянных A_1, \dots, A_l .

Замечание 5.2. Если $P_1(d_j \lambda^{k-1})/P(d_j \lambda^k) \geq 0$ при каждом $k \geq k_j + 1$, то ДУ (5.1) имеет решение $y(t) = C y_{d_j}(t)$ с постоянной C , удовлетворяющее условиям $y(t) \geq 0$, $\int_0^{+\infty} y(t) dt = 1$, то есть $y(t)$ – плотность распределения случайной величины.

Замечание 5.3. Введём псевдодифференциальные операторы Q_1, Q_2 , определяемые символами $Q_1(\xi), Q_2(\xi)$. Это означает, что $Q_j \exp(\xi t) = Q_j(\xi) \exp(\xi t)$ при всех ξ, t , причём $Q_j(\xi)$ не зависят от t . Если у символа $Q_1(\xi)$ имеется конечное количество отрицательных корней, $|Q_1(\xi)| \rightarrow +\infty$ при $\xi \rightarrow -\infty$, $|Q_2(a \lambda^{k-1})/Q_1(a \lambda^k)| \leq (|\xi| + 1)^c$, где $c < 0$ не зависит от ξ , то всё вышесказанное переносится на псевдодифференциальное уравнение $Q_1 y(t) = (Q_2 y)(\lambda t)$, $\lambda > 1$.

Замечание 5.4. Для ДУ $\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t + \tau_{0,j}) = \sum_{j=0}^q b_j y^{(j)}(x + \tau_{1,q}) \Big|_{x=\lambda t}$ с отклонениями аргумента символами являются

$$Q_1(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \xi^j \exp(\xi \tau_{0,j}), \quad Q_2(\xi) = \sum_{j=0}^q b_j \xi^j \exp(\xi \tau_{1,j}).$$

Заключение

Получены необходимые условия существования решения задачи Дирихле, разработан метод вычисления решения Дирихле для функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим линейным отклонением аргумента.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Литература

1. *Мокейчев В.С.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. 221 с.
2. *Adams C.R.* Linear q -difference equations // Bull. Am. Math. Soc. 1931. V. 37, No 6. P. 361–400.
3. *Flamant P.* Sur la forme des solutions d'une équation différentielle fonctionnelle // C. R. Acad. Sci., Paris. 1924. V. 137. P. 1595–1597.
4. *Амбарцумян В.А.* Научные труды в 3 т. Ереван: Изд-во АН Армян. ССР, 1960. Т. 1. 430 с.
5. *Русаков Г.И.* Флуктуация яркости Млечного пути // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. Матем. наук. 1949. Вып. 18. С. 53–79.
6. *Мокейчев В.С., Евлампиев Н.П.* О решении на полуоси дифференциально- q -разностного уравнения // Изв. вузов. Матем. 1991. № 4. С. 44–47.
7. *Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е.* Плотность распределения яркости света в случае поглощающих облаков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, кн. 4. С. 126–129.
8. *Евлампиев Н.П., Сидоров А.М., Филиппов И.Е.* Об одном обобщении уравнения Амбарцумяна // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 4. С. 25–30.
9. *Евлампиев Н.П., Сидоров А.М., Филиппов И.Е.* Об одном функционально-дифференциальном уравнении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158, кн. 2. С. 194–201.
10. *Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E.* On a functional differential equation // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, No 3. P. 588–593. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080217030027>.

Поступила в редакцию 1.04.2023

Принята к публикации 13.09.2023

Евлампиев Николай Петрович, директор

ООО "Блиц-М"

ул. Владимира Кулагина, д. 1, г. Казань, 420054, Россия

Мокейчев Валерий Степанович, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Valery.Mokeychev@kpfu.ru

Филиппов Игорь Евгеньевич, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: Igor.Filippov@kpfu.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2023, vol. 165, no. 2, pp. 132–142

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.132-142

Dirichlet Solutions of Functional Differential Equations without Delay*N.P. Evlampiev^a, V.S. Mokeichev^{b*}, I.E. Filippov^{b**}*^a*ООО Blits-M, Kazan, 420054 Russia*^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: **Valery.Mokeychev@kpfu.ru*, ***Igor.Filippov@kpfu.ru*

Received April 1, 2023; Accepted September 13, 2023

Abstract

Necessary and sufficient conditions for the existence of a valid Dirichlet solution were obtained. A method was developed to find Dirichlet solutions of the functional differential equation with non-delayed linear argument deviation.

Keywords: functional differential equation, Dirichlet solution, advance of the argument, linear deviation of the argument, pseudo-differential operator symbol

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

References

1. Mokeichev V.S. *Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami* [Differential Equations with Deviating Arguments]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1985. 221 p. (In Russian)
2. Adams C.R. Linear q -difference equation. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, no. 6, pp. 361–400.
3. Flamant P. Sur la forme des solutions d'une équation différentielle fonctionnelle. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 1924, vol. 137, pp. 1595–1597. (In French)
4. Ambartsumyan V.A. *Nauchnye trudy* [Research Works]. Vol. 1. Yerevan, Izd. Akad. Nauk Arm. SSR, 1960. 430 p. (In Russian)
5. Rusakov G.I. Fluctuations in brightness of the Milky Way. *Uch. Zap. Leningr. Univ. Ser. Mat. Nauk*, 1949, no. 18, pp. 53–79. (In Russian)
6. Mokeichev V.S., Evlampiev N.P. Solution of a differential- q -difference equation on the semi-axis. *Sov. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 42–45.
7. Evlampiev N.P., Mokeichev V.S., Philippov I.E. Density of distribution of light intensity in the case of absorbing clouds. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskije Nauki*, 2012, vol. 154, no. 4, pp. 126–129. (In Russian)
8. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Philippov I.E. On a generalization of Ambartsumyan's equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskije Nauki*, 2014, vol. 156, no. 4, pp. 25–30. (In Russian)

-
9. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E. On some functional-differential equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 194–201. (In Russian)
 10. Evlampiev N.P., Sidorov A.M., Filippov I.E. On a functional differential equation. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 3, pp. 588–593. URL: <https://doi.org/10.1134/S1995080217030027>.
-

Для цитирования: Евлампиев Н.П., Мокейчев В.С., Филиппов И.Е. Решения Дирихле функционально-дифференциальных уравнений не запаздывающего типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 132–142. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.132-142>.

For citation: Evlampiev N.P., Mokeichev V.S., Filippov I.E. Dirichlet solutions of functional differential equations without delay. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 132–142. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.132-142>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.853

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.143-152

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ

И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина, Р. С. Яруллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Предложен метод решения задачи выпуклого программирования. Он относится к группе методов отсечений, в которых для построения итерационных точек используется операция погружения области ограничений задачи в некоторые многогранные множества. Предлагаемый метод характерен следующим. Последовательность приближений строится в нем принадлежащей допустимому множеству, причем с условием релаксационности, и через конечное число шагов фиксируется ε -решение исходной задачи. Кроме того, метод позволяет получать на его основе смешанные сходящиеся алгоритмы, привлекая при желании к построению основных итерационных точек любые известные или новые релаксационные алгоритмы.

Ключевые слова: выпуклое программирование, последовательность приближений, релаксационность, сходимое, аппроксимация, обобщенно-опорный вектор, субдифференциал, отсекающая плоскость

Введение

Класс методов отсечений для решения задач выпуклого программирования хорошо известен и довольно широк (например, [1–7]). В отдельную группу можно выделить те из них, где для построения приближений используется аппроксимация многогранными множествами области ограничений исходной задачи (например, [1, 4]). Такие методы применяются обычно, если целевая функция является линейной или выпуклой квадратичной, поскольку в таком случае вспомогательные задачи отыскания итерационных точек представляют собой задачи линейного или, соответственно, квадратичного программирования.

В методах названной группы итерационные точки строятся не принадлежащими допустимому множеству. Для практических задач такие процессы приближения к решению, идущие вне области ограничений, не всегда приемлемы. Так, например, для многих многокритериальных оптимизационных задач необходимо, чтобы их решение, полученное любым подходящим методом, было допустимой точкой множества ограничений (например, [8]). Вообще непринадлежность итерационных точек, а значит, и решения исходной задачи, допустимому множеству зачастую относят к недостаткам соответствующего метода математического программирования (например, [9], с. 256).

Предлагаемый здесь метод относится к упомянутой выше группе методов отсечений, т. е. использует аппроксимацию области ограничений, но отличается тем, что все основные итерационные точки строятся в нем принадлежащими допустимому множеству. Кроме того, подчеркнем, что процесс построения приближений

в настоящем методе является релаксационным, и это обеспечивает сходимость к множеству решений всей последовательности приближений в отличие от известных методов отсечений, где сходимость гарантируется лишь по подпоследовательности. Отметим, что при этом наличие релаксационности не увеличивает трудоемкость метода по сравнению с трудоемкостью, например, классического метода отсечений [1], если условие (4) выбора итерационной точки в предлагаемом методе реализовать в виде строгого равенства.

Отметим еще одну особенность метода. Условие выбора итерационной точки основной последовательности допускает привлечение к ее отысканию любых известных или новых (в том числе эвристических) релаксационных алгоритмов. Тем самым имеется возможность построения на основе метода различных смешанных релаксационных алгоритмов. При этом сходимость таких новых алгоритмов уже не придется доказывать – она будет следовать из обоснованной сходимости предлагаемого метода.

Ниже обсуждены некоторые реализации предложенного метода. Приведены оценки близости текущих значений целевой функции к ее оптимальному значению, а при дополнительных условиях на исходную задачу – оценки близости итерационных точек к ее решению. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи

Пусть $f(x)$ – выпуклая в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}_n функция, принимающая в каждой точке пространства конечное значение, $D \subset \mathbb{R}_n$ – выпуклое, замкнутое и имеющее непустую внутренность $\text{int } D$ множество. Решается задача

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \quad (1)$$

Пусть $f^* = \min\{f(x) : x \in D\} > -\infty$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $x^* \in X^*$, $E^* = \{x \in \mathbb{R}_n : f(x) \leq f^*\}$, $A(y) = \{a \in \mathbb{R}_n : \|a\| = 1, \langle a, x - y \rangle \leq 0 \forall x \in D\}$ – множество векторов, нормированных и обобщенно-опорных к множеству D в точке $y \in \mathbb{R}_n$, $K = \{0, 1, \dots\}$.

2. Метод решения задачи

Предложенный релаксационный метод отсечений для решения задачи (1) выработывает последовательность приближений $\{x_k\}$, $k \in K$, следующим образом.

Построим выпуклое ограниченное замкнутое множество $M_0 \subset \mathbb{R}_n$ такое, что $x^* \in M_0$. Зададим числа $q \geq 1, \varepsilon > 0$, выберем точку $v \in \text{int } D$, положив $x_{-1} = v, k = 0$.

1. Найдем точку

$$y_k \in M_k \bigcap E^*. \quad (2)$$

Если $y_k \in D$, то y_k – решение задачи (1), и процесс прекращается.

2. Положим

$$z_k = \lambda_k v + (1 - \lambda_k) y_k, \quad \tilde{y}_k = y_k + q_k (z_k - y_k),$$

где числа λ_k, q_k выбраны с условием, что $\lambda_k \in (0, 1), q_k \in [1, q]$, и

$$z_k \notin \text{int } D, \quad \tilde{y}_k \in D.$$

Если выполняется неравенство

$$f(\tilde{y}_k) - f(y_k) \leq \varepsilon, \quad (3)$$

то \tilde{y}_k — ε -решение задачи (1).

3. Выберем такую точку $x_k \in D$, что

$$f(x_k) \leq \min\{f(\tilde{y}_k), f(x_{k-1})\}. \quad (4)$$

Если при этом

$$f(x_k) - f(y_k) \leq \varepsilon, \quad (5)$$

то x_k — ε -решение задачи (1).

4. Выберем конечное множество $A_k \subset A(z_k)$ и положим

$$M_{k+1} = M_k \cap P_k, \quad (6)$$

где $P_k = \{x \in \mathbb{R}_n : \langle a, x - z_k \rangle \leq 0 \forall a \in A_k\}$.

5. Значение k увеличим на единицу и осуществим переход к п. 1.

3. Обсуждение метода

Приведем некоторые замечания, касающиеся предложенного метода и его реализаций.

С учетом задания M_0 и способа (6) построения множеств M_k легко доказать, что $x^* \in M_k$, $k \in K$. Поэтому $M_k \cap E^* \neq \emptyset$, и выбор точек y_k из условия (2) возможен для всех $k \in K$. В частности, точку y_k можно найти согласно следующему условию:

$$f(y_k) = \min\{f(x) : x \in M_k\}. \quad (7)$$

Если функция $f(x)$ является линейной или выпуклой квадратичной, а множество M_0 выбрано в виде многогранника, то с учетом (6) построение вспомогательных точек y_k , $k \in K$, из условия (7) приведет к решению задач линейного или, соответственно, квадратичного программирования.

Заметим, что в связи с включением $y_k \in E^*$, $k \in K$, критерий оптимальности, заложенный в п. 1 метода, очевиден.

Если при построении точек z_k , \tilde{y}_k в п. 2 метода положить $q_k = 1$, то z_k будет точкой пересечения отрезка $[v, y_k]$ с границей множества D . Фактически при $q > 1$ условие выбора чисел $q_k \in [1, q]$ позволяет найти упомянутую точку пересечения приближенно.

Как уже сказано во введении, основная последовательность приближений x_k строится в методе с условием релаксационности. Обсудим возможности, которые предоставляет неравенство (4) для выбора точек x_k . Например, допустимо при каждом $k \in K$ положить $x_k = \tilde{y}_k$, если

$$f(\tilde{y}_k) \leq f(x_{k-1}), \quad (8)$$

или $x_k = x_{k-1}$, если

$$f(x_{k-1}) \leq f(\tilde{y}_k). \quad (9)$$

Задание точки x_{-1} на предварительном шаге метода можно опустить и при $k = 0$ положить

$$x_0 = \tilde{y}_0,$$

считая при этом, что в (4) $x_{-1} = \tilde{y}_0$.

Неравенство (4) может выполняться при всех $k \in K$ и как строгое. Для построения точки x_k из условия

$$f(x_k) < \min\{f(\tilde{y}_k), f(x_{k-1})\} \quad (10)$$

можно привлекать любые подходящие процедуры, в том числе известные или новые релаксационные алгоритмы, пригодные для решения задачи (1). Пусть для этой цели выбран некоторый подходящий алгоритм. В зависимости от выполнения неравенства (8) или (9) из точки \tilde{y}_k или, соответственно, точки x_{k-1} этим алгоритмом можно сделать один или несколько шагов и полученное в результате приближение принять за x_k .

Такой способ нахождения точки x_k из условия (10) говорит о возможности построения на основе предложенного здесь метода новых, так называемых смешанных, релаксационных алгоритмов решения задачи (1). При этом сходимость таких смешанных алгоритмов будет гарантироваться доказанной ниже теоремой 1 сходимости предложенного метода.

Сделаем еще одно замечание, касающееся критериев ε -оптимальности точки, заложенных в пп. 2, 3 метода. Согласно (2)

$$f(y_k) \leq f^*, \quad k \in K,$$

и в силу включений $\tilde{y}_k \in D$, $x_k \in D$ имеют место неравенства

$$f(\tilde{y}_k) \geq f^*, \quad f(x_k) \geq f^*, \quad k \in K.$$

В связи с этим для каждого $k \in K$ можно оценить близость текущих значений целевой функции в точках \tilde{y}_k , x_k к ее оптимальному значению. Поэтому при выполнении неравенств (3), (5) фиксируется ε -решение исходной задачи, и процесс построения приближений при желании можно завершить.

4. Сходимость метода

Перейдем к обоснованию сходимости построенного метода. Сразу отметим, что ввиду ограниченности множества M_0 вместе с последовательностью $\{y_k\}$, $k \in K$, будут ограниченными и последовательности $\{z_k\}$, $\{\tilde{y}_k\}$, $\{x_k\}$, $k \in K$.

Лемма 1. *Существует такое $\beta > 0$, что для всех $z \in M_0 \setminus \text{int } D$ и всех $a \in A(z)$ справедливо неравенство $\langle a, z - v \rangle \geq \beta$.*

Доказательство утверждения приведено в [10].

Лемма 2. *Пусть последовательности $\{y_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, построены согласно предложенному методу. Если $\{y_k\}$, $k \in K_1 \subset K$, — сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_k\}$, $k \in K$, то $\lim_{k \in K_1} \|z_k - y_k\| = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем номера l , $p_l \in K_1$ так, что $p_l > l$. В силу (6) $M_{p_l} \subset M_l$. Кроме того, $y_{p_l} \in M_{p_l}$ согласно (2), и любой вектор $a \in A_l$ является обобщенно-опорным в точке z_l к множеству M_{p_l} . Поэтому $\langle a, y_{p_l} - z_l \rangle \leq 0$ для всех $a \in A_l$. Но

$$z_k = y_k + \lambda_k(v - y_k), \quad k \in K. \quad (11)$$

Значит, $\langle a, y_l - y_{p_l} \rangle \geq \lambda_l \langle a, y_l - v \rangle$ для всех $a \in A_l$. По лемме 1 существует такое $\beta > 0$, что $\langle a, y_k - v \rangle \geq \beta$, $k \in K_1$, $a \in A_k$. Следовательно, $\langle a, y_l - y_{p_l} \rangle \geq \beta \lambda_l$ для всех $a \in A_l$. Отсюда получим $\|y_{p_l} - y_l\| \geq \beta \lambda_l$. Из этого неравенства и сходимости последовательности $\{y_k\}$, $k \in K_1$, вытекает предельное соотношение $\lambda_k \rightarrow 0$, $k \in K_1$. Тогда из (11) с учетом ограниченности $\{\|v - y_k\|\}$, $k \in K_1$, следует утверждение леммы. \square

Лемма 3. Пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, построенной согласно предложенному методу, а \bar{x} – предельная точка этой подпоследовательности. Тогда

$$\bar{x} \in X^*. \quad (12)$$

Доказательство. Так как по построению $x_k \in D$, $k \in K'$, то ввиду замкнутости множества D выполняется включение $\bar{x} \in D$. Следовательно,

$$f(\bar{x}) \geq f^*. \quad (13)$$

Далее, поскольку $\tilde{y}_k = y_k + q_k(z_k - y_k)$, $k \in K'$, то согласно (4)

$$f(x_k) \leq f(y_k + q_k(z_k - y_k)), \quad k \in K'. \quad (14)$$

Выделим из последовательности $\{y_k\}$, $k \in K'$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_k\}$, $k \in K'' \subset K'$, и пусть \bar{y} – ее предельная точка. Отметим, что последовательность $\{q_k\}$, $k \in K''$, ограничена, а по лемме 2 $\|z_k - y_k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, $k \in K''$. Тогда из (14) следует неравенство

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{y}). \quad (15)$$

В силу (2) $f(y_k) \leq f^*$, $k \in K''$. Значит, $f(\bar{y}) \leq f^*$, и в силу (15) имеем $f(\bar{x}) \leq f^*$. Отсюда и из (13) следует включение (12). Лемма доказана. \square

Теорема 1. Пусть последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, построена согласно предложенному методу. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$.

Доказательство. По построению последовательность $\{f(x_k)\}$ является монотонно убывающей. Кроме того, в силу условий задачи (1) она ограничена. Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \gamma$. Покажем, что $\gamma = f^*$. Действительно, пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и \bar{x} – ее предельная точка. Тогда с учетом непрерывности $f(x)$ и леммы 3 имеем

$$\lim_{k \in K} f(x_k) = \gamma = \lim_{k \in K'} f(x_k) = f(\bar{x}) = f^*.$$

Теорема доказана. \square

Из теоремы 1 и известной теоремы (например, [11, с. 62]) вытекает

Следствие 1. Последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, построенная согласно предложенному методу, сходится к множеству X^* .

Выше при обсуждении метода было отмечено, что на каждой итерации можно оценить близость текущего значения целевой функции к оптимальному значению, поскольку $f(x_k) \geq f^* \geq f(y_k)$, $k \in K$. Покажем теперь, что при некоторых дополнительных требованиях к задаче (1) и выборе точек x_k с дополнительным условием $x_k \in \text{int } D$ можно оценить близость не только значений $f(x_k)$ к f^* , но и самих приближений x_k к решению.

Пусть допустимое множество исходной задачи имеет вид

$$D = \{x \in \mathbb{R}_n : F(x) \leq 0\},$$

где $F(x) = \max_{j \in J} f_j(x)$, а функции $f_j(x)$ являются сильно выпуклыми в \mathbb{R}_n с константами сильной выпуклости μ_j соответственно. Кроме того, будем считать далее,

что множество D удовлетворяет условию Слейтера, и любая точка абсолютного минимума функции $f(x)$, при наличии таковой, не принадлежит $\text{int } D$, т. е. решение задачи достигается на границе множества D .

Используя определение сильной выпуклости функций $f_j(x)$, $j \in J$, легко доказать, что функция $F(x)$ также является сильно выпуклой с константой сильной выпуклости $\mu = \min_{j \in J} \mu_j$.

Покажем, что при сделанных дополнительных предположениях решение задачи (1) единственно. Допустим противное, т. е. существуют хотя бы две отличные друг от друга точки $x_1^*, x_2^* \in X^*$. Положим $z = \alpha x_1^* + (1 - \alpha)x_2^*$, где $\alpha \in (0, 1)$. Тогда с учетом строгой выпуклости функции $F(x)$ и равенств $F(x_1^*) = 0$, $F(x_2^*) = 0$ имеем $F(z) < \alpha F(x_1^*) + (1 - \alpha)F(x_2^*) = 0$, и значит, $f(z) > f^*$. С другой стороны, $f(z) \leq \alpha f(x_1^*) + (1 - \alpha)f(x_2^*) = f^*$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение. В связи с доказанным будем считать, что $X^* = \{x^*\}$.

Положим $D_\gamma = \{x \in \mathbb{R}_n : -\gamma \leq F(x) \leq 0\}$, где $\gamma > 0$. С использованием методики [12] покажем, что если $y \in D_\gamma$, $F(y) < 0$ и для точек $z = \alpha x^* + (1 - \alpha)y$ при всех $\alpha \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$F(z) > F(y), \quad (16)$$

то

$$\|x^* - y\| \leq \sqrt{\gamma/\mu}. \quad (17)$$

Действительно, так как $y \neq x^*$ и согласно (16)

$$\frac{F(y + \alpha(x^* - y)) - F(y)}{\alpha} > 0$$

для всех $\alpha \in (0, 1)$, то, перейдя в последнем неравенстве к пределу по $\alpha \rightarrow 0+$, получим для производной $F'(y, x^* - y)$ функции $F(x)$ в точке y по направлению $x^* - y$ следующее неравенство:

$$F'(y, x^* - y) \geq 0. \quad (18)$$

Известно (например, [13, с. 74]), что

$$F'(y, x^* - y) = \max\{\langle c(y), x^* - y \rangle : c(y) \in \partial F(y)\},$$

где $\partial F(y)$ – субдифференциал функции $F(x)$ в точке y . Отсюда и из (18) следует существование такого $c \in \partial F(y)$, что

$$\langle c, x^* - y \rangle \geq 0. \quad (19)$$

Поскольку функция $F(x)$ сильно выпукла, то (см., например, [11, с. 243])

$$F(x^*) \geq F(y) + \langle c, x^* - y \rangle + \mu \|x^* - y\|^2.$$

Из этого неравенства с учетом (19) и равенства $F(x^*) = 0$ следует, что $-F(y) \geq \mu \|x^* - y\|^2$. Но по условию $y \in D_\gamma$, т. е. $F(y) \geq -\gamma$, и значит, оценка (17) доказана.

Согласно следствию 1 при фиксированном $\gamma > 0$, начиная с некоторого номера $k \in K$, выполняются включения $x_k \in D_\gamma$. Если при этом $x_k \in \text{int } D$ и выполняется условие (16), где $y = x_k$, то имеет место оценка $\|x_k - x^*\| \leq \sqrt{\gamma/\mu}$.

5. Вычислительные эксперименты

Были проведены вычислительные эксперименты на следующей тестовой задаче:

$$\sum_{i=1}^n c_i \xi_i \rightarrow \min, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq 4, \quad (21)$$

где $c = (c_1, \dots, c_n) = (-1, \dots, -1)$. В экспериментах сравнивались метод [1] и предложенный метод отсечений со следующими параметрами:

- 1) $M_0 = \{x \in R_n : -100 \leq x_i \leq 100, 1 \leq i \leq n\}$;
- 2) $v = (0, \dots, 0)$;
- 3) в качестве x_k была выбрана рекордная из точек x_{k-1}, \tilde{y}_k .

В сравниваемых методах итерационный процесс останавливался в случае, когда расстояние между соседними приближениями не превосходило заранее фиксированной величины $\varepsilon > 0$. Кроме того, при выполнении вычислительных экспериментов в предложенном методе отслеживалось условие (3). Ниже в таблице приведены результаты экспериментов.

Табл. 1

Результаты вычислительных экспериментов

Метод	n	ε	Количество итераций	Время (сек)	Приближенное значение
1	5	0.000000001	95	0.362	-4.47214
2	5	0.000000001	66	0.17	-4.47213
1	10	0.0001	474	10.833	-6.32456
2	10	0.0001	255	2.603	-6.32455
1	20	0.0001	976	139.425	-8.94427
2	20	0.0001	634	28.305	-8.94417
1	30	0.0001	2278	593.461	-10.9545
2	30	0.0001	1303	158.162	-10.9544
1	40	0.0001	-	-	-
2	40	0.0001	2162	1615.97	-12.649

Прокомментируем результаты вычислительных экспериментов, представленных в таблице 1. В первом столбце перечислены исследуемые методы, а именно, 1 — метод отсечений [1], 2 — предложенный метод. Во втором столбце — размерности тестовой задачи (20), (21). В третьем столбце указаны значения параметра, учитываемого в критериях остановки. В вычислительных экспериментах произведен подсчет количества итераций (четвертый столбец) и времени в секундах (пятый столбец), затраченных исследуемыми методами для отыскания приближений, удовлетворяющих вышеупомянутым критериям остановки, и полученные рекордные значения целевой функции представлены в последнем столбце таблицы 1.

Результаты экспериментов показали следующее. Предложенный метод обеспечивал заданную точность решения всех примеров за меньшее число итераций и меньшее время по сравнению с методом [1].

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Литература

1. Булатов В.П. Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 158 с.
2. Булатов В.П., Хамисов О.В. Метод отсекающих в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 11. С. 1830–1842.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. Заботин И.Я., Яруллин Р.С. Об одном подходе к построению алгоритмов отсекающих с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Изв. вузов. Матем. 2013. № 3. С. 74–79.
5. Заботин И.Я., Яруллин Р.С. Метод отсекающих на основе аппроксимации надграфика с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Автомат. и телемех. 2015. № 11. С. 76–88.
6. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 278 с.
7. Нурминский Е.А. Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации // Выч. мет. программирование. 2006. Т. 7, № 1. С. 133–137.
8. Волконский В.А., Еганян Г.К., Поманский А.Б. О множестве эффективных точек в линейных многокритериальных задачах // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 9–17.
9. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
10. Заботин И.Я. О некоторых алгоритмах погружений-отсекающих для задачи математического программирования // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2011. Т. 4, № 2. С. 91–101.
11. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2011. 624 с.
12. Заботин И.Я., Фукин И.А. Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем. 2000. № 12. С. 49–54.
13. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Поступила в редакцию 7.08.2023

Принята к публикации 15.09.2023

Заботин Игорь Ярославич, доктор физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: iyazabotin@mail.ru

Шульгина Оксана Николаевна, кандидат физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: onshul@mail.ru

Яруллин Рашид Саматович, кандидат физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: yarullinrs@gmail.com

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2023, vol. 165, no. 2, pp. 143–152

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.143-152

**A Relaxed Version of the Cutting Method
with Approximation of the Constraint Region**

*I.Ya. Zabotin**, *O.N. Shulgina***, *R.S. Yarullin****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **iyazabotin@mail.ru*, ***onshul@mail.ru*, ****yarullinrs@gmail.com*

Received August 7, 2023; Accepted September 15, 2023

Abstract

A cutting method was proposed for solving the convex programming problem. The method assumes that the constraint region of the problem is embedded into some polyhedral sets for constructing iteration points. It involves the construction of a sequence of approximations that belongs to the admissible set and is relaxed, as well as implies that the ε -solution of the initial problem is fixed after a finite number of steps. The method also allows to obtain mixed convergent algorithms by using, if desired, any known or new relaxation algorithms for constructing the main iteration points.

Keywords: convex programming, sequence of approximation, relaxation, convergence, approximation, generalized support vector, subdifferential, cutting plane

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

References

1. Bulatov V.P. *Metody pogruzheniya v zadachakh optimizatsii* [Imbedding Methods in Optimization Problems]. Novosibirsk, Nauka, 1977. 158 p. (In Russian)
2. Bulatov V.P., Khamisov O.V. Cutting methods in E^{n+1} for global optimization of a class of functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 11, pp. 1756–1767. URL: <https://doi.org/10.1134/S0965542507110036>.
3. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable Optimization]. Moscow, Nauka, 1981. 384 p. (In Russian)
4. Zabotin I.Ya., Yarullin R.S. One approach to constructing cutting algorithms with dropping of cutting planes. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 3, pp. 60–64. URL: <https://doi.org/10.3103/S1066369X13030092>.
5. Zabotin I.Ya., Yarullin R.S. Cutting-plane method based on epigraph approximation with discarding the cutting planes. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1966–1975. URL: <https://doi.org/10.1134/S0005117915110065>.
6. Nesterov Yu.E. *Vvedenie v vypukluyu optimizatsiyu* [Introduction to Convex Optimization]. Moscow, MTsNMO, 2010. 278 p. (In Russian)
7. Nurminskii E.A. The separating planes method with bounded memory for convex nonsmooth optimization problems. *Vychisl. Metody Program.*, 2006, vol. 7, no. 1, pp. 133–137. (In Russian)

8. Volkonskii V.A., Eganyan G.K., Pomanskii A.B. Set of efficient points in linear multicriteria problems. *Sib. Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 2, pp. 159–167. URL: <https://doi.org/10.1007/BF00968733>.
9. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu* [Introduction to Optimization]. Moscow, Nauka, 1983. 384 p. (In Russian)
10. Zabotin I.Ya. Some embedding-cutting algorithms for mathematical programming problems. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 91–101. (In Russian)
11. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Book 1. Moscow, MTsNMO, 2011. 624 p. (In Russian)
12. Zabotin Ya.I., Fukin I.A. One modification of the penalty shifting method for problems of nonlinear programming. *Russ. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 2000, vol. 44, no. 12, pp. 47–52.
13. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (In Russian)

Для цитирования: Заботин И.Я., Шулъгина О.Н., Яруллин Р.С. Релаксационный вариант метода отсечений с аппроксимацией области ограничений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 143–152. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.143-152>.

For citation: Zabotin I.Ya., Shulgina O.N., Yarullin R.S. A relaxed version of the cutting method with approximation of the constraint region. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 143–152. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.143-152>. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.153-166

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРИСОЕДИНЁННЫМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Д. М. Коростелева¹, С. И. Соловьев²

¹*Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Для задачи о собственных колебаниях пологой оболочки с присоединённым осциллятором предложена новая симметричная вариационная постановка в гильбертовом пространстве. Установлено существование последовательности конечнократных положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов. Задача приближена сеточной схемой метода конечных элементов с эрмитовыми конечными элементами. Доказаны теоретические оценки погрешности приближённых решений. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

Ключевые слова: собственное колебание, полая оболочка, осциллятор, собственное значение, собственный вектор, задача на собственные значения, метод конечных элементов, эрмитов конечный элемент

Введение

Задачи о собственных колебаниях оболочечных конструкций с присоединёнными грузами возникают при математическом моделировании в авиационной и космической технике, проектировании надводных и подводных судов, расчёте различных ёмкостей и резервуаров в химической и нефтяной промышленности [1–3]. При учёте упругости крепления грузов такие задачи формулируются как задачи на собственные значения с нелинейной зависимостью от спектрального параметра [2–4].

В монографиях [1–3] приведён обзор публикаций по динамике пластин и оболочек с присоединёнными массами. В [2, 3] для решения и исследования задач собственных колебаний пластин и оболочек с осцилляторами применен аналитический метод, который основан на использовании частотного уравнения и представлении динамической функции Грина несущей тонкостенной конструкции в виде разложения по собственным формам колебаний несущей конструкции. Этот подход имеет ограничения на форму области несущей поверхности, вид коэффициентов дифференциальной задачи и тип граничных условий.

В монографии [4] для решения задач о собственных колебаниях механических систем с осцилляторами применена вариационная постановка нелинейной задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве. Здесь доказано существование собственных значений и собственных функций для нелинейных задач на

собственные значения, изучена сходимость конечномерных аппроксимаций, исследованы итерационные методы решения нелинейных матричных задач на собственные значения. Предложенный подход снимает ограничения из [2, 3] на область несущей поверхности, вид коэффициентов дифференциальной задачи и тип граничных условий. Однако этот подход требует решения нелинейных спектральных задач с полюсами, кроме того, здесь не удаётся получить свойство полноты системы собственных функций, что не позволяет провести обоснование метода разделения переменных для динамической задачи с осцилляторами.

В настоящей статье для задачи о собственных колебаниях полой оболочки с присоединённым осциллятором предложена новая симметричная вариационная постановка в гильбертовом пространстве с линейной зависимостью от спектрального параметра. Установлено существование последовательности конечнократных положительных собственных значений с предельной точкой на бесконечности и соответствующей полной ортонормированной системы собственных векторов. Задача приближена сеточной схемой метода конечных элементов с эрмитовыми конечными элементами. Доказаны теоретические оценки погрешности приближённых решений. Приведены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

1. Дифференциальная постановка задачи

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях однородной изотропной полой оболочки постоянной толщины многоугольной формы, закреплённой по границе, с присоединённым осциллятором. Пусть проекция срединной поверхности оболочки совпадает с плоской многоугольной областью Ω с границей Γ , $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, и задана уравнением $x_3 = f(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$, $R_1^{-1} = -\partial_{11}f$, $R_2^{-1} = -\partial_{22}f$. Пусть ρ и E – плотность и модуль Юнга материала оболочки, ν – коэффициент Пуассона материала оболочки, r – толщина оболочки, $D = r^3 E / (12(1 - \nu^2))$ – цилиндрическая жёсткость материала оболочки, $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль сдвига материала оболочки. Предположим, что в точке с координатой $\varkappa \in \Omega$ упруго присоединён груз массой M (гармонический осциллятор) с коэффициентом упругости подвески K , $M > 0$, $K > 0$, при этом $\sqrt{K/M}$ – парциальная частота осциллятора. Обозначим через $w(x, t) = (w_1(x, t), w_2(x, t), w_3(x, t))^T$ вектор перемещений точки $x \in \bar{\Omega}$ срединной поверхности оболочки в момент времени t , при этом $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$, $w_3(x, t)$ – перемещения вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 . Обозначим через $\eta(t)$ смещение от положения равновесия груза массы M в момент времени t . Собственные колебания механической системы оболочка–осциллятор определяются функциями $w(x, t)$ и $\eta(t)$ вида

$$w(x, t) = u(x)v(t), \quad x \in \Omega, \quad \eta(t) = \xi v(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$, $v(t) = a_0 \cos \sqrt{\lambda}t + b_0 \sin \sqrt{\lambda}t$, $t > 0$; a_0 , b_0 , λ – константы.

Функции (1) удовлетворяют уравнениям

$$Lw(x, t) + \rho r w_{tt}(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$M\eta''(t) + K(\eta(t) - w_3(\varkappa, t)) = 0, \quad (3)$$

где $t > 0$, L – дифференциальный оператор из теории пологих оболочек [2, 3], $w_{tt}(x, t) = \partial^2 w(x, t) / \partial t^2$. Действие присоединённого осциллятора на оболочку моделируется [2, 3] функцией правой части вида

$$f(x, t) = K(\eta(t) - w_3(\varkappa, t))\delta(x - \varkappa)J, \quad (4)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, сосредоточенная в точке $x = 0$, $J = (0, 0, 1)^\top$. Добавим к уравнениям (1)–(4) условия заземления по контуру оболочки:

$$w(x, t) = 0, \quad \partial_n w_3(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, t > 0, \quad (5)$$

где ∂_n – производная по внешней нормали к Γ .

Подставив (1) в (2)–(5), получим задачу на собственные значения, состоящую в нахождении чисел λ , векторных функций $u(x)$, $x \in \Omega$, чисел ξ , составляющих ненулевой вектор $(u, \xi)^\top$, для которых выполнена следующая система уравнений:

$$Lu(x) - K(\xi - u_3(\varkappa))\delta(x - \varkappa)J = \lambda \rho r u(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$K(\xi - u_3(\varkappa)) = \lambda M \xi, \quad (7)$$

$$u(x) = 0, \quad \partial_n u_3(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (8)$$

Число λ называется собственным значением задачи (6)–(8), а вектор $(u, \xi)^\top$ – соответствующим собственным вектором.

2. Вариационная постановка задачи

Через $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ будем обозначать вещественные гильбертовы пространства Лебега и Соболева, снабжённые следующими скалярными произведениями и нормами:

$$(u, v)_0 = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad ((u, v))_1 = \sum_{i=0}^1 (u, v)_i, \quad ((u, v))_2 = \sum_{i=0}^2 (u, v)_i,$$

$$|v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|v\|_1 = \left(\sum_{i=0}^1 |v|_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|v\|_2 = \left(\sum_{i=0}^2 |v|_i^2 \right)^{1/2}$$

при

$$(u, v)_1 = \sum_{i=1}^2 (\partial_i u, \partial_i v)_0, \quad (u, v)_2 = \sum_{i,j=1}^2 (\partial_{ij} u, \partial_{ij} v)_0,$$

$$|v|_1 = \left(\sum_{i=1}^2 |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial_{ij} v|_0^2 \right)^{1/2},$$

$$\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}, \quad \Delta^2 = (\partial_{11} + \partial_{22})(\partial_{11} + \partial_{22}),$$

$$\partial_i = \partial / \partial x_i, \quad \partial_{ij} = \partial_i \partial_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Определим пространство $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, состоящее из функций $v \in W_2^1(\Omega)$, подчиняющихся граничному условию $v(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Норму в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ определим с помощью полунормы $|\cdot|_1$, которая эквивалентна исходной норме $\|\cdot\|_1$. Известно, что $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ вложено компактно в $L_2(\Omega)$. В пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ определим скалярное произведение $(u, v)_1$, $u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ пространство функций v из $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям $v(x) = \partial_n v(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Через $W_2^\alpha(\Omega)$ для $\alpha \in (0, 4]$ обозначим пространство Соболева дробного порядка с нормой $\|\cdot\|_\alpha$ [5, с. 214].

Определим пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных функций $v(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, с нормой

$$|v|_{0,\infty} = \max_{x \in \overline{\Omega}} |v(x)|.$$

Тогда существуют такие положительные константы γ_0 и γ_1 , что

$$|v|_0 \leq \gamma_0 |v|_2, \quad |v|_{0,\infty} \leq \gamma_1 |v|_2 \quad \forall v \in \mathring{W}_2^2(\Omega).$$

Известно, что пространство $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ компактно вложено в пространство $L_2(\Omega)$ и пространство $C(\overline{\Omega})$. В $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ введём норму $|\cdot|_2$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_2$.

Обозначим через $\mathcal{D}(\Omega)$ пространство бесконечное число раз дифференцируемых функций, определённых на Ω , с компактным носителем. Известно, что пространство $\mathcal{D}(\Omega)$ всюду плотно в пространствах $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $\mathring{W}_2^2(\Omega)$.

Определим вещественные гильбертовы пространства векторных функций $H_0 = (L_2(\Omega))^3$ и $V_0 = \mathring{W}_2^1(\Omega) \times \mathring{W}_2^1(\Omega) \times \mathring{W}_2^2(\Omega)$ с нормами

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0} &= (|v_1|_0^2 + |v_2|_0^2 + |v_3|_0^2)^{1/2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in H_0, \\ \|v\|_{V_0} &= (|v_1|_1^2 + |v_2|_1^2 + |v_3|_2^2)^{1/2}, \quad v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in V_0, \\ \|v\|_{H_0} &= (v, v)_{H_0}^{1/2}, \quad (u, v)_{H_0} = (u_1, v_1)_0 + (u_2, v_2)_0 + (u_3, v_3)_0, \\ u &= (u_1, u_2, u_3)^\top, v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in H_0, \\ \|v\|_{V_0} &= (v, v)_{V_0}^{1/2}, \quad (u, v)_{V_0} = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1 + (u_3, v_3)_2, \\ u &= (u_1, u_2, u_3)^\top, v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in V_0. \end{aligned}$$

Отметим, что V_0 компактно вложено в H_0 .

Пусть \mathbb{R} – числовая прямая. Зададим вещественное гильбертово пространство $V = V_0 \times \mathbb{R}$ со скалярным произведением

$$(\overline{u}, \overline{v})_V = (u, v)_{V_0} + \xi\zeta$$

и соответствующей нормой

$$\|\overline{v}\|_V = (\|v\|_{V_0}^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

для $\overline{u} = (u, \xi)^\top$, $\overline{v} = (v, \zeta)^\top \in V$.

Введём также вещественное гильбертово пространство $H = H_0 \times \mathbb{R}$ со скалярным произведением

$$(\overline{u}, \overline{v})_H = (u, v)_{H_0} + \xi\zeta$$

и соответствующей нормой

$$\|\overline{v}\|_H = (\|v\|_{H_0}^2 + \zeta^2)^{1/2}$$

для $\overline{u} = (u, \xi)^\top$, $\overline{v} = (v, \zeta)^\top \in H$.

Предположим, что $0 < \nu < 1/2$, E , r , R_1 , R_2 , K и M – заданные положительные постоянные. Обозначим

$$D = r^3 S / 12, \quad G = E / (2(1 + \nu)), \quad S = E / (1 - \nu^2),$$

$$c_{11} = c_{22} = rS, \quad c_{12} = c_{21} = \nu rS, \quad c_{33} = rG,$$

$$\begin{aligned}
 c_{13} &= c_{23} = 0, & c_{31} &= c_{32} = 0, \\
 c_{44} &= c_{55} = D, & c_{45} &= c_{54} = \nu D, & c_{66} &= r^3 G/3, \\
 c_{46} &= c_{56} = 0, & c_{64} &= c_{65} = 0, \\
 C &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}, & C_{11} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, & C_{22} &= \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}, \\
 (u, v) &= u^\top v, & Fv &= (F_1 v, F_2 v, F_3 v, F_4 v, F_5 v, F_6 v)^\top, \\
 F_1 v &= \partial_1 v_1 + R_1^{-1} v_3, & F_2 v &= \partial_2 v_2 + R_2^{-1} v_3, & F_3 v &= \partial_2 v_1 + \partial_1 v_2, \\
 F_4 v &= -\partial_{11} v_3, & F_5 v &= -\partial_{22} v_3, & F_6 v &= -\partial_{12} v_3.
 \end{aligned}$$

Здесь через C_{12} и C_{21} обозначены квадратные матрицы размера три с нулевыми элементами. Зададим билинейные формы $a_0 : V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ и $b_0 : H_0 \times H_0 \rightarrow \mathbb{R}$ соотношениями

$$\begin{aligned}
 a_0(u, v) &= \int_{\Omega} (CFu, Fv) dx \quad \forall u, v \in V_0, \\
 b_0(u, v) &= \rho r \int_{\Omega} (u, v) dx \quad \forall u, v \in H_0.
 \end{aligned}$$

Определим билинейную форму $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = a_0(u, v) + K(\xi - u_3(\mathcal{X}))(\zeta - v_3(\mathcal{X}))$$

при $\bar{u} = (u, \xi)^\top$, $\bar{v} = (v, \zeta)^\top \in V$ и билинейную форму $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ с помощью выражения

$$b(\bar{u}, \bar{v}) = b_0(u, v) + M\xi\zeta$$

при $\bar{u} = (u, \xi)^\top$, $\bar{v} = (v, \zeta)^\top \in H$.

Обозначим $\mathcal{D}_0 = (\mathcal{D}(\Omega))^3$. Понимая уравнение (6) в смысле распределений, запишем это уравнение в виде

$$(Lu, \varphi)_{H_0} - K(\xi - u_3(\mathcal{X}))\varphi_3(\mathcal{X}) = \lambda \rho r (u, \varphi)_{H_0}$$

для любого вектора $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^\top \in \mathcal{D}_0$. Учитывая в этом равенстве, что $\rho r (u, \varphi)_{H_0} = b_0(u, \varphi)$ и $(Lu, \varphi)_{H_0} = a_0(u, \varphi)$ для любого вектора $\varphi \in \mathcal{D}_0$ [6, с. 216], получим соотношение

$$a_0(u, \varphi) - K(\xi - u_3(\mathcal{X}))\varphi_3(\mathcal{X}) = \lambda b_0(u, \varphi)$$

для любого вектора $\varphi \in \mathcal{D}_0$. Сложим теперь с этим равенством равенство

$$K(\xi - u_3(\mathcal{X}))\zeta = \lambda M\xi\zeta,$$

полученное из уравнения (7) после умножения на произвольное число $\zeta \in \mathbb{R}$. Тогда выведем соотношение

$$a_0(u, \varphi) + K(\xi - u_3(\mathcal{X}))(\zeta - \varphi_3(\mathcal{X})) = \lambda (b_0(u, \varphi) + M\xi\zeta)$$

для любого вектора $\varphi \in \mathcal{D}_0$ и произвольного числа $\zeta \in \mathbb{R}$. Поскольку пространство \mathcal{D}_0 всюду плотно в пространстве V_0 , придём к соотношению

$$a_0(u, v) + K(\xi - u_3(\mathcal{X}))(\zeta - v_3(\mathcal{X})) = \lambda (b_0(u, v) + M\xi\zeta)$$

для любого вектора $v \in V_0$ и произвольного числа $\zeta \in \mathbb{R}$.

В результате получим вариационную постановку дифференциальной задачи (6)–(8), которая заключается в нахождении $\lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{v} \in V \setminus \{0\}$ из уравнения

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \lambda b(\bar{u}, \bar{v}) \quad (9)$$

для любого вектора $\bar{v} \in V$.

Обратный переход от вариационной задачи (9) к дифференциальной задаче (6)–(8) можно провести, положив в уравнении (9) $\bar{v} = (\varphi, 0)^\top$. Тогда получим соотношение

$$a_0(u, \varphi) - K(\xi - u_3(\varkappa))\varphi_3(\varkappa) = \lambda b_0(u, \varphi)$$

для любого вектора $\varphi \in \mathcal{D}_0$, которое приводит к уравнению (6) в смысле распределений. Наконец, уравнение (7) получим из (9) при $\bar{v} = (0, \zeta)^\top$ для любого числа $\zeta \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Билинейные формы $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ и $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют свойствам положительной определённости и ограниченности:*

$$\alpha_1 \|\bar{v}\|_V^2 \leq a(\bar{v}, \bar{v}) \leq \alpha_2 \|\bar{v}\|_V^2 \quad \forall \bar{v} \in V,$$

$$\beta_1 \|\bar{v}\|_H^2 \leq b(\bar{v}, \bar{v}) \leq \beta_2 \|\bar{v}\|_H^2 \quad \forall \bar{v} \in H,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ – положительные постоянные.

Доказательство. Справедливы неравенства [6, с. 263]

$$\alpha_{01} \|v\|_{V_0}^2 \leq a_0(v, v) \leq \alpha_{02} \|v\|_{V_0}^2 \quad \forall v \in V_0$$

при положительных α_{01} и α_{02} . Кроме того, имеет место равенство

$$b_0(v, v) = \rho r \|v\|_{H_0}^2 \quad \forall v \in H_0.$$

Квадратичная форма $a(\bar{v}, \bar{v})$ равна нулю тогда и только тогда, когда вектор $\bar{v} \in V$ нулевой. Действительно, если $a(\bar{v}, \bar{v}) = 0$, то получим

$$a(\bar{v}, \bar{v}) = a_0(v, v) + K(\zeta - v_3(\varkappa))^2 = 0.$$

Поэтому $\alpha_{01} \|v\|_{V_0}^2 \leq a_0(v, v) = 0$. Следовательно, $v = 0$, поэтому $v_3(x) = 0$, $x \in \bar{\Omega}$, и $K(\zeta - v_3(\varkappa))^2 = K\zeta^2 = 0$. Отсюда выведем $\zeta = 0$, $\bar{v} = (v, \zeta) = 0$.

В пространстве V определим новое скалярное произведение и соответствующую норму: $(\bar{u}, \bar{v})_a = a(\bar{u}, \bar{v})$, $\|\bar{v}\|_a = \sqrt{(\bar{v}, \bar{v})_a}$, для любых $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

Докажем, что для некоторого $\alpha_1 > 0$ справедливо неравенство $\alpha_1 \|\bar{v}\|_V^2 \leq a(\bar{v}, \bar{v})$ при любом $\bar{v} \in V$. Это неравенство запишем в виде $\alpha_1 \leq a(\bar{v}, \bar{v}) / \|\bar{v}\|_V^2$ при любом $\bar{v} \in V \setminus \{0\}$. Предположим, что последнее неравенство не выполняется. Тогда найдётся такая последовательность $\bar{v}_j \in V$, $j = 1, 2, \dots$, что $a(\bar{v}_j, \bar{v}_j) / \|\bar{v}_j\|_V^2 \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Положив $\bar{w}_j = \bar{v}_j / \|\bar{v}_j\|_V$, $\bar{w}_j = (w_j, \nu_j)^\top$, $w_j = (w_1^j, w_2^j, w_3^j)^\top$, $j = 1, 2, \dots$, получим $a(\bar{w}_j, \bar{w}_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|\bar{w}_j\|_a = \left(a_0(w_j, w_j) + K(\nu_j - w_3^j(\varkappa))^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$. Отсюда $\alpha_{01} \|w_j\|_{V_0}^2 \leq a_0(w_j, w_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Поэтому $|w_3^j(\varkappa)| \leq |w_3^j|_{0,\infty} \leq \gamma_1 |w_3^j|_2 \leq \gamma_1 \|w_j\|_{V_0} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, и, следовательно, $w_3^j(\varkappa) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Теперь имеем $\nu_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. В результате заключаем

$$\|\bar{w}_j\|_V = (\|w_j\|_{V_0}^2 + (\nu_j)^2)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $j \rightarrow \infty$, что противоречит соотношению $\|\bar{w}_j\|_V = 1$.

Таким образом, билинейная форма $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет свойствам положительной определённости и ограниченности для некоторого положительного числа α_1 , и $\alpha_2 = \alpha_{02} + 2(1 + \gamma_1^2)K$.

Для билинейной формы $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ выполняются аналогичные свойства при $\beta_1 = \min\{\rho r, M\}$, $\beta_2 = \max\{\rho r, M\}$. Лемма доказана. \square

Теорема 1. *Задача (9) имеет неубывающую последовательность конечно-кратных собственных значений λ_k , $k = 1, 2, \dots$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных векторов $\bar{u}_k = (u_k, \xi_k)^\top \in V$, $k = 1, 2, \dots$, $a(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $b(\bar{u}_i, \bar{u}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \dots$. Векторы \bar{u}_k , $k = 1, 2, \dots$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве H , то есть для любого вектора $\bar{v} \in H$ имеет место разложение*

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{\infty} b(\bar{v}, \bar{u}_i) \bar{u}_i.$$

Векторы $\tilde{u}_k = \bar{u}_k / \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве V , то есть для любого вектора $\bar{v} \in V$ имеет место разложение

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{\infty} a(\bar{v}, \tilde{u}_i) \tilde{u}_i.$$

Доказательство. Из компактности вложений пространств $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ и $\mathring{W}_2^2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ следует компактность вложения V в H . Поэтому согласно лемме 1 и теореме 5.6.1 из [7, с. 98] получим утверждения теоремы. \square

3. Сеточная аппроксимация

Зададим на $\bar{\Omega}$ регулярное разбиение \mathcal{T}_h на замкнутые треугольные и четырёхугольные элементы e с диаметром, не превосходящим h [8–10]. Предположим, что точка \varkappa совпадает с вершиной одного из элементов разбиения. Введём [8–10] пространства эрмитовых конечных элементов:

$$W_{1h} = \{v^h : v^h \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v^h|_e \in \mathcal{P}_e, e \in \mathcal{T}_h\},$$

$$W_{2h} = \{v^h : v^h \in \mathring{W}_2^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v^h|_e \in \mathcal{P}_e, e \in \mathcal{T}_h\},$$

где \mathcal{P}_e – пространство полиномов, содержащее пространство полиномов степени три на множестве e , $C^1(\bar{\Omega})$ – пространство непрерывно дифференцируемых функций на $\bar{\Omega}$. Заметим, что W_{1h} – конечномерное подпространство пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, W_{2h} – конечномерное подпространство пространства $\mathring{W}_2^2(\Omega)$. Обозначим $N_1 = \dim W_{1h}$, $N_2 = \dim W_{2h}$. Положим $V_{0h} = W_{1h} \times W_{1h} \times W_{2h}$. Введём вещественное гильбертово пространство $V_h = V_{0h} \times \mathbb{R}$. Заметим, что V_{0h} – подпространство V_0 , $\dim V_{0h} = 2N_1 + N_2$, V_h – подпространство V , $\dim V_h = N$, $N = 2N_1 + N_2 + 1$.

Приближение по методу конечных элементов задачи (9) сводится к определению $\lambda^h \in \mathbb{R}$, $\bar{u}^h \in V_h \setminus \{0\}$ из уравнения

$$a(\bar{u}^h, \bar{v}^h) = \lambda^h b(\bar{u}^h, \bar{v}^h) \quad (10)$$

для любого вектора $\bar{v}^h \in V_h$. Решения λ^h и \bar{u}^h задачи (10) называются приближённым собственным значением и приближённым собственным вектором соответственно.

Теорема 2. *Конечномерная задача (10) имеет конечную последовательность положительных собственных значений λ_k^h , $k=1, 2, \dots, N$, $0 < \lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots \leq \lambda_N^h$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных векторов $\bar{u}_k^h = (u_k^h, \xi_k^h)^T \in V_h$, $k=1, 2, \dots, N$, такая, что $a(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \lambda_i^h \delta_{ij}$, $b(\bar{u}_i^h, \bar{u}_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j=1, 2, \dots, N$. Векторы \bar{u}_k^h , $k=1, 2, \dots, N$, составляют полную ортонормированную систему в пространстве V_h , то есть для любого вектора $\bar{v}^h \in V_h$ имеет место разложение*

$$\bar{v}^h = \sum_{i=1}^N b(\bar{v}^h, \bar{u}_i^h) \bar{u}_i^h.$$

Векторы $\tilde{u}_k^h = \bar{u}_k^h / \sqrt{\lambda_k^h}$, $k=1, 2, \dots, N$, также составляют полную ортонормированную систему в пространстве V_h , то есть для любого вектора $\bar{v}^h \in V_h$ имеет место разложение

$$\bar{v}^h = \sum_{i=1}^N a(\bar{v}^h, \tilde{u}_i^h) \tilde{u}_i^h.$$

Доказательство. Утверждение теоремы устанавливается аналогично утверждению теоремы 1 с учётом конечномерности задачи (10). \square

Для $\bar{v} \in V$ обозначим

$$\varepsilon_h(\bar{v}) = \inf_{\bar{v}^h \in V_h} \|\bar{v} - \bar{v}^h\|_V.$$

Лемма 2. *Если $\bar{v} \in V$, то $\varepsilon_h(\bar{v}) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.*

Доказательство. Пусть Π_{ih} – оператор W_{ih} -интерполяции [8–10] при $i=1, 2$. Обозначим через Π_h оператор V_{0h} -интерполяции, определяемый по формуле $\Pi_h \varphi = (\Pi_{1h} \varphi_1, \Pi_{1h} \varphi_2, \Pi_{2h} \varphi_3)^T$ для $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in \mathcal{D}_0$.

Поскольку пространство \mathcal{D}_0 всюду плотно в пространстве V_0 , то для вектора $v \in V_0$ и любого $\varepsilon_0 > 0$ существует такой вектор $\varphi \in \mathcal{D}_0$, что $\|v - \varphi\|_{V_0} < \varepsilon_0/2$. Кроме того, существует такое $h_0 = h_0(\varepsilon_0) > 0$, что при $h < h_0$ выполняются соотношения $\|\varphi - \Pi_h \varphi\|_{V_0} \leq ch < \varepsilon_0/2$ [8–10], где c – положительная постоянная.

Тогда для $\bar{v} = (v, \zeta)^T \in V$ получим

$$\varepsilon_h(\bar{v}) = \inf_{\bar{v}^h \in V_h} \|\bar{v} - \bar{v}^h\|_V \leq \|v - \Pi_h \varphi\|_{V_0} \leq \|v - \varphi\|_{V_0} + \|\varphi - \Pi_h \varphi\|_{V_0} < \varepsilon_0.$$

Лемма доказана. \square

Для измерения расстояния между подпространствами введём раствор подпространств. Пусть W_1 и W_2 – два подпространства гильбертова пространства V , $\dim W_1 = \dim W_2 < \infty$, P_i – оператор ортогонального проектирования из V на W_i , $i=1, 2$. Тогда раствор подпространств W_1 и W_2 вычисляется по формуле

$$\vartheta(W_1, W_2) = \sup_{\bar{w} \in W_2, \|\bar{w}\|_V=1} \|\bar{w} - P_1 \bar{w}\|_V = \sup_{\bar{w} \in W_1, \|\bar{w}\|_V=1} \|\bar{w} - P_2 \bar{w}\|_V.$$

Пусть λ_k – собственное значение задачи (9) кратности s такое, что $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+s-1} < \lambda_{k+s}$, \bar{u}_i , $i=k, k+1, \dots, k+s-1$, – соответствующие собственные векторы, λ_i^h , \bar{u}_i^h , $i=k, k+1, \dots, k+s-1$, – приближения по

схеме (10), $U_k = \text{span}\{\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}, \dots, \bar{u}_{k+s-1}\}$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k , $U_k^h = \text{span}\{\bar{u}_k^h, \bar{u}_{k+1}^h, \dots, \bar{u}_{k+s-1}^h\}$ – приближение к собственному подпространству U_k .

Теорема 3. *Имеет место сходимость $\lambda_i^h \rightarrow \lambda_i$ при $h \rightarrow 0$, $\lambda_i^h \geq \lambda_i$, $i = k, k+1, \dots, k+s-1$, $\vartheta(U_k, U_k^h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.*

Доказательство. Результат сходимости вытекает из леммы 2 и теорем 8, 9 из [11]. \square

Положим

$$\varepsilon_k^h = \sup_{\bar{u} \in U_k, \|\bar{u}\|_V=1} \varepsilon_h(\bar{u}).$$

Так как U_k – конечномерное подпространство, то справедлива сходимость $\varepsilon_k^h \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Далее считаем h достаточно малым, а через c обозначим различные константы, не зависящие от h . Положим $V^\alpha = W_2^{1+\alpha}(\Omega) \times W_2^{1+\alpha}(\Omega) \times W_2^{2+\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 2]$.

Теорема 4. *Выполняются следующие оценки погрешности:*

$$0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq c (\varepsilon_k^h)^2, \quad \vartheta(U_k, U_k^h) \leq c \varepsilon_k^h$$

для $i = k, k+1, \dots, k+s-1$.

Доказательство. Оценки погрешности вытекают из лемм 1, 2 и теорем 10, 11 из [11]. \square

Лемма 3. *Если $\bar{v} \in V^\alpha \times \mathbb{R}$, то $\varepsilon_h(\bar{v}) \leq ch^\alpha$.*

Доказательство. Для $\bar{v} = (v, \zeta)^\top \in V^\alpha \times \mathbb{R}$ согласно [9, с. 379] получим

$$\varepsilon_h(\bar{v}) = \inf_{\bar{v}^h \in V_h} \|\bar{v} - \bar{v}^h\|_V = \inf_{v^h \in V_{0h}} \|v - v^h\|_{V_0} \leq ch^\alpha.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 4. *Если $\bar{u}_i \in V^\alpha \times \mathbb{R}$ для некоторого числа $\alpha \in (0, 2]$, $i = k, k+1, \dots, k+s-1$, то справедлива оценка $\varepsilon_k^h \leq ch^\alpha$.*

Доказательство. Нормированный вектор $\bar{u} \in U_k$, $\|\bar{u}\|_V = 1$, представим в виде разложения по базису

$$\bar{u} = \sum_{i=k}^{k+s-1} c_i \bar{u}_i$$

с коэффициентами $c_i = b(\bar{u}, \bar{u}_i)$, $i = k, k+1, \dots, k+s-1$. Тогда, учитывая лемму 3, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(\bar{u}) &\leq \sum_{i=k}^{k+s-1} |c_i| \varepsilon_h(\bar{u}_i) \leq ch^\alpha \sum_{i=k}^{k+s-1} |c_i| = ch^\alpha \sum_{i=k}^{k+s-1} |b(\bar{u}, \bar{u}_i)| \leq \\ &\leq ch^\alpha \sum_{i=k}^{k+s-1} \sqrt{b(\bar{u}, \bar{u})} \sqrt{b(\bar{u}_i, \bar{u}_i)} \leq ch^\alpha \sum_{i=k}^{k+s-1} \|\bar{u}\|_V \leq ch^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon_k^h \leq ch^\alpha$. Лемма доказана. \square

Теорема 5. Если $\bar{u}_i \in V^\alpha \times \mathbb{R}$ для некоторого числа $\alpha \in (0, 2]$, $i = k, k+1, \dots, k+s-1$, то имеют место оценки погрешности

$$0 \leq \lambda_i^h - \lambda_i \leq ch^{2\alpha}, \quad \vartheta(U_k, U_k^h) \leq ch^\alpha$$

при $i = k, k+1, \dots, k+s-1$.

Доказательство. Требуемые оценки погрешности следуют из теоремы 4 и леммы 4. \square

4. Вычислительные эксперименты

Пусть $\Omega = (0, l) \times (0, l)$ – квадратная область с границей Γ , $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, l]$. На $\bar{\Omega}$ зададим сетку $x_{ij} = (x_i, x_j)$, $x_i = ih$, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = l/n$, с ячейками $e_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [x_{j-1}, x_j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\varkappa = x_{n_1 n_2}$, $0 < n_1 < n$, $0 < n_2 < n$. Введём [8, с. 77] пространства эрмитовых бикубических конечных элементов

$$W_{1h} = \{v^h : v^h \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v^h|_{e_{ij}} \in Q_3(e_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n\},$$

$$W_{2h} = \{v^h : v^h \in \mathring{W}_2^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), v^h|_{e_{ij}} \in Q_3(e_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n\},$$

где $Q_3(e)$ – пространство полиномов степени три по каждой переменной на множестве e . Известно, что W_{1h} – конечномерное подпространство пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\dim W_{1h} = (2n)^2$, W_{2h} – конечномерное подпространство пространства $\mathring{W}_2^2(\Omega)$, $\dim W_{2h} = (2n-2)^2$ [8, с. 77]. Обозначим $V_{0h} = W_{1h} \times W_{1h} \times W_{2h}$. Введём вещественное гильбертово пространство $V_h = V_{0h} \times \mathbb{R}$. Заметим, что V_{0h} – подпространство V_0 , $\dim V_{0h} = 2(2n)^2 + (2n-2)^2$, V_h – подпространство V , $\dim V_h = N$, $N = 2(2n)^2 + (2n-2)^2 + 1$.

Вариационная задача собственных колебаний оболочки с присоединённым осциллятором (9) решалась численно с помощью сеточной схемы (10). Расчёты проводились при следующих значениях параметров: $E = 210000$, $\nu = 0.167$, $\rho = 7800$, $r = 0.06$, $R_1 = 5$, $R_2 = 5$, $l = 1$, $\varkappa = (0.2, 0.7)$. Решена серия задач при разных значениях K и M . Вычислены порядки погрешности σ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, для собственных значений λ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, по формуле

$$\sigma_k = \log_2 \frac{\lambda_k^h - \lambda_k^{h/2}}{\lambda_k^{h/2} - \lambda_k^{h/4}}$$

при $n = 20$, $h = 0.05$. В результате вычислений экспериментально получена оценка погрешности $\lambda_k^h - \lambda_k \approx ch^{\sigma_k}$. Установлено, что порядок погрешности σ_k находится в интервале $[2, 4]$ в зависимости от параметров K , M и \varkappa присоединённого осциллятора. В таблице 1 приведены собственные значения λ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, и порядки погрешности σ_k , $k = 1, 2, \dots, 6$, при $K = 10000$ и $M = 2000$. Собственные значения для таблицы 1 вычислены на мелкой сетке размера $h/4 = 0.0125$.

На рисунках 1 и 2 показаны изолинии и нулевые линии третьих компонент u_3^k , $k = 1, 2, \dots, 6$, собственных векторных функций $\bar{u}_k = (u_k, \xi_k)^\top$, $u_k = (u_1^k, u_2^k, u_3^k)^\top$, $k = 1, 2, \dots, 6$, при $K = 10000$ и $M = 2000$. На этих рисунках отмечена точка присоединения груза \varkappa . При увеличении значения коэффициента упругости K задача собственных колебаний оболочки с упруго присоединёнными грузами приближается к задаче собственных колебаний оболочки с жёстко присоединённым грузом. При увеличении величины коэффициента упругости K и величины массы M присоединённого груза третьи компоненты собственных векторных функций

Табл. 1

Собственные значения

k	λ_k	σ_k
1	1.7662	2.0074
2	13.2043	2.0499
3	45.9259	3.9647
4	49.8541	2.1180
5	102.1462	2.3326
6	145.5951	3.9091

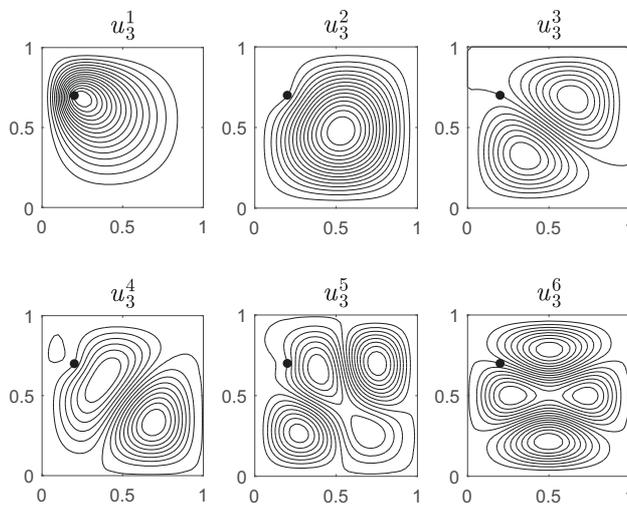


Рис. 1. Изолинии собственных функций

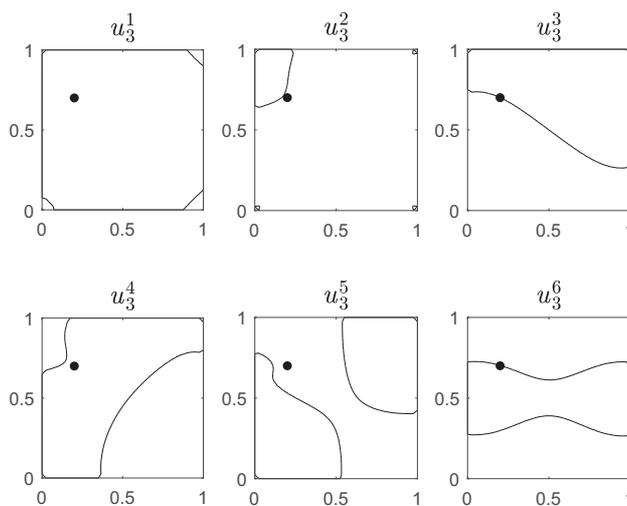


Рис. 2. Нулевые линии собственных функций

с номерами $k = 2, 3, \dots$ приближаются к нулю в точке присоединения груза. Из рис. 2 видно, что точка присоединения груза \varkappa лежит на нулевых линиях функций u_3^3 и u_3^6 . Поэтому $u_3^3(\varkappa) = u_3^6(\varkappa) = 0$. Следовательно, сингулярные слагаемые в дифференциальном уравнении (6) для собственных функций с номерами $k = 3$ и $k = 6$ не присутствуют. Это стало причиной увеличения гладкости собственных функций с номерами $k = 3$ и $k = 6$ и привело к увеличению порядка сходимости до четырёх для собственных значений λ_3 и λ_6 согласно таблице 1. Для других собственных значений порядки сходимости приближённо равны двум. Полученные численные результаты полностью согласуются с теоретическими результатами теорем 1–5.

Благодарности. Работа выполнена за счёт средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Литература

1. *Серёгин С.В.* Динамика тонких цилиндрических оболочек с присоединённой массой. Комсомольск-на-Амуре: КнАГТУ, 2016. 175 с.
2. *Андреев Л.В., Дышко А.Л., Павленко И.Д.* Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. М.: Машиностроение, 1988. 195 с.
3. *Андреев Л.В., Станкевич А.И., Дышко А.Л., Павленко И.Д.* Динамика тонкостенных конструкций с присоединёнными массами. М.: МАИ, 2012. 214 с.
4. *Соловьёв С.И.* Нелинейные задачи на собственные значения. Приближённые методы. Saarbrücken: LAP, 2011. 256 с.
5. *Adams R.A.* Sobolev Spaces. New York: Acad. Press, 1975. 268 p.
6. *Литвинов В.Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 366 с.
7. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
8. *Ciarlet P.G.* The Finite Element Method for Elliptic Problems. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Vol. 40. O'Malley R.E. (Ed.). Philadelphia: SIAM, 2002. 530 p.
9. *Brenner S.C., Scott L.R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Ser.: Texts in Applied Mathematics. Marsden J.E., Sirovich L., Antman S.S. (Eds.). New York: Springer, 2008. xviii, 400 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>.
10. Brenner S.C., Sung L.-Y. C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. *J. Sci. Comput.* 2005. V. 22–23, No 1. P. 83–118. URL: <https://doi.org/10.1007/s10915-004-4135-7>.
11. Solov'ev S.I. Approximation of variational eigenvalue problems. *Differ. Equations.* 2010. V. 46, No 7. P. 1030–1041. URL: <https://doi.org/10.1134/S0012266110070104>.

Поступила в редакцию 5.04.2023
Принята к публикации 5.07.2023

Коростелева Диана Маратовна, старший преподаватель кафедры «Информатика и информационно-управляющие системы»

Казанский государственный энергетический университет
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия
E-mail: diana.korosteleva.kpfu@mail.ru

Соловьев Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта

Институт вычислительной математики и информационных технологий,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: sergey.solovev.kpfu@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 2, pp. 153–166

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.153-166

**Mathematical Modeling of Eigenvibrations
of the Shallow Shell with an Attached Oscillator**

D.M. Korosteleva^{a}, S.I. Solov'ev^{b**}*

^a*Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia*

^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: *diana.korosteleva.kpfu@mail.ru, **sergey.solovev.kpfu@mail.ru

Received April 5, 2023; Accepted July 5, 2023

Abstract

For the problem of eigenvibrations of the shallow shell with an attached oscillator, a new symmetric variational statement in the Hilbert space was proposed. It was established that there exist a sequence of positive eigenvalues of finite multiplicity with a limit point at infinity and the corresponding complete orthonormal system of eigenvectors. The problem was approximated by the mesh scheme of the finite element method with Hermite finite elements. Theoretical error estimates for the approximate solutions were proved. The theoretical findings were verified by the results of numerical experiments.

Keywords: eigenvibration, shallow shell, oscillator, eigenvalue, eigenvector, eigenvalue problem, finite element method, Hermite finite element

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

Figure Captions

Fig. 1. Isolines of the eigenfunctions.

Fig. 2. Zero lines of the eigenfunctions.

References

1. Seregin S.V. *Dinamika tonkikh tsilindricheskikh obolochek s prisoedinennoi massoi* [Dynamics of Thin Cylindrical Shells with Attached Mass]. Komsomolsk-on-Amur, KnAGTU, 2016. 175 p. (In Russian)
2. Andreev L.V., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika plastin i obolochek s sosredotоченными массами* [Dynamics of Plates and Shells with Concentrated Masses]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 195 p. (In Russian)
3. Andreev L.V., Stankevich A.I., Dyshko A.L., Pavlenko I.D. *Dinamika tonkostennykh konstruktsii s prisoedinennymi massami* [Dynamics of Thin-Walled Structures with Attached Masses]. Moscow, MAI, 2012. 214 p. (In Russian)
4. Solov'ev S.I. *Nelineinye zadachi na sobstvennye znacheniya. Priblizhennyye metody* [Nonlinear Eigenvalue Problems. Approximate Methods]. Saarbrücken, LAP, 2011. 256 p. (In Russian)
5. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. New York, Acad. Press, 1975. 268 p.
6. Litvinov V.G. *Optimizatsiya v ellipticheskikh granichnykh zadachakh s prilozheniyami k mekhanike* [Optimization in Elliptic Boundary Value Problems with Applications to Mechanics]. Moscow, Nauka, 1987. 366 p. (In Russian)
7. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1977. 431 p. (In Russian)
8. Ciarlet P.G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Vol. 40. O'Malley R.E. (Ed.). Philadelphia, SIAM, 2002. 530 p.
9. Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Ser.: Texts in Applied Mathematics. Marsden J.E., Sirovich L., Antman S.S. (Eds.). New York, Springer, 2008. xviii, 400 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-75934-0>.
10. Brenner S.C., Sung L.-Y. C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. *J. Sci. Comput.*, 2005, vols. 22–23, no. 1, pp. 83–118. URL: <https://doi.org/doi: 10.1007/s10915-004-4135-7>.
11. Solov'ev S.I. Approximation of variational eigenvalue problems. *Differ. Equations*, 2010, vol. 46, no. 7, pp. 1030–1041. URL: <https://doi.org/10.1134/S0012266110070104>.

⟨ **Для цитирования:** Коростелева Д.М., Соловьев С.И. Математическое моделирование собственных колебаний пологой оболочки с присоединённым осциллятором // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 153–166. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>. ⟩

⟨ **For citation:** Korosteleva D.M., Solov'ev S.I. Mathematical modeling of eigenvibrations of the shallow shell with an attached oscillator. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 153–166. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.153-166>. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.167-177

РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ ДВУМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА ОБЪЕКТАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. О. Лапич, М. Ю. Медведик

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия

Аннотация

Цели данного исследования – разработка, построение и программная реализация методов решения нелинейной задачи дифракции. В работе рассмотрено влияние нелинейной среды, заданной по закону Керра $k^2(x) = k_1^2 + \alpha|u(x)|^2$, на распространение волны, проходящей через объект. Представлены дифференциальная и интегральная формы задачи, а также нелинейное интегральное уравнение. Получены результаты решения задачи на различных телах с использованием различных расчетных сеток, представлены графики сходимости итерационных процессов и графические результаты. Приведены сравнения явного и неявного методов решения соответствующего интегрального уравнения.

Ключевые слова: интегральное уравнение, скалярная нелинейная задача дифракции, метод коллокаций, итерационный процесс, численный метод

Введение

Решение задач дифракции на объектах произвольной формы имеет большое значение для многих отраслей науки и техники. В некоторых случаях дифракционные задачи могут рассчитываться при помощи двумерных моделей. Полученные результаты находят свое применение в таких областях, как радиофизика, медицинская диагностика.

Первым шагом в решении является построение на рассматриваемом теле расчетной сетки с использованием равномерного или неравномерного разбиения. Затем, применив различные математические методы, можно свести поставленную задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Для решения подобных задач могут использоваться различные подходы, такие как методы конечных разностей, конечных элементов, сведения к интегральному уравнению и др. [1]–[7]. Мы используем метод сведения задачи к интегральному уравнению, так как он позволяет находить решение задачи, задав расчетную сетку только на объекте, что избавляет от построения больших расчетных сеток, построенных на теле и вне его, как это необходимо в других методах. Получив систему уравнений, можно решить ее численно, используя различные существующие методы. Решение задачи в двумерной области имеет относительно небольшую вычислительную сложность и высокую скорость вычисления. Поэтому для тестирования и отладки можно использовать мелкое разбиение сетки, которое позволит получить более точные результаты.

1. Постановка задачи

Пусть неоднородный объект Q расположен в двумерном пространстве. Рассмотрим решение скалярной задачи дифракции для плоского тела (либо системы тел). Такая задача сводится к неоднородному уравнению Гельмгольца [2]

$$\Delta u + k^2(x) u = f(x), \quad (1)$$

где $k^2(x)$ – непрерывная вещественная функция, $k^2(x) > 0$, $f(x)$ – известная функция с компактным носителем. Введем условия сопряжения на границе раздела двух сред

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где символ $[\cdot]$ определяет скалярную функцию на ∂Q , представляющую собой разность значений функции с разных сторон ∂Q . Функция должна удовлетворять условиям излучения на бесконечности (условия Зоммерфельда)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 u + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Утверждение 1. Решение задачи (1)–(3) единственно.

Любое решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условиям непрерывности, называется классическим решением прямой задачи рассеяния в дифференциальной постановке. Задача (1)–(3) может быть сведена к интегральному уравнению [2]

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (4)$$

где $f^0(x)$ – функция, задающая падающее поле, $k(y)$ – волновая функция внутри тела, $u(x)$ – искомая функция, $G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(k_0|x-y|)$ – функция Ханкеля первого рода. Уравнение (4) называется уравнением Липпмана–Швингера.

Далее определим пространство $L_2(Q)$. В случае, когда Q является однородным объектом, интегральное уравнение (4) примет вид

$$f^0(x) = u(x) - k_1^2 \int_Q G(x, y) u(y) dy. \quad (5)$$

Уравнения (4)–(5) являются уравнениями Фредгольма второго рода. Обозначим $Au = \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy$, $u := u(x)$, $F := f^0(x)$ и запишем уравнение в операторном виде: $Lu := u - Au := F$.

Утверждение 2. Оператор $Lu := u - Au : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ фредгольмов. Оператор A – это компактный оператор, так как является оператором со слабо сингулярным ядром, I – единичный оператор. Таким образом, оператор $L := I - A$ является оператором Фредгольма.

Утверждение 3. Оператор $L := I - A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ является непрерывно обратимым.

Решение задачи (1)–(3) требует разработки и использования современных численных методов. Для этих целей мы разработали модифицированные проекционные методы.

2. Расчетные сетки и матрицы

Рассмотрим построение модифицированного метода коллокаций. Проведем дискретизацию тела Q для решения интегрального уравнения (4), которая состоит в построении расчетной сетки Π_N на теле Q . Рассмотрим особенности построения расчетной сетки. Процесс дискретизации расчетной сетки подробно рассмотрен в [4]. Основной проблемой при конструировании расчетной сетки является правильное определение границ тела. Данная проблема может быть решена путем введения все более мелкой сетки. Однако существуют и другие подходы, связанные с введением более удобных носителей базисных функций. При построении любой расчетной сетки Π_N должна учитываться специфика геометрии Q , в том числе для тел канонической формы.

Чтобы лучше описать края тела Q и улучшить граничную аппроксимацию ∂Q , введем в расчетную сетку Π_N дополнительные носители $\text{supp } f_i^k$ для базисных функций f_i^k . Здесь k – тип носителя, i – его порядковый номер. В этом случае выбор сеточных базисных функций может быть произведен путем применения субиерархического метода [7], [8].

Для улучшения аппроксимации тела Q , его границ ∂Q и минимизации числа носителей базисных функций f_i^k при построении вектора геометрии можно ввести добавочные типы сеточных базисных функций $\text{supp } f_i^k$.

В случае, когда тело имеет гладкую границу (круг, эллипс и т. д.), возникает трудность в аппроксимации его границы прямоугольными носителями. Эту проблему можно решить путем добавления дополнительных треугольных носителей в расчетную сетку (рис. 1).

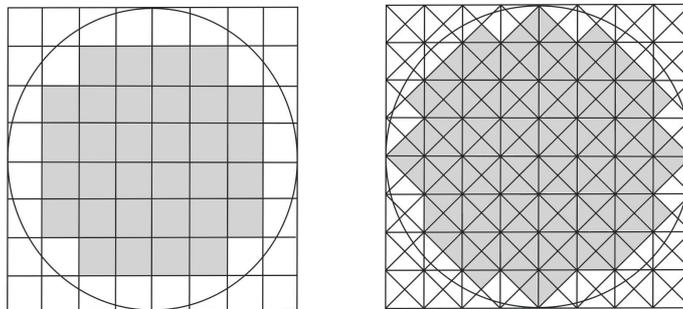


Рис. 1. Пример круга, построенного на прямоугольной и обобщенной сетках

Расчетные сетки данного вида будем называть *объединенными каноническими расчетными сетками* $\overset{\circ}{\Pi}_N$. Для рассматриваемых типов задач на плоских телах и экранах можно использовать объединенную расчетную сетку $\overset{\circ}{\Pi}_N$ (рис. 2), которая представляет собой объединение треугольной и прямоугольной расчетных сеток.

Определение 1. Конечными элементами обобщенной расчетной сетки $\overset{\circ}{\Pi}_N$ являются прямоугольники или треугольники, параллельные одной из плоскостей декартовой системы координат и образованные горизонтальными, вертикальными или диагональными ребрами расчетной сетки.

Определение 2. Носитель сеточной базисной функции $\text{supp } f_i^k$ для расчетной сетки $\overset{\circ}{\Pi}_N$ – это два несовпадающих конечных элемента, примыкающих к одному ребру, каждый из которых ориентирован вдоль одной из плоскостей декартовой системы координат.

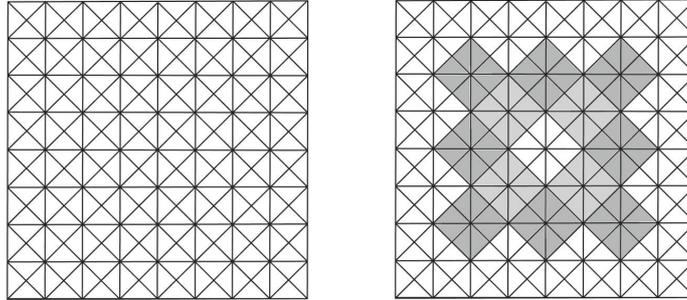


Рис. 2. Фигура сложной формы, построенная на объединенной сетке

Определение 3. Шаблон носителей для обобщенной расчетной сетки $\overset{\circ}{\Pi}_N$ – это совокупность всевозможных типов носителей базисных функций f_i^k .

Иногда в ряде задач возникают случаи, когда явление искусственной анизотропии оказывает сильное влияние на решение задачи. Если носители базисных функций имеют выраженную ориентацию в определенном направлении, то возникает данное явление (рис. 3), что, в свою очередь, приводит к появлению еще одного вида погрешности. Эту проблему можно эффективно решить на этапе определения геометрии тела Q путем введения объединенной расчетной сетки $\overset{\circ}{\Pi}_N$.

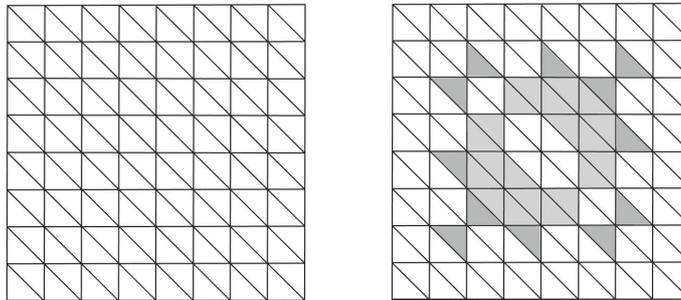


Рис. 3. Фигура сложной формы, построенная на сетке, имеющей ориентацию по одному углу

Выбор геометрии Q и его границ ∂Q при использовании расчетной сетки $\overset{\circ}{\Pi}_N$ возможен различными путями. Одно и то же тело может быть описано разными комбинациями носителей $\text{supp } f_i^k$. В большинстве случаев выбирают комбинацию, которая состоит из меньшего числа носителей, приводящую к уменьшению вычислительной сложности задачи. Также при выборе набора носителей учитывают точность аппроксимации границ фигуры. Однозначность определения формы фигуры гарантирует следующее утверждение.

Матрица $\overset{\circ}{A}$ состоит из матричных элементов, включающих в себя всевозможные комбинации сеточных базисных функций f_i^k . Требуется выполнение условий аппроксимации для каждого из типов сеточных базисных функций. Комбинация полного набора базисных функций различного типа также должна удовлетворять условию аппроксимации в выбранных пространствах.

Утверждение 4. Пусть матрица $\overset{\circ}{A}$ включает в себя $N \geq 2$ типов базисных функций f_i^k ($k = 1, \dots, N$) и пусть каждый из типов базисных функций f_i^k удовлетворяет условию аппроксимации. Тогда любая комбинация из элементов базисных функций различного типа также удовлетворяет условию аппроксимации.

Теорема 1. Пусть $\overset{\circ}{A}$ – матрица, полученная дискретизацией интегрального уравнения на фигуре канонической формы $\Pi = \{0 < x_1 < dl, \dots, 0 < x_n < dn\}$ проекционным методом, и пусть вектор геометрии W однозначно определяет фигуру сложной геометрической формы Q . Тогда решение интегрального уравнения, найденное субиерархическим методом на подматрице, определяемой вектором геометрии W , будет решением интегрального уравнения на фигуре Q .

Доказательство теоремы 1 и утверждений можно найти в работе [6]. Размер матрицы, составленный по конкретной расчетной сетке для тела Q , всегда значительно меньше размера матрицы $\overset{\circ}{A}$. Однако матрица, как правило, имеет специфическую структуру (является теплицевой, блочно-теплицевой, ганкелевой и т.д.). К обобщенным матрицам относятся так называемые переопределенные матрицы. Такая структура матрицы приводит к возможности хранения вместо целой матрицы нескольких ее строк, что значительно упрощает процессы, связанные с вычислениями, а также обработкой и хранением матрицы.

3. Решение прямой задачи (метод коллокаций)

Дополним Q до фигуры прямоугольного вида $P = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, x_3 = c\}$. Построим на P равномерную обобщенную прямоугольную сетку. Будем нумеровать все элементарные прямоугольники $\bar{\Pi}_{kl} \in P$. Это связано с тем, что нам неизвестно местоположение, размер и форма неоднородности. Площадь любого элементарного прямоугольника $\bar{\Pi}_{kl}$ равна V . Будем называть элементарный прямоугольник носителем базисной функции.

Будем использовать кусочно-постоянные базисные функции и определим их на носителе следующим образом:

$$v_{kl} = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{kl}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{kl}. \end{cases} \quad (6)$$

Данная функция удовлетворяет условию аппроксимации в пространстве $L_2(Q)$. В качестве метода решения выберем метод коллокации и рассмотрим его применение для уравнения

$$Au = f. \quad (7)$$

Метод коллокации состоит в нахождении приближенного решения уравнения посредством приравнивания значений функций в левой и правой частях в конечном числе точек, называемых точками коллокации, которые обычно выбираются как центры носителей базисных функций: $x_j = \left\{ \frac{x_{1,j} + x_{1,j+1}}{2}, \frac{x_{2,j} + x_{2,j+1}}{2}, c \right\}$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : X \rightarrow Y$. Метод коллокации решения уравнения (7) состоит в нахождении приближенного решения $u \in X_n$, удовлетворяющего уравнению

$$(Au_n)(x_j) = f(x_j), j = 1 \dots n.$$

Рассмотрим линейную оболочку $X_n = \text{span}\{v_1 \dots v_n\}$, состоящую из базисных функций (6). Выразим элемент u_n в виде линейной комбинации

$$u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k.$$

В этом случае метод коллокации приводит к СЛАУ следующего вида

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Av_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n. \quad (8)$$

Приравнивание левой и правой частей уравнений (8) в конечном числе точек коллокации эквивалентно уравнению проекционного метода $P_n Au_n = P_n f$ с некоторым оператором интерполяции P_n , являющимся проекционным оператором.

4. Нелинейный случай

Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y; u(y))) u(y) dy, \quad (9)$$

где волновая функция зависит от $u(y)$. Данное уравнение описывает процесс дифракции волны внутри Q . Определим нелинейную структуру тела по закону Керра

$$k^2(x) = k_1^2 + \alpha |u(x)|^2, \quad (10)$$

где $k_1 = const$, $\alpha > 0$ – коэффициент нелинейности. Будем моделировать процесс определения нелинейного поля при помощи итерационного процесса. Разобьем итерационный алгоритм на два этапа. На первом этапе положим, что тело однородно, т. е. волновая функция является константой: $k^2(x) = k_1^2 = const$ (запуск итерационного процесса также возможен при условии, что волновая функция является неоднородной).

Неявный алгоритм. Решим интегральное уравнение

$$u_0(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u_0(y) dy$$

и рассчитаем поле $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитаем значения волновой функции по следующей формуле:

$$k_{n+1}^2(x) = k_1^2 + \alpha |u_n(x)|^2. \quad (11)$$

Далее решим линейное уравнение

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_{n+1}(y) dy. \quad (12)$$

Процесс (11)–(12) повторим до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Задачу рассмотрим в частотной области. Данный метод является неявным, поэтому на каждом этапе приходится решать нелинейное уравнение. Для решения уравнения используем метод коллокаций.

Явный алгоритм. Данный алгоритм заключается в построении явного итерационного процесса, который можно расписать по шагам. На первом этапе для задания начального приближения решим линейное объемное интегральное уравнение (9) и тем самым определим значение $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитаем значения волновой функции по формуле Керра (11) и, используя формулу пересчета

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_n(y) dy, \quad (13)$$

найдем решение на новом шаге. Процесс повторяем, пока не будет достигнута требуемая точность.

Данный метод имеет свои недостатки: необходим выбор достаточно точного начального приближения, иначе итерационный процесс не будет сходящимся.

Численное сравнение двух представленных алгоритмов показало, что неявный метод работает в более широком диапазоне значений k , однако уступает явному методу по скорости вычислений. Явный метод обоснован в работе [9] в случае трехмерного уравнения Липпмана–Швингера.

5. Численные результаты

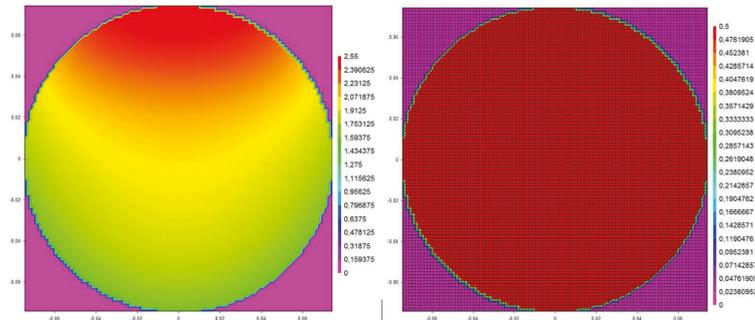


Рис. 4. Модуль решения интегрального уравнения (5). Красный цвет соответствует волновому числу 0.5

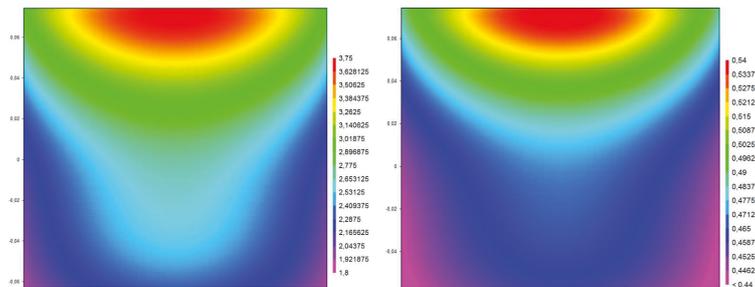


Рис. 5. Модуль решения интегрального уравнения (13)

На рис. 4–6 показаны значения функций решения интегрального уравнения (слева) и волнового числа (справа) для линейной и нелинейной задач. Рис. 4 демонстрирует решение линейной задачи на однородном теле. Тело представляет собой круг, «вырезанный» из фигуры канонической формы (квадрат) путем применения субиерархического метода. Диаметр круга совпадает с длиной квадратной пластины, его центр находится в начале координат. Значения волнового числа внутри круга составляет 0.5 м^{-1} . Рис. 5 демонстрирует решение нелинейной задачи на неоднородном теле в форме квадрата. Нелинейность задана по закону Керра. В качестве начального приближения итерационного процесса выбрано волновое число 0.4 м^{-1} . Остальные параметры совпадают с предыдущим экспериментом. Рис. 6 демонстрирует решение нелинейной задачи для тела сложной формы в виде четырехлиственного клевера. Для всех моделей выбраны следующие значения: размер

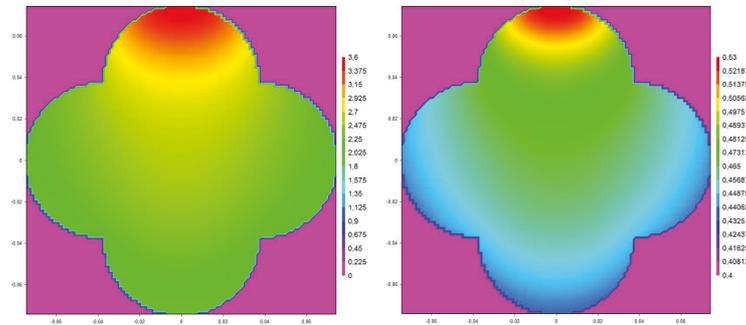


Рис. 6. Нелинейная задача для тела сложной геометрии

пластины 0.15×0.15 м., частота 1.1 ГГц. Размер обобщенной вычислительной сетки 100×100 . Размер матрицы равен 50000×50000 . В качестве падающего поля использовался точечный источник излучения, расположенный в центре плоскости тела на расстоянии 0.15 м. Расчеты подобных задач для линейного случая приведены в работах [5], [10].

Заключение

Предложен метод решения скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции, который предполагает использование неоднородной структуры тела для определения нелинейности. Нелинейность определяется по закону Керра. Сравнение двух методов (явного и неявного) показало совпадение численных результатов с высокой точностью. Неявный метод имеет более широкую область сходимости. Представлены результаты решения задачи на неоднородных объектах произвольной формы. Решение задачи произведено с использованием объединенных расчетных сеток.

Литература

1. *Kress R.* Linear Integral Equations. Ser.: Applied Mathematical Sciences. Vol. 82. John F., Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Berlin etc.: Springer-Verlag, 1989. xi, 299 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97146-4>.
2. *Smirnov Y.G., Tsupak A.A.* Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory. Moscow: Ru-Science, 2023. 216 p.
3. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешиников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991. 224 с.
4. *Андреев М.Л., Заркевич Н.А., Исаков А.Н., Козырева О.И., Плохов И.В.* Разбиение N-мерного куба на симплексы с сохранением симметрии // НТВП. 2011. № 3. С. 21–24.
5. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 3. P. 427–447. URL: <https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
6. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 10. P. 1474–1492. URL: <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.

7. *Medvedik M.Yu.* A subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes // J. Commun. Technol. Electron. 2012. V. 57, No 2. P. 158–163. URL: <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
8. *Medvedik M.Y.* Solution of integral equations by the subhierarchical method for generalized computational grids // Math. Models Comput. Simul. 2015. V. 7, No 6. P. 570–580. URL: <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.
9. *Смирнов Ю.Г., Лабуткина Д.А.* О решении нелинейного интегрального уравнения Липпмана–Швингера методом сжимающих отображений // Изв. высш. учебн. завед. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки. 2023. № 3. С. 3–10. URL: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-1>.
10. *Smirnov Y.G., Tsupak A.A.* Direct and inverse scalar scattering problems for the Helmholtz equation in \mathfrak{R}_m // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2022. V. 30, No 1. P. 101–116. URL: <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0060>.

Поступила в редакцию 1.09.2023

Принята к публикации 18.09.2023

Лапич Андрей Олегович, аспирант, ассистент кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Медведик Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: _medv@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.167-177

**Solution of a Scalar Two-Dimensional Nonlinear Diffraction Problem
for Objects of Arbitrary Shape**

A. O. Lapich , M. Y. Medvedik***

Penza State University, Penza, 440026 Russia

*E-mail: *lapich.a@yandex.ru, **_medv@mail.ru*

Received September 1, 2023; Accepted September 18, 2023

Abstract

In this study, the development, design, and software implementation of the methods for solving the nonlinear diffraction problem were performed. The influence of nonlinear medium defined by the Kerr law $k^2(x) = k_1^2 + \alpha|u(x)|^2$ on the propagation of a wave passing through an object was examined. The differential and integral formulations of the problem and the nonlinear integral equation were considered. The problem was solved for different bodies with the use of various computational grids. Convergence graphs of the iterative processes were generated. The obtained graphical results were presented. The explicit and implicit methods for solving the integral equation were compared.

Keywords: integral equation, scalar nonlinear diffraction problem, collocation method, iterative process, numerical method

Figure Captions

- Fig. 1. A circle on the rectangular and generalized grids.
Fig. 2. A figure of irregular shape on the combined grid.
Fig. 3. A figure of irregular shape on the grid oriented by one angle.
Fig. 4. Integral equation solution module (5). The red color indicates the wave number 0.5.
Fig. 5. Integral equation solution module (13).
Fig. 6. Nonlinear problem for a body with complex geometry.

References

1. Kress R. Linear Integral Equations. Ser.: Applied Mathematical Sciences. Vol. 82. John F., Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Berlin etc., Springer-Verlag, 1989. xi, 299 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-97146-4>.
2. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. *Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory*. Moscow, Ru-Science, 2023. 216 p.
3. Il'inskii A.S., Kravtsov V.V., Sveshnikov A.G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical Models of Electrodynamics]. Moscow, Vyssh. Shk., 1991. 224 p. (In Russian)

4. Andreev M.L., Zarkevich N.A., Isakov A.N., Kozyreva O.I., Plokhov I.V. Symmetry-conserving triangulation of an N-dimensional cube. *Nauchno-Tekh. Vestn. Povolzh'ya*, 2011, no. 3, pp. 21–24. (In Russian)
5. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 427–447. URL: <https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
6. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 10, pp. 1474–1492. URL: <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
7. Medvedik M.Yu. A subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 158–163. URL: <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
8. Medvedik M.Y. Solution of integral equations by the subhierarchical method for generalized computational grids. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 570–580. URL: <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.
9. Smirnov Yu.G., Labutkina D.A. On the solution of the nonlinear Lippmann–Schwinger integral equation by the method of contracting maps. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, no. 3, pp. 3–10. URL: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-1>. (In Russian)
10. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. Direct and inverse scalar scattering problems for the Helmholtz equation in \mathbb{R}_m . *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2022, vol. 30, No 1. P. 101–116. URL: <https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0060>.

Для цитирования: Лапич А.О., Медведик М.Ю. Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 167–177. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>.

For citation: Lapich A.O., Medvedik M.Y. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem for objects of arbitrary shape. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 167–177. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>. (In Russian)

