



**УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ**  
**КАЗАНСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА**  
**СЕРИЯ**  
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ**

**Том 165**

**Книга 1**

**2023**

# Ученые записки Казанского университета.

## Серия Физико-математические науки

рецензируемый научный журнал

2023

Т. 165, кн. 1

---

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

---

### Редакционная коллегия

Главный редактор

*Д.А. Таюрский* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

*А.М. Елизаров* (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Г.В. Абгарян* (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*М.М. Арсланов* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Е. Бенова* – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

*Р.З. Даутов* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*А.Г. Егоров* – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Э. Лайтинен* – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

*Р.Х. Латыпов* – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*В.Н. Паймушин* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Ю.Г. Смирнов* – д-р физ.-мат., проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

*В.Ф. Тишкин* – д-р физ.-мат., чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

*О.Н. Шерстюков* – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

*Ю.В. Шестопалов* – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

*М. Шнейдер* – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

*Ю.И. Шокин* – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

---

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору

в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

---

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

---

Подписной индекс 19423. Цена свободная

---

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18  
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: [uz.ku@kpfu.ru](mailto:uz.ku@kpfu.ru); сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

---

Дата выхода в свет 13.11.2023.  
Формат 70×108/16. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,27. Уч.-изд. л. 6,28.  
Тираж 300 экз. Заказ 30/3

Отпечатано в типографии Издательства  
Казанского университета  
420008, Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541-7746 (Print)  
ISSN 2500-2198 (Online)

**Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.**

**Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki**

**[Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]**

**Peer - Reviewed Scientific Journal**

**2023**

**Vol. 165**

**no. 1**

---

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

---

**Editorial Board**

Editor-in-Chief

*Dmitrii A. Tayurskii* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

*Alexander M. Elizarov* (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Garnik V. Abgaryan* (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Marat M. Arslanov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Evgenia Benova* – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

*Rafail Z. Dautov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Andrey G. Egorov* – Doctor of Physics and Mathematics, Senior Research Fellow, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Erkki Laitinen* – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

*Rustam Kh. Latypov* – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Vitalii N. Paimushin* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Yury G. Smirnov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

*Vladimir F. Tishkin* – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Oleg N. Sherstyukov* – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

*Yury V. Shestopalov* – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

*Mikhail Shneider* – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

*Yury I. Shokin* – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

---

English Editor: *A.O. Karmazina*

---

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education  
“Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications,  
Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

---

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

---

Subscription index: 19423. Free price

---

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, 420008 Russia  
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: [uz.ku@kpfu.ru](mailto:uz.ku@kpfu.ru); сайт: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

---

Date of publication: November 13, 2023.  
Page size: 70×108/16. Offset printing. Conventional  
printing sheet: 8.27. Publisher's signature: 6.28.  
Circulation: 300 copies. Order: 30/3

Printed in KFU Publishing House  
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, 420008  
Russia

© Kazan Federal University, 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Аблаев М.Ф., Аблаев Ф.М., Васильев А.В.</i> Анализ амплитудной формы квантовой хеш-функции .....                                                                                                | 5  |
| <i>Алифов А.А.</i> Действие разных запаздываний на смешанные типы колебаний при ограниченном возбуждении .....                                                                                     | 16 |
| <i>Григорян С.А., Кузнецова А.Ю.</i> Эндоморфизмы алгебры Теплица .....                                                                                                                            | 35 |
| <i>Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Соболевская Т.А., Джабраилов А.Ш., Клочков М.Ю.</i> Вариативная параметризация эллипсоидальной тонкой оболочки с реализацией на основе МКЭ .....     | 49 |
| <i>Мокейчев В.С., Сидоров А.М.</i> Метод Фурье в пространстве $\phi_V$ -распределений .....                                                                                                        | 68 |
| <i>Цивильский И.В., Мельников А.С., Гильмутдинов А.Х.</i> Многомасштабное моделирование процессов обработки порошковых материалов для аддитивного производства в индуктивно-связанной плазме ..... | 82 |

## CONTENTS

|                                                                                                                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Ablayev M.F., Ablayev F.M., Vasiliev A.V.</i> Analysis of the amplitude form of the quantum hash function .....                                                                                 | 5  |
| <i>Alifov A.A.</i> Influence of different delays on mixed types of oscillations under limited excitation .....                                                                                     | 16 |
| <i>Grigoryan S.A., Kuznetsova A.Yu.</i> Endomorphisms of the Toeplitz algebra .....                                                                                                                | 35 |
| <i>Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Dzhabrailov A.Sh, Klochkov M.Yu.</i> Varying parameterization of an ellipsoidal thin shell with FEM-based implementation ..... | 49 |
| <i>Mokeichev V.S., Sidorov A.M.</i> Fourier method in the space of $\phi_B$ -distributions .....                                                                                                   | 68 |
| <i>Tsivilsky I.V., Melnikov A.S., Gilmutdinov A.Kh.</i> Multiscale modeling of powder materials processing for additive manufacturing in inductively coupled plasma .....                          | 82 |

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.7

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.5-15

## АНАЛИЗ АМПЛИТУДНОЙ ФОРМЫ КВАНТОВОЙ ХЕШ-ФУНКЦИИ

М. Ф. Аблаев<sup>1,2</sup>, Ф. М. Аблаев<sup>2</sup>, А. В. Васильев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр  
Российской академии наук», г. Казань, 420111, Россия

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

### Аннотация

Работа продолжает исследования свойств квантовых хеш-функций. Ранее установлено, что так называемые множества с малым отклонением (специальные подмножества множества элементов циклической группы) генерируют квантовую хеш-функцию в «фазовой форме». В статье доказано, что такие множества генерируют квантовую хеш-функцию также и в «амплитудной форме»: а именно: оказалось, что конструкция множеств с малым отклонением при генерации квантовых функций в амплитудной форме также обеспечивает сбалансированное сочетание криптографических свойств однонаправленности и устойчивости к коллизиям.

В качестве следствия из полученной теоремы доказано общее утверждение о генерации новых квантовых хеш-функций в амплитудной форме на основе универсальных хеш-семейств и множеств с малым отклонением.

**Ключевые слова:** квантовая криптография, квантовое хеширование, устойчивость к коллизиям

### Введение

Одним из самых серьезных достижений алгоритмической квантовой криптографии и, пожалуй, наиболее известным результатом квантовой информатики является квантовый алгоритм факторизации Питера Шора [1, 2]. Реализация такого алгоритма создаст потенциальную угрозу для существующих криптографических протоколов, что означает необходимость интенсивных исследований в области постквантовой криптографии [3]. Постквантовая криптография разрабатывает криптографические системы, которые должны быть устойчивыми даже при наличии полнофункциональных квантовых компьютеров. Такие криптографические системы могут строиться, например, на основе хеш-функций.

В предыдущие годы нами определено понятие квантовой хеш-функции, начаты исследования областей их применимости. Первые такие работы опубликованы в 2014 году: [4–6]. Дальнейший анализ свойств и обобщения были проведены в работах [7–9]. Предложенный вариант квантового хеширования является «классически-квантовым», т. е. входная классическая информация преобразуется в квантовые состояния. Однако рассматривались и другие схемы, например, «квантово-классическая» на основе квантовых блужданий изучалась в работах [10–12]. Квантовое хеширование и протоколы передачи информации на

их основе соответствуют области постквантовой криптографии, предлагая квантовые методы защиты информации для борьбы с потенциальным квантовым взломщиком.

Данная работа исследует квантовые хеш-функции, ориентированные на криптографическое использование. Криптография предъявляет ряд специальных требований к хеш-функциям, которые обусловлены требованиями противостояния атакам на передаваемую и хранимую информацию. К таким требованиям относятся однонаправленность и устойчивость к коллизиям, которые нами проанализированы в работе [7].

В работе [8] предложен обобщенный подход к построению квантовых хеш-функций для элементов произвольной конечной абелевой группы. При этом вышеуказанные криптографические свойства таких функций полностью обеспечиваются специальным комбинаторным объектом под названием “множества с малым отклонением” (small-bias sets). Такие хеш-функции используют так называемую “фазовую” кодировку для представления информации в квантовом состоянии.

Вместе с тем нами предложена и другая конструкция квантовой функции [13], кодирующая информацию в амплитудах квантовых состояний и также соответствующая определению квантовой хеш-функции. В настоящей статье мы проводим дополнительный анализ данной “амплитудной формы” квантовой хеш-функции и хеш-генератора на ее основе. В частности, мы демонстрируем, что для такой хеш-функции также применима конструкция множеств с малым отклонением, обеспечивающих для нее сбалансированное сочетание криптографических свойств.

## 1. Предварительные сведения

В работе [4] предложена концепция квантовой хеш-функции, которая является “классически-квантовой” функцией с дополнительными свойствами.

**1.1. Квантовая функция.** Для конечного множества  $\mathbb{X}$  и множества  $(\mathcal{H}^2)^{\otimes s}$  квантовых  $s$  кубитных состояний взаимно однозначную функцию

$$\psi : \mathbb{X} \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s}$$

будем называть классически-квантовой (сокращенно просто квантовой) функцией. Такое определение квантовой функции удобно для определения понятия квантовой хеш-функции и рассмотрения ее свойств.

**1.2. Квантовая хеш-функция.** Основные свойства квантового криптографического хеширования были сформулированы нами в [4], а позднее в статье [7] произведен более детальный анализ взаимного влияния свойств однонаправленности и устойчивости к коллизиям и предложено более общее определение квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функции. Для полноты приведем здесь это определение в краткой форме.

**Определение 1.** Пусть  $\delta \in (0, 1]$  и  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Назовем квантовую функцию  $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{H}^K$  квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функцией, если она обладает следующими свойствами:

- $\delta$ -односторонность, т. е.

$$\frac{K}{|\mathbb{X}|} \leq \delta,$$

- $\varepsilon$ -устойчивостью к коллизиям, т. е. для любой пары различных входных значений  $x_1, x_2$

$$|\langle \psi(x_1) | \psi(x_2) \rangle| \leq \varepsilon.$$

Другими словами, квантовая функция  $\psi$  переводит входное значение  $x \in \mathbb{X}$  в квантовое состояние  $|\psi(x)\rangle$  размерности  $K$ . Основными свойствами такой функции являются устойчивость к инвертированию (также называемая “односторонностью” или “однонаправленностью”), которая обеспечивает малую вероятность “извлечения” входной информации из квантового состояния, а также устойчивость к квантовым коллизиям, которая означает возможность с высокой вероятностью различать несовпадающие значения квантовой хеш-функции (квантовые хеш-коды).

Отметим, что мера устойчивости к коллизиям (обозначенная выше  $\varepsilon$ ) не совпадает с вероятностью появления квантовых коллизий. Последняя определяется конкретной процедурой сравнения квантовых состояний, такой как SWAP-test [14] или REVERSE-test [4]. Также возможно сравнение путем измерения одного состояния в базисе, определяемом другим состоянием, и в этом случае вероятность коллизий равна степени совпадения (Fidelity) двух состояний  $F(|\psi(x_1)\rangle, |\psi(x_2)\rangle) = |\langle\psi(x_1)|\psi(x_2)\rangle|^2$  и оценивается сверху  $\varepsilon^2$ .

**1.3. Множества с малым отклонением.** Для аддитивной группы  $\mathbb{Z}_q$ , мультипликативной группы  $\mu_q$  корней  $q$ -й степени из единицы и элемента  $a \in \mathbb{Z}_q$  характером  $\chi_a$  группы  $\mathbb{Z}_q$  называют гомоморфизм  $\chi_a : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mu_q$

$$\chi_a(x) = e^{i\frac{2\pi}{q}ax},$$

также будем писать

$$\chi_a(x) = \omega^{ax}, \quad \text{где} \quad \omega = e^{i\frac{2\pi}{q}}.$$

Характер  $\chi_0 \equiv 1$  называют тривиальным характером.

Следующее понятие было введено в рассмотрение в теории групп в начале 1990-ых [15].

**Определение 2.** Множество  $B \subseteq \mathbb{Z}_q$  называется множеством с  $\varepsilon$ -отклонением ( $\varepsilon$ -biased) для  $\mathbb{Z}_q$ , если для каждого нетривиального характера  $\chi_a$  (т. е.  $a \neq 0$ ) группы  $\mathbb{Z}_q$  выполняется

$$\frac{1}{|B|} \left| \sum_{b \in B} e^{i\frac{2\pi ab}{q}} \right| \leq \varepsilon.$$

Заметим, что само множество  $\mathbb{Z}_q$  является множеством с 0-отклонением для  $\mathbb{Z}_q$ . А для  $\varepsilon < 1$  множество  $B$  с  $\varepsilon$ -отклонением интересно, если  $|B| \ll |\mathbb{Z}_q|$ . Это условие важно для гарантии “плохой обратимости” квантовой хеш-функции, сконструированной на основе множества  $B$  с  $\varepsilon$ -отклонением.

Введение понятия множества с  $\varepsilon$ -отклонением [15] сопровождалось предложением конструкции множества с  $\varepsilon$ -отклонением малой мощности и демонстрацией ряда приложений, в которых такие конструкции находят применение.

Существование множества с  $\varepsilon$ -отклонением экспоненциально малой мощности было отмечено в работе [16] и сформулировано в вероятностных терминах в виде следующего свойства [17].

*Свойство 1.* При равновероятностном выборе множества  $B$  мощности  $O((\log q)/\varepsilon^2)$  с элементами из  $\mathbb{Z}_q$  множество  $B$  будет множеством с  $\varepsilon$ -отклонением с положительной вероятностью.

Целый ряд конструкций множеств с  $\varepsilon$ -отклонением с мощностями, близкими к минимальным  $O((\log q)/\varepsilon^2)$ , предложен в работе [16] и последующих исследованиях. Возможность построения хороших квантовых хеш-функций является еще одним приложением малых по мощностям множеств с  $\varepsilon$ -отклонением.

## 2. Квантовая хеш-функция в амплитудной форме

В данном разделе мы рассмотрим квантовую хеш-функцию, описанную нами в [4], а также хеш-генератор на ее основе и применим для их построения множества с малым отклонением.

Пусть  $\mathbb{X} = \mathbb{Z}_q$ ,  $q = 2^n$ . Для множества  $B \subseteq \mathbb{Z}_q$ ,  $B = \{b_i : b_i \in \mathbb{Z}_q\}$  квантовую функцию

$$\psi_B : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathcal{H}^K,$$

где  $K = 2^s$ ,  $s = \log |B| + 1$ , определим следующим образом. Для  $w \in \mathbb{Z}_q$  положим

$$|\psi_B(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{|B|}} \sum_{i=0}^{|B|-1} |i\rangle \left( \cos \frac{2\pi b_i w}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi b_i w}{q} |1\rangle \right).$$

**Теорема 1.** Для  $q > 2$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $T = O\left(\frac{\log q}{\varepsilon^2}\right)$  существует множество с  $\varepsilon$ -отклонением  $B_\varepsilon = \{b_0, \dots, b_{T-1}\} \subseteq \mathbb{Z}_q$  мощности  $T$  такое, что для

$$s = \log T + 1 = O(\log \log q + \log(1/\varepsilon^2)) = O(\log(n) + \log(1/\varepsilon^2))$$

функция

$$\psi_{B_\varepsilon} : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathcal{H}^{2^s},$$

$$|\psi_{B_\varepsilon}(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{i=0}^{T-1} |i\rangle \left( \cos \frac{2\pi b_i w}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi b_i w}{q} |1\rangle \right)$$

является квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функцией с  $\delta \leq 2c \log q / (q\varepsilon^2)$ , где  $c$  — некоторая константа.

**Доказательство.** Непосредственными выкладками (см., например, [4]) можно показать, что скалярное произведение двух квантовых состояний  $|\psi_B(x_1)\rangle$  и  $|\psi_B(x_2)\rangle$ , задаваемых квантовой функцией  $\psi_B$  на основе множества  $B = \{b_0, \dots, b_{T-1}\} \subseteq \mathbb{Z}_q$ , определяется суммой

$$|\langle \psi_B(x_1) | \psi_B(x_2) \rangle| = \frac{1}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} \cos \frac{2\pi b_j(x_2 - x_1)}{q} \right|.$$

Согласно условию теоремы в качестве множества  $B$  мы берем множество  $B_\varepsilon$  — множество с  $\varepsilon$ -отклонением. Далее, введем обозначение  $\theta = 2\pi b_j(x_2 - x_1)/q$  и, используя формулу Эйлера и определение модуля комплексного числа, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} \cos \theta \right| &= \frac{1}{T} \sqrt{\left( \sum_{j=0}^{T-1} \cos \theta \right)^2} \leq \frac{1}{T} \sqrt{\left( \sum_{j=0}^{T-1} \cos \theta \right)^2 + \left( \sum_{j=0}^{T-1} \sin \theta \right)^2} = \\ &= \frac{1}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} \cos \theta + i \sum_{j=0}^{T-1} \sin \theta \right| = \frac{1}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} (\cos \theta + i \sin \theta) \right| = \frac{1}{T} \left| \sum_{j=0}^{T-1} e^{i\theta} \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что по построению  $\delta \leq 2|B_\varepsilon|/q = 2T/q$ . Согласно [17] мощность  $T$  множества  $B_\varepsilon$  может быть равна  $c \log q / \varepsilon^2$  для некоторой константы  $c$ . Значит,  $\delta \leq 2c \log q / (q\varepsilon^2)$ .  $\square$

**Обсуждение.** Из Теоремы 1 следует, что для произвольного  $\varepsilon > 0$  (начиная с некоторого  $q$ ) предложенная конструкция квантовой хеш-функции  $\psi_{B_\varepsilon}$  достаточно хороша, а именно, она является  $\varepsilon$ -устойчивой к коллизиям и  $\delta$ -односторонней. Для произвольного  $\varepsilon \in (0, 1)$ , начиная с некоторого  $q$ , вероятность  $\delta$  обращения функции  $\psi_{B_\varepsilon}$  может быть сколь угодно малой.

### 3. Квантовый хеш-генератор в амплитудной форме

Рассмотрим конструкцию, которая позволяет построить новые квантовые хеш-функции на основе квантовой функции, описанной выше. Эта конструкция основана на понятии квантового хеш-генератора, впервые предложенном нами в [6]. Для полноты приведем соответствующее определение.

**Определение 3** (Генератор квантовой хеш-функции). Пусть  $G = \{g_0, \dots, g_{D-1}\}$  – некоторое семейство функций. Пусть для  $g \in G$  квантовая функция  $\psi_g : \mathbb{X} \rightarrow \mathcal{H}^2$  задает кубит по правилу

$$\psi_g : w \mapsto |\psi_{g(w)}\rangle = \alpha_0(g(w))|0\rangle + \alpha_1(g(w))|1\rangle.$$

Пусть для  $d = \log D$  и  $s = d + 1$  квантовая функция  $\psi_G : \mathbb{X} \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s}$  сформирована по правилу

$$\psi_G : w \mapsto |\psi_G(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{j=0}^{D-1} |j\rangle \otimes |\psi_{g_j(w)}\rangle$$

и является квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функцией. Тогда будем говорить, что семейство  $G$  генерирует квантовую  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивую хеш-функцию  $\psi_G$  и будем называть  $G$  квантовым  $(\delta, \varepsilon)$  генератором функции  $\psi_G$  или просто генератором.

Далее, в терминах Определения 3 генератора квантовой хеш-функции имеем следующее.

*Свойство 2.* Для  $q > 2$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $T = O\left(\frac{\log q}{\varepsilon^2}\right)$  существует множество с  $\varepsilon$ -отклонением  $B_\varepsilon \subset \mathbb{Z}_q$ ,  $B_\varepsilon = \{b_0, \dots, b_{T-1}\}$  мощности  $T$  такое, что семейство функций  $H_{B_\varepsilon} = \{h_0, \dots, h_{T-1}\}$ , где

$$h_j : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q, \quad h_j(w) = b_j w \pmod{q}, \quad b_j \in B_\varepsilon,$$

генерирует квантовую хеш-функцию

$$\psi_{H_{B_\varepsilon}} : \mathbb{Z}_q \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s}$$

для  $s = \log T + 1$  условием

$$|\psi_{H_{B_\varepsilon}}(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=0}^{T-1} |j\rangle \otimes \left( \cos \frac{2\pi h_j(w)}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi h_j(w)}{q} |1\rangle \right).$$

При этом квантовая функция  $\psi_{H_{B_\varepsilon}}$  является квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функцией для выбранного  $\varepsilon$  и  $\delta = 2T/q$ .

Далее наряду с обозначением  $\psi_{H_{B_\varepsilon}}$  для хеш-функции будем применять обозначение  $\psi_{H_B}$  там, где будет понятно, о каком параметре  $\varepsilon$  идет речь.

В следующем утверждении использовано известное понятие универсального хеш-семейства, для полноты приведем его здесь.

**Определение 4.** Семейство хеш-функций  $F = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ ,  $f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}_q$ ,  $|\mathbb{X}| = K$  называется  $\varepsilon$ -универсальным, если для двух различных элементов  $w, w' \in \mathbb{X}$  существует не более  $\varepsilon N$  функций  $f \in F$  таких, что  $f(w) = f(w')$ . Такие семейства также часто называют  $\varepsilon$ -универсальными  $(N; K, q)$  хеш-семействами.

Следующая теорема обосновывает возможность получения новых квантовых хеш-функций на основе описанного выше квантового хеш-генератора и произвольного классического универсального семейства хеш-функций и расширяет соответствующее утверждение из [18].

**Теорема 2.** Пусть семейство

$$F = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}, \quad f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}_q, \quad |\mathbb{X}| = K$$

является  $\varepsilon_1$ -универсальным  $(N; K, q)$  хеш-семейством, и  $s_1 = \log N$ . Пусть для  $\varepsilon_2 > 0$  (в соответствии со Свойством 2) выбраны множество с  $\varepsilon_2$ -отклонением  $B_{\varepsilon_2} \subset \mathbb{Z}_q$  мощности  $|B_{\varepsilon_2}| = T = O\left(\frac{\log q}{\varepsilon_2^2}\right)$  и семейство  $H_{B_{\varepsilon_2}} = \{h_0, \dots, h_{T-1}\}$  линейных функций

$$h_j : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q, \quad h_j(w) = b_j w \pmod{q}, \quad b_j \in B_{\varepsilon_2}.$$

Тогда композиция  $G = F \circ H_{B_{\varepsilon_2}}$  семейств  $F$  и  $H_{B_{\varepsilon_2}}$  генерирует квантовую хеш-функцию

$$\psi_G : \mathbb{X} \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s}$$

для  $s = \log N + \log T + 1$ , которая задает  $s$ -кубитные квантовые состояния  $|\psi_G(w)\rangle$  вида

$$|\psi_G(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{T-1} |ij\rangle \otimes \left( \cos \frac{2\pi h_j(f_i(w))}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi h_j(f_i(w))}{q} |1\rangle \right).$$

При этом квантовая функция  $\psi_G$  является квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -хеш функцией с

$$\delta \leq 2^s / |\mathbb{X}| \quad \text{и} \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

**Доказательство.** Согласно условию теоремы семейство  $F = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$  функций является  $\varepsilon_1$ -универсальным хеш-семейством. Для  $\varepsilon_2 > 0$  выбрано конкретное семейство функций  $H = H_B$  (ниже) в соответствии со Свойством 2, а именно, выбраны множество с  $\varepsilon_2$ -отклонением  $B_{\varepsilon_2} \subset \mathbb{Z}_q$  (для краткости далее в доказательстве вместо  $B_{\varepsilon_2}$  будем писать  $B$ ) мощности  $|B| = T = O\left(\frac{\log q}{\varepsilon_2^2}\right)$  и семейство

$$H_B = \{h_0, \dots, h_{T-1}\},$$

которое генерирует квантовую  $(\delta, \varepsilon_2)$ -устойчивую хеш-функцию (Свойство 2)

$$\psi_{H_B} : \mathbb{Z}_q \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s_2}$$

для  $s_2 = \log T + 1$  условием

$$|\psi_{H_B}(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=0}^{T-1} |j\rangle \left( \cos \frac{2\pi h_j(w)}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi h_j(w)}{q} |1\rangle \right).$$

Композиция  $G = F \circ H_B$  семейств  $F$  и  $H_B$  генерирует для  $s = \log N + \log T + 1$  квантовую хеш-функцию

$$\psi_G : \mathbb{X} \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes s},$$

которая задает квантовые состояния вида  $|\psi_G(w)\rangle$ :

$$\psi_G : w \mapsto |\psi_G(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{T-1} |ij\rangle |\psi_{g_{ij}}(w)\rangle,$$

где  $|\psi_{g_{ij}}(w)\rangle = |\psi_{h_j}(f_i(w))\rangle$ . В нашем случае кубит  $|\psi_{g_{ij}}(w)\rangle$  задан в амплитудной форме, определен функцией  $g_{ij}(w) = h_j(f_i(w)) = b_j f_i(w)$  и имеет вид

$$|\psi_{g_{ij}}(w)\rangle = \left( \cos \frac{2\pi b_j f_i(w)}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi b_j f_i(w)}{q} |1\rangle \right),$$

значит, квантовая функция  $\psi_G$  задает квантовые  $s$ -кубитные состояния  $|\psi_G(w)\rangle$  вида

$$|\psi_G(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{NT}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{T-1} |ij\rangle \left( \cos \frac{2\pi b_j f_i(w)}{q} |0\rangle + \sin \frac{2\pi b_j f_i(w)}{q} |1\rangle \right).$$

При этом, как было доказано в [18], квантовая функция  $\psi_G$  является квантовой  $(\delta, \varepsilon)$ -устойчивой хеш-функцией с  $\delta \leq 2^s/|\mathbb{X}|$  и  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ .  $\square$

### Заключение

Исследованы криптографические свойства “амплитудной” квантовой хеш-функции и соответствующего квантового хеш-генератора. В частности, показано, что эта функция может использовать наборы с малой погрешностью для обеспечения сбалансированного сочетания свойства односторонности и устойчивости к столкновениям.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № АААА-А19-119011790156-3).

### Литература

1. *Shor P.W.* Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer // *SIAM J. Comput.* 1997. V. 26, No 5. P. 1484–1509. doi: 10.1137/S0097539795293172.
2. *Nielsen M.A., Chuang I.L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge Univ. Press, 2010. 702 p. doi: 10.1017/CBO9780511976667.
3. *Bernstein D.J.* Introduction to post-quantum cryptography // *Post-Quantum Cryptography* / Bernstein D.J., Buchmann J., Dahmen E. (Eds.). Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. P. 1–14. doi: 10.1007/978-3-540-88702-7\_1.
4. *Ablayev F.M., Vasiliev A.V.* Cryptographic quantum hashing // *Laser Phys. Lett.* 2014. V. 11, No 2. Art. 025202. doi: 10.1088/1612-2011/11/2/025202.
5. *Ablayev F., Vasiliev A.* Computing Boolean functions via quantum hashing // *Computing with New Resources: Essays Dedicated to Jozef Gruska on the Occasion of His 80th Birthday* / Calude C., Freivalds R., Kazuo I. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 8808. Cham: Springer, 2014. P. 149–160. doi: 10.1007/978-3-319-13350-8\_11.
6. *Ablayev F., Ablayev M.* Quantum hashing via  $\epsilon$ -universal hashing constructions and Freivalds’ fingerprinting schemas // *Descriptive Complexity of Formal Systems* / Jürgensen H., Karhumäki J., Okhotin A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 8614. Cham: Springer, 2014. P. 42–52. doi: 10.1007/978-3-319-09704-6\_5.

7. *Ablayev F., Ablayev M., Vasiliev A.* On the balanced quantum hashing // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 681. Art. 012019. doi: 10.1088/1742-6596/681/1/012019.
8. *Vasiliev A.* Quantum hashing for finite abelian groups // Lobachevskii J. Math. 2016. V. 37, No 6. P. 753–757. doi: 10.1134/S1995080216060184.
9. *Ablayev F.M., Ablayev M.F., Vasiliev A.V., Ziatdinov M.T.* Quantum fingerprinting and quantum hashing. Computational and cryptographical aspects // Balt. J. Mod. Comput. 2016. V. 4, No 4. P. 860–875. doi: 10.22364/bjmc.2016.4.4.17.
10. *Li D., Zhang J., Guo F.-Z., Huang W., Wen Q.-Y., Chen H.* Discrete-time interacting quantum walks and quantum Hash schemes // Quantum Inf. Process. 2013. V. 12. P. 1501–1513. doi: 10.1007/s11128-012-0421-8.
11. *Yang Y.-G., Xu P., Yang R., Zhou Y.-H., Shi W.-M.* Quantum Hash function and its application to privacy amplification in quantum key distribution, pseudo-random number generation and image encryption // Sci. Rep. 2016. V. 6. Art. 19788. doi: 10.1038/srep19788.
12. *Yang Y.-G., Bi J.-L., Chen X.-B., Yuan Z., Zhou Y.-H., Shi W.-M.* Simple hash function using discrete-time quantum walks // Quantum Inf. Process. 2018. V. 17. Art. 189. doi: 10.1007/s11128-018-1954-2.
13. *Ablayev F., Vasiliev A.* Algorithms for quantum branching programs based on fingerprinting // Electron. Proc. Theor. Comput. Sci. 2009. V. 9. P. 1–11. doi: 10.4204/EPTCS.9.1.
14. *Buhrman H., Cleve R., Watrous J., de Wolf R.* Quantum fingerprinting // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No 16. Art. 167902. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.167902.
15. *Naor J., Naor M.* Small-bias probability spaces: Efficient constructions and applications // STOC'90: Proc. 22nd Annu. ACM Symp. on Theory of Computing / Ortiz H. (Ed.). New York, NY: Assoc. Comput. Mach., 1990. P. 213–223. doi: 10.1145/100216.100244.
16. *Ben-Aroya A., Ta-Shma A.* Constructing small-bias sets from algebraic-geometric codes // FOCS'09: Proc. IEEE 50th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science. Atlanta, GA, 2009. P. 191–197. doi: 10.1109/FOCS.2009.44.
17. *Chen S., Moore C., Russell A.* Small-bias sets for nonabelian groups // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques: 16th International Workshop, APPROX 2013, and 17th International Workshop, RANDOM 2013, Berkeley, CA, USA, August 21–23, 2013, Proceedings / Raghavendra P., Raskhodnikova S., Jansen K., Rolim J.D.P. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 8096. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. P. 436–451. doi: 10.1007/978-3-642-40328-6\_31.
18. *Аблаев Ф.М., Аблаев М.Ф., Васильев А.В.* Универсальное квантовое хеширование // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 3. С. 7–18.

Поступила в редакцию 23.12.2022  
Принята к публикации 24.04.2023

**Аблаев Марат Фаридович**, научный сотрудник Лаборатории квантовой оптики и информационных технологий; научный сотрудник Лаборатории «Квантовые методы обработки информации»

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *mablayev@gmail.com*

**Аблаев Фарид Мансурович**, главный научный сотрудник Лаборатории «Квантовые методы обработки информации»

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *fablayev@gmail.com*

**Васильев Александр Валерьевич**, старший научный сотрудник Лаборатории квантовой оптики и информационных технологий; старший научный сотрудник Лаборатории «Квантовые методы обработки информации»

Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *vav.kpfu@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 5–15

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.5-15

### Analysis of the Amplitude Form of the Quantum Hash Function

*M.F. Ablayev<sup>a,b\*</sup>, F.M. Ablayev<sup>b\*\*</sup>, A.V. Vasiliev<sup>a,b\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Federal Research Center “Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences”,  
Kazan, 420111 Russia*

<sup>b</sup>*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: *\*mablayev@gmail.com, \*\*fablayev@gmail.com, \*\*\*vav.kpfu@gmail.com*

Received December 23, 2022; Accepted April 24, 2023

### Abstract

In this article, the properties of quantum hash functions are further explored. Previous findings show that so-called small-bias sets (special subsets of the set of elements of a cyclic group) generate a “phase” quantum hash function. Here, it was proved that they also generate an “amplitude” quantum hash function. Namely, it turned out that constructing small-bias sets while generating amplitude quantum functions yields a well-balanced combination of the cryptographic properties of unidirectionality and collision resistance. As a corollary of the obtained theorem, a general statement about the generation of new amplitude quantum hash functions based on universal hash families and small-bias sets was proved.

**Keywords:** quantum cryptography, quantum hashing, collision resistance

**Acknowledgments.** This study was performed as part of the state assignment no. AAAA-A19-119011790156-3 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

## References

1. Shor P.W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.*, 1997, vol. 26, no. 5, pp. 1484–1509. doi: 10.1137/S0097539795293172.
2. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Univ. Press, 2010. 702 p. doi: 10.1017/CBO9780511976667.
3. Bernstein D.J. Introduction to post-quantum cryptography. In: Bernstein D.J., Buchmann J., Dahmen E. (Eds.) *Post-Quantum Cryptography*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009, pp. 1–14. doi: 10.1007/978-3-540-88702-7\_1.
4. Ablayev F.M., Vasiliev A.V. Cryptographic quantum hashing. *Laser Phys. Lett.*, 2014, vol. 11, no. 2, art. 025202. doi: 10.1088/1612-2011/11/2/025202.
5. Ablayev F., Vasiliev A. Computing Boolean functions via quantum hashing. In: Calude C., Freivalds R., Kazuo I. (Eds.) *Computing with New Resources: Essays Dedicated to Jozef Gruska on the Occasion of His 80th Birthday*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8808. Cham, Springer, 2014, pp. 149–160. doi: 10.1007/978-3-319-13350-8\_11.
6. Ablayev F., Ablayev M. Quantum hashing via  $\epsilon$ -universal hashing constructions and Freivalds' fingerprinting schemas. In: Jürgensen H., Karhumäki J., Okhotin A. (Eds.) *Descriptive Complexity of Formal Systems*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8614. Cham, Springer, 2014, pp. 42–52. doi: 10.1007/978-3-319-09704-6\_5.
7. Ablayev F., Ablayev M., Vasiliev A. On the balanced quantum hashing. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2016, vol. 681, art. 012019. doi: 10.1088/1742-6596/681/1/012019.
8. Vasiliev A. Quantum hashing for finite abelian groups. *Lobachevskii J. Math.*, 2016, vol. 37, no. 6, pp. 753–757. doi: 10.1134/S1995080216060184.
9. Ablayev F.M., Ablayev M.F., Vasiliev A.V., Ziatdinov M.T. Quantum fingerprinting and quantum hashing. Computational and cryptographical aspects. *Balt. J. Mod. Comput.*, 2016, vol. 4, no. 4, pp. 860–875. doi: 10.22364/bjmc.2016.4.4.17.
10. Li D., Zhang J., Guo F.-Z., Huang W., Wen Q.-Y., Chen H. Discrete-time interacting quantum walks and quantum Hash schemes. *Quantum Inf. Process.*, 2013, vol. 12, pp. 1501–1513. doi: 10.1007/s11128-012-0421-8.
11. Yang Y.-G., Xu P., Yang R., Zhou Y.-H., Shi W.-M. Quantum Hash function and its application to privacy amplification in quantum key distribution, pseudo-random number generation and image encryption. *Sci. Rep.*, 2016, vol. 6, art. 19788. doi: 10.1038/srep19788.
12. Yang Y.-G., Bi J.-L., Chen X.-B., Yuan Z., Zhou Y.-H., Shi W.-M. Simple hash function using discrete-time quantum walks. *Quantum Inf. Process.*, 2018, vol. 17, art. 189. doi: 10.1007/s11128-018-1954-2.
13. Ablayev F., Vasiliev A. Algorithms for quantum branching programs based on fingerprinting. *Electron. Proc. Theor. Comput. Sci.*, 2009, vol. 9, pp. 1–11. doi: 10.4204/EPTCS.9.1.
14. Buhrman H., Cleve R., Watrous J., de Wolf R. Quantum fingerprinting. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 87, no. 16, art. 167902. doi: 10.1103/PhysRevLett.87.167902.
15. Naor J., Naor M. Small-bias probability spaces: Efficient constructions and applications. *STOC'90: Proc. 22nd Annu. ACM Symp. on Theory of Computing*. Ortiz H. (Ed.). New York, NY, Assoc. Comput. Mach., 1990, pp. 213–223. doi: 10.1145/100216.100244.
16. Ben-Aroya A., Ta-Shma A. Constructing small-bias sets from algebraic-geometric codes. *FOCS'09: Proc. IEEE 50th Annu. Symp. on Foundations of Computer Science*. Atlanta, GA, 2009, pp. 191–197. doi: 10.1109/FOCS.2009.44.

- 
17. Chen S., Moore C., Russell A. Small-bias sets for Nonabelian groups. In: Raghavendra P., Raskhodnikova S., Jansen K., Rolim J.D.P. (Eds.) *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques: 16th International Workshop, APPROX 2013, and 17th International Workshop, RANDOM 2013, Berkeley, CA, USA, August 21–23, 2013, Proceedings*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 8096. Berlin, Heidelberg, Springer, 2013, pp. 436–451. doi: 10.1007/978-3-642-40328-6\_31.
18. Ablayev F.M., Ablayev M.F., Vasiliev A.V. Universal quantum hashing. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2014, vol. 156, no. 3, pp. 7–18. (In Russian)
- 

⟨ **Для цитирования:** Аблаев М.Ф., Аблаев Ф.М., Васильев А.В. Анализ амплитудной формы квантовой хеш-функции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 5–15. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.5-15. ⟩

⟨ **For citation:** Ablayev M.F., Ablayev F.M., Vasiliev A.V. Analysis of the amplitude form of the quantum hash function. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 5–15. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.5-15. (In Russian) ⟩

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 534.16

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.16-34

## ДЕЙСТВИЕ РАЗНЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ НА СМЕШАННЫЕ ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

А. А. Алифов

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва, 101990, Россия*

### Аннотация

Представлен обзор ряда статей о влиянии различных запаздываний (упругость, демпфирование, автоколебательный механизм возбуждения) на динамику классов (или видов) смешанных колебаний (СК) без учета и с учетом взаимодействия колебательной системы с источником энергии. Полученные результаты дают целостную информацию о влиянии на динамику СК различных запаздываний, как в отдельности, так и в сочетании. С учетом взаимодействия с источником энергии, единой основой для рассмотрения всех видов СК является известная расчетная схема (или модель) механической фрикционной автоколебательной системы. Представлены общие для всех видов СК нелинейные дифференциальные уравнения движения и их решения, из которых, как частные случаи, вытекают соотношения для того или иного вида СК. Приведены уравнения нестационарных движений и соотношения для вычисления амплитуды и фазы стационарных колебаний, скорости источника энергии и нагрузки на него со стороны колебательной системы, условия устойчивости стационарных колебаний. Изложены результаты расчетов, проведенных для получения информации о влиянии запаздываний на динамику системы. Проведенные расчеты демонстрируют многообразие явлений, которые могут быть обусловлены взаимодействием сил с запаздыванием и сил в источнике энергии. Различные запаздывания в одной и той же системе изменяют форму амплитудно-частотных кривых, сдвигают их, оказывают влияние на устойчивость движения.

**Ключевые слова:** тип колебаний, смешанные колебания, автоколебания, источник энергии, запаздывание, демпфирование, упругость, нелинейность, метод, прямая линеаризация.

### Введение

Теория колебательных систем с источником энергии ограниченной мощности, нашедшая отражение во множестве исследований во всем мире [1–11] и др., напрямую связана с решением экологических проблем, возникших отчасти в связи с ростом энергопотребления на Земле. Во многих современных технических устройствах и технологических процессах при определенных условиях возникают колебательные процессы различного вида, которые могут быть вызваны также действием запаздывания, обусловленного разными факторами [12] и др. Задачи без учета свойств источника энергии в системах с запаздыванием рассмотрены во множестве работ, например, в [13–22] и др. Систематическое изучение ряда колебательных процессов с учетом различных запаздываний и ограниченной мощности источника энергии отражено в цикле работ автора [23–30] и др.

Существующая классификация колебаний по механизму возбуждения или характеру взаимодействия с окружающей средой [2, 31] и др. позволяет выделить 4 типа колебаний (свободные колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания), отличающихся по своим особенностям (характеристикам). Они образуют также 4 вида или класса смешанных (взаимодействие типов) колебаний:

- вынужденные и параметрические колебания (ВП);
- вынужденные и автоколебания (ВА);
- параметрические и автоколебания (ПА);
- вынужденные, параметрические и автоколебания (ВПА).

Самым сложным среди смешанных колебаний является ВПА.

В работах [23–30] с учетом различных запаздываний (упругость, демпфирование, автоколебательный механизм – трение, вызывающее автоколебания) и свойства источника энергии рассмотрены:

- ВА при действии запаздывания в автоколебательном механизме [23];
- ВА при совместном действии запаздываний в автоколебательном механизме и упругости [24];
- ПА при запаздывании в автоколебательном механизме [25];
- ПА при совместном действии запаздываний в упругости и демпфировании [26];
- ПА при совместном действии запаздываний в автоколебательном механизме и упругости [27];
- ВПА при запаздывании в упругости [28];
- ВПА при запаздывании в автоколебательном механизме [29];
- ВПА при совместном действии запаздываний в упругости и демпфировании [30].

Целью работы является обзор статей [23–30] для получения общего системного представления о влиянии различных запаздываний на динамику смешанных колебательных процессов без учета и с учетом взаимодействия колебательной системы с источником энергии. Используемая в этих работах единая расчетная схема (модель) позволяет легко понять и сравнить результаты этого влияния.

## 1. Исходная модель, уравнения общего вида, их решения и условия устойчивости

**1.1. Модель и дифференциальные уравнения движения.** Основой исследования фрикционных автоколебаний является схема (рис. 1), приведенная в [1, 2, 31, 32] и многих других работах. Динамика системы с учетом источника энергии ограниченной мощности и без учета запаздываний описывается в наиболее общем и сложном случае смешанных колебаний (ВПА) нелинейными дифференциальными уравнениями

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x = T(U) - F(x) + \lambda \sin \nu_1 t - bx \cos \nu t, \quad (1)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi) - r_0 T(U),$$

где  $m$  – масса тела 1, лежащего на ленте, непрерывно движущейся со скоростью  $V = r_0 \dot{\varphi}$ ,  $r_0 = \text{const}$  – радиус шкива, вращающего ленту,  $\dot{\varphi}$  – скорость вращения шкива или ротора двигателя с моментной характеристикой  $M(\varphi)$ ,  $k_0 = \text{const}$  и  $c_0 = \text{const}$  – соответственно коэффициенты демпфирования и жесткости демфера 3 и пружины 2,  $T(U)$  – сила трения в месте контакта тела 1 с лентой,  $U = V - \dot{x}$ ,  $F(x)$  – нелинейная часть силы упругости пружины 2,  $\lambda = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ ,  $\nu_1 = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$  – соответственно амплитуды и частоты вынуждающей силы

и параметрического возбуждения,  $I$  – суммарный момент инерции вращающихся частей.

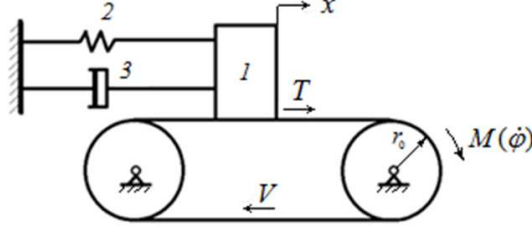


Рис. 1. Модель системы

В практических условиях широко распространена (наблюдалась также в ходе экспериментов в космосе [33]) характеристика

$$T(U) = R(\operatorname{sgn} U - \alpha_1 U + \alpha_3 U^3). \quad (2)$$

Здесь  $R$  – нормальная сила,  $\alpha_1 = \operatorname{const}$ ,  $\alpha_3 = \operatorname{const}$ ,  $\operatorname{sgn} U = 1$  в случае  $U > 0$  и  $\operatorname{sgn} U = -1$  в случае  $U < 0$ . При относительном покое  $U = 0$  имеет место  $-R \leq T(0) \leq R$ . Характеристика (2), из-за широкой распространённости, использована в расчетах, приведенных в публикациях, указанных во введении [23–30]. Некоторые графические результаты этих расчетов приведены ниже.

Для большей общности характеристика силы  $T(U)$  принята в некоторых работах из [23–30] в виде

$$T(U) = R[\operatorname{sgn} U + f(\dot{x})], \quad f(\dot{x}) = \sum_i \alpha_i U^i = \sum_{n=0}^5 \delta_n \dot{x}^n, \quad (3)$$

$$\delta_0 = \alpha_1 V + \alpha_2 V^2 + \alpha_3 V^3 + \alpha_4 V^4 + \alpha_5 V^5,$$

$$\delta_1 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 V + 3\alpha_3 V^2 + 4\alpha_4 V^3 + 5\alpha_5 V^4),$$

$$\delta_2 = \alpha_2 + 3\alpha_3 V + 6\alpha_4 V^2 + 10\alpha_5 V^3,$$

$$\delta_3 = -(\alpha_3 + 4\alpha_4 V + 10\alpha_5 V^2), \quad \delta_4 = \alpha_4 + 5\alpha_5 V, \quad \delta_5 = -\alpha_5,$$

где  $\alpha_i = \operatorname{const}$ .

Для решения уравнений (1) использован метод прямой линеаризации (МПЛ), описанный в [34, 35] и др. Преимуществами МПЛ являются: достаточно малые затраты ресурсов; простота и легкость применения; возможность получения конечных расчетных соотношений независимо от конкретного вида нелинейной характеристики; отсутствие трудоемких и сложных приближений различных порядков, применяемых в известных методах нелинейной механики [36, 37] и др. Функции  $f(\dot{x})$  и  $F(x)$  на основе МПЛ заменены линейными функциями

$$f_*(\dot{x}) = B_f + k_f \dot{x}, \quad F_*(x) = B_F + k_F x, \quad (4)$$

где

$$B_f = \sum_n N_n \alpha_n v^n, \quad n = 0, 2, 4, \dots (n - \text{четное}),$$

$$k_f = \sum_n \alpha_n \bar{N}_n v^{n-1}, \quad n = 1, 3, 5, \dots (n - \text{нечетное}),$$

$$B_F = \sum_s N_s \gamma_s a^s, \quad s = 2, 4, 6, \dots (s - \text{четное}),$$

$$\begin{aligned}
k_F &= \sum_s \bar{N}_s \gamma_s a^{s-1}, \quad s = 3, 5, 7, \dots (s - \text{нечетное}), \\
N_n &= (2r + 1)/(2r + 1 + n), \quad \bar{N}_n = (2r + 3)/(2r + 2 + n), \\
N_s &= (2r + 1)/(2r + 1 + s), \quad \bar{N}_s = (2r + 3)/(2r + 2 + s), \\
a &= \max |x|, \quad v = \max |\dot{x}|.
\end{aligned}$$

Здесь  $B_f, k_f, B_F, k_F$  являются коэффициентами линеаризации, и в выражениях  $N_n, \bar{N}_n, N_s, \bar{N}_s$  символ  $r$  представляет параметр точности линеаризации, который может быть выбран [34] в интервале  $(0, 2)$ , но не ограничен.

Уравнения (1) с учетом временных факторов запаздываний  $\eta = \text{const}$ ,  $\tau = \text{const}$  и  $\Delta = \text{const}$  имеют вид

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x = T(U_\Delta) - F(x) + \lambda \sin \nu_1 t - bx \cos \nu t - k_\eta \dot{x}_\eta - cx_\tau, \quad (5)$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi) - r_0 T(U_\Delta)$$

и на основе (4) приобретают форму

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + k_0\dot{x} + cx &= B + R(\text{sgn} U_\Delta + k_f \dot{x}_\Delta) + \\
&+ \lambda \sin \nu_1 t - bx \cos \nu t - k_\eta \dot{x}_\eta - cx_\tau, \quad (6)
\end{aligned}$$

$$I\ddot{\varphi} = M(\varphi) - r_0 R(\text{sgn} U_\Delta + B_f + k_f \dot{x}_\Delta),$$

где  $c = c_0 + k_F$ ,  $B = RB_f - B_F$ ,  $U_\Delta = V - \dot{x}_\Delta$ ,  $\dot{x}_\Delta = \dot{x}(t - \Delta)$ ,  $\dot{x}_\eta = \dot{x}(t - \eta)$ ,  $x_\tau = x(t - \tau)$ .

Из приведенных соотношений можно получить в качестве частных случаев выражения для смешанных колебаний ВА ( $b = 0$ ) и ПА ( $\lambda = 0$ ), а также для всех типов колебаний.

**1.2. Решения уравнений.** Для решения нелинейного уравнения с линеаризованными функциями в работе [34] описан метод замены переменных с усреднением. С его помощью можно изучить нестационарные и стационарные процессы. В качестве решения приняты

$$x = a \cos \psi, \quad \dot{x} = -v \sin \psi, \quad \psi = pt + \xi \quad (7)$$

и выведены стандартной формы уравнения для определения  $v$  и  $\xi$ .

Для решения первого уравнения (6) можно использовать отмеченный метод, а для второго уравнения – процедуру, изложенную в [35]. В соответствии с этой процедурой, при усреднении осуществляется замена  $V = r_0 \dot{\varphi}$  на  $u = r_0 \Omega$  в выражениях  $\delta_0, \dots, \delta_5$  в (4). При этом с учетом  $v = ap$ ,  $p = \nu$  получаются в случае  $u \geq ap$  следующие уравнения для определения нестационарных значений амплитуды  $a$ , фазы  $\xi$  и скорости  $u$ :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm}(2aA + 2\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi), \\
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pma}(2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \\
\frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 + B_f) \right],
\end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} A &= p(k_0 + k_\eta \cos p\eta - Rk_f \cos p\Delta) - c \sin p\tau, \\ E &= m(\omega_0^2 - p^2) + k_F + pk_\eta \sin p\eta + c \cos p\tau - pRk_f \sin p\Delta, \\ \omega_0^2 &= c_0/m, \quad \omega_0^2 - p^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - p), \quad u = r_0 \Omega, \psi_* = 2\pi - \arcsin(u/ap). \end{aligned}$$

В случае  $u < ap$  имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{4pm}(2aA + 2\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi - \frac{8R}{\pi ap} \sqrt{a^2 p^2 - u^2}), \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{1}{4pm a}(2aE + 2\lambda \sin \xi + ab \cos 2\xi), \\ \frac{du}{dt} &= \frac{r_0}{I} \left[ M\left(\frac{u}{r}\right) - r_0 R(1 + B_f) - \frac{r_0 R}{\pi}(3\pi - 2\psi_*) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

При условиях  $\dot{a} = 0$ ,  $\dot{\xi} = 0$ ,  $\dot{u} = 0$  из (8) следуют уравнения для стационарных колебаний, амплитуда и фаза которых определяются соотношениями

$$(a^2 D - 2\lambda^2)^2 - 4\lambda^2(\lambda^2 + 2bGa^2) = 0, \quad \operatorname{tg} \xi = L(baL - \lambda)/aA, \quad (10)$$

где  $G = b + 2E$ ,  $D = 4A^2 + G^2 - 2bG$ ,  $L = \lambda \pm (\lambda^2 + 2ba^2(b + 2E))^{1/2}/2ab$ .

В случае  $u < ap$  для амплитуды применима приближенная формула  $ap \approx u$ .

Условие  $\dot{u} = 0$  дает следующее уравнение для вычисления стационарных значений скорости:

$$M(u/r_0) - S(u) = 0, \quad (11)$$

где

- а)  $u \geq ap$ ,  $S(u) = r_0 R(1 + B_f)$ ,  
 б)  $u < ap$ ,  $S(u) = r_0 R[(1 - B_f) + \pi^{-1}(3\pi - 2\psi_*)]$ .

Выражение  $S(u)$ , представляющее нагрузку на источник энергии и содержащее коэффициент линеаризации  $B_f$ , зависящий от амплитуды, упрощается на основе равенства  $ap \approx u$  при скоростях  $u < ap$ .

**1.3. Условия устойчивости стационарных колебаний.** Уравнения в вариациях, составленные для уравнений нестационарных движений (8), и критерии Рауса–Гурвица дают условия устойчивости, определяемые неравенствами

$$D_1 > 0, \quad D_3 > 0, \quad D_1 D_2 - D_3 > 0, \quad (12)$$

где  $D_1 = -(b_{11} + b_{22} + b_{33})$ ,  $D_2 = b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31}$ ,

$$D_3 = b_{11}b_{23}b_{32} + b_{22}b_{13}b_{31} + b_{33}b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}b_{33} - b_{12}b_{23}b_{31} - b_{13}b_{21}b_{32}.$$

В случае  $u \geq ap$  получены выражения

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{r_0}{I} (Q - r_0 R \frac{\partial B_f}{\partial u}), \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{I} \frac{\partial B_f}{\partial a}, \quad b_{13} = 0, \quad b_{21} = \frac{aR}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u} \cos p\Delta, \\
b_{22} &= -\frac{1}{4pm} \left[ 2(A + a \frac{\partial A}{\partial a}) - b \sin 2\xi \right], \quad b_{23} = \frac{1}{2pm} (\lambda \sin \xi + ba \cos 2\xi), \\
b_{31} &= -\frac{R}{2m} \frac{\partial k_f}{\partial u} \sin p\Delta, \quad b_{32} = \frac{1}{2pm} \left[ \frac{\partial E}{\partial a} - \frac{\lambda}{a^2} \sin \xi \right], \quad b_{33} = \frac{1}{2pma} (\lambda \cos \xi - ab \sin 2\xi), \\
\frac{\partial A}{\partial a} &= -pR \frac{\partial k_f}{\partial a} \cos p\Delta, \quad \frac{\partial E}{\partial a} = \frac{\partial k_F}{\partial a} - pR \frac{\partial k_f}{\partial a} \sin p\Delta, \\
\frac{\partial B_f}{\partial u} &= \frac{\partial \delta_0}{\partial u} + N_2(ap)^2 \frac{\partial \delta_2}{\partial u} + N_4(ap)^4 \frac{\partial \delta_4}{\partial u}, \quad \frac{\partial k_f}{\partial u} = \bar{N}_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial u} + \bar{N}_3(ap)^2 \frac{\partial \delta_3}{\partial u} + \bar{N}_5(ap)^4 \frac{\partial \delta_5}{\partial u}, \\
\frac{\partial B_f}{\partial a} &= 2ap^2 (N_2 \delta_2 + 2N_4 \delta_4 a^2 p^2), \quad \frac{\partial k_f}{\partial a} = 2ap^2 (\bar{N}_3 \delta_3 + 2\bar{N}_5 \delta_5 a^2 p^2), \\
\delta_0 &= \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4 + \alpha_5 u^5, \quad \delta_1 = -(\alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4), \\
\delta_2 &= \alpha_2 + 3\alpha_3 u + 6\alpha_4 u^2 + 10\alpha_5 u^3, \quad \delta_3 = -(\alpha_3 + 4\alpha_4 u + 10\alpha_5 u^2), \quad \delta_4 = \alpha_4 + 5\alpha_5 u, \\
\delta_5 &= -\alpha_5, \\
\frac{\partial \delta_0}{\partial u} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 u + 3\alpha_3 u^2 + 4\alpha_4 u^3 + 5\alpha_5 u^4, \quad \frac{\partial \delta_1}{\partial u} = -2(\alpha_2 + 3\alpha_3 u + 6\alpha_4 u^2 + 10\alpha_5 u^3), \\
\frac{\partial \delta_2}{\partial u} &= 3(\alpha_3 + 4\alpha_4 u + 10\alpha_5 u^2), \quad \frac{\partial \delta_3}{\partial u} = -4(\alpha_4 + 5\alpha_5 u), \quad \frac{\partial \delta_4}{\partial u} = 5\alpha_5, \quad \frac{\partial \delta_5}{\partial u} = 0, \\
\frac{\partial k_F}{\partial a} &= 2a(\bar{N}_3 \gamma_3 + 2\bar{N}_5 \gamma_5 a^2 + 3\bar{N}_7 \gamma_7 a^4 + \dots), \quad Q = \frac{d}{du} M\left(\frac{u}{r_0}\right).
\end{aligned}$$

В случае скоростей  $u < ap$  изменяются лишь коэффициенты

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{r_0}{I} \left[ Q - r_0 R \frac{\partial B_f}{\partial u} - \frac{2r_0 R}{\pi \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \quad b_{12} = -\frac{r_0^2 R}{I} \left[ \frac{\partial B_f}{\partial a} + \frac{2u}{\pi a \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\
b_{21} &= \frac{aR}{2m} \left[ \frac{\partial k_f}{\partial u} \cos p\Delta + \frac{4u}{\pi a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}} \right], \\
b_{22} &= -\frac{1}{4pm} \left[ 2(A + a \frac{\partial A}{\partial a}) - b \sin 2\xi \right] - \frac{4Ru^2}{2\pi m a^2 p^2 \sqrt{a^2 p^2 - u^2}}.
\end{aligned}$$

При вычислении  $\partial B_f / \partial u, \partial B_f / \partial a$  учитываются лишь четные степени  $n$  и, соответственно,  $\delta_0, \delta_2, \delta_4$ , а при вычислении  $\partial k_f / \partial u, \partial k_f / \partial a$  – нечетные степени  $n$  и, соответственно,  $\delta_1, \delta_3, \delta_5$ . Аналогично учитываются при вычислении  $\partial k_F / \partial a$  нечетные степени  $s$  и, соответственно,  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5, \dots$

## 2. Результаты расчетов

С целью получения информации о влиянии запаздываний на систему проведены расчеты при различных значениях параметров в (1). Основными расчетными параметрами являются:  $\omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $m = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $k_0 = 0.02 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $c_\tau = 0.05 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\lambda = 0.02 \text{ кгс}$ ,  $b = 0.07 \text{ кгс} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $r_0 = 1 \text{ см}$ ,  $l = 1 \text{ кгс} \cdot \text{с} \cdot \text{см}^2$ ,  $R = 0.5 \text{ кгс}$ ,  $\alpha_1 = 0.84 \text{ с} \cdot \text{см}^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 0.18 \text{ с}^3 \cdot \text{см}^{-3}$ . Для запаздываний использованы величины  $p\Delta, p\eta$  и  $p\tau$  из интервала  $(0, 3\pi/2)$ , которые для краткости указаны далее в тексте и под рисунками без частоты  $p$ .

При расчетах использовано выражение (2) с коэффициентами линеаризации  $k_f = \delta_1 + \delta_3 \bar{N}_3 v^2$ ,  $B_f = -\alpha_1 u + \alpha_3 u^3 + 3\alpha_3 N_2 u a^2 p^2$ ,  $\bar{N}_3 = (2r + 3)/(2r + 5)$ ,

$N_2 = (2r + 1)/(2r + 3)$ . Кривые, представленные на всех рисунках, приведенных далее, имеют место при численном значении  $\bar{N}_3 = 3/4$ , соответствующем параметру точности линеаризации  $r = 1.5$ . Заметим, что такое же число имеет место, если для решения (1) использовать известный метод усреднения нелинейной механики [36, 37]. Таким образом, МПЛ и метод усреднения дают одинаковый результат, однако МПЛ намного проще. Кривые получены в случае линейной силы упругости, т. е.  $F(x) \equiv 0$  или  $k_F \equiv 0$ . Колебания с соответствующими амплитудами устойчивы в пределах заштрихованных секторов для крутизны  $Q = \frac{d}{du}M(u/r_0)$  характеристики источника энергии. Эти секторы должны быть указаны на кривой нагрузки  $S(u)$ , представленной, например, на рис. 8 г, но для краткости показаны на амплитудных кривых.

### 2.1. Смешанные вынужденные и автоколебания (ВА).

#### 2.1.1. Действие запаздывания в автоколебательном механизме [23].

На рис. 2 показаны некоторые результаты расчетов при значении скорости  $u = 1.16 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Совпадение сплошной кривой 1 и точек имеет место для  $\Delta = 0$ . Пунктирная кривая 2, штрих-пунктирная 3 и штриховая 4 получены, соответственно, для  $\Delta = \pi/2$ ,  $\Delta = \pi$ ,  $\Delta = 3\pi/2$ . Колебания с амплитудами, соответствующи-

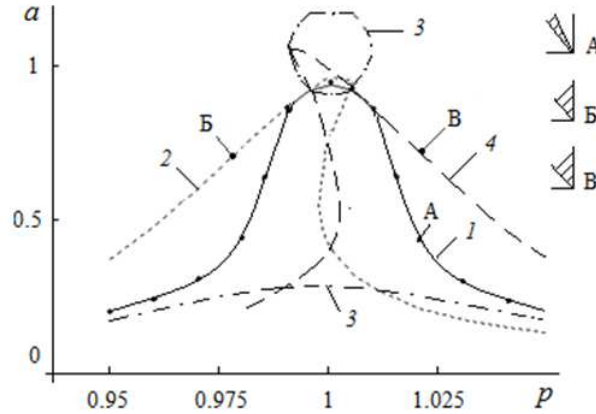


Рис. 2. Амплитудно-частотные кривые

ми точкам А, Б, В, устойчивы, если крутизна характеристики источника энергии находится в пределах заштрихованных секторов. Как видно из графиков, запаздывание сильно влияет на форму амплитудной кривой. В связи с этим возникает вопрос, который приведен в более общем случае ниже в п. 2.1.2.

**2.1.2. Совместное действие запаздываний в упругости и автоколебательном механизме [24].** На рис. 3 показаны некоторые результаты расчетов при значении скорости  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Кривая 0 соответствует отсутствию запаздывания ( $A_\tau = 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\tau = 0$ ). Кривые 1 неустойчивы при  $\Delta = \pi/2$ ,  $\Delta = 3\pi/2$ ,  $\tau = \pi/2$  (рис. 3 а, рис. 3 в), и колебания не реализуются в резонансной области. Из приведенных графиков следует, что запаздывание, в зависимости от его величины, приводит к смещению и деформации амплитудной кривой в области частот, и под его действием проявляется интересная особенность. Для объяснения рассмотрим первое уравнение (1) с учетом  $F(x) = \gamma x^3$  в виде

$$m\ddot{x} + k_0\dot{x} + c_0x + \gamma x^3 = \lambda \sin \nu t + T(U). \quad (13)$$

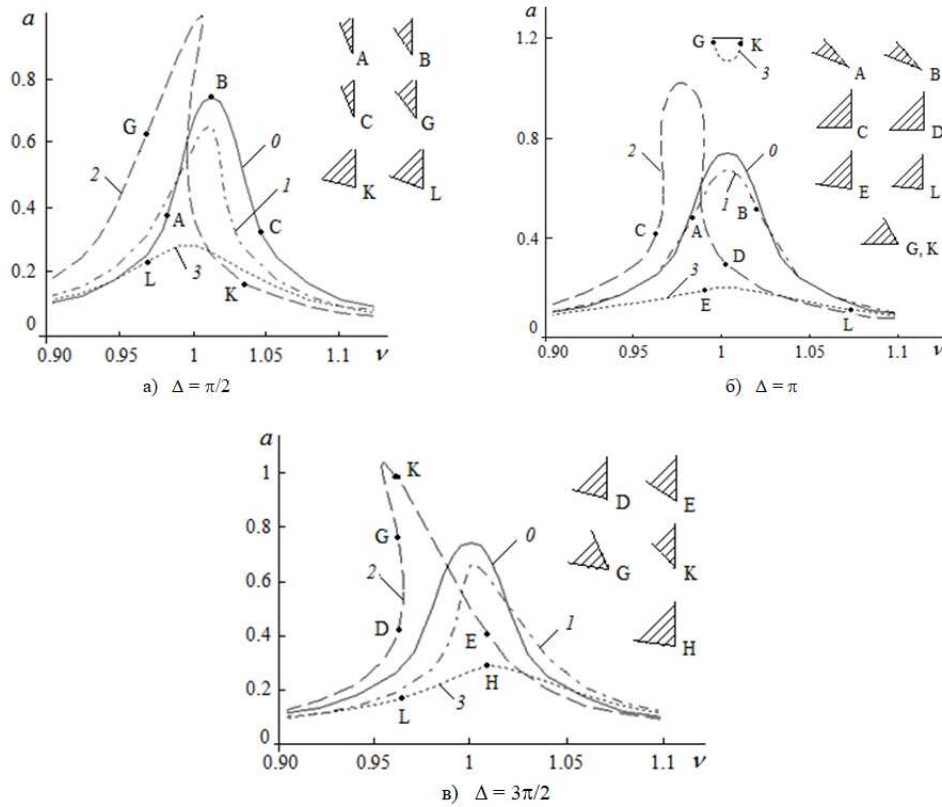


Рис. 3. Амплитудно-частотные кривые: кривая 1 –  $\tau = \pi/2$ , кривая 2 –  $\tau = \pi$ , кривая 3 –  $\tau = 3\pi/2$

Система, описываемая уравнением (13), достаточно подробно исследована в [2]. Вид амплитудно-частотной кривой при  $\Delta = \pi/2$  и  $\tau = \pi$  аналогичен виду кривой для (13) при «жесткой» ( $\gamma > 0$ ) характеристике нелинейной силы упругости, а в случае  $\Delta = 3\pi/2$ ,  $\tau = \pi$  – «мягкой» ( $\gamma < 0$ ). Такая же особенность имеет место выше в п. 2.1.1. В связи с этим возникает вопрос: как определить обусловленность вида (нелинейностью упругости или запаздыванием) амплитудно-частотных характеристик при снятии их в реальных условиях? Вопрос не простой, и для ответа необходимо многостороннее изучение реальной системы.

## 2.2. Смешанные параметрические и автоколебания (ПА).

### 2.2.1. Действие запаздывания в автоколебательном механизме [25].

Некоторые результаты расчетов в случае  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  представлены на рис. 4. Сплошная кривая А получена для  $\Delta = 0$ , штрих-пунктирная Б –  $\Delta = \pi/2$ , пунктирная В –  $\Delta = \pi$ , штриховая Г –  $\Delta = 3\pi/2$ . Величины  $a_{aA}$  и  $a_{aB}$  отражают амплитуды автоколебаний при  $\Delta = 0$  и  $\Delta = \pi$  согласно обозначениям кривых А и В. Как видно из результатов расчета, запаздывание оказывает значительное влияние на ширину и положение области резонанса, вид амплитудных кривых и устойчивость резонансных колебаний.

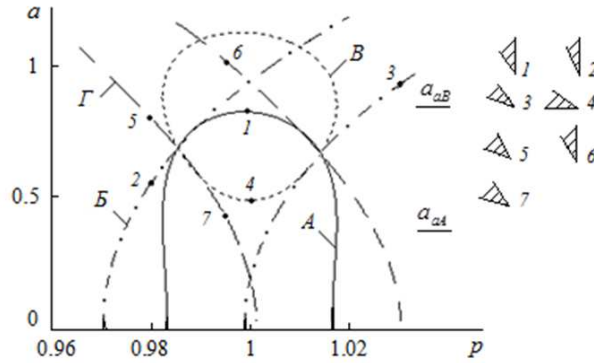


Рис. 4. Амплитудно-частотные кривые

**2.2.2. Совместное действие запаздываний в упругости и демпфировании [26].** Амплитудно-частотные кривые  $a(p)$  рис. 5 имеют место для скорости  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , и горизонтальные участки кривых на рис. 5 в соответствии зависят  $ap \approx u$ . Для сравнения на всех рисунках представлена кривая 1 в случае отсутствия запаздываний ( $k_\eta = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\tau = 0$ ). В пределах секторов, заштрихованных и наполненных черным цветом, для крутизны характеристики источника энергии колебания с соответствующими амплитудами устойчивы. В частях секторов, наполненных черным цветом, наблюдается достаточно слабая устойчивость, т. е. критерии (или один из критериев) устойчивости (12) выполняются в виде  $0.000X > 0$ , где  $X \leq 9$ .

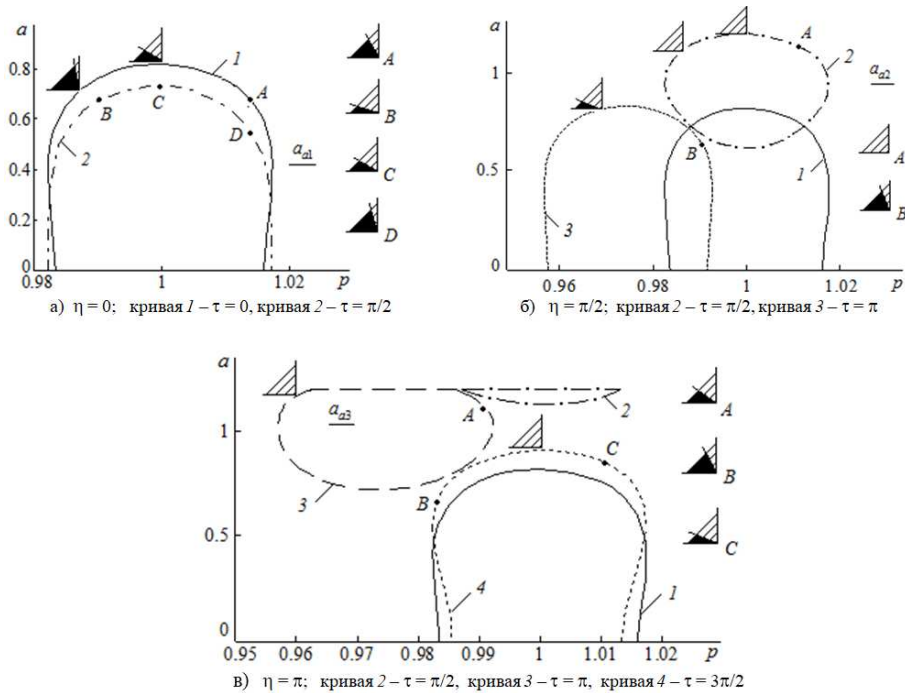


Рис. 5. Амплитудно-частотные кривые

Совместное действие различных сочетаний запаздывания в упругости и демпфировании может сильно влиять на резонансные колебания. В зависимости от различных сочетаний величин запаздываний амплитуда колебаний может увеличиваться/уменьшаться, устойчивость колебаний усиливаться/ослабляться, а резонансная область сдвигаться по частоте.

**2.2.3. Совместное действие запаздываний в упругости и автоколебательном механизме [27].** Зависимости амплитуды от частоты  $a(p)$ , показанные на рис. 6, получены при  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . На всех рисунках  $a_0$  указывает амплитуду автоколебаний (без запаздывания), кривые 1 соответствуют отсутствию запаздывающих сил ( $\Delta = 0, \tau = 0$ ) и представлены для сравнения. Устойчивые (в зависимости от крутизны характеристики источника энергии) колебания показаны сплошной частью кривой 1, неустойчивые – при идеальном источнике энергии – пунктирной. Под действием запаздываний возникают интересные эффекты. Верх-

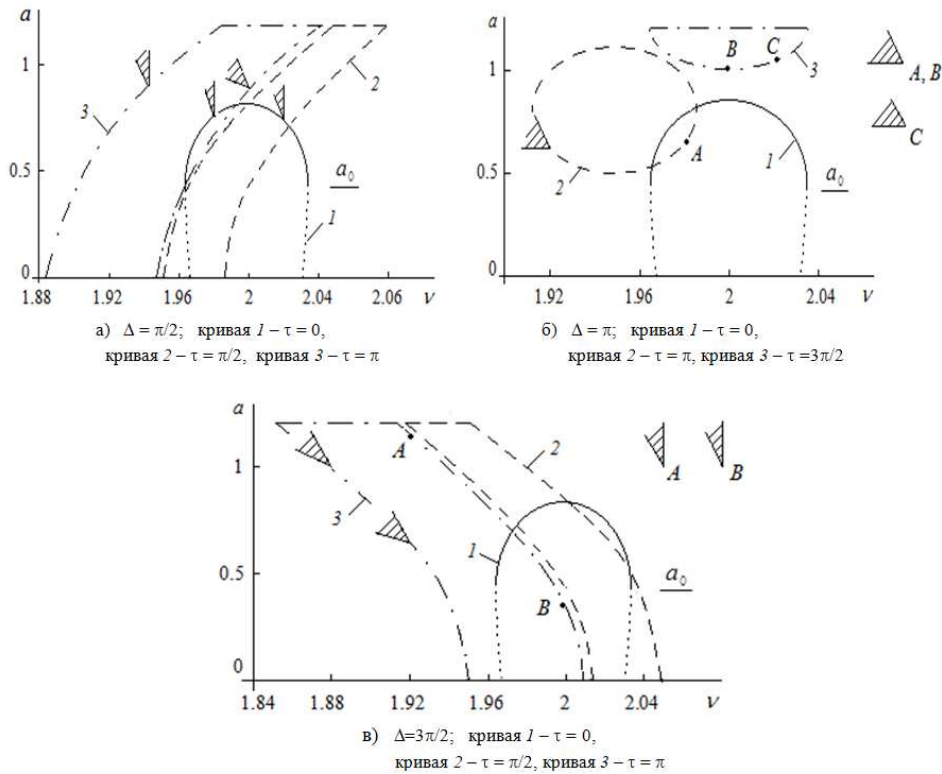


Рис. 6. Амплитудно-частотные кривые

няя (устойчивая при отсутствии запаздывания согласно кривой 1) и нижняя ветви кривых 2 оказываются неустойчивыми при  $\Delta = \pi/2, \Delta = 3\pi/2$ . В случае  $\Delta = \pi$  верхняя ветвь неустойчива при любой крутизне характеристики источника энергии, включая идеальную, а нижняя ветвь – устойчива в зависимости от крутизны. В зависимости от крутизны характеристики источника энергии – верхние и нижние ветви кривых 3 – также могут оказаться устойчивыми. Кроме того, кривые 2 и 3 при  $\Delta = \pi/2$  и  $\Delta = 3\pi/2$  ведут себя в некоторой степени подобно тому, что получается при нелинейной силе упругости, отмеченной выше в п. 2.1.2. При  $\Delta = \pi/2$  и  $\Delta = 3\pi/2$  видно аналогичное поведение кривых 2 и 3: они наклонены

вправо при  $\Delta = \pi/2$  и влево – при  $\Delta = 3\pi/2$ . Такой эффект возникает из-за присутствия запаздывания в автоколебательном механизме трения. Такого эффекта нет при отсутствии запаздывания по трению и его наличии по упругости (сдвигает резонансную зону вправо или влево относительно случая его отсутствия).

### 2.3. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания (ВПА).

**2.3.1. Запаздывание в упругости [28].** Амплитудно-частотные характеристики  $a(\nu)$ , представленные на рис. 7, имеют место для скорости  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , и  $a_a$  означает амплитуду автоколебаний при  $\tau = 0$ . Участки на кривых  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_3$ , указанные тонкими штриховыми линиями, являются неустойчивыми. Участок кривой  $\Gamma_1$ , показанный тонкой линией, неустойчив при идеальном источнике энергии и устойчив слабо при неидеальном источнике. Неустойчивым колебаниям, как при идеальном, так и неидеальном источнике энергии, соответствует тонкая штриховая линия кривой  $\Gamma_3$  на участке между точками  $A$  и  $B$ . Как следует из графика, амплитудная кривая при значении запаздывания  $0.5\nu\tau = \pi$  смещена влево и немного отличается по характеру и численно от кривой в случае  $\tau = 0$ . Запаздывание при значениях  $0.5\nu\tau = \pi/2$ ,  $0.5\nu\tau = 3\pi/2$  сильно влияет на амплитуду и уменьшает ее.

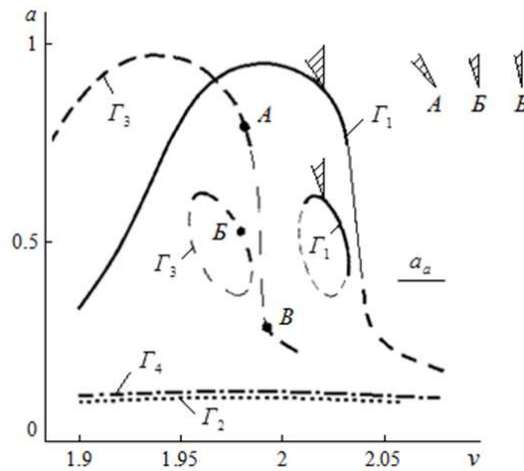


Рис. 7. Амплитудно-частотные кривые: кривая  $\Gamma_1 - \tau = 0$ , кривая  $\Gamma_2 - \tau = \pi/2$ , кривая  $\Gamma_3 - \tau = \pi$ , кривая  $\Gamma_4 - \tau = 3\pi/2$

**2.3.2. Действие запаздывания в автоколебательном механизме [29].** Амплитудно-частотные кривые, представленные на рис. 8 а, получены для  $u = 1.26 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  при следующих значениях запаздывания:  $\tau = 0$  – кривая 1,  $\tau = \pi/2$  – кривая 2,  $\tau = \pi$  – кривая 3,  $\tau = 3\pi/2$  – кривая 4. Ввиду большой трудоемкости расчета, графики представлены в виде кусочно-линейных из-за малого числа расчетных точек, но в принципе должны быть гладкими. График, показанный на рис. 8б, имеет место для запаздывания  $\tau = 0$  и скорости  $u = 1.14 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ , а рис. 8в есть зависимость амплитуды от скорости ( $u$ ) при  $\tau = 0, p = 2$ . Кривая нагрузки на источник энергии со стороны колебательной системы  $S(u)$ , показанная на рис. 8г, соответствует амплитудной кривой ( $u$ ) на рис. 8в. Стрелками показаны

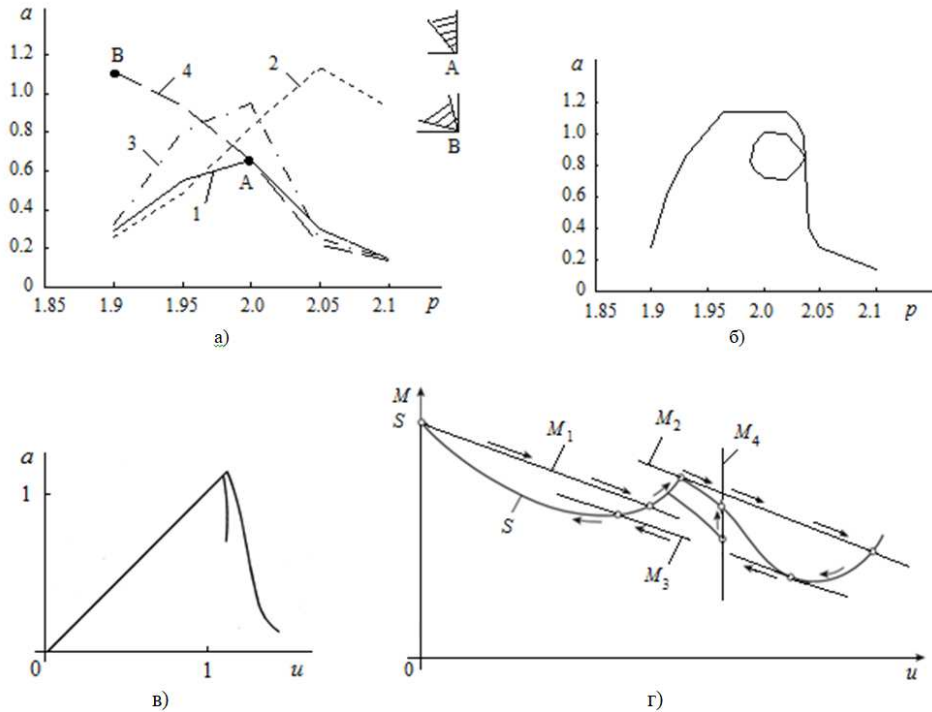


Рис. 8. Зависимости амплитуды от частоты (а, б) и скорости источника (в); зависимость нагрузки на источник от скорости источника и скачкообразных переходов (г)

различного характера переходы из одного состояния в другое при изменении скорости источника энергии  $u$ . Подробное описание таких переходов при отсутствии запаздывания в силе трения имеется в [2]. Они возникают также при наличии запаздывания.

**2.3.3. Совместное действие запаздываний в упругости и демпфировании [30].** Амплитудно-частотные кривые  $a(\nu)$ , приведенные на рис. 9, имеют место для скорости  $u = 1.2 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$ . Соответствие кривых различным значениям запаздывания следующее: сплошная кривая 1 – полное отсутствие запаздываний ( $k_\eta = 0, c_\tau = 0$ ), штриховая 2 –  $\eta = \pi/2$ , двухпунктирная – 3 –  $\eta = \pi$ . Штриховая и пунктирная кривые при  $\eta = \pi/2$  показаны условно, без учета приближенной зависимости  $a\omega \approx u$ , представленной горизонтальной прямой  $a = 1.2$  ( $\omega = 1$ ). Полностью неустойчива кривая 2 с достаточно малыми амплитудами, показанная на рис. 9б. Прямые  $F_{1,2} = 0, F_3 = 0$  отражают соотношение для определения амплитуды на границе области устойчивости при идеальном источнике энергии. Как видно из представленных графиков, запаздывания смещают амплитудно-частотную кривую вверх-вниз, вправо-влево, изменяют ее форму.

Следствия анализа (1) при отсутствии запаздываний и целый ряд явлений, сильно зависящих от свойств источника энергии, детально описаны в [2], поэтому останавливаться на них не будем, такие же явления имеют место и при наличии запаздываний.

В завершение отметим, что здесь представлены не все результаты проведенных расчетов и анализа. Сравнительный анализ результатов по разным запаздываниям позволяет сказать, что они приводят в одной и той же системе к разным

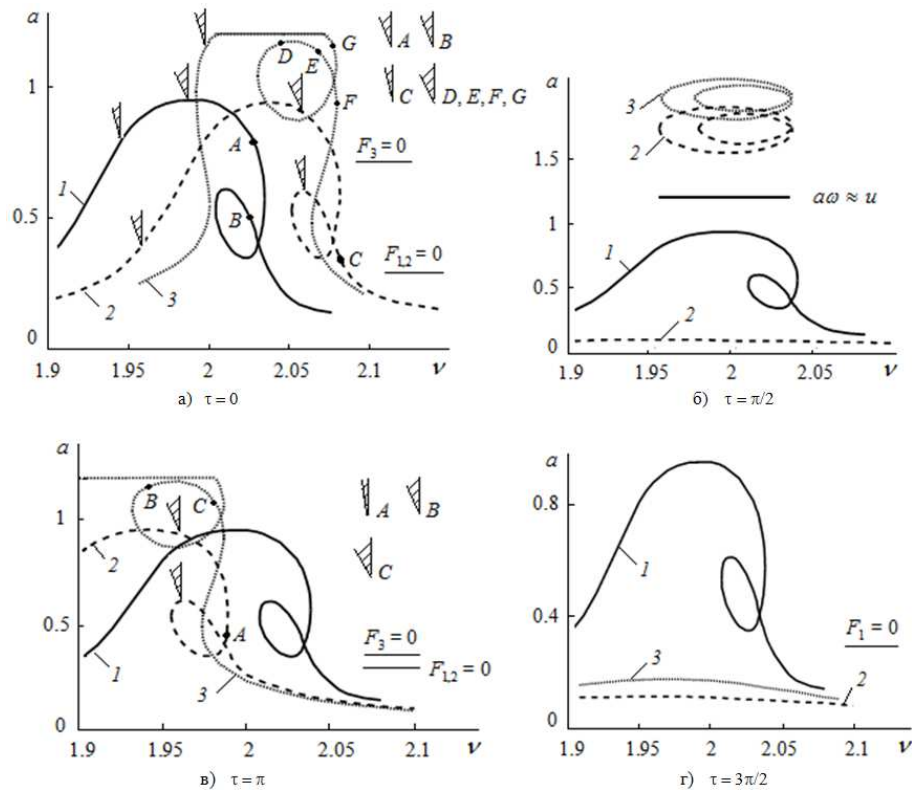


Рис. 9. Амплитудно-частотные кривые

эффектам в зависимости от их величины: запаздывание в *упругости* изменяет форму амплитудно-частотной кривой и сдвигает зону резонанса вправо или влево в частотной области; запаздывание в *демпфировании* может изменить форму амплитудно-частотной кривой и появление колебаний; запаздывание в *автоколебательном механизме* приводит к тому, что амплитудные кривые при определенных значениях запаздывания ведут себя несколько подобно тому, которое получается при «жесткой» и «мягкой» характеристиках нелинейной силы упругости.

### 3. Заключение

Рассмотренные работы показывают многообразие явлений, которые могут быть обусловлены взаимодействием сил с запаздыванием и сил в источнике энергии. Они позволяют сделать обобщенно следующие выводы.

1. Разные запаздывания приводят в одной и той же системе к разным эффектам.
2. Запаздывания изменяют качественно и количественно амплитудно-частотные кривые, сдвигая их вверх/вниз, вправо-влево (по частоте).
3. При определенных значениях запаздывания появляются амплитудно-частотные кривые, по виду которых невозможно определить обусловленность их вида нелинейностью упругости или запаздыванием, вследствие чего возникает необходимость многостороннего изучения реальной системы.
4. Запаздывания оказывают влияние на устойчивость движения, которая под их действием может увеличиться или уменьшиться.

## Литература

1. *Kononenko V.O.* Vibrating Systems with a Limited Power-Supply / Gladwell G.M.L. (Ed.). London: Iliffe, 1969. 236 p.
2. *Alifov A.A., Frolov K.V.* Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources / E. Rivin (Ed.). New York, Washington, Philadelphia, London: Hemisphere Publ. Corp., 1990. 327 p.
3. *Краснопольская Т.С., Швец А.Ю.* Регулярная и хаотическая динамика систем с ограниченным возбуждением. Сер.: Регулярная и хаотическая динамика. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютер. исслед., 2008. 280 с.
4. *Асташев В.К., Бабицкий В.И., Боровков Б.А.* Влияние массы корпуса на динамику машин виброударного действия с ограниченным возбуждением // Машиноведение. 1977. № 5. С. 30–34.
5. *Ganiev R.F., Krasnopolskaya T.S.* The scientific heritage of V.O.Kononenko: The Sommerfeld-Kononenko effect // J. Mach. Manuf. Reliab. 2018. V. 47, No 5. P. 389–398. doi: 10.3103/S1052618818050047.
6. *Püst L.* Electro-mechanical impact system excited by a source of limited power // Eng. Mech. 2008. V. 15, No 6. P. 391–400.
7. *Balthazar J.M.* Vibrating systems with limited power supply: An emergent topic after Prof. Kononenko // Proc. 5th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics. Kharkiv, 2016. P. 16–22.
8. *Bissembayev K., Isakov Z.* Nonlinear vibrations of orthogonal mechanism of shaking table // Int. J. Appl. Mech. Eng. 2014. V. 19, No 3. P. 487–501. doi: 10.2478/ijame-2014-0032.
9. *Kovriguine D.A.* Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns // Arch. Appl. Mech. 2012. V. 82. P. 591–604. doi: 10.1007/s00419-011-0574-4.
10. *Samantaray A.K., Dasgupta S.S., Bhattacharyya R.* Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems // Int. J. Eng. Sci. 2010. V. 48, No 1. P. 21–36. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.
11. *Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D.* Non-ideal source and energy harvesting // Acta Mech. 2017. V. 228. P. 3369–3379. doi: 10.1007/s00707-017-1878-4.
12. Прикладная механика: учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. / Под ред. В.М.Осецкого. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
13. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.
14. *Кащенко С.А.* Динамика логистического уравнения с запаздыванием и диффузией и с быстро осциллирующими по пространственной переменной коэффициентами // Докл. Академии наук. 2018. Т. 482, № 5. С. 508–512. doi: 10.31857/S086956520002987-8.
15. *Мулюков М.В.* Устойчивость линейного автономного осциллятора с запаздывающей обратной связью // Вест. Перм. ун-та. Сер.: Матем. Механика. Информ. 2015. Т. 3. С. 5–11.
16. *Асташев В.К., Герц М.Е.* Автоколебания вязко-упругого стержня с ограничителями при действии запаздывающей силы // Машиноведение. 1973. Т. 5. С. 3–11.
17. *Жирнов Б.М.* Одночастотные резонансные колебания фрикционной автоколебательной системы с запаздыванием при внешнем возмущении // Прикл. механика. 1978. Т. 14, № 9. С. 102–109.
18. *Тхан В.З., Дементьев Ю.Н., Гончаров В.И.* Повышение точности расчета систем автоматического управления с запаздыванием // Программные продукты и системы. 2018. Т. 31, № 3. С. 521–526.

19. Гарькина И.А., Данилов А.М., Нашивочников В.В. Имитационное моделирование динамических систем с запаздыванием // *Соврем. пробл. науки и образования*. 2015. № 1, ч. 1. С. 1–7.
20. Daza A., Wagemakers A., Sanjuán M.A.F. Wada property in systems with delay // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2017. V. 43. P. 220–226. doi: 10.1016/j.cnsns.2016.07.008.
21. Третьякова Т.В., Вильдеман В.Э. Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов. М.: Физматлит, 2016. 120 с.
22. Журнов Б.М. Об автоколебаниях механической системы с двумя степенями свободы при наличии запаздывания // *Прикл. механика*. 1973. Т.9, № 10. С. 83–87.
23. Alifov A.A., Farzaliev M.G. About the calculation by the method of linearization of oscillations in a system with time lag and limited power-supply // *CSDEIS 2019: Advances in Intelligent Systems, Computer Science and Digital Economics* / Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.). Ser.: *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V. 1127. Cham: Springer, 2020. P. 404–413. doi: 10.1007/978-3-030-39216-1\_37.
24. Alifov A.A. On mixed forced and self-oscillations with delays in elasticity and friction // *ACSDEIS 2020: Advances in Intelligent Systems, Computer Science and Digital Economics II* / Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.). Ser.: *Advances in Intelligent Systems and Computing*. V. 1402. Cham: Springer, 2021. P. 1–9. doi: 10.1007/978-3-030-80478-7\_1.
25. Алифов А.А., Фарзалиев М.Г. О расчете методом линеаризации взаимодействия параметрических и автоколебаний при запаздывании и ограниченном возбуждении // *Вест. Томск. гос. ун-та. Матем. и механика*. 2020. № 68. С. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4.
26. Alifov A.A., Mazurov M.E. The influence of delays in elasticity and damping on auto-parametric oscillations // *Mach. Sci.* 2021. V. 10, No 1. P. 43–50.
27. Alifov A.A. Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces // *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2021. V. 50, No 2. P. 98–104. doi: 10.3103/S1052618821020023.
28. Алифов А.А. О смешанных вынужденных, параметрических и автоколебаниях при ограниченном возбуждении и запаздывающей упругости // *Вест. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. Механика*. 2020. № 3. С. 12–19. doi: 10.15593/pern.mech/2020.3.02.
29. Alifov A.A. Self-oscillations in delay and limited power of the energy source // *Mech. Solids*. 2019. V. 54, No 4. P. 607–613. doi: 10.3103/S0025654419040150.
30. Алифов А.А. Смешанные вынужденные, параметрические и автоколебания при неидеальном источнике энергии и запаздывающих силах // *Изв. вузов. ПНД*. 2021. Т. 29, № 5. С. 739–750. doi: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750.
31. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.
32. Климов Д.М. Об одном виде автоколебаний в системе с сухим трением // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2003. № 3. С. 6–12.
33. Броновец М.А., Журавлёв В.Ф. Об автоколебаниях в системах измерения сил трения // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2012. № 3. С. 3–11.
34. Алифов А.А. Методы прямой линеаризации для расчета нелинейных систем. М., Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2015. 74 с.
35. Алифов А.А. О расчете колебательных систем с ограниченным возбуждением методами прямой линеаризации // *Пробл. машиностр. и автоматиз.* 2017. № 4. С. 92–97.
36. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

37. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под ред. В.Н. Челомей. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.

Поступила в редакцию 20.12.2022

Принята к публикации 2.05.2023

---

**Алифов Алишир Али оглы**, доктор технических наук, главный научный сотрудник  
Институт машиноведения им. А.А. Благоднарова РАН  
Харитоньевский переулок, д. 4, г. Москва, 101990, Россия  
E-mail: *a.alifov@yandex.ru*

---

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

---

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**  
**2023, vol. 165, no. 1, pp. 16–34**

---

REVIEW ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.16-34

**Influence of Different Delays on Mixed Types of Oscillations under Limited  
Excitation**

*A.A. Alifov\**

*Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990 Russia*

E-mail: *\*a.alifov@yandex.ru*

Received December 20, 2022; Accepted May 2, 2023

**Abstract**

This review summarizes the findings of some published studies that have explored the influence of various delays (elasticity, damping, and self-oscillatory mechanism of excitation) on the dynamics of classes (or types) of mixed oscillations (MO) without and with consideration of the interaction between the oscillating system and the energy source. A general holistic framework was provided for how such delays, both separately and in combination, affect the dynamics of MOs. A unified computational scheme (model) used in the works studied made it easy to understand and compare the results of this influence on different types of MOs. With the account of the interaction with the energy source, the known calculation scheme (or model) of a mechanical frictional self-oscillating system serves as a unified basis for considering all types of MOs. Nonlinear differential equations of motion valid for all types of MOs with their respective solutions were presented, from which the relations for any certain type of MO are derived as special cases. Equations of unsteady motion and relations to calculate the amplitude and phase of stationary oscillations, the velocity of the energy source and the load of the oscillating system on it, as well as the stability conditions of stationary oscillations were given. The results of the calculations carried out to gain insight into the influence of delays on the system dynamics were discussed. Overall, the calculations show that the interaction between the forces with delay and the forces in the energy source is at the core of a variety of phenomena. Different delays in the same system change the shape of the amplitude-frequency curves, shift them, and influence the stability of motion.

**Keywords:** oscillation type, mixed oscillations, self-oscillations, energy source, delay, damping, elasticity, nonlinearity, method, direct linearization

### Figure Captions

- Fig. 1. System model.  
 Fig. 2. Amplitude-frequency curves.  
 Fig. 3. Amplitude-frequency curves: curve 1— $\tau = \pi/2$ , curve 2— $\tau = \pi$ , curve 3— $\tau = 3\pi/2$ .  
 Fig. 4. Amplitude-frequency curves.  
 Fig. 5. Amplitude-frequency curves.  
 Fig. 6. Amplitude-frequency curves.  
 Fig. 7. Amplitude-frequency curves: curve  $\Gamma_1 - \tau = 0$ , curve  $\Gamma_2 - \tau = \pi/2$ , curve  $\Gamma_3 - \tau = \pi$ , curve  $\Gamma_4 - \tau = 3\pi/2$ .  
 Fig. 8. Amplitude dependence on frequency (a, b) and source velocity (c); dependence of source load on source velocity and intermittent transitions (d).  
 Fig. 9. Amplitude-frequency curves.

### References

1. Kononenko V.O. *Vibrating Systems with a Limited Power-Supply*. Gladwell G.M.L. (Ed.). London, Iliffe, 1969. 236 p.
2. Alifov A.A., Frolov K.V. *Interaction of Nonlinear Oscillatory Systems with Energy Sources*. E. Rivin (Ed.). New York, Washington, Philadelphia, London, Hemisphere Publ. Corp., 1990. 327 p.
3. Krasnopol'skaya T.S., Shvets A.Yu. *Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika sistem s ogranichenym vozbuzhdeniem* [Regular and Chaotic Dynamics of Systems with Limited Excitation]. Ser.: Regular and Chaotic Dynamics. Moscow, Izhevsk, NITs "Regulyar. Khaot. Din.", Inst. Komp'yut. Issled., 2008. 280 p. (In Russian)
4. Astashev V.K., Babitsky V.I., Borovkov B.A. The influence of body mass on the dynamics of vibration-impact machines with limited excitation. *Mashinovedenie*, 1977, no. 5, pp. 30–34. (In Russian)
5. Ganiev R.F., Krasnopol'skaya T.S. The scientific heritage of V.O. Kononenko: The Sommerfeld-Kononenko effect. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2018, vol. 47, no. 5, pp. 389–398. doi: 10.3103/S1052618818050047.
6. Püst L. Electro-mechanical impact system excited by a source of limited power. *Eng. Mech.*, 2008, vol. 15, no. 6, pp. 391–400.
7. Balthazar J.M. Vibrating systems with limited power supply: An emergent topic after Prof. Kononenko. *Proc. 5th Int. Conf. on Nonlinear Dynamics*. Kharkiv, 2016, pp. 16–22.
8. Bissembayev K., Isakov Z. Nonlinear vibrations of orthogonal mechanism of shaking table. *Int. J. Appl. Mech. Eng.*, 2014, vol. 19, no. 3, pp. 487–501. doi: 10.2478/ijame-2014-0032.
9. Kovriguine D.A. Synchronization and Sommerfeld effect as typical resonant patterns. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82, pp. 591–604. doi: 10.1007/s00419-011-0574-4.
10. Samantaray A.K., Dasgupta S.S., Bhattacharyya R. Sommerfeld effect in rotationally symmetric planar dynamical systems. *Int. J. Eng. Sci.*, 2010, vol. 48, no. 1, pp. 21–36. doi: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.005.
11. Cveticanin L., Zukovic M., Cveticanin D. Non-ideal source and energy harvesting. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, pp. 3369–3379. doi: 10.1007/s00707-017-1878-4.
12. *Prikladnaya mekhanika: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Applied Mechanics: A Textbook for University Students]. 2nd ed. Osetsky V.M. (Ed.). Moscow, Mashinostroenie, 1977. 488 p. (In Russian)

13. Rubanik V.P. *Kolebaniya kvazilineinykh sistem s zapazdyvaniem* [Oscillations of Quasi-linear Systems with Delay]. Moscow, Nauka, 1969. 288 p. (In Russian)
14. Kashchenko S.A. Dynamics of a delay logistic equation with diffusion and coefficients rapidly oscillating in space variable. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 98, no. 2, pp. 522–525. doi: 10.1134/S1064562418060224.
15. Mulyukov M.V. Stability of a linear autonomous oscillator with delayed feedback. *Vestn. Permsk. Univ. Ser.: Mat. Mekh. Inf.*, 2015, vol. 3, pp. 5–11. (In Russian)
16. Astashev V.K., Hertz M.E. Self-oscillations of a visco-elastic rod with limiters under the action of a lagging force. *Mashinovedenie*, 1973, vol. 5, pp. 3–11. (In Russian)
17. Zhirnov B.M. Single-frequency resonance oscillations of a frictional self-excited system with delay subjected to external perturbations. *Prikl. Mekh.*, 1978, vol. 14, no. 9, pp. 102–109. (In Russian)
18. Than V.Z., Dementiev Yu.N., Goncharov V.I. Improving the accuracy of calculation of automatic control systems with delay. *Program. Prod. Sist.*, 2018, vol. 31, no. 3, pp. 521–526. (In Russian)
19. Garkina I.A., Danilov A.M., Nashivochnikov V.V. Simulation of dynamic systems with delay. *Sovrem. Probl. Nauki Obraz.*, 2015, no. 1, part 1, pp. 1–7. (In Russian)
20. Daza A., Wagemakers A., Sanjuán M.A.F. Wada property in systems with delay. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, vol. 43, pp. 220–226. doi: 10.1016/j.cnsns.2016.07.008.
21. Tretiakova T.V., Vildeman V.E. *Prostranstvenno-vremennaya neodnorodnost' protsessov neuprugogo deformirovaniya metallov* [Spatial and Temporal Inhomogeneity of Inelastic Deformation in Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016. 120 p. (In Russian)
22. Zhirnov B.M. Self-excited vibrations of a mechanical system with two degrees of freedom and delay. *Sov. Appl. Mech.*, 1973, vol. 9, pp. 1109–1112. doi: 10.1007/BF00894292.
23. Alifov A.A., Farzaliev M.G. About the calculation by the method of linearization of oscillations in a system with time lag and limited power-supply. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.) *CSDEIS 2019: Advances in Intelligent Systems, Computer Science and Digital Economics*. Ser.: Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1127. Cham, Springer, 2020, pp. 404–413. doi: 10.1007/978-3-030-39216-1\_37.
24. Alifov A.A. On mixed forced and self-oscillations with delays in elasticity and friction. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (Eds.) *ACSDEIS 2020: Advances in Intelligent Systems, Computer Science and Digital Economics II*. Ser.: Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1402. Cham, Springer, 2021, pp. 1–9. doi: 10.1007/978-3-030-80478-7\_1.
25. Alifov A.A., Farzaliev M.G. On the calculation by the method of linearization of the interaction of parametric and self-oscillations at delay and limited excitation. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2020, no. 68, pp. 41–52. doi: 10.17223/19988621/68/4. (In Russian)
26. Alifov A.A., Mazurov M.E. The influence of delays in elasticity and damping on auto-parametric oscillations. *Mach. Sci.*, 2021, vol. 10, no. 1, pp. 43–50.
27. Alifov A.A. Autoparametric oscillations with delays in elastic and frictional forces. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2021, vol. 50, no. 2, pp. 98–104. doi: 10.3103/S1052618821020023.
28. Alifov A.A. About mixed forced, parametric and self-oscillations by limited excitation and delayed elasticity. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2020, no. 3, pp. 12–19. doi: 10.15593/perm.mech/2020.3.02. (In Russian)
29. Alifov A.A. Self-oscillations in delay and limited power of the energy source. *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 4, pp. 607–613. doi: 10.3103/S0025654419040150.

- 
30. Alifov A.A. Mixed forced, parametric, and self-oscillations with nonideal energy source and lagging forces. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelineinaya Din.*, 2021, vol. 29, no. 5, pp. 739–750. doi: 10.18500/0869-6632-2021-29-5-739-750. (In Russian)
  31. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation Theory]. Moscow, Nauka, 1981. 568 p. (In Russian)
  32. Klimov D.M. On one type of self-oscillations in a system with dry friction. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2003, no. 3, pp. 6–12. (In Russian)
  33. Bronovets M.A., Zhuravlev V.F. On self-excited vibrations in friction force measurement systems. *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 261–268. doi: 10.3103/S0025654412030016.
  34. Alifov A.A. *Metody pryamoi linearizatsii dlya rascheta nelineinykh sistem* [Methods of Direct Linearization for Calculation of Nonlinear Systems]. Moscow, Izhevsk, NITs “Regulyar. Khaot. Din.”, 2015. 74 p. (In Russian)
  35. Alifov A.A. On calculation of oscillating systems with limited excitation by direct linearization methods. *Probl. Mashinostr. Avtom.*, 2017, no. 4, pp. 92–97. (In Russian)
  36. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow, Nauka, 1974. 504 p. (In Russian)
  37. *Vibratsii v tekhnike* [Vibrations in Engineering]. Chelomei V.N. (Ed.). Vol. 2: Oscillations of nonlinear mechanical systems. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 351 p. (In Russian)
- 

⟨ **Для цитирования:** Алифов А.А. Действие разных запаздываний на смешанные типы колебаний при ограниченном возбуждении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 16–34. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.16-34. ⟩

⟨ **For citation:** Alifov A.A. Influence of different delays on mixed types of oscillations under limited excitation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 16–34. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.16-34. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.98

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.35-48

## ЭНДОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

С. А. Григорян<sup>1</sup>, А. Ю. Кузнецова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, 420066, Россия

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

### Аннотация

Описаны все инъективные эндоморфизмы классической алгебры Теплица, их связь с эндоморфизмами алгебры функций, непрерывных на единичной окружности, а также с накрытиями над единичной окружностью. Показано, что с каждой неунитарной изометрией  $V$  в алгебре Теплица связан сохраняющий единицу эндоморфизм и класс его компактных возмущений – не сохраняющих единицу эндоморфизмов, определяемых частичными изометриями  $\{VP\}$ , где  $P$  – проектор конечной коразмерности. Введены понятия  $\mathcal{T}$ -эквивалентности эндоморфизмов и  $\mathcal{T}$ -эквивалентности с точностью до компактного возмущения. Приведен пример, когда соответствующие унитарно эквивалентным изометриям эндоморфизмы лежат в разных классах эквивалентности. Среди всех эндоморфизмов выделен класс эндоморфизмов Бляшке, которые являются аналогами эндоморфизмов диск-алгебры и порождают неразветвленные накрытия над единичной окружностью.

**Ключевые слова:**  $C^*$ -алгебра, алгебра Теплица, эндоморфизм, автоморфизм, конечное произведение Бляшке, оператор Фредгольма, частичная изометрия

### Введение

Работа посвящена описанию инъективных эндоморфизмов классической алгебры Теплица, то есть алгебры, порожденной всеми теплицевыми операторами  $T_\varphi$  с непрерывными символами на пространстве Харди единичной окружности. В дальнейшем под эндоморфизмом будет понимать именно инъективный эндоморфизм. Алгебра Теплица является некоммутативным аналогом  $C(\mathbb{T})$ -алгебры функций, непрерывных на единичной окружности. Мы устанавливаем связь между полугруппами эндоморфизмов алгебры Теплица и  $C(\mathbb{T})$ . Будем обозначать пространства Лебега и Харди на единичной окружности  $\mathbb{T}$  как  $L^2$  и  $H^2$ , а алгебру Теплица как  $\mathcal{T}$ . В основном будем пользоваться двумя утверждениями, существованием короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow K(H^2) \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0, \quad (1)$$

где  $i$  – вложение, а  $\pi$  – фактор-отображение, и хорошо известной теоремой Кобурна [1], которая утверждает, что все алгебры, порожденные неунитарными изометриями, канонически изоморфны. Используя теорему Кобурна, мы опишем все эндоморфизмы, как сохраняющие единицу, так и не сохраняющие, а также автоморфизмы. Покажем, что эндоморфизмы можно градуировать по мультипликативной полугруппе  $\mathbb{N}$  (индексу эндоморфизма). Используя автоморфизмы алгебры Теплица, мы введем на множестве эндоморфизмов отношение  $\mathcal{T}$ -эквивалентности

и более слабое отношение  $\mathcal{T}$ -эквивалентности с точностью до компактного возмущения. Покажем, что достаточным условием для слабой эквивалентности эндоморфизмов  $\alpha_i$  является условие, что  $\alpha_i(T_z)$  разделяют точки спектра  $\mathcal{T}$  или (что то же самое) образы  $\alpha_i(T_z)$  при фактор-отображении разделяют точки спектра  $C(\mathbb{T})$ . Также мы установим связь между эндоморфизмами  $\mathcal{T}$  и накрытиями над единичной окружностью. Среди эндоморфизмов  $\mathcal{T}$  выделим полугруппу эндоморфизмов Бляшке, аналог эндоморфизмов диск-алгебры, которые порождают неразветвленное накрытие над  $\mathbb{T}$ .

### 1. Необходимые сведения.

#### Алгебра функций, непрерывных на окружности

Структура эндоморфизмов  $C(\mathbb{T})$  хорошо известна, но для удобства читателя напомним основные факты.

Пусть  $C(\mathbb{T})$  – коммутативная  $C^*$ -алгебра всех непрерывных функций на единичной окружности  $\mathbb{T}$ , наделенных равномерной нормой,  $\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{T}} |f(z)|$ ,  $f \in C(\mathbb{T})$ . Преобразование Гельфанда для  $C(\mathbb{T})$  является тождественным отображением, пространство линейных мультипликативных функционалов  $\mathfrak{M}_{C(\mathbb{T})}$  совпадает с единичной окружностью, то есть для каждого  $m \in \mathfrak{M}_{C(\mathbb{T})}$  существует такое  $z \in \mathbb{T}$ , что  $m(f) = f(z)$ . Поэтому эндоморфизм  $\chi : C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$  порождает двойственное отображение  $\hat{\chi} : \mathbb{T} \leftarrow \mathbb{T}$  единичной окружности на себя,  $\chi(f)(z) = f(\hat{\chi}(z))$ . Пусть  $U(\mathbb{T})$  – множество таких отображений. Относительно операции суперпозиции  $U(\mathbb{T})$  образует полугруппу. С другой стороны,  $U(\mathbb{T})$  есть множество функций из  $C(\mathbb{T})$ , модуль которых равен единице. По теореме Бора–ван Кампена [2], каждую функцию  $u \in U(\mathbb{T})$  можно представить в виде  $z^n \exp(ig(z))$ , где  $n \in \mathbb{Z}$  и  $g \in C_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  – алгебре всех непрерывных вещественных функций на окружности. Число  $n$  есть индекс ветвления функции  $u$  вокруг нуля,  $n = \text{wn}(u)$ , то есть  $[u] = [z^n]$  в фундаментальной группе  $\pi_1(\mathbb{T})$ .  $U(\mathbb{T})$  является группой относительно произведения, и  $U_0(\mathbb{T}) = \{u \in U(\mathbb{T}) : \text{wn}(u) = 0\}$  – ее связная окрестность единицы. Любая функция из  $U_0(\mathbb{T})$  имеет вид  $\exp(ig(z))$ , и  $U(\mathbb{T}) = \bigcup_{\mathbb{Z}} z^n U_0(\mathbb{T})$ . Заметим, что если  $u \in U(\mathbb{T})$  и  $\text{wn}(u) \neq 0$ , то  $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  – сюръективное отображение.

Полугруппа  $U(\mathbb{T})$  является двойственной к полугруппе эндоморфизмов  $\text{End } C(\mathbb{T})$  алгебры  $C(\mathbb{T})$ . Действительно, если  $\chi \in \text{End } C(\mathbb{T})$ , то  $\hat{\chi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , как двойственное отображение, является непрерывной функцией на  $\mathbb{T}$ . С другой стороны, для  $u \in U(\mathbb{T})$  определим  $\chi = \chi_u : C(\mathbb{T}) \rightarrow C(\mathbb{T})$ ,

$$\chi_u(f)(z) = f(u(z)) = f(\hat{\chi}_u(z)). \quad (2)$$

Таким образом, отображение  $\chi \mapsto \hat{\chi}$  есть полугрупповой изоморфизм между  $\text{End } C(\mathbb{T})$  и  $U(\mathbb{T})$ . Если  $\chi \in \text{End } C(\mathbb{T})$ , то  $\hat{\chi} \in U(\mathbb{T})$  определяется как  $\chi(z) \in U(\mathbb{T})$ , где  $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  – тождественная функция в  $C(\mathbb{T})$ . Если эндоморфизм  $\chi$  инъективный, то образ  $\hat{\chi}$  совпадает с единичной окружностью, и обратное тоже верно.

Действительно, предположим, что  $\hat{\chi}(\mathbb{T}) = E \subsetneq \mathbb{T}$ . Пусть  $f \in C(\mathbb{T})$  – такая функция, что  $f(E) = 0$ . Тогда  $\chi(f)(z) = f(\hat{\chi}(z)) = 0$ . Заметим, что если  $\chi$  инъективный, то из условия  $\chi(f) = 0$  следует  $f = 0$ .

Пусть  $X$  – связный компакт. Сюръективное непрерывное отображение  $u : X \rightarrow \mathbb{T}$  называется *накрывающим отображением*, если мощность множества  $\text{card } u^{-1}(z)$  конечна и не зависит от выбора  $z \in \mathbb{T}$ . По теореме Понтрягина [3, теорема 79], если  $u : X \rightarrow \mathbb{T}$  – накрывающее отображение, то на множестве  $X$  можно задать такую групповую структуру, что отображение  $u : X \rightarrow \mathbb{T}$  станет гомоморфизмом групп. Поэтому справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть  $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$  –  $n$ -листное накрывающее отображение и  $\tau_n : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$  – гомоморфизм,  $\tau_n(z) = z^n$ . Тогда существует такой гомеоморфизм  $\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ , что диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{T} \\ & \searrow u & \swarrow \tau_n \\ & \mathbb{T} & \end{array}.$$

Множество всех накрывающих отображений  $u : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$  обозначим через  $\text{Cov}(\mathbb{T})$ . Множество всех  $n$ -листных накрывающих отображений обозначим через  $\text{Cov}_n(\mathbb{T})$ .

### Алгебра Теплица

Приведем основные факты об алгебре Теплица. Их доказательства можно найти, например, в [4, 5].

Зададим на  $C(\mathbb{T})$  структуру предгильбертова пространства, определив на ней  $L^2$ -норму  $\|f\|_2 = \left( \int_{\mathbb{T}} |f(z)|^2 d\mu(z) \right)^{\frac{1}{2}}$ , где  $\mu$  – мера Хаара на  $\mathbb{T}$ . Пополнение  $C(\mathbb{T})$  в этой норме есть гильбертово пространство  $L^2$  со скалярным произведением  $(f, g) = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z)$ . Семейство функций  $\{z^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  образует в  $L^2$  ортонормированный базис. Пространство Харди  $H^2 = \{f \in L^2 : f_n = 0, n < 0\}$ , где  $f_n$  – коэффициенты Фурье, является замкнутым подпространством в  $L^2$  с ортонормированным базисом  $\{z^n\}_0^{\infty}$ . Оператор Лорана, или оператор умножения  $M_\varphi : L^2 \longrightarrow L^2$  с символом  $\varphi \in L^\infty$ , определяется соотношениями  $M_\varphi f = \varphi f$ ,  $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$  и  $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ .

Пусть  $P$  – проектор из  $L^2$  на  $H^2$ . Оператор  $T_\varphi : H^2 \longrightarrow H^2$ ,  $T_\varphi f = P\varphi f$  называется теплицевым оператором с символом  $\varphi$ ,  $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$  и  $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ . Алгеброй Теплица  $\mathcal{T}$  называется  $C^*$ -алгебра, порожденная всеми теплицевыми операторами с непрерывными символами. Оператор  $T_z = T$  является оператором правого сдвига на  $H^2$ ,  $Tz^n = z^{n+1}$ . Нетрудно показать, что алгебра Теплица порождается оператором  $T$ , который является оператором Фредгольма с индексом  $-1$ .

Коммутатором операторов  $A, B \in B(H^2)$  называется оператор  $[A, B] = AB - BA$ . Пусть  $K$  – идеал в  $\mathcal{T}$ , порожденный всеми коммутаторами  $[A, B]$ ,  $A, B \in \mathcal{T}$ . Известно, что  $K$  совпадает с алгеброй  $K(H^2)$  всех компактных операторов в  $B(H^2)$ . Свойства алгебры Теплица во многом определяются следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Отображение*

$$C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{T}/K, \quad \varphi \mapsto T_\varphi + K(H^2)$$

*является  $*$ -изоморфизмом.*

Отсюда следует, что алгебра Теплица является расширением  $C(\mathbb{T})$  с помощью компактных операторов, то есть существует короткая точная последовательность (1). Можно определить вполне положительное отображение  $\rho : C(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{T}$ , такое, что  $\pi \circ \rho$  является тождественным отображением на  $C(\mathbb{T})$ , то есть (1) расщепима. Это равносильно условию, что алгебра Теплица как банахово пространство представима в виде  $K(H^2) + C(\mathbb{T})$ . Очевидно, что в (1)  $\pi(T) = z$ . Из теоремы 1 и теоремы Аткинсона также следует, что  $T_\varphi$  фредгольмов тогда и только тогда, когда  $\varphi$  обратим в  $C(\mathbb{T})$ , при этом  $\text{ind } T_\varphi = -\text{wn}(\varphi)$  (теорема Гохберга–Крейна).

**Теорема 2** (Кобурн). Пусть  $\mathfrak{A}$  –  $C^*$ -алгебра и  $V \in \mathfrak{A}$  – изометрия. Тогда существует такой единственный унитарный  $*$ -гомоморфизм  $\gamma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{A}$ , что  $\gamma(T) = V$ . При этом, если  $VV^* \neq I$ , то  $\gamma$  – изометрический гомоморфизм.

Из теоремы Кобурна следует, что алгебра Теплица является универсальной  $C^*$ -алгеброй, порожденной единственной неунитарной изометрией, то есть все  $C^*$ -алгебры, порожденные неунитарными изометриями, канонически изоморфны.

## 2. Эндоморфизмы алгебры Теплица.

### Изометрии и эндоморфизмы алгебры Теплица

Пусть  $\text{Iso } \mathcal{T}$  – множество всех неунитарных изометрий алгебры Теплица и  $\mathcal{T}_{sa}$  – пространство всех самосопряженных элементов  $\mathcal{T}$ .

**Предложение 1.** Пусть  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$ . Тогда  $V$  – оператор Фредгольма, который с точностью до компактного возмущения имеет вид  $T^n \exp(iA)$ ,  $A \in \mathcal{T}_{sa}$ ,  $n \geq 1$ ,  $-n = \text{ind } V$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1 сразу следует, что если  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$ , то  $\pi(V) \in U(\mathbb{T})$ , то есть  $V$  – оператор Фредгольма. По теореме Бора–ван Кампена  $\pi(V) = z^n \exp(ig(z))$ , причем  $n > 0$ . Пусть  $C \in \mathcal{T}$  – такой оператор, что  $\pi(C) = g$ . Тогда  $A = \frac{C+C^*}{2} \in \mathcal{T}_{sa}$  и  $\pi(A) = g$ . Поэтому  $\exp(iA)$  – унитарный элемент  $\mathcal{T}$  и  $\pi(\exp(iA)) = \exp(ig)$ . Оператор  $T^n \exp(iA)$  принадлежит  $\text{Iso } \mathcal{T}$  тогда и только тогда, когда  $n \geq 1$ . Поскольку  $\pi(T^n \exp(iA)) = \pi(V)$ , получим, что  $V$  – компактное возмущение  $T^n \exp(iA)$  и  $\text{ind } V = -\text{wn } (\pi(V)) = -n$ .  $\square$

Через  $\mathcal{T}_V$  обозначим  $C^*$ -алгебру, порожденную изометрией  $V$ . Установим связь между изометриями в алгебре Теплица и эндоморфизмами. Опишем сначала эндоморфизмы алгебры Теплица, сохраняющие единицу. Покажем, что с каждой изометрией связан такой эндоморфизм. Пусть  $\text{End } \mathcal{T}$  – полугруппа инъективных эндоморфизмов и  $\text{End}_e \mathcal{T} \subset \text{End } \mathcal{T}$  – полугруппа всех тех эндоморфизмов, которые сохраняют единицу.

**Предложение 2.** Следующие условия эквивалентны:

- 1)  $\alpha \in \text{End}_e \mathcal{T}$ ;
- 2)  $\alpha(T)$  – неунитарная изометрия.

**Доказательство.** 1)  $\rightarrow$  2). Пусть  $\alpha(T) = V \notin \text{Iso } \mathcal{T}$ . Тогда  $V$  – унитарный оператор в  $\mathcal{T}$ , так как  $I = \alpha(T^*T) = V^*V$ . Тогда  $\alpha(T^*T - TT^*) = 0$ . Пришли к противоречию, так как  $T^*T - TT^*$  – ненулевой проектор.

2)  $\rightarrow$  1). Пусть  $\alpha(T) = V \in \text{Iso } \mathcal{T}$ . По теореме Кобурна отображение  $\alpha : T \rightarrow V$  расширяется до изоморфизма  $\alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_V$ . Поэтому  $\alpha$  – инъективный эндоморфизм.  $\square$

**Лемма 2.** Существует полугрупповой изоморфизм между  $\text{End}_e \mathcal{T}$  и  $\text{Iso } \mathcal{T}$ .

**Доказательство.** Очевидно, что каждому  $\alpha \in \text{End}_e \mathcal{T}$  соответствует  $V = \alpha(T) \in \text{Iso } \mathcal{T}$ . Покажем, что для любой изометрии  $V$  существует такой эндоморфизм  $\alpha$ , что  $\alpha(T) = V$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{T} & \xrightarrow{\pi} & C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\
 0 & \longrightarrow & K_V & \longrightarrow & \mathcal{T}_V & \xrightarrow{\pi_V} & C_V(\mathbb{T}) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{T} & \xrightarrow{\pi} & C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Здесь  $\tau$  –  $*$ -изоморфизм, согласно теореме Кобурна, а  $i$  – вложение, поскольку  $\mathcal{T}_V \subset \mathcal{T}$ , отсюда  $i \circ \tau = \alpha : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  – эндоморфизм, причем  $V = \alpha(T)$ . Теперь зададим на множестве  $\text{Iso } \mathcal{T}$  структуру полугруппы, чтобы отображение  $\alpha \mapsto \alpha(T) = V$  было полугрупповым изоморфизмом между  $\text{End}_e \mathcal{T}$  и  $\text{Iso } \mathcal{T}$ . Пусть  $V = \alpha(T)$  и  $W = \beta(T)$ . Определим  $V \star W := \alpha(\beta(T))$ . Введенная операция произведения совпадает с операцией произведения в  $\text{End}_e \mathcal{T}$ . Действительно,  $(\alpha\beta)(T) = \alpha(\beta(T))$ .  $\square$

Поскольку все изометрии в  $\mathcal{T}$  – операторы Фредгольма, то мы можем определить индекс эндоморфизма. *Индексом инъективного сохраняющего единицу эндоморфизма*  $\alpha$  назовем индекс образа оператора  $T$ ,  $\text{ind } \alpha := \text{ind } \alpha(T)$ , то есть отображение  $\alpha \mapsto \alpha(T)$  – полугрупповой изоморфизм, сохраняющий индекс. Поскольку  $\text{ind } V = -\text{wn}(\pi(V))$ , то  $\text{ind } (\alpha \circ \beta) = -\text{ind } \alpha \text{ ind } \beta$  и  $\text{ind } V \star W = -\text{ind } V \text{ ind } W$ . Поэтому на  $\text{End}_e \mathcal{T}$  можно задать градуировку по мультипликативной полугруппе  $\mathbb{N}$ .

Действительно, пусть  $\text{End}_n \mathcal{T} = \{\alpha \in \text{End}_e \mathcal{T} : \text{ind } \alpha = -n\}$ .

**Лемма 3.**

- 1)  $\text{End}_1 \mathcal{T}$  – полугруппа;
- 2)  $\text{End}_m \mathcal{T} \star \text{End}_n \mathcal{T} \subset \text{End}_{mn} \mathcal{T}$ ;
- 3)  $\text{End}_m \mathcal{T} \cap \text{End}_n \mathcal{T} = \emptyset$ ,  $m \neq n$ ;
- 4)  $\text{End}_e \mathcal{T} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{End}_n \mathcal{T}$ .

Скажем, что эндоморфизм  $\alpha$  является *компактным возмущением* эндоморфизма  $\beta$ , если  $\alpha(A) - \beta(A)$  – компактный оператор для всех  $A \in \mathcal{T}$ .

**Предложение 3.** *Следующие условия эквивалентны:*

- 1)  $\alpha$  – компактное возмущение  $\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \text{End}_e \mathcal{T}$ ;
- 2)  $\alpha(T) - \beta(T)$  – компактный оператор.

**Доказательство.** Следует из того, что полиномы вида  $\sum_{n,m} c_{nm} T^n T^{*m}$  плотны в  $\mathcal{T}$ .  $\square$

Наша цель – установить связь между полугруппами  $\text{End}_e \mathcal{T}$  и  $\text{End } C(\mathbb{T})$ . Поскольку для оператора Фредгольма  $T_\varphi$   $\text{ind } T_\varphi = -\text{wn}(\varphi)$  и индекс эндоморфизма  $\alpha$  определяется через индекс  $\alpha(T)$ , определим понятие индекса и для эндоморфизмов  $C(\mathbb{T})$ . Индексом  $\chi \in \text{End } C(\mathbb{T})$  назовем индекс ветвления образа тождественной функции  $z \in C(\mathbb{T})$ , взятый с противоположным знаком,  $\text{ind } \chi := -\text{wn } \chi(z)$ . Выделим подполугруппу эндоморфизмов  $\text{End}_+ C(\mathbb{T}) = \{\chi \in \text{End } C(\mathbb{T}) : \text{ind } \chi < 0\}$ . Пусть  $\text{End}_n C(\mathbb{T}) = \{\chi \in \text{End}_+ C(\mathbb{T}) : \text{ind } \chi = -n\}$ . Очевидно, что  $\text{End}_+ C(\mathbb{T}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{End}_n C(\mathbb{T})$ , и имеют место все утверждения леммы 3.

**Теорема 3.** *Существует такой полугрупповой сюръективный гомоморфизм*

$$\gamma : \text{End}_e \mathcal{T} \rightarrow \text{End}_+ C(\mathbb{T}),$$

что  $\gamma(\text{End}_n \mathcal{T}) = \text{End}_n C(\mathbb{T})$ . При этом для любого  $\chi \in \text{End}_+ C(\mathbb{T})$  любые два  $\alpha, \beta \in \gamma^{-1}(\chi)$  являются компактным возмущением друг друга.

**Доказательство.** Доказательство следует из леммы 2.

Пусть  $\alpha \in \text{End}_e \mathcal{T}$ . Тогда  $\alpha(T) \in \text{Iso } \mathcal{T}$  и  $\pi(\alpha(T)) \in U(\mathbb{T})$ , которая является двойственной к  $\text{End } C(\mathbb{T})$ . Получили последовательность  $\alpha \mapsto \alpha(T) \mapsto \pi(\alpha(T)) \mapsto \chi$ , где  $\chi$  определяется из

$$\chi(f)(z) = f(\pi(\alpha(T))(z)). \quad (3)$$

Очевидно (предложение 1), что  $\chi \in \text{End}_+ C(\mathbb{T})$ . Таким образом, определили гомоморфизм

$$\gamma : \text{End}_e \mathcal{T} \longrightarrow \text{End}_+ C(\mathbb{T}), \quad \alpha \mapsto \chi = \gamma(\alpha).$$

Сюръективность следует из (1) и предложения 1.  $\square$

### Автоморфизмы алгебры $\mathcal{T}$ . Понятие $\mathcal{T}$ -эквивалентности

Теперь рассмотрим группу автоморфизмов алгебры Теплица. Из (1) очевидно, что любой автоморфизм на  $\mathcal{T}$  индуцирует автоморфизм на алгебре компактных операторов и автоморфизм на  $C(\mathbb{T})$ . Поэтому любой автоморфизм  $\mathcal{T}$  имеет вид  $\alpha(A) = UAU^*$ ,  $A \in \mathcal{T}$  и  $U$  – унитарный оператор на  $H^2$  и единственный с точностью до скалярного множителя с единичным модулем. Соответствующий автоморфизму на  $\mathcal{T}$  автоморфизм на  $C(\mathbb{T})$  порождает гомеоморфизм единичной окружности, сохраняющий ориентацию.

Верно и обратное, пусть  $U_1(\mathbb{T}) = \{u \in U(\mathbb{T}) : u(z_1) = u(z_2) \implies z_1 = z_2, \text{ wn}(u) = 1\}$ , то есть сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы единичной окружности (лежащие в классе  $[z]$  фундаментальной группы,  $z$  – тождественное отображение).

**Предложение 4.** Пусть  $u \in U_1$ . Тогда

- 1) найдется такой  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$ , что  $\pi(V) = u$ ;
- 2) существует автоморфизм  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$ ,  $\pi(\alpha(T)) = u$ .

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Из BDF-теории следует, что если  $u$  – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, то найдется  $K \in K(H^2)$ , что  $T_u + K = V$ , где  $V$  – оператор правого сдвига.

Действительно, если  $u = z \exp(ig)$ , то найдется такой самосопряженный оператор  $A$ , что  $\pi(A) = g$ . Поэтому образ неунитарной изометрии  $T \exp(iA) \in \text{Iso } \mathcal{T}$  есть  $u$ . Пусть  $V$  – такая изометрия, что  $\pi(V) = u$ . Согласно лемме 2 найдется эндоморфизм  $\alpha$ ,  $\alpha(T) = V$ . Покажем, что  $\alpha$  – автоморфизм. Алгебра  $\mathcal{T}_V$  изоморфна  $\mathcal{T}$ , и для нее существует короткая точная последовательность (1). Так как  $u$  разделяет точки окружности, то полиномами от  $\pi(V) = u$  и  $\overline{\pi(V)}$  можно приблизить любую функцию из  $C(\mathbb{T})$ , в том числе и  $z$ . Пусть  $B \in \mathcal{T}_V$  – такой оператор, что  $\pi(B) = z$ . С другой стороны,  $\pi(T) = z$  и  $B - T \in K(H^2)$ . Но  $\text{ind } V = -1$ , следовательно,  $\mathcal{T}_V$  содержит все компактные операторы, значит,  $T \in \mathcal{T}_V$ , и получили, что  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_V$ , то есть  $\alpha$  – автоморфизм.  $\square$

Заметим, что относительно операции суперпозиции  $U_1(\mathbb{T})$  изоморфна подгруппе в  $\text{End}_+ C(\mathbb{T})$ . Таким образом, из предложения выше и теоремы 3 получим

**Теорема 4.** Существует сюръективный групповой гомоморфизм

$$\gamma_1 : \text{Aut } \mathcal{T} \longrightarrow \text{Aut}_e C(\mathbb{T}),$$

где  $\text{Aut}_e C(\mathbb{T})$  – связная окрестность единицы группы автоморфизмов  $C(\mathbb{T})$ , и ядро  $\gamma_1$  совпадает с группой внутренних автоморфизмов алгебры Теплица.

**Доказательство.** Пусть  $\gamma$  – гомоморфизм, определенный в теореме 3, и  $\gamma_1$  – его ограничение на  $\text{Aut } \mathcal{T}$ . Группа автоморфизмов  $C(\mathbb{T})$  изоморфна  $U_1(\mathbb{T}) \times \mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  порождается отображением  $z \mapsto \bar{z}$ . Связная окрестность единицы  $\text{Aut } C(\mathbb{T})$  изоморфна  $U_1(\mathbb{T}) \times \{1\} \sim U_1(\mathbb{T})$ . Поскольку  $\pi(\alpha(T)) \in U_1(\mathbb{T})$  для  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$ , то  $\gamma_1(\text{Aut } \mathcal{T}) \subset \text{Aut}_e C(\mathbb{T})$ . Сюръективность следует из предложения 4.

Теперь покажем, что  $\ker \gamma_1$  – группа внутренних автоморфизмов. Пусть  $\alpha \in \ker \gamma_1$  и  $\alpha(T) = V$ , причем  $\pi(V) = z$ . Поскольку  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$ , то существует такой унитарный оператор  $U \in B(H^2)$ , что  $V = UTU^*$ . По теореме Уолда-фон Неймана в  $H^2$  существует базис  $\{e_n\}_{n=0}^\infty$ , на котором  $V$  является оператором правого сдвига, причем  $Uz^n = e_n$ . Но  $\pi(UTU^*) = \pi(T)$ , то есть  $UTU^* - T = K \in K(H^2)$ , откуда  $\|z^n - e_n\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следовательно, унитарный оператор  $U$ , который переводит один базис в другой, равен  $I + K$ . Таким образом,  $U \in \mathcal{T}$ , то есть  $\alpha$  – внутренний автоморфизм.  $\square$

Заметим, что из доказательства предыдущей теоремы следует, что если  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$  и  $\pi(\alpha(T)) \neq z$ , то существуют внутренний автоморфизм  $\alpha' \in \text{Aut } B(H^2)$ ,  $\alpha'(A) = UAU^*$  для  $A \in B(H^2)$  и ограничение  $\alpha'|_{\mathcal{T}} = \alpha$ , но при этом  $U \notin \mathcal{T}$ . Ниже мы приведем пример, когда ограничение внутреннего автоморфизма  $B(H^2)$  на алгебру Теплица будет для последней эндоморфизмом.

Все внутренние автоморфизмы являются компактным возмущением тождественного автоморфизма. В общем случае группа автоморфизмов алгебры Теплица неустойчива относительно компактного возмущения. Согласно теореме Уолда-фон Неймана, каждая изометрия представляется в виде прямой суммы унитарного слагаемого и копий одностороннего сдвига. Рассмотрим  $\alpha : T \mapsto T + K = U_f \oplus T'$ , где  $U_f$  – унитарный конечномерный оператор, а  $T'$  – оператор правого сдвига. Очевидно, что  $\alpha$  – эндоморфизм, являющийся компактным возмущением тождественного автоморфизма. Используя автоморфизмы алгебры Теплица, введем отношения эквивалентности на множестве эндоморфизмов.

**Определение 1.** Эндоморфизмы  $\alpha, \beta$  назовем  $\mathcal{T}$ -эквивалентными, если найдется такой  $\sigma \in \text{Aut } \mathcal{T}$ , что  $\sigma \circ \alpha = \beta$ . Эндоморфизмы  $\alpha, \beta$  назовем  $\mathcal{T}$ -эквивалентными с точностью до компактного возмущения, если найдется такой  $\sigma \in \text{Aut } \mathcal{T}$ , что  $\sigma \circ \alpha$  является компактным возмущением  $\beta$ .

Соответственно, изометрии  $V, W$  будем называть  $\mathcal{T}$ -эквивалентными, если найдется автоморфизм  $\sigma$ ,  $\sigma(V) = W$ . В рассмотренном выше примере эндоморфизм  $\alpha : T \mapsto U_f \oplus T'$  является  $\mathcal{T}$ -эквивалентным тождественному автоморфизму с точностью до компактного возмущения. Заметим, что индексы у этих эндоморфизмов совпадают. Возникает вопрос, достаточно ли условия  $\alpha, \beta \in \text{End}_n \mathcal{T}$  для того, чтобы эндоморфизмы были  $\mathcal{T}$ -эквивалентными, хотя бы с точностью до компактного возмущения.

Рассмотрим правый сдвиг  $T$  и изометрию  $V$  без унитарной части,  $\text{ind } V = -1$ , и пусть  $\pi(V) = z \exp(ig(z)) = v \notin U_1$ . Поскольку не существует такого автоморфизма  $\chi \in \text{Aut } C(\mathbb{T})$ , что  $\chi(z) = v$ , то и не существует автоморфизма  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$ ,  $\alpha(T) = V$ . Операторы  $T$  и  $V$  являются унитарно эквивалентными в  $B(H^2)$ , алгебры  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{T}_V$  унитарно эквивалентны, но  $T$  и  $V$  не являются  $\mathcal{T}$ -эквивалентными, эндоморфизм  $T \mapsto V$  и тождественный автоморфизм не являются  $\mathcal{T}$ -эквивалентными даже с точностью до компактного возмущения, и  $\mathcal{T}_V \subsetneq \mathcal{T}$ .

Сформулируем достаточные условия  $\mathcal{T}$ -эквивалентности с точностью до компактного возмущения для эндоморфизмов  $\alpha, \beta \in \text{End}_n \mathcal{T}$ . Пусть  $\text{Cov}_n(\mathbb{T}) = \{u \in \text{Cov}(\mathbb{T}) : \text{wn}(u) = n, n \geq 1\}$ . Все элементы  $\text{Cov}_n(\mathbb{T})$  являются сохраняющими ориентацию отображениями и образуют подполугруппу относительно суперпозиции среди всех накрывающих отображений  $\text{Cov}(\mathbb{T})$ .

**Теорема 5.** Пусть  $\alpha, \beta \in \text{End}_n \mathcal{T}$  и пусть  $\pi(\alpha(T)), \pi(\beta(T)) \in \text{Cov}_n(\mathbb{T})$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  являются  $\mathcal{T}$ -эквивалентными с точностью до компактного возмущения.

**Доказательство.** По лемме 1, если  $u = \pi(\alpha(T)) \in \text{Cov}_n(\mathbb{T})$ , то существует гомеоморфизм  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , такой, что  $u = \pi(\alpha(T)) = z^n \circ \gamma$ . Аналогично существует и гомеоморфизм  $\gamma' : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $u' = \pi(\beta(T)) = z^n \circ \gamma'$ , то есть  $u' = u \circ \gamma^{-1} \circ \gamma' = u \circ \delta$ , причем  $\delta \in U_1(\mathbb{T})$  (сохраняет ориентацию). Гомеоморфизмы единичной окружности являются дуальными отображениями к автоморфизмам алгебры непрерывных функций на единичной окружности, поэтому существует автоморфизм (2)  $\chi_\delta \in \text{Aut}_e C(\mathbb{T})$ ,  $\chi_\delta(u)(z) = u(\delta(z)) = u'(z)$ , следовательно, по теореме 4 существует такой автоморфизм  $\sigma \in \text{Aut } \mathcal{T}$ , что  $\pi(\sigma(\alpha(T))) = \chi(u) = \pi(\beta(T)) = u'$ , то есть  $\alpha$  и  $\beta$   $\mathcal{T}$ -эквивалентны с точностью до компактного возмущения.  $\square$

### 3. Эндоморфизмы Бляшке

В этом параграфе из полугруппы эндоморфизмов алгебры Теплица мы выделим подполугруппу, которая имеет хорошо известный образ в  $\text{End } C(\mathbb{T})$ . Напомним, что подалгебра  $A(\mathbb{T}) \subset C(\mathbb{T})$ , состоящая из тех функций, которые имеют непрерывное аналитическое продолжение в открытый единичный диск  $\{|z| < 1\}$ , называется диск-алгеброй. Эндоморфизм  $\chi \in \text{End } A(\mathbb{T})$  определяется функцией  $\chi(z) \in A(\mathbb{T})$ . Если  $\chi$  – изометричный эндоморфизм, т. е.  $\|\chi(f)\| = \|f\|$ , тогда  $\chi(z)$  есть конечное произведение Бляшке вида

$$b_n(z) = e^{i\theta} \prod_1^n \left( \frac{z - z_i}{1 - \bar{z}_i z} \right), \quad |z_i| < 1, \quad n = \deg b_n. \quad (4)$$

В частности, группа автоморфизмов алгебры  $A(\mathbb{T})$  порождается группой преобразований Мебиуса, если  $\chi \in \text{Aut } A(\mathbb{T})$ , тогда найдется такое преобразование Мебиуса  $b(z) = e^{i\theta} \left( \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right)$ ,  $|z_0| < 1$ , что  $\chi(z) = b(z)$ . Отображение  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $z \mapsto b_n(z)$  есть  $n$ -листное неразветвленное накрытие, прообраз точки  $b_n(z)$  состоит из  $n$  точек. Суперпозиция произведений Бляшке есть произведение Бляшке, поэтому произведения Бляшке образуют подполугруппу  $\mathcal{B} \subset U(\mathbb{T})$ , которой соответствует подполугруппа  $\text{End}_{\mathcal{B}} C(\mathbb{T}) \subset \text{End } C(\mathbb{T})$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – замкнутая подалгебра  $\mathcal{T}$ , порожденная полиномами вида  $\sum_0^m c_n T^n$ ,  $c_n \in \mathbb{C}$ . Отображение  $T \mapsto z$  расширяется до изоморфизма  $\mathcal{A}$  и  $A(\mathbb{T})$ . Используя (4), определим на алгебре  $\mathcal{A}$  оператор

$$b_n(T) = e^{i\theta} \prod_1^n (T - z_i I)(I - \bar{z}_i T)^{-1} = e^{i\theta} \prod_1^n \left( \frac{T - z_i I}{I - \bar{z}_i T} \right), \quad |z_i| < 1. \quad (5)$$

#### Предложение 5.

1)  $b_n(T) \in \text{Iso } \mathcal{T}$  и  $\text{ind } b_n(T) = -\text{wn } b_n(z) = -n$ .

2) Отображение  $T \mapsto b_n(T)$  расширяется до эндоморфизма  $b_n : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ .

**Доказательство.** Из условия  $|z_i| < 1$  следует, что оператор  $(I - \bar{z}_i T)$  обратим. Для доказательства 1) достаточно показать, что  $\frac{T - zI}{I - \bar{z}T}$  является изометрией при  $|z| < 1$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} ((T - zI)(I - \bar{z}T)^{-1})^* (T - zI)(I - \bar{z}T)^{-1} &= ((I - \bar{z}T)^{-1})^* (T - zI)^* (T - zI)(I - \bar{z}T)^{-1} = \\ &= (T - zI)^* ((I - \bar{z}T)^{-1})^* (T - zI)(I - \bar{z}T)^{-1} = \\ &= (T^* - \bar{z}I)(I - zT^*)^{-1} (I - zT^*) V (I - \bar{z}T)^{-1} = \\ &= (T^* - \bar{z}I) T (I - \bar{z}T)^{-1} = (I - \bar{z}T)(I - \bar{z}T)^{-1} = I. \end{aligned}$$

Утверждение 2) сразу следует из леммы 2.  $\square$

**Определение 2.** Эндоморфизм  $b_n$ , определенный в предложении 5, назовем эндоморфизмом Бляшке. Автоморфизм  $b_1$  назовем автоморфизмом Мебиуса.

Очевидно, что все эндоморфизмы Бляшке образуют полугруппу, которую обозначим  $\text{End}_B \mathcal{T}$ . Эндоморфизмы Бляшке были предложены в [6], где авторы рассматривали индуктивные пределы алгебры Теплица под действием таких эндоморфизмов. Поскольку алгебры  $\mathcal{A}$  и  $A(\mathbb{T})$  изоморфны, полугруппа  $\text{End}_B \mathcal{T}$  изоморфна полугруппе  $\text{End}_B C(\mathbb{T})$ .

### Теорема 6.

- 1) Пусть  $\alpha \in \text{End}_e \mathcal{T}$  и  $\alpha(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ . Тогда  $\alpha$  – эндоморфизм Бляшке.
- 2) Пусть  $\beta \in \text{End}_e \mathcal{T}$  – эндоморфизм,  $\mathcal{T}$ -эквивалентный некоторому эндоморфизму Бляшке  $b_n$ . Тогда найдется такая  $u \in \text{Cov}_n(\mathbb{T})$ , что  $\pi(\beta(T)) = u$ .
- 3) Любые два эндоморфизма Бляшке индекса  $n$  являются  $\mathcal{T}$ -эквивалентными с точностью до компактного возмущения.

**Доказательство.** Утверждение 1) следует из изоморфизма между  $\text{End}_B \mathcal{T}$  и  $\text{End}_B C(\mathbb{T})$ ; 2) следует из определения 1 и теоремы 4.

Действительно, если существует автоморфизм на алгебре Теплица, то существует и автоморфизм на  $C(\mathbb{T})$ , а произведение Бляшке  $b_n(z)$  есть  $n$ -листное накрывающее отображение.

Утверждение 3) следует из теоремы 5.  $\square$

На вопрос, когда два эндоморфизма Бляшке являются  $\mathcal{T}$ -эквивалентными, ответить сложнее. Очевидно, что  $b_n$  и  $d_n$   $\mathcal{T}$ -эквивалентны, если существует такой автоморфизм Мебиуса  $b_1 \in \text{Aut } A(\mathbb{T})$ , что  $b_1(b_n(z)) = d_n(z)$ . Условие существования такого автоморфизма дает классическая теорема Пика. Напомним, что если даны два набора точек  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  и  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ , то конечное произведение Бляшке  $b$  индекса не больше  $n$ ,  $b(z_i) = w_i$ , существует тогда и только тогда, когда квадратичная форма с коэффициентами из заданных наборов является положительно определенной, при этом случай  $n = 1$  возможен, когда определитель квадратичной формы равен 0, и ее ранг  $n - 1$ . Однако существуют автоморфизмы алгебры  $C(\mathbb{T})$  (соответственно, алгебры Теплица), которые не являются автоморфизмами Мебиуса. Если  $\alpha \in \text{Aut } \mathcal{T}$  и  $\alpha \notin \text{End}_B \mathcal{T}$ , то эндоморфизм  $\alpha \circ b_n$  будет  $\mathcal{T}$ -эквивалентен некоторому эндоморфизму Бляшке с точностью до компактного возмущения, но, вообще говоря, не обязан быть эндоморфизмом Бляшке.

#### 4. Эндоморфизмы, не сохраняющие единицу

В этом параграфе приведем некоторые соображения об эндоморфизмах, не сохраняющих единицу. Мы установим связь между такими эндоморфизмами и эндоморфизмами из  $\text{End}_e \mathcal{T}$ . В первую очередь заметим, что с каждой изометрией  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$  связан как минимум один не сохраняющий единицу эндоморфизм, а именно:  $\rho_V : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\rho_V(A) = VAV^*$ . Действительно,

$$\rho(I) = \rho(T^*T) = VT^*V^*VT^*V^* = VV^* = P,$$

где  $P$  – проектор меньше единицы конечной коразмерности. Образ  $\mathcal{T}$  под действием эндоморфизма  $\rho_V$  обозначим через  $\mathfrak{T}_V$ . Проектор  $P$  для  $\mathfrak{T}_V$  является единицей, для любого  $A \in \mathcal{T}$  имеем  $VAV^*VV^* = VAV^*$  и  $VV^*VAV^* = VAV^*$ . Рассмотрим

$$\rho(TT^*) = VTV^*VT^*V^* = VTT^*V^* = VT(VT)^* = Q,$$

где  $Q$  – проектор коразмерности на единицу больше, чем  $P$ . Таким образом, получим, что при эндоморфизме  $\rho_V$  образом  $T$  является частичная изометрия с начальным пространством  $PH^2$  и конечным пространством  $QH^2$ , причем  $PQ = QP = Q$ .

Рассмотрим теперь произвольный эндоморфизм  $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\rho(T) = W$ , где  $W$  – частичная изометрия с начальным проектором  $P$  и конечным проектором  $Q$ . Поскольку при таком эндоморфизме единица перейдет в  $P$ , то очевидно, что  $PQ = QP$ , и, более того,  $PA = AP$  для любого  $A \in \rho(\mathcal{T})$ . Напомним, что для того чтобы произведение  $VW$  двух частичных изометрий  $V$  и  $W$  было частичной изометрией, необходимо и достаточно, чтобы начальный проектор  $V^*V$  коммутировал с конечным проектором  $WW^*$  [7, Lemma 2]. Поэтому, если  $\rho$  – эндоморфизм, то  $W = \rho(T)$  – степенная (power) частичная изометрия, то есть для всех  $n > 0$   $W^n$  – частичная изометрия, и  $\{W^n(W^*)^n\} \cup \{(W^*)^nW^n\}$  – коммутирующее семейство проекторов. Для степенной частичной изометрии  $W$  существует аналог теоремы Уолда–фон Неймана [7, 8]. Для удобства читателя приведем ее формулировку.

**Теорема 7** (Халмош, Валлен). Пусть  $W$  – частичная изометрия на гильбертовом пространстве  $H$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  – ортогональные проекторы на  $\bigcap_{n=1}^{\infty} W^n H$  и  $\bigcap_{n=1}^{\infty} W^{*n} H$  соответственно. Тогда  $\mathcal{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{P}$  и подпространства  $H_u := \mathcal{P}\mathcal{Q}H$ ,  $H_s := (I - \mathcal{P})\mathcal{Q}H$ ;  $H_b := (I - \mathcal{Q})\mathcal{P}H$  и

$$H_p := \sum_{n=1}^p (W^{n-1}W^{*n-1} - W^nW^{*n})(W^{*p-n}W^{p-n} - W^{*p-n+1}W^{p-n+1})H \quad (6)$$

являются неприводимыми для  $W$  и  $W^*$ , и

$$H_u \oplus H_s \oplus H_b \oplus \left( \bigoplus_{p=1}^{\infty} H_p \right). \quad (7)$$

Кроме того, существуют такие гильбертовы пространства  $M_s, M_b$  и  $\{M_p : p \geq 1\}$  (возможно, нулевые), что сужение

- 1)  $W|_{H_u}$  унитарно;
- 2)  $W|_{H_s}$  унитарно эквивалентно  $S \otimes I$  на  $l^2(\mathbb{N}) \otimes M_s$ ;
- 3)  $W|_{H_b}$  унитарно эквивалентно  $S^* \otimes I$  на  $l^2(\mathbb{N}) \otimes M_b$ ;
- 4)  $W|_{H_p}$  унитарно эквивалентно  $J_p \otimes I$  на  $\mathbb{C}^p \otimes M_p$ .

Здесь  $S$  и  $S^*$  – операторы правого и левого сдвига,  $J_p$  – оператор усеченного сдвига, а пространства  $M_s$ ,  $M_b$  и  $M_p$  единственны с точностью до изоморфизма и определяются своими размерностями.

**Предложение 6.** Пусть частичная изометрия  $W$  является образом  $T$  при некотором эндоморфизме. Тогда

- 1) В разложении (7) пространства  $\bigoplus_{p=1}^{\infty} H_p$  и  $H_b$  нулевые,  $H^2 = H_u \oplus H_s$ .
- 2) Сужение  $W$  на подпространство  $H_s$  унитарно эквивалентно  $S \otimes 1$  на  $l^2(\mathbb{N}) \otimes M_s$ , где  $\dim M_s = \dim (P - Q)H^2$ .

**Доказательство.** Имеем  $\rho(T^{*n}T^n) = W^{*n}W^n = W^*W$ . Таким образом, для любой частичной изометрии  $W^n$  начальное пространство совпадает с начальным пространством  $W$ , откуда следует, что в разложении  $W$  не может быть оператора усеченного сдвига.

Действительно, из (6) сразу получим  $H_p = 0$ . Аналогично не может быть и ко-изометрии, поскольку все функции из  $QH^2$  должны одновременно принадлежать и  $PH^2$ . Действительно, проекторы  $\{W^nW^{*n}\}$  на подпространство  $W^nH^2$  в сильной операторной топологии сходятся к проектору  $P$  на  $\bigcap_{n=1}^{\infty} W^nH$  и  $W^{*n}W^n \rightarrow Q$  [8], [9, Corollary 2.5.7]. Но  $W^{*n}W^n = P$  для всех  $n$ , поэтому  $Q = P$  и  $(I - Q)P = (I - P)P = P - P = 0$ , так как  $P$  коммутирует с любым проектором  $W^nW^{*n}$ , значит, и с  $P$ .

Доказательство 2) приведено в [8, Lemma 2.2]. Заметим, что  $P - Q = \rho(T^*T - TT^*)$ , то есть  $P - Q$  является образом одномерного проектора на  $z^0$ .  $\square$

Таким образом,  $W$  является оператором Фредгольма с индексом  $-\dim(P - Q)H^2$ . Обозначим коразмерности  $PH^2$  и  $QH^2$  через  $d_P$  и  $d_Q$  соответственно, тогда  $\text{ind } W = d_P - d_Q$ . Заметим, что конечномерная унитарная часть у  $W$  существовать может, но частичных изометрий с бесконечномерной унитарной частью в алгебре Теплица не существует.

**Теорема 8.** Пусть  $W \in \mathcal{T}$  – частичная изометрия. Для того чтобы существовал эндоморфизм  $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\rho(T) = W$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали такой проектор  $P$  и  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$ , что  $W = VP$ , причем  $PW = WP$ .

**Доказательство.** Необходимость сразу следует из предложения 6. Если  $W$  – образ  $T$  под действием эндоморфизма, то  $P$  – начальный проектор  $W$ , и поскольку  $d_P$  конечна, то найдется изометрия  $V = W + K$ , где  $K$  – компактный оператор. Пусть теперь  $W = VP$ . Так как  $P$  коммутирует с  $W$  и  $W^*$ , то получим

$$\begin{aligned} W^{*n}W^n &= (PV^*)^n(VP)^n = (PV^*)^{n-1}PV^*VP(VP)^{n-1} = \\ &= (PV^*)^{n-1}P(VP)^{-1} = (PV^*)^{n-1}(VP)^{-1}P = \dots = P, \end{aligned}$$

то есть для любой степени  $W^n$  начальным проектором остается  $P$ , поэтому в разложении  $W$  отсутствует не только коизометрия, но и усеченный сдвиг, и  $W$  удовлетворяет условиям предложения 6. Таким образом, поскольку  $PVP = VP$ , то оператор  $VP$  на  $PH^2$  является неунитарной изометрией.

Определим гомоморфизм  $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{I}_{VP}$ ,  $\rho(T) = VP$ , здесь  $\mathfrak{I}_{VP}$  –  $C^*$ -алгебра, порожденная оператором  $VP$  на  $PH^2$ . По теореме Кобурна  $\mathfrak{I}_{VP}$  канонически изоморфна  $\mathcal{T}$ , и поскольку  $\mathfrak{I}_{VP} \subsetneq \mathcal{T}$ , получим эндоморфизм  $\rho : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ .  $\square$

Заметим, что если  $Q$  – конечный проектор  $VP$ , то образом одномерного проектора  $T^*T - TT^*$  является  $P - Q$  и образом одномерного проектора  $T^{n-1}T^{*n-1} - T^nT^{*n}$  является  $Q_{n-1} - Q_n$ , где  $Q_k$  – конечный проектор частичной изометрии  $W^k$ . Из теоремы 8 и леммы 2 получим

**Следствие 1.** *Все инъективные эндоморфизмы алгебры Теплица порождаются частичными изометриями вида  $VP$ , причем  $PVP = VP$ , где  $V \in \text{Iso } \mathcal{T}$  и  $P$  – ортогональный проектор. Если  $P = I$ , то соответствующий эндоморфизм сохраняет единицу, если  $P < I$ , то единица переходит в проектор  $P$ . Все эндоморфизмы  $\alpha \in \text{End } \mathcal{T}$  определяются как суперпозиция  $i \circ \tau$ , где  $\tau : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{T}_{VP}$  – канонический изоморфизм и  $i : \mathfrak{T}_{VP} \hookrightarrow \mathcal{T}$  – вложение.*

В частности,  $\rho_V(T) = VTV^* = VTV^*VV^*$ , порождающая эндоморфизм  $\rho_V$  изометрия имеет вид  $VTV^* + K$ ,  $K$  – компактный оператор и  $K|_{PH} = 0$ , и соответствующий проектор  $P = VV^*$ . Если  $V = T$ , то  $\rho(T) = TTT^* = TP$  и  $\rho_T(\mathcal{T})$  есть алгебра Теплица, порожденная оператором  $T'$ ,  $T'z^n = z^{n+1}$  при  $n \neq 0$  и  $T'z^0 = 0$ . Можно также рассмотреть и эндоморфизм  $T \mapsto W = VT^nV^*$ , тогда  $W = V'P$ , где  $P = VV^*$  и  $V' = VT^nV^* + K$ . Если при эндоморфизме  $\rho_V$  образом одномерного проектора является одномерный проектор, то при эндоморфизме  $T \mapsto VT^nV^*$  одномерный проектор переходит в проектор ранга  $n$ .

**Теорема 9.** *Полугруппа инъективных эндоморфизмов является градуированной по мультипликативной полугруппе  $\mathbb{N}$ , то есть  $\text{End } \mathcal{T} = \bigcup \text{End}_n \mathcal{T}$ , причем*

- 1)  $\text{End}_1 \mathcal{T}$  – полугруппа;
- 2)  $\text{End}_m \mathcal{T} \star \text{End}_n \mathcal{T} \subset \text{End}_{mn} \mathcal{T}$ ;
- 3)  $\text{End}_m \mathcal{T} \cap \text{End}_n \mathcal{T} = \emptyset$ ,  $m \neq n$ ,

и существует такой полугрупповой сюръективный гомоморфизм

$$\gamma : \text{End } \mathcal{T} \rightarrow \text{End}_+ C(\mathbb{T}),$$

что  $\gamma(\text{End}_n \mathcal{T}) = \text{End}_n C(\mathbb{T})$ .

**Доказательство.** Из предложения 6 и теоремы 8 следует, что можно определить индекс для любого  $\alpha \in \text{End } \mathcal{T}$ ,  $\text{ind } \alpha := \text{ind } \alpha(T)$ . Если  $\alpha(T) = W$  – частичная изометрия с начальным и конечным проекторами  $P$  и  $Q$ , то  $\text{ind } \alpha = d_P - d_Q$  и  $\text{End}_n \mathcal{T} = \{\alpha \in \text{End } \mathcal{T} : \text{ind } \alpha = -n\}$ . Также очевидно, что если  $W = VP$ , то  $\pi(W) = \pi(V)$ , то есть эндоморфизм  $T \mapsto W$  является компактным возмущением эндоморфизма  $T \mapsto V$ .  $\square$

### Литература

1. Coburn L.A. The  $C^*$ -algebra generated by an isometry I // Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73, No 5. P. 722–726.
2. van Kampen E.R. On almost periodic functions of constant absolute value // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, No 1. P. 3–6. doi: 10.1112/jlms/s1-12.45.3.
3. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы // Математика в монографиях. Основная серия. Кн. III / Под. ред. С.Н. Бернштейна, И.М. Виноградова, А.Н. Колмогорова, Л.А. Люстерника, А.И. Плеснера, В.А. Тартаковского, Н.И. Чеботарева. М., Л.: ГОНТИ НКТП СССР, 1938. 316 с.
4. Murphy G.J.  $C^*$ -Algebras and Operator Theory. Acad. Press, 1990. 296 p. doi: 10.1016/C2009-0-22289-6.

5. *Douglas R.G.* Banach Algebra Techniques in Operator Theory. 2nd ed. Ser.: Graduate Texts in Mathematics. N. Y., Springer New York, 1998. xvi, 198 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1656-8.
6. *Grigoryan T.A., Kuznetsova A.Yu.* Blaschke  $C^*$ -algebras // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 4. P. 631–636. doi: 10.1134/S1995080220040113.
7. *Halmos P.R., Wallen L.J.* Powers of partial isometries // J. Math. Mech. 1970. V. 19, No 8. P. 657–663.
8. *an Huef A., Raeburn I., Tolich I.* Structure theorems for star-commuting power partial isometries // Linear Algebra Its Appl. 2015. V. 481. P. 107–114. doi: 10.1016/j.laa.2015.04.024.
9. *Kadison R.V., Ringrose J.R.* Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. V. I: Elementary theory. Ser.: Graduate Studies in Mathematics. V. 15. Am. Math. Soc., 1997. 398 p.

Поступила в редакцию 26.11.2022  
Принята к публикации 19.04.2023

**Григорян Сурен Аршакович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики

Казанский государственный энергетический университет  
ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия  
E-mail: *gsuren@inbox.ru*

**Кузнецова Алла Юрьевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории относительности и гравитации, институт физики

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия  
E-mail: *alla.kuznetsova@gmail.com*

ISSN 2541–7746 (Print)  
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 35–48

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.35-48

### Endomorphisms of the Toeplitz Algebra

*S.A. Grigoryan<sup>a\*</sup>, A.Yu. Kuznetsova<sup>b\*\*</sup>*

<sup>a</sup>Kazan State Power Engineering University, Kazan, 420066 Russia

<sup>b</sup>Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: <sup>\*</sup>*gsuren@inbox.ru*, <sup>\*\*</sup>*alla.kuznetsova@gmail.com*

Received November 26, 2022; Accepted April 19, 2023

### Abstract

This article describes all injective endomorphisms of the classical Toeplitz algebra. Their connection with endomorphisms of the algebra of continuous functions on the unit circle and with coverings over the unit circle was considered. It was shown that each non-unitary isometry  $V$  in the Toeplitz algebra determines the identity preserving endomorphism, as well as the class of its compact perturbations, i.e., identity non-preserving endomorphisms, defined by partial isometries  $\{VP\}$ , where  $P$  is a projection of finite codimension. The notions of  $\mathcal{T}$ -equivalence of endomorphisms and  $\mathcal{T}$ -equivalence up to a compact perturbation were introduced. An example was provided wherein the isometries are unitarily equivalent but the corresponding endomorphisms fall into different equivalence classes. Of all endomorphisms, the ones belonging to the class of Blaschke endomorphisms, which are analogous to endomorphisms of the disc-algebra and generate unbranched coverings over the unit circle, were singled out.

**Keywords:**  $C^*$ -algebra, Toeplitz algebra, endomorphism, automorphism, finite Blaschke product, Fredholm operator, partial isometry

### References

1. Coburn L.A. The  $C^*$ -algebra generated by an isometry I. *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, vol. 73, no. 5, pp. 722–726.
2. van Kampen E.R. On almost periodic functions of constant absolute value. *J. London Math. Soc.*, 1937, vol. 12, no. 1, pp. 3–6. doi: 10.1112/jlms/s1-12.45.3.
3. Pontryagin L.S. Continuous groups. In: Bernshtein S.N., Vinogradov I.M., Kolmogorov A.N., Lyusternik L.A., Plesner A.I., Tartakovskii V.A., Chebotarev N.I. (Eds.) *Mathematics in Monographs*. Basic Ser. Book III. Moscow, Leningrad, GONTI NKTP SSSR, 1938. 316 p. (In Russian)
4. Murphy G.J.  *$C^*$ -Algebras and Operator Theory*. Acad. Press, 1990. 296 p. doi: 10.1016/C2009-0-22289-6.
5. Douglas R.G. *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*. 2nd ed. Ser.: Graduate Texts in Mathematics. New York, Springer New York, 1998. xvi, 198 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1656-8.
6. Grigoryan T.A., Kuznetsova A.Yu. Blaschke  $C^*$ -algebras. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 631–636. doi: 10.1134/S1995080220040113.
7. Halmos P.R., Wallen L.J. Powers of partial isometries. *J. Math. Mech.*, 1970, vol. 19, no. 8, pp. 657–663.
8. an Huef A., Raeburn I., Tolich I. Structure theorems for star-commuting power partial isometries. *Linear Algebra Its Appl.*, 2015, vol. 481, pp. 107–114. doi: 10.1016/j.laa.2015.04.024.
9. Kadison R.V., Ringrose J.R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*. Vol. I: Elementary theory. Ser.: Graduate Studies in Mathematics. Vol. 15. Am. Math. Soc., 1997. 398 p.

---

⟨ **Для цитирования:** Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. Эндоморфизмы алгебры Тейлора // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 35–48. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.35-48. ⟩

⟨ **For citation:** Grigoryan S.A., Kuznetsova A.Yu. Endomorphisms of the Toeplitz algebra. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 35–48. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.35-48. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67

**ВАРИАТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ  
ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ  
С РЕАЛИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ МКЭ**

*Ю. В. Клочков<sup>1</sup>, А. П. Николаев<sup>1</sup>, О. В. Вахнина<sup>1</sup>,  
Т. А. Соболевская<sup>1</sup>, А. Ш. Джабраилов<sup>1</sup>, М. Ю. Клочков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Волгоградский государственный аграрный университет,  
г. Волгоград, 400002, Россия*

<sup>2</sup>*Волгоградский государственный технический университет,  
г. Волгоград, 400005, Россия*

**Аннотация**

Представлен алгоритм конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния оболочки в форме трехосного эллипсоида с вариативной параметризацией его срединной поверхности. В качестве элемента дискретизации выбран четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с узловыми неизвестными в виде перемещений и их первых производных по криволинейным координатам.

Реализованы два варианта аппроксимации перемещений через соответствующие узловые значения. В первом варианте известные аппроксимирующие функции применены для каждой компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через узловые значения этой же компоненты. Во втором варианте указанные аппроксимирующие выражения использованы непосредственно для выражения вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через векторные неизвестные узловых точек. После координатных преобразований каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента была выражена через узловые значения всех составляющих узловых неизвестных. Кроме того, в этих аппроксимирующих выражениях искомых перемещений внутренней точки конечного элемента содержатся параметры криволинейной системы координат, применяемой в расчете.

Высокая эффективность разработанного алгоритма подтверждена вычислительными экспериментами.

**Ключевые слова:** оболочка со срединной поверхностью в форме эллипсоида, параметризация поверхности, конечно-элементная модель, инвариантная интерполяция искоемых величин

**Введение**

Развитие постиндустриальной цивилизации характеризуется широким внедрением в техносферную среду тонкостенных объектов в форме оболочек и их фрагментов. Благодаря своей криволинейной поверхности оболочечные конструкции обладают гораздо меньшей, по сравнению с другими типами конструкций, материалоёмкостью, достаточной устойчивостью и вполне высокой несущей способностью. Расчеты на прочность и устойчивость оболочечных конструкций по классическим

теориям, основанным на гипотезах Кирхгофа–Лява или С.П. Тимошенко [1–4], сводятся к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных, что не совсем удобно в случаях сложной геометрии поверхностей. Поэтому в настоящее время в приоритете находятся численные методы исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) объектов из оболочек и их фрагментов [5–9].

Лидирующие позиции среди численных методов анализа НДС оболочечных объектов техносферы в данный момент занимает метод конечных элементов (МКЭ), на основе которого созданы широко распространенные программные комплексы, такие как Лира, ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и многие другие. Однако конечно-элементные модели, заложенные в основу всех вышеперечисленных комплексов, базируются на стандартной для МКЭ интерполяционной процедуре отдельных компонент вектора перемещения через узловые значения этих же самых компонент. Сказанное было реализовано: при анализе упругого деформирования оболочек при использовании треугольного конечного элемента с корректирующими множителями Лагранжа [10, 11]; определении НДС оболочек в условиях упругопластического деформирования [12, 13]; при конечно-элементном анализе трехмерных упругих конструкций и оболочек из композитных материалов [14–17]; динамическом конечно-элементном анализе [18–21]; определении НДС тонкостенных конструкций при больших деформациях и поворотах нормалей [22–24]; расчетах тонкостенных конструкций с использованием полигональных элементов [25–29]; в методе виртуальных элементов с полиномиальными сетками [30, 31].

В перечисленных выше работах использована аппроксимация непосредственно отдельных компонент вектора перемещения, вполне адекватная при применении декартовой системы координат, а также при расчете пологих оболочек. В случаях численного анализа НДС конструкций из оболочек и их фрагментов гораздо удобнее использовать криволинейные координаты, решая при этом вопросы оптимальной параметризации поверхности исследуемых объектов. Однако при использовании криволинейных систем координат в конечно-элементных моделях необходимо учитывать проблему смещения конечного элемента как твердого тела.

Такие исследования для оболочек вращения выполнены в [6]. Напряженно-деформированные состояния оболочек с поперечными сечениями иных форм не рассматривались.

Целью настоящей работы является разработка конечно-элементного алгоритма с векторной формой интерполяции искомых величин для определения НДС эллипсоидальной оболочки при различных вариантах параметризации ее срединной поверхности.

## 1. Материалы и методы. Параметризация поверхности трехосного эллипсоида

Поверхность трехосного эллипсоида может быть задана радиус-вектором следующего вида [32]

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + r(x, \varphi) \sin \varphi \vec{j} + r(x, \varphi) \cos \varphi \vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $\varphi$  – полярный угол, отсчитываемый от оси  $Oz$  против хода часовой стрелки в плоскости перпендикулярной оси  $Ox$  поперечного сечения эллипсоида. Функция  $r(x, \varphi)$ , входящая в (1.1), имеет следующую структуру

$$r(x, \varphi) = \left( bc / \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi} \right) \sqrt{1 - (x/a)^2}, \quad (1.2)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – параметры трехосного эллипсоида, соответствующие длинам его полуосей вдоль координатных осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

Используя формулы дифференциальной геометрии [33], можно получить векторы локального базиса точки поверхности эллипсоида и производные этих векторов по криволинейным координатам  $x$  и  $\varphi$

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\varphi}^0; \quad \vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / |\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|; \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\rho,x}^0 &= \Gamma_{\rho x}^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0 + b_{\rho x}^0 \vec{a}^0; & \vec{a}_{\rho,\varphi}^0 &= \Gamma_{\rho\varphi}^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0 + b_{\rho\varphi}^0 \vec{a}^0; \\ \vec{a}_{,x}^0 &= -b_x^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0; & \vec{a}_{,\varphi}^0 &= -b_\varphi^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\Gamma_{\rho x}^{0\alpha}$ ,  $\Gamma_{\rho\varphi}^{0\alpha}$  – символы Кристоффеля второго рода,  $b_{\rho x}^0$ ,  $b_{\rho\varphi}^0$ ,  $b_x^{0\alpha}$ ,  $b_\varphi^{0\alpha}$  – ковариантные и смешанные компоненты тензора кривизны, верхние и нижние индексы  $\alpha$ ,  $\rho$  последовательно принимают значения 1, 2, а нижние индексы  $x$ ,  $\varphi$  после запятой обозначают операцию дифференцирования по соответствующей координате.

Соотношения (1.3) и (1.4) могут быть представлены в матричном виде

$$\{\vec{a}^0\} = [c_\varphi^0] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,x}^0\} = [m_\varphi^0] \{\vec{a}^0\}; \quad \{\vec{a}_{,\varphi}^0\} = [n_\varphi^0] \{\vec{a}^0\}, \quad (1.5)$$

где  $\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}^0\}$ ;  $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$ ;  $\{\vec{a}_{,x}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^0 \vec{a}_{2,x}^0 \vec{a}_{,x}^0\}$ ;  $\{\vec{a}_{,\varphi}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,\varphi}^0 \vec{a}_{2,\varphi}^0 \vec{a}_{,\varphi}^0\}$ .

В качестве альтернативы формуле (1.1) для определения положения произвольной точки на поверхности трехосного эллипсоида предлагаем использовать следующую формулу для радиус-вектора

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + bf(x) \sin t \vec{j} + cf(x) \cos t \vec{k}, \quad (1.6)$$

где  $t$  – параметр эллипса, образованного сечением трехосного эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$  на расстоянии  $x$  от начала координат. Функция  $f(x)$ , входящая в (1.6), имеет вид

$$f(x) = \sqrt{1 - (x/a)^2}. \quad (1.7)$$

Векторы локального базиса точки  $M^0$ , находящиеся в соприкасающейся плоскости к поверхности трехосного эллипсоида, определяются дифференцированием (1.6) по  $x$  и  $t$

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + b \sin t f_{,x}(x) \vec{j} + c \cos t f_{,x}(x) \vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^0 = bf(x) \cos t \vec{j} - cf(x) \sin t \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $f_{,x}(x) = -\frac{x}{a^2 \sqrt{1 - (x/a)^2}}$ .

Орт нормали к поверхности эллипсоида в точке  $M^0$  определится по формуле

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0},$$

где  $a^0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0) (\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$ .

Производные базисных векторов определяются матричными выражениями

$$\{\vec{a}_{,x}^0\} = [m_t^0] \{\vec{a}^0\} \quad \{\vec{a}_{,t}^0\} = [n_t^0] \{\vec{a}^0\}. \quad (1.9)$$

После приложения к оболочке заданной поверхностной нагрузки точка  $M^0$  переместится в точку  $M$ , а точка  $M^{0\zeta}$ , отстоящая от точки  $M^0$  вдоль нормали на расстоянии  $\zeta$ , перейдет в точку  $M^\zeta$ .

Векторы перемещения точек  $M^0$  и  $M^{0\zeta}$  определяются по соответствующим формулам

$$\vec{v} = v^1 \vec{a}_1^0 + v^2 \vec{a}_2^0 + v \vec{a}^0; \quad \vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{a} - \vec{a}^0). \quad (1.10)$$

Орт нормали в точке  $M$ , входящий в (1.10), определится векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a} = \left( \left( \vec{R}^0 + \vec{v} \right)_{,x} \times \left( \vec{R}^0 + \vec{v} \right)_{,t} \right) / \sqrt{a}, \quad (1.11)$$

где  $a = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2 \approx a^0$  в линейной постановке.

Деформации эллипсоидальной оболочки (в линейной постановке) в точке  $M^\zeta$  могут быть получены по классическим формулам механики сплошной среды [34]

$$\varepsilon_{\rho\gamma} = 0.5 (g_{\rho\gamma} - g_{\rho\gamma}^0), \quad (1.12)$$

где  $g_{\rho\gamma} = \vec{g}_\rho \cdot \vec{g}_\gamma$ ;  $g_{\rho\gamma}^0 = \vec{g}_\rho^0 \cdot \vec{g}_\gamma^0$ .

Векторы базисов точек  $M^{0\zeta}$  и  $M^\zeta$ , входящие в (1.12), определяются дифференцированием соответствующих радиус-векторов этих точек

$$\vec{g}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^\zeta = \left( \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0 \right)_{,\rho}; \quad \vec{g}_\gamma = \vec{R}_{,\gamma}^\zeta = \left( \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V} \right)_{,\gamma}, \quad (1.13)$$

где нижние индексы  $\rho$  и  $\gamma$  после запятой обозначают операцию дифференцирования по криволинейным координатам  $x$ ,  $t$  или  $\varphi$ .

Деформации (1.12) могут быть определены матричным произведением

$$\{\varepsilon\} = [L] \{v\},$$

где  $\{\varepsilon\}^T = \left\{ \varepsilon_{xx}^\zeta \varepsilon_{tt}^\zeta 2\varepsilon_{xt}^\zeta \right\}$ ,  $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v\}$ ,  $[L]$  – матрица дифференциальных операторов.

## 2. Варианты интерполяционной процедуры в четырехузловом конечном элементе

При разработке алгоритма прочностного расчета эллипсоидальной оболочки в работе были реализованы два варианта интерполяционной процедуры. В первом варианте была использована стандартная для МКЭ интерполяция отдельных компонент вектора перемещения через узловые значения соответствующих компонент [12, 13]

$$\begin{aligned} q &= \{\chi\}^T \{q_u^L\}; \\ q_{,x} &= \left( \{\chi_{,\xi}\}^T \partial \xi / \partial x + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial \eta / \partial x \right) \{q_u^L\}; \\ q_{,t} &= \left( \{\chi_{,\xi}\}^T \partial \xi / \partial t + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial \eta / \partial t \right) \{q_u^L\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\{\chi\}^T$  – матрица-строка функций формы, а столбец  $\{q_u^L\}$  содержит узловые значения компоненты вектора перемещения  $q$  и производные этой же компоненты в локальной системе координат, например, для четырехугольного конечного элемента

$$\{q_u^L\}^T = \left\{ q^h q^p q^r q^s q_{,\xi}^h q_{,\xi}^p q_{,\xi}^r q_{,\xi}^s q_{,\eta}^h q_{,\eta}^p q_{,\eta}^r q_{,\eta}^s \right\};$$

$h$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $s$  – узлы конечного элемента, расположенные в вершинах четырехугольного фрагмента срединной поверхности эллипсоидальной оболочки.

В интерполяционном выражении (2.1) под  $q$  понимаем отдельную компоненту вектора перемещения точки  $M^0$  срединной поверхности оболочки  $v^1$ ,  $v^2$  или  $v$  (1.10).

Стандартная для МКЭ интерполяционная процедура отдельных компонент вектора перемещения, суть которой определена выражением (2.1), эффективна лишь при использовании прямоугольной декартовой системы координат. В случаях исследования НДС объектов с криволинейными поверхностями, к которым относится эллипсоидальная оболочка со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида, гораздо удобнее применять криволинейные системы координат как наиболее оптимальные с точки зрения их геометрической интерпретации. Но при использовании криволинейных систем координат эффективными будут интерполяционные выражения, в структуру которых входят параметры привлеченной в данном случае криволинейной системы координат, так как локальный базис криволинейной поверхности изменяется при переходе от точки к точке. Чтобы обеспечить выполнение вышеупомянутого критерия, необходимо использовать альтернативный стандартному векторный вариант интерполяционной процедуры, то есть применить интерполяционное выражение (2.1) не к отдельным компонентам вектора перемещения, а непосредственно к самому вектору перемещения как интерполируемому объекту [35, 36]

$$\vec{v} = \{\chi\}^T \{\vec{v}_u^L\}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } \{\vec{v}_u^L\}^T = \{\vec{v}^h \vec{v}^p \vec{v}^r \vec{v}^s \vec{v}_{,\xi}^h \vec{v}_{,\xi}^p \vec{v}_{,\xi}^r \vec{v}_{,\xi}^s \vec{v}_{,\eta}^h \vec{v}_{,\eta}^p \vec{v}_{,\eta}^r \vec{v}_{,\eta}^s\}.$$

Производные векторов перемещений по локальным координатам  $\xi$  и  $\eta$ , входящие в столбец  $\{\vec{v}_u^L\}$ , могут быть выражены через их производные в глобальной системе координат  $x$ ,  $t$  или  $\varphi$

$$\vec{v}_{,\xi}^\beta = \vec{v}_{,x}^\beta x_{,\xi}^\beta + \vec{v}_{,t}^\beta t_{,\xi}^\beta; \quad \vec{v}_{,\eta}^\beta = \vec{v}_{,x}^\beta x_{,\eta}^\beta + \vec{v}_{,t}^\beta t_{,\eta}^\beta, \quad (2.3)$$

где верхний индекс  $\beta$  обозначает узлы конечного элемента  $h$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $s$ .

На основании (2.3) можно скомпоновать матричную зависимость

$$\{\vec{v}_u^L\} = [D] \{\vec{v}_u^G\}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \{\vec{v}_u^G\}^T = \{\vec{v}^h \vec{v}^p \vec{v}^r \vec{v}^s \vec{v}_{,x}^h \vec{v}_{,x}^p \vec{v}_{,x}^r \vec{v}_{,x}^s \vec{v}_{,t}^h \vec{v}_{,t}^p \vec{v}_{,t}^r \vec{v}_{,t}^s\}.$$

Векторы перемещений узлов конечного элемента и их производные, входящие в  $\{\vec{v}_u^G\}$ , могут быть представлены компонентами, отнесенными к векторам узловых базисов

$$\vec{v}^\beta = v^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + v^\beta \vec{a}^{0\beta}; \quad \vec{v}_{,x}^\beta = l_x^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + l_x^\beta \vec{a}^{0\beta}; \quad \vec{v}_{,t}^\beta = l_t^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + l_t^\beta \vec{a}^{0\beta}, \quad (2.5)$$

где верхний индекс  $\alpha$  принимает значения 1, 2, а входящие в структуру (2.5) многочлены  $l_x^{\alpha\beta}$ ,  $l_x^\beta$ ,  $l_t^{\alpha\beta}$ ,  $l_t^\beta$  содержат компоненты узловых векторов перемещений и их производные по глобальным координатам  $x$  и  $t$ .

Интерполяционное выражение (2.2) с учетом (2.4) и (2.5) можно записать в виде

$$\vec{v} = \{\chi\}^T [D] \{\vec{v}_u^G\} = \{\chi\}^T [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \{w\}^T [\vec{A}] \{z_u\}, \quad (2.6)$$

$\begin{matrix} 1 \times 12 & 12 \times 12 & 12 \times 1 & 1 \times 12 & 12 \times 12 & 12 \times 36 & 36 \times 1 & 1 \times 12 & 12 \times 36 & 36 \times 1 \end{matrix}$

$$\text{где } \{z_u\}_{1 \times 36}^T = \{v^{1h} v^{2h} v^h v^{1p} v^{2p} v^p v^{1r} v^{2r} v^r v^{1s} v^{2s} v^s l_x^{1h} l_x^{2h} l_x^h \dots l_x^s l_t^{1h} l_t^{2h} l_t^h \dots l_t^s\}.$$

Входящие в структуру матрицы  $[\vec{A}]$  матрицы-строки  $\{\vec{a}^{0\beta}\}^T = \{\vec{a}_1^{0\beta} \vec{a}_2^{0\beta} \vec{a}^{0\beta}\}$ , содержащие базисные векторы узловых точек конечного элемента, могут быть выражены через базисные векторы внутренней точки конечного элемента

$$\{\vec{a}^{0\beta}\} = [c_t^{0\beta}] \{\vec{t}\} = [c_t^{0\beta}] [c_t^0]^{-1} \{\vec{a}^0\} = [d_t^{0\beta}] \{\vec{a}^0\}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) интерполяционное выражение (2.6) примет вид

$$\vec{v} = \left\{ w_1 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0h}]^T \left| w_2 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0p}]^T \left| w_3 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0r}]^T \left| w_4 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0s}]^T \right| \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. w_5 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0h}]^T \left| \dots \left| w_{12} \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0s}]^T \right| \right\} \{z_u\} \right. \right. \right. \quad (2.8)$$

Заменяв левую часть (2.8) матричным произведением, получим следующую интерполяционную зависимость

$$\begin{matrix} \{\vec{a}^0\}^T \\ 1 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{v\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \{\vec{a}^0\}^T \left\{ w_1 [d_t^{0h}]^T \left| w_2 [d_t^{0p}]^T \left| w_3 [d_t^{0r}]^T \left| \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. w_4 [d_t^{0s}]^T \left| w_5 [d_t^{0h}]^T \left| \dots \left| w_{12} [d_t^{0s}]^T \right| \right\} \{z_u\} \right. \right. \right. \quad (2.9)$$

где  $\{v\}^T = \{v^1 \ v^2 \ v\}$ .

Из (2.9) можно получить интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента

$$\begin{aligned} v^1 &= \{w_1 \{d_{11}^h \ d_{21}^h \ d_{31}^h\} | w_2 \{d_{11}^p \ d_{21}^p \ d_{31}^p\} | w_3 \{d_{11}^r \ d_{21}^r \ d_{31}^r\} | \\ &w_4 \{d_{11}^s \ d_{21}^s \ d_{31}^s\} | w_5 \{d_{11}^h \ d_{21}^h \ d_{31}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{11}^s \ d_{21}^s \ d_{31}^s\} \} \{z_u\}; \\ v^2 &= \{w_1 \{d_{12}^h \ d_{22}^h \ d_{32}^h\} | w_2 \{d_{12}^p \ d_{22}^p \ d_{32}^p\} | w_3 \{d_{12}^r \ d_{22}^r \ d_{32}^r\} | \\ &w_4 \{d_{12}^s \ d_{22}^s \ d_{32}^s\} | w_5 \{d_{12}^h \ d_{22}^h \ d_{32}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{12}^s \ d_{22}^s \ d_{32}^s\} \} \{z_u\}; \\ v &= \{w_1 \{d_{13}^h \ d_{23}^h \ d_{33}^h\} | w_2 \{d_{13}^p \ d_{23}^p \ d_{33}^p\} | w_3 \{d_{13}^r \ d_{23}^r \ d_{33}^r\} | \\ &w_4 \{d_{13}^s \ d_{23}^s \ d_{33}^s\} | w_5 \{d_{13}^h \ d_{23}^h \ d_{33}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{13}^s \ d_{23}^s \ d_{33}^s\} \} \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Применив операцию дифференцирования по глобальным координатам  $x$  и  $t$  к интерполяционному выражению (2.6), получим следующие зависимости

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= \left( \{\chi_{,\xi}\}^T \partial \xi / \partial x + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial \eta / \partial x \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \{w_x\}^T [\vec{A}] \{z_u\}; \\ \vec{v}_{,t} &= \left( \{\chi_{,\xi}\}^T \partial \xi / \partial t + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial \eta / \partial t \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \\ &= \{w_t\}^T [\vec{A}] \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Представив левые части (2.11) компонентами, отнесенными к базису точки, принадлежащей внутренней области конечного элемента, и учтя (2.7), можно записать выражения вида

$$\begin{aligned} l_x^1 \vec{a}_1^0 + l_x^2 \vec{a}_2^0 + l_x \vec{a}^0 &= \{\vec{a}^0\}^T \left\{ w_{x1} [d_t^{0h}]^T \left| w_{x2} [d_t^{0p}]^T \left| \right. \right. \right. \\ &w_{x3} [d_t^{0r}]^T \left| w_{x4} [d_t^{0s}]^T \left| \dots \left| w_{x12} [d_t^{0s}]^T \right| \right\} \{z_u\}; \\ l_t^1 \vec{a}_1^0 + l_t^2 \vec{a}_2^0 + l_t \vec{a}^0 &= \{\vec{a}^0\}^T \left\{ w_{t1} [d_t^{0h}]^T \left| w_{t2} [d_t^{0p}]^T \left| \right. \right. \right. \\ &w_{t3} [d_t^{0r}]^T \left| w_{t4} [d_t^{0s}]^T \left| \dots \left| w_{t12} [d_t^{0s}]^T \right| \right\} \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (2.12) могут быть получены интерполяционные зависимости для компонент производных вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента, например,

$$\begin{aligned} l_x = & \{w_{x1} \{d_{11}^h d_{21}^h d_{31}^h\} | w_{x2} \{d_{11}^p d_{21}^p d_{31}^p\} | w_{x3} \{d_{11}^r d_{21}^r d_{31}^r\} | \\ & w_{x4} \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\} | \dots | w_{x12} \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\}\} \{z_u\}; \\ l_t = & \{w_{t1} \{d_{13}^h d_{23}^h d_{33}^h\} | w_{t2} \{d_{13}^p d_{23}^p d_{33}^p\} | w_{t3} \{d_{13}^r d_{23}^r d_{33}^r\} | \\ & w_{t4} \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\} | \dots | w_{t12} \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\}\} \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интерполяционные выражения для компонент вторых производных вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента могут быть получены аналогичным образом из следующих равенств

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,xx} = & \left( \{\chi_{,\xi\xi}\}^T (\partial\xi/\partial x)^2 + \{\chi_{,\eta\eta}\}^T (\partial\eta/\partial x)^2 + 2\{\chi_{,\xi\eta}\}^T (\partial\xi/\partial x) (\partial\eta/\partial x) + \right. \\ & \left. + \{\chi_{,\xi}\}^T (\partial^2\xi/\partial x^2) + \{\chi_{,\eta}\}^T (\partial^2\eta/\partial x^2) \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \{w_{xx}\}^T [\vec{A}] \{z_u\}; \\ \vec{v}_{,tt} = & \left( \{\chi_{,\xi\xi}\}^T (\partial\xi/\partial t)^2 + \{\chi_{,\eta\eta}\}^T (\partial\eta/\partial t)^2 + 2\{\chi_{,\xi\eta}\}^T (\partial\xi/\partial t) (\partial\eta/\partial t) + \right. \\ & \left. + \{\chi_{,\xi}\}^T (\partial^2\xi/\partial t^2) + \{\chi_{,\eta}\}^T (\partial^2\eta/\partial t^2) \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \\ & = \{w_{tt}\}^T [\vec{A}] \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как следует из (2.10) и (2.13), каждая компонента вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента интерполируется через столбец  $\{z_u\}$ , в структуру которого входят узловые значения всех компонент вектора перемещения и их производные. Кроме того, интерполяционные выражения (2.10) и (2.13), в отличие от (2.1), содержат параметры используемой системы криволинейных координат.

Используя полученные интерполяционные выражения (2.10), (2.13), можно скомпоновать матричное соотношение между деформациями эллипсоидальной оболочки и искомыми узловыми неизвестными

$$\{\varepsilon\} = [L] \{z_u\}. \quad (2.15)$$

Интерполяционные зависимости (2.1), (2.10) и (2.13) были использованы при компоновке матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырехузлового конечного элемента, которые были сформированы путем минимизации функционала Лагранжа согласно общепринятым в МКЭ правилам [36, 37].

### 3. Пример расчета

Была решена задача по определению НДС эллипсоидальной оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида, загруженного в середине сосредоточенной силой  $P$  и имеющей на диаметрально противоположном конце срединного поперечного сечения шарнирную опору, препятствующую вертикальному смещению. В силу симметрии расчетной схемы была рассчитана 1/4 часть эллипсоидальной оболочки (рис. 1).

Были приняты следующие исходные данные: параметры поверхности оболочки в форме трехосного эллипсоида  $a = 1.3$  м;  $b = 0.9$  м;  $c = 0.225$  м; осевая координата  $x$  изменялась в пределах  $0 \leq x \leq 0.1$  м. Модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , величина сосредоточенной силы  $P = 2$  кН.

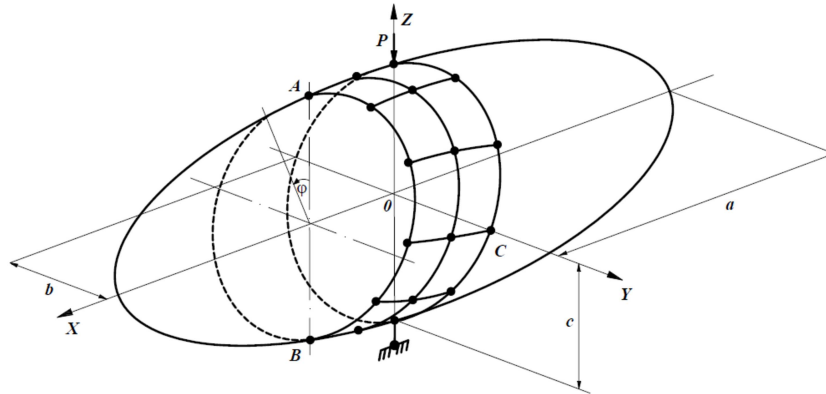


Рис. 1. Расчетная схема оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида

Вариативные расчеты были выполнены при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла  $\varphi$  (1.1)–(1.5) и параметра  $t$  эллипса поперечного сечения (1.6)–(1.9), а также при двух вариантах интерполяционной процедуры: стандартного для МКЭ варианта (2.1) и разработанного векторного способа интерполяционной процедуры (2.2)–(2.10).

Результаты вычислений представлены в табличной форме. Таблица 1 содержит значения нормальных напряжений в точках А и В концевого сечения, в точке С срединного сечения и прогиба в точке приложения силы  $P$  в зависимости от плотности сетки узлов при использовании геометрических соотношений с полярным углом  $\varphi$  и параметром  $t$  при реализации стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры (2.1).

Анализ данных таблицы 1 показал, что результаты, полученные при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла  $\varphi$ , существенно отличаются от результатов, полученных при использовании параметра  $t$ .

Вследствие симметрии расчетной схемы напряжения в точках А и В должны иметь попарно одинаковые значения. При использовании угловой координаты  $\varphi$  значения напряжений в указанных точках значительно отличаются друг от друга и даже имеют противоположные знаки, причем сгущение сетки узлов не приводит к улучшению результатов. В варианте, в котором в качестве криволинейной координаты применялся параметр  $t$ , различия в значениях напряжений в точках А и В уже не столь значительны и монотонно уменьшаются со сгущением сетки узлов. При сетке узлов  $91 \times 36$  результаты вычислений можно считать уже приемлемыми.

На основании данных таблицы 1 можно сделать вывод о том, что при расчете оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида необходимо пользоваться геометрическими соотношениями, базирующимися на использовании в качестве криволинейной координаты параметра  $t$  (1.6)–(1.9) при реализации стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры.

Результаты расчетов оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида при использовании векторного варианта интерполяционной процедуры представлены в таблице 2, структура которой идентична таблице 1. Анализ вычисленных значений напряжений, приведенных в таблице 2, показал, что они кардинальным образом отличаются от данных, представленных в таблице 1. При реализации разработанного векторного способа интерполяционной процедуры зна-

Табл. 1

Общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения

| Координаты<br>точек,<br>(м, рад)                                              | Напряжения<br>( $10^{-1}$ ,<br>МПа),<br>прогиб<br>(см) | 41x16   | 51x21   | Сетка узлов |         |         |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------|---------|-------------|---------|---------|
|                                                                               |                                                        |         |         | 61x26       | 81x31   | 91x36   |
| Вариант параметризации поверхности эллипсоида с угловой координатой $\varphi$ |                                                        |         |         |             |         |         |
| Точка приложения                                                              |                                                        |         |         |             |         |         |
| силы $P$<br>$x = 0.0$ ;<br>$\varphi = 0.0$ .                                  | $v$                                                    | -0.087  | -0.099  | -0.119      | -0.171  | -0.200  |
| Точка А<br>$x = 0.1$ ;<br>$\varphi = 0.0$ .                                   | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | 201.54  | 210.38  | 221.79      | 244.40  | 254.54  |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | -204.94 | -212.29 | -221.89     | -241.11 | -249.78 |
| Точка В<br>$x = 0.1$ ;<br>$\varphi = \pi$ .                                   | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | -15.59  | -22.71  | -22.29      | 2.46    | 25.53   |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | 14.23   | 22.85   | 24.38       | 2.97    | -18.84  |
| Точка С<br>$x = 0.0$ ;<br>$\varphi = \pi/2$ .                                 | $\sigma_{xx}^{in}$                                     | -38.26  | -37.79  | 0.06        | 66.39   | 82.89   |
|                                                                               | $\sigma_{xx}^{out}$                                    | -112.09 | -113.86 | -130.19     | -136.92 | -129.88 |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | -121.99 | -115.87 | 14.55       | 240.30  | 295.94  |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | -369.47 | -367.18 | -413.11     | -423.42 | -396.03 |
| Вариант параметризации поверхности эллипсоида с параметром $t$                |                                                        |         |         |             |         |         |
| Точка приложения                                                              |                                                        |         |         |             |         |         |
| силы $P$<br>$x = 0.0$ ;<br>$t = 0.0$ .                                        | $v$                                                    | -0.420  | -0.471  | -0.490      | -0.502  | -0.504  |
| Точка А<br>$x = 0.1$ ;<br>$t = 0.0$ .                                         | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | 325.22  | 338.70  | 344.47      | 348.55  | 349.57  |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | -312.24 | -323.92 | -328.83     | -332.27 | -333.04 |
| Точка В<br>$x = 0.1$ ;<br>$t = \pi$ .                                         | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | 255.70  | 309.65  | 331.12      | 334.80  | 347.35  |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | -241.36 | -293.82 | -314.66     | -327.95 | -330.34 |
| Точка С<br>$x = 0.0$ ;<br>$t = \pi/2$ .                                       | $\sigma_{xx}^{in}$                                     | 0.04    | -59.64  | -90.95      | -114.32 | -118.44 |
|                                                                               | $\sigma_{xx}^{out}$                                    | -24.99  | 21.46   | 45.30       | 63.80   | 69.99   |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | 17.46   | -185.87 | -293.48     | -375.12 | -389.5  |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | -43.03  | 110.79  | 188.65      | 246.40  | 256.59  |

чения напряжений в точках А и В полностью совпадают между собой даже при редкой сетке узлов  $31 \times 11$  в обоих вариантах параметризации поверхности трехосного эллипсоида. Сопоставив между собой численные значения напряжений при использовании угловой координаты  $\varphi$  и параметра  $t$ , можно отметить, что различия между ними в точках А, В и С незначительны. В рассматриваемых точках можно констатировать абсолютную сходимость значений напряжений и прогиба со сгущением сетки узлов и практическое совпадение контролируемых параметров НДС в обоих вариантах параметризации поверхности эллипсоида при использовании разработанного способа векторной интерполяционной процедуры.

Проанализировав представленный табличный материал, можно сделать вывод о кардинальных и принципиальных преимуществах разработанной векторной формы интерполяционной процедуры искомых величин, позволяющей получать

Табл. 2

## Векторный вариант интерполяционной процедуры

| Координаты<br>точек,<br>(м, рад)                                              | Напряжения<br>( $10^{-1}$ ,<br>МПа),<br>прогиб<br>(см) | 31x11   | 41x16   | 51x21   | 61x26   | 81x31   |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
|                                                                               |                                                        |         |         |         |         |         |
| Вариант параметризации поверхности эллипсоида с угловой координатой $\varphi$ |                                                        |         |         |         |         |         |
| Точка приложения<br>силы $P$<br>$x = 0.0$ ;<br>$\varphi = 0.0$ .              | $v$                                                    | -0.506  | -0.507  | -0.507  | -0.507  | -0.507  |
| Точка А<br>$x = 0.1$ ;<br>$\varphi = 0.0$ .                                   | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | 341.32  | 342.57  | 343.10  | 343.38  | 343.28  |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | -325.16 | -326.21 | -326.61 | -326.79 | -326.69 |
| Точка В<br>$x = 0.1$ ;<br>$\varphi = \pi$ .                                   | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | 341.32  | 342.57  | 343.10  | 343.38  | 343.28  |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | -325.16 | -326.21 | -326.61 | -326.79 | -326.69 |
| Точка С<br>$x = 0.0$ ;<br>$\varphi = \pi/2$ .                                 | $\sigma_{xx}^{in}$                                     | -108.32 | -117.30 | -118.86 | -118.96 | -119.07 |
|                                                                               | $\sigma_{xx}^{out}$                                    | 78.62   | 72.89   | 69.14   | 67.36   | 66.11   |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$                         | -365.31 | -393.63 | -399.38 | -400.06 | -400.49 |
|                                                                               | $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$                        | 287.26  | 276.44  | 268.19  | 263.45  | 259.72  |
| Вариант параметризации поверхности эллипсоида с параметром $t$                |                                                        |         |         |         |         |         |
| Точка приложения<br>силы $P$<br>$x = 0.0$ ;<br>$t = 0.0$ .                    | $v$                                                    | -0.508  | -0.508  | -0.508  | -0.507  | -0.507  |
| Точка А<br>$x = 0.1$ ;<br>$t = 0.0$ .                                         | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | 352.10  | 349.82  | 349.24  | 349.53  | 350.23  |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | -337.50 | -334.10 | -333.02 | -332.47 | -333.36 |
| Точка В<br>$x = 0.1$ ;<br>$t = \pi$ .                                         | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | 352.10  | 349.82  | 349.24  | 349.53  | 350.23  |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | -337.50 | -334.10 | -333.02 | -332.97 | -333.36 |
| Точка С<br>$x = 0.0$ ;<br>$t = \pi/2$ .                                       | $\sigma_{xx}^{in}$                                     | -119.82 | -119.98 | -120.10 | -120.16 | -120.27 |
|                                                                               | $\sigma_{xx}^{out}$                                    | 70.00   | 70.22   | 70.20   | 70.12   | 70.52   |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{in}$                                     | -400.07 | -400.17 | -400.27 | -400.29 | -400.45 |
|                                                                               | $\sigma_{tt}^{out}$                                    | 260.31  | 261.60  | 262.17  | 262.45  | 263.00  |

корректные значения прочностных параметров НДС уже при редкой сетке узлов дискретизации при различных вариантах параметризации поверхности оболочки в форме трехосного эллипсоида.

Результаты расчетов, представленные в таблицах 1 и 2, также отражены в виде графиков на рисунках 2 и 3, которые показывают характер изменения значений нормальных напряжений на внутренней  $\sigma^{in}$  и внешней  $\sigma^{out}$  поверхностях в точках А и В эллипсоида в зависимости от количества элементов дискретизации  $N$ , на которые разбивался рассчитываемый фрагмент эллипсоидальной оболочки.

На рисунке 2 представлены графики изменения значений напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла  $\varphi$ , полученные при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения и их производных.

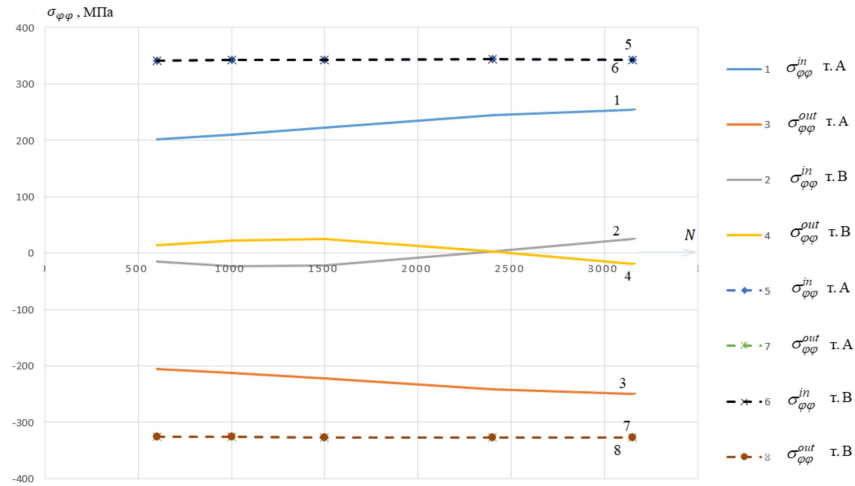


Рис. 2. Значения напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры

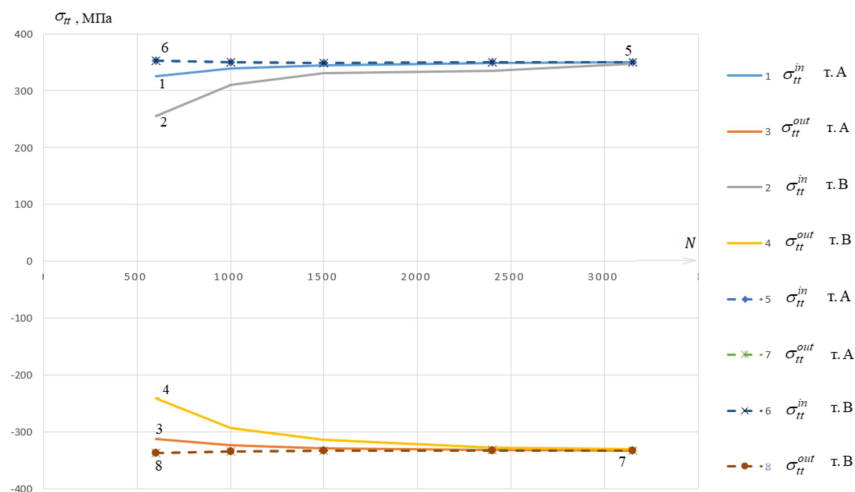


Рис. 3. Значения напряжений  $\sigma_{tt}$  при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры

Сплошными линиями 1, 2, а также 3, 4 показаны изменения напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$  в точках А и В соответственно при стандартной интерполяции искомых неизвестных. На рисунке 2 видно, насколько далеко друг от друга располагаются линии 1, 2 и 3, 4, которые должны совпадать в соответствии с выбранной расчетной схемой. Указанное совпадение можно наблюдать при реализации в разработанном алгоритме векторного способа интерполяции искомых величин. Пунктирные линии графиков 5, 6 и 7, 8, отражающие изменения  $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$  в точках А и В, полностью накладываются друг на друга, что и должно быть при наличии вертикальной плоскости симметрии в рассчитываемом трехосном эллипсоиде.

На рисунке 3 представлены аналогичные рисунку 2 графики изменения значений напряжений  $\sigma_{tt}$  при использовании в качестве криволинейной координаты параметра  $t$  эллипса поперечного сечения. Как видно из рисунка 3, картина изменения значений напряжений существенно отличается от графиков, представлен-

ных на рисунке 2. Численные значения напряжений в точках А и В на внутренней  $\sigma_{tt}^{in}$  (кривые 1, 2) и внешней  $\sigma_{tt}^{out}$  (кривые 3, 4) поверхностях достаточно быстро сближаются по мере сгущения сетки элементов дискретизации при реализации стандартной интерполяционной процедуры. При использовании векторного варианта интерполяции искомых неизвестных также, как и на рисунке 2, наблюдается идеальное совпадение значений напряжений в точках А и В как на внутренней (кривые 5, 6), так и на внешней (кривые 7, 8) поверхностях эллипсоида. Данный факт подтверждает высокую эффективность векторного способа интерполяции компонент вектора перемещения и их производных в задачах конечно-элементного анализа оболочек при использовании криволинейных систем координат. Следует также подчеркнуть, что векторный способ интерполяции искомых величин обладает высокой эффективностью при различных видах используемых криволинейных систем координат, так как приводит к возможности учета в аппроксимирующих выражениях параметров используемых криволинейных систем координат.

#### 4. Заключение

На основе результатов проделанной работы можно сделать вывод, что при использовании криволинейной системы координат с реализацией МКЭ в формулировке метода перемещений известные функции формы следует применять не к отдельным компонентам вектора перемещений, а непосредственно к векторной величине перемещения внутренней точки конечного элемента, выразив его через векторные величины узловых точек. Для получения аппроксимирующих выражений для отдельных компонент вектора перемещения и его производных следует выполнить координатные преобразования, заключающиеся в использовании матричных выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента. Полученные аппроксимирующие выражения приводят к решению проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела.

#### Литература

1. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1951. 334 с.
2. Рикардс Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Знание, 1988. 283 с.
3. Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстик П.Е., Черных К.Ф., Шамина В.А. Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2002. 388 с.
4. Пиккуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 535 с.
5. Storozhuk E.A., Maksimuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear elastic state of a composite cylindrical shell with a rectangular hole // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55, No 5. P. 504–514. doi: 10.1007/s10778-019-00972-0.
6. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements // J. Mach. Manuf. Reliab. 2016. V. 45, No 1. P. 51–58. doi: 10.3103/S1052618816010076.
7. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, No 5. P. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
8. Ubaydullov M.N., Serazutdinov M.N. Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load // Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). Vol. 1 / Radionov A.A., Gasiyarov V.R.

- (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2022. P. 332–340. doi: 10.1007/978-3-030-85233-7\_40.
9. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 9. P. 2263–2271. doi: 10.1134/S1995080221090316.
  10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers // Moscow Univ. Mech. Bull. 2016. V. 71, No 5. P. 114–117. doi: 10.3103/S0027133016050034.
  11. Storozhuk E.A., Maksimuk V.A., Yatsura A.V. Stress–strain state near a hole in a shear-compliant composite cylindrical shell with elliptical cross-section // Int. Appl. Mech. 2018. V. 54, No 5. P. 559–567. doi: 10.1007/s10778-018-0909-8.
  12. Golovanov A.I. Numerical Modeling of large elastoplastic strains in terms of principal stretches. I. Kinematics of elastoplastic strains // Russ. Aeronaut. 2010. V. 53, No 2. P. 161–166. doi: 10.3103/S1068799810020078.
  13. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: Integration algorithm and numerical examples // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, No 9. P. 1478–1483. doi: 10.1134/S1995080218090056.
  14. Jebur A.K., Hassoun E.O., Abraham H.A., Khayrullin F.S., Sakhibiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers // J. Appl. Eng. Sci. 2020. V. 18, No 1. P. 110–113. doi: 10.5937/jaes18-24130.
  15. Kayumov R., Sulejmanov A., Strakhov D. Model of degradation of composite materials of building structure's load-bearing elements // Proceedings of STCCE 2021: Selected Papers / Vatin N. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Civil Engineering. Vol.169. Cham: Springer, 2021. P. 239–249. doi: 10.1007/978-3-030-80103-8\_26.
  16. Sartorato M., de Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // Compos. Struct. 2015. V. 127. P. 185–198. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.03.009.
  17. Shiqiang L., Guoxing L., Zhihua W., Longmao Z., Guiying W. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected to internal blast loading // Int. J. Mech. Sci. 2015. V. 96–97. P. 1–12. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011.
  18. He X. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints // Int. J. Adhes. Adhes. 2014. V. 48. P. 59–66. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017.
  19. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, No 9, art. 35. doi: 10.1007/s00033-016-0623-5.
  20. Paznanova S.L., Vasilev G.P., Dineva P.S., Manolis G.D. Dynamic analysis of nano-heterogeneities in a finite-sized solid by boundary and finite element methods // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 80. P. 1–18. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.016.
  21. Lei Z., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: Serendipity basis and modified reduced quadrature // Eur. J. Mech. – A/Solids. 2015. V. 54. P. 105–119. doi: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.010.
  22. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // Comput. Mech. 2015. V. 56, No 1. P. 87–95. doi: 10.1007/s00466-015-1158-x.
  23. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Syguyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // J. Comput. Nonlinear Dyn. 2015. V. 10, No 5, art. 051012. doi: 10.1115/1.4028657.

- 
24. *Ren H.* Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells with large deformations and large rotations // *J. Comput. Nonlinear Dyn.* – 2015. – V. 10, No 5, art. 051018. – doi: 10.1115/1.4030212.
  25. *Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H.* A paradigm for higher-order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2016. V. 306. P. 216–251. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.025.
  26. *Bishop J.E.* A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2014. V. 97, No 1. P. 1–31. doi: 10.1002/nme.4562.
  27. *Talischi C., Pereira A., Menezes I.F.M., Paulino G.H.* Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2015. V. 102, No 3–4. P. 728–747. doi: 10.1002/nme.4851.
  28. *Manzini G., Russo A., Sukumar N.* New perspective on polygonal and polyhedral finite element method // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2014. V. 24, No 8. P. 1665–1699. doi: 10.1142/S0218202514400065.
  29. *Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H.* On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. V. 282. P. 132–160. doi: 10.1016/j.cma.2014.05.005.
  30. *Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2015. V. 295. P. 327–346. doi: 10.1016/j.cma.2015.07.013.
  31. *Antonietti P.F., Beirão V.L., Scacchi S., Verani M.* A  $C^1$  virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // *SIAM J. Numer. Anal.* 2016. V. 54, No 1. P. 34–56. doi: 10.1137/15M1008117.
  32. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A.* Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements // *J. Appl. Ind. Math.* 2017. V. 11, No 4. P. 535–544. doi: 10.1134/S1990478917040111.
  33. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. Москва: Наука, 1974. 177 с.
  34. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Москва: Наука, 1976. 503 с.
  35. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.* Finit element model of pipeline discretization by prismatic elements // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2019. V. 698, No 6, art. 066012. doi: 10.1088/1757-899X/698/6/066012.
  36. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu.* A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements // *ARN J. Eng. Appl. Sci.* 2020. V. 15, No 13. P. 1472–1481.
  37. *Zucco G., Groh R.M.J., Madeo A., Weaver P.M.* Mixed shell element for static and buckling analysis of variable angle tow composite plates // *Compos. Struct.* 2016. V. 152. P. 324–338. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.030

Поступила в редакцию 31.10.2022

Принята к публикации 24.04.2023

---

**Клочков Юрий Васильевич**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет  
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия  
E-mail: *Klotchkov@bk.ru*

**Николаев Анатолий Петрович**, доктор технических наук, профессор кафедры механики инженерно-технологического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет  
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия  
E-mail: *anpetr40@yandex.ru*

**Вахнина Ольга Владимировна**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет  
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия  
E-mail: *ovahnina@bk.ru*

**Соболевская Татьяна Алексеевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет  
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия  
E-mail: *moonway13@rambler.ru*

**Джабраилов Арсен Шахназавович**, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет  
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия  
E-mail: *arsen82@yandex.ru*

**Клочков Михаил Юрьевич**, аспирант ВолГТУ

Волгоградский государственный технический университет  
просп. Ленина, д. 28, г. Волгоград, 400005, Россия  
E-mail: *m.klo4koff@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)  
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 49–67

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67

### Varying Parameterization of an Ellipsoidal Thin Shell with FEM-Based Implementation

*Yu. V. Klochkov<sup>a\*</sup>, A. P. Nikolaev<sup>a\*\*</sup>, O. V. Vakhnina<sup>a\*\*\*</sup>, T. A. Sobolevskaya<sup>a\*\*\*\*</sup>,  
A. Sh. Dzhabrailov<sup>a\*\*\*\*\*</sup>, M. Yu. Klochkov<sup>b\*\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup> Volgograd State Agrarian University, Volgograd, 400002 Russia

<sup>b</sup> Volgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia

E-mail: \**Klotchkov@bk.ru*, \*\**anpetr40@yandex.ru*, \*\*\**ovahnina@bk.ru*, \*\*\*\**moonway13@rambler.ru*,  
\*\*\*\*\**arsen82@yandex.ru*, \*\*\*\*\**m.klo4koff@yandex.ru*

Received October 31, 2022; Accepted April 24, 2023

### Abstract

This article describes an algorithm developed for the finite element analysis of the stress-strain state of a shell that takes the shape of a triaxial ellipsoid with varying parameterization of its mid-surface. A quadrangular fragment of the shell mid-surface with nodal unknowns in the form of displacements and their first derivatives along the curvilinear coordinates was used as the discretization element.

When approximating the displacements through the nodal values, two variants were considered. In the first variant, the known approximating functions were applied to each component of the displacement vector of the internal point of the finite element through the nodal values of the same component. In the second variant, the approximating expressions were used directly for the expression of the displacement vector of the internal point of the finite element through the vector unknowns of the nodal points. After the coordinate transformations, each component of the displacement vector of the internal point of the finite element was expressed through the nodal values of all components of the nodal unknowns. The approximating expressions of the required displacements of the internal point of the finite element also include the parameters of the curvilinear coordinate system used in the calculations.

The high efficiency of the developed algorithm was confirmed by the results of the numerical experiments.

**Keywords:** shell with ellipsoidal mid-surface, surface parameterization, finite element model, invariant interpolation of required quantities

### Figure Captions

Fig. 1. Design scheme of a shell with the mid-surface in the form of a triaxial ellipsoid.

Fig. 2. Values of stresses  $\sigma_{\varphi\varphi}$  during the realization of standard (curves 1–4) and vector (curves 5–8) variants of the interpolation procedure.

Fig. 3. Values of stresses  $\sigma_{tt}$  during the realization of standard (curves 1–4) and vector (curves 5–8) variants of the interpolation procedure.

### References

1. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Thin Shell Theory]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 1951. 334 p. (In Russian)
2. Rickards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [Finite Element Method in Shell and Plate Theory]. Riga, Zinatne, 1988. 283 p. (In Russian)
3. Kabrits S.A., Mikhailovskii E.I., Tovstik P.E., Chernykh K.F., Shamina V.A. *Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [General Nonlinear Theory of Elastic Shells]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 2002. 388 p. (In Russian)
4. Pikul' V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of Shells]. Vladivostok, Dal'nauka, 2009. 535 p. (In Russian)
5. Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear elastic state of a composite cylindrical shell with a rectangular hole. *Int. Appl. Mech.*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 504–514. doi: 10.1007/s10778-019-00972-0.
6. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2016, vol. 45, no. 1, pp. 51–58. doi: 10.3103/S1052618816010076.

7. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
8. Ubaydullov M.N., Serazutdinov M.N. Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load. In: Radionov A.A., Gasiyarov V.R. (Eds.) *Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021)*. Vol. 1. Ser.: Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham, Springer, 2022, pp. 332–340. doi: 10.1007/978-3-030-85233-7\_40.
9. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 9, pp. 2263–2271. doi: 10.1134/S1995080221090316.
10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 114–117. doi: 10.3103/S0027133016050034.
11. Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Yatsura A.V. Stress–strain state near a hole in a shear-compliant composite cylindrical shell with elliptical cross-section. *Int. Appl. Mech.*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 559–567. doi: 10.1007/s10778-018-0909-8.
12. Golovanov A.I. Numerical modeling of large elastoplastic strains in terms of principal stretches. I. Kinematics of elastoplastic strains. *Russ. Aeronaut.*, 2010, vol. 53, no. 2, pp. 161–166. doi: 10.3103/S1068799810020078.
13. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: Integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 9, pp. 1478–1483. doi: 10.1134/S1995080218090056.
14. Jebur A.K., Hassoun E.O., Abraham H.A., Khayrullin F.S., Sakhibiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers. *J. Appl. Eng. Sci.*, 2020, vol. 18, no. 1, pp. 110–113. doi: 10.5937/jaes18-24130.
15. Kayumov R., Sulejmanov A., Strakhov D. Model of degradation of composite materials of building structure’s load-bearing elements. In: Vatin N. (Ed.) *Proceedings of STCCE 2021: Selected Papers*. Ser.: Lecture Notes in Civil Engineering. Vol. 169. Cham, Springer, 2021, pp. 239–249. doi: 10.1007/978-3-030-80103-8\_26.
16. Sartorato M., de Medeiros R., Volnei T. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 127, pp. 185–198. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.03.009.
17. Li S., Lu G., Wang Z., Zhao L., Wu G. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tubular cores subjected to internal blast loading. *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, vols. 96–97, pp. 1–12. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011.
18. He X. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 2014, vol. 48, pp. 59–66. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017.
19. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, vol. 67, no. 9, art. 35. doi: 10.1007/s00033-016-0623-5.
20. Paznanova S.L., Vasilev G.P., Dineva P.S., Manolis G.D. Dynamic analysis of nano-heterogeneities in a finite-sized solid by boundary and finite element methods. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 80, pp. 1–18. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.016.

21. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: Serendipity basis and modified reduced quadrature. *Eur. J. Mech. – A/Solids*, 2015, vol. 54, pp. 105–119. doi: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.010.
22. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech.*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 87–95. doi: 10.1007/s00466-015-1158-x.
23. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 10, no. 5, art. 051012. doi: 10.1115/1.4028657.
24. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells with large deformations and large rotations. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 10, no. 5, art. 051018. doi: 10.1115/1.4030212.
25. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H. A paradigm for higher-order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2016, vol. 306, pp. 216–251. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.025.
26. Bishop J.E. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2014, vol. 97, no. 1, pp. 1–31. doi: 10.1002/nme.4562.
27. Talischi C., Pereira A., Menezes I.F.M., Paulino G.H. Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2015, vol. 102, nos. 3–4, pp. 728–747. doi: 10.1002/nme.4851.
28. Manzini G., Russo A., Sukumar N. New perspective on polygonal and polyhedral finite element method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2014, vol. 24, no. 8, pp. 1665–1699. doi: 10.1142/S0218202514400065.
29. Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H. On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2014, vol. 282, pp. 132–160. doi: 10.1016/j.cma.2014.05.005.
30. Beirão V.L., Lovadina C., Mora D. A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2015, vol. 295, pp. 327–346. doi: 10.1016/j.cma.2015.07.013.
31. Antonietti P.F., Beirão V.L., Scacchi S., Verani M. A  $C^1$  virtual element method for the cahn–hilliard equation with polygonal meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 34–56. doi: 10.1137/15M1008117.
32. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 535–544. doi: 10.1134/S1990478917040111.
33. Pogorelov A.V. *Differentsial'naya geometriya* [Differential Geometry]. Moscow, Nauka, 1974. 177 p. (In Russian)
34. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Mechanics of a Continuous Medium]. Moscow, Nauka, 1976. 503 p. (In Russian)
35. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Finit element model of pipeline discretization by prismatic elements. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 698, no. 6, art. 066012. doi: 10.1088/1757-899X/698/6/066012.

- 
36. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements. *ARPJ J. Eng. Appl. Sci.*, 2020, vol. 15, no. 13, pp. 1472–1481.
37. Zucco G., Groh R.M.J., Madeo A., Weaver P.M. Mixed shell element for static and buckling analysis of variable angle tow composite plates. *Compos. Struct.*, 2016, vol. 152, pp. 324–338. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.030.
- 

**Для цитирования:** Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Соболевская Т.А., Джабраилов А.Ш., Клочков М.Ю. Вариативная параметризация эллипсоидальной тонкой оболочки с реализацией на основе МКЭ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 49–67. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67.

**For citation:** Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Dzhabrailov A.Sh., Klochkov M.Yu. Varying parameterization of an ellipsoidal thin shell with FEM-based implementation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 49–67. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67. (In Russian)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.68-81

МЕТОД ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ  
 $\phi_B$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

*В. С. Мокейчев, А. М. Сидоров*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Понятие  $\phi_B$ -распределений со значениями в банаховом пространстве, введенное нами предыдущих работах, позволило по-новому взглянуть на теорию разрешимости линейных задач, что важно для дифференциальных уравнений в частных производных и, особенно, для уравнений с отклоняющимися аргументами. В настоящей работе дан обзор теории таких распределений и предложен новый подход к обоснованию метода Фурье для нахождения решений линейных задач, записана корректно разрешимая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение, метод Фурье,  $\phi_B$ -распределение,  $(\phi, Y, A, X)$ -решение.

Введение

При построении решений задач для дифференциальных уравнений (обыкновенных, в частных производных, с отклоняющимися аргументами либо без них, с обычными либо операторными коэффициентами) часто используется метод Фурье [1–4]. Его идейная сторона проста:

1) фиксируются такие множество функций  $\phi = \{\phi_k(x), k \in N\}$  и банахово пространство  $B$ , что  $\phi_k(x)$  удовлетворяет заданным линейным условиям (в дальнейшем обозначаемым  $lz = 0$ ), при всех  $u_k \in B$  можно вычислить  $P(x, D)(u_k \phi_k(x))$ , где  $P(x, D)$  – дифференциальный оператор;

2) рассматривается объект

$$\sum_k P(x, D)(u_k \phi_k(x)) \quad (1.1)$$

и находится пространство  $Y$ , в котором определена сумма  $S(x)$  объекта (1.1);

3) предлагается смысл равенства  $S(x) = f(x)$  (он обозначается  $A$ );

4) с использованием равенства  $S(x) = f(x)$  либо находятся неизвестные  $u_k \in B$ , либо доказывается их существование (если это возможно);

5) вводится в рассмотрение объект

$$\sum u_k \phi_k(x); \quad (1.2)$$

если корректно определено пространство  $X$ , в котором объект (1.2) имеет сумму  $u(x)$ , то  $u(x)$  называется  $(\phi, Y, A, X)$ -решением задачи

$$P(x, D)u(x) = f(x), \quad lu = 0, \quad (1.3)$$

построенным методом Фурье;

б) при невозможности установить хотя бы один элемент набора  $(\phi, Y, A, X)$  объявляется об отсутствии  $(\phi, Y, A, X)$ -решения у задачи (1.3).

**Замечание.** Для существования  $(\phi, Y, A, X)$ -решения задачи (1.3) необходимо и достаточно, чтобы ряды (1.1), (1.2) сходились соответственно в  $Y, X$ , а равенство  $f(x) = \sum_k P(x, D)(u_k \phi_k(x))$  выполнялось в смысле  $A$ .

Придание приведенным выше формальным рассуждениям корректного смысла является обоснованием метода Фурье.

Не будет серьёзных проблем при обосновании метода Фурье тогда, когда  $N$  – конечное множество, то есть  $N = \{1, 2, \dots, M\}$ . Действительно, можно положить  $X = \left\{ \sum_{j=1}^M v_j \phi_j(x) \mid v_j \in B \right\}$ ,  $Y = \left\{ \sum_{j=1}^M P(x, D)(v_j \phi_j(x)) \mid v_j \in B \right\}$ , а равенство  $S(x) = f(x)$  означает, что оно выполняется либо в смысле Галёркина [5], либо в смысле минимума величины  $\|S(x) - f(x)\|^2$  (метод наименьших квадратов), либо  $S(x_j) = f(x_j)$  для конечного набора  $x_j$  (численный метод).

Ниже изучен случай, когда  $N$  – бесконечное подмножество множества всех  $n$ -мерных векторов  $k = (k_1, \dots, k_n)$  с целочисленными координатами, при этом положим  $|k| = |k_1| + \dots + |k_n|$ . В этом случае объекты (1.1), (1.2) – функциональные ряды с элементами, принадлежащими  $B$  при каждом  $x$ . В том случае, когда  $Y$  задано, будем предполагать  $f(x) \in Y$  и  $S(x) = f(x)$  – равенство элементов в  $Y$  и вместо  $(\phi, Y, A, X)$ -решение будем записывать  $(\phi, Y, X)$ -решение.

Предположим, что  $Y$  – пространство, каждый элемент которого представим в виде  $\sum P(x, D)(v_k \phi_k(x))$  (при некоторых  $v_k \in B$ ); существование  $u_k$ , удовлетворяющих условию  $S(x) = f(x) \in Y$ , становится очевидным, и проблема обоснования метода Фурье сводится к проблеме существования пространства  $X$ , в котором сходил бы ряд (1.2). Как показывает пример 1, приведенный ниже, построить пространство  $X$  нелегко даже тогда, когда  $Y$  – пространство, "хорошее" в некотором смысле. Желательно, чтобы пространство  $X$  было наиболее широким.

**Пример 1.** Речь идёт о вынужденных  $2\pi$ -периодических колебаниях струны, закреплённой на концах 0 и  $\pi$ . Математическая модель имеет вид

$$U_{tt}^{(2)} - c^2 U_{yy}^{(2)} = f(t, y), \quad U_t^{(r)}(0, y) = U_t^{(r)}(2\pi, y), \quad r = 0, 1, \quad U(t, 0) = U(t, \pi) = 0.$$

Пусть  $f(t, y) = \sum_{k_1, k_2} \left(1 + k_1^2 + k_2^2\right)^{-m} \exp(ik_1 t) \sin(k_2 y)$ ,  $m \gg 0$ ,  $k_1$  пробегает все целые числа,  $k_2$  пробегает  $1, 2, \dots, c$  – иррациональное число,  $i$  – мнимая единица.

Для решения методом Фурье следует положить  $\phi = \{\exp(ik_1 t) \sin(k_2 y)\}$ . Тогда ряды (1.1), (1.2) примут вид

$$\sum (-k_1^2 + c^2 k_2^2) u_{(k_1, k_2)} \exp(ik_1 t) \sin(k_2 y), \quad \sum u_{(k_1, k_2)} \exp(ik_1 t) \sin(k_2 y).$$

При каждом известном  $Y$  окажется  $(-k_1^2 + c^2 k_2^2) u_{(k_1, k_2)} = (1 + k_1^2 + k_2^2)^{-m}$ . Поэтому возникает вопрос: *существует ли  $X$ , в котором сходится ряд*

$$\sum \left(1 + k_1^2 + k_2^2\right)^{-m} (-k_1^2 + c^2 k_2^2)^{-1} \exp(ik_1 t) \sin(k_2 y),$$

поскольку  $k_1^2 \neq c^2 k_2^2$ ?

Если существует пространство  $X_0$ , в котором сходится ряд, то сумма ряда называется решением в  $X_0$  математической модели; в противном случае задача объявлялась неразрешимой.

В [6] доказано: если  $c$  – число Лиувилля [7], то ряд не сходится даже в пространстве обобщённых  $2\pi$ -периодических функций, значит, математическая модель оказалась неразрешимой, что противоречит физике процесса. По определению,  $c$  – число Лиувилля, если при каждом  $r > 0$  существует бесконечно много взаимно простых чисел  $p, q$ , для которых  $\left|c - \frac{p}{q}\right| \leq q^{-r}$ . В том случае, когда  $B = \mathbb{R}$ , упомянутое выше пространство  $X$  построено в [6].

Ниже предположим, что  $u_p$  – элементы банахова пространства. В частности, это позволяет обосновать метод Фурье для систем уравнений. Наибольшее внимание будет уделено ответу на вопрос: можно ли построить наиболее широкие пространства  $Y$  и  $X$ , в которых сходились бы соответствующие ряды (1.1), (1.2)? На данный момент наиболее широкими являются пространства обобщённых функций (распределений Шварца). Однако пример 1 показывает, что и в этом случае не всегда удаётся обосновать метод Фурье.

### 1. Построение пространств $X, Y$

Построение  $X$  в случае, когда система  $\phi$  имеет биортогональную систему.

Предположим, что существует линейное множество  $H_0$  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , в котором система  $\phi = \{\phi_k(x), k \in N \subset \mathbb{Z}^n\}$  имеет биортогональную  $\phi^* = \{\phi_k^*(x), k \in N\}$ . Это предположение нельзя назвать жёстким, ибо в методе Фурье, как правило, используются ортонормированные системы. Подчёркнём, что существование  $\phi^*$  автоматически означает, что  $\phi_k(x)$ ,  $\phi_p^*(x)$  при всех  $k, p$  принадлежат  $H_0$ . Важно отметить, что функции  $\phi_k(x)$  могут принадлежать более широкому пространству.

**Пример 2.** Пусть  $\phi_k(x) = c(x) \exp(ik \circ x)$ , где  $c(x) = 1$  при  $x \in [-\pi, \pi]^n = \Omega$ ,  $k \circ x = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n$ . Очевидно, что в  $H_0 = L^2(2\pi)$  (в пространстве  $2\pi$ -периодических функций со скалярным произведением  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ ) система  $\phi^* = \{h(x) \exp(ik \circ x), k \in N\}$  будет биортогональной к  $\phi$ , если  $h(x) = (2\pi)^{-n}$  при  $x \in \Omega$ . Однако  $c(x) \notin H_0$ , если  $c(x)$  не  $2\pi$ -периодична.

Этот пример указывает на то, что пространств  $H_0$  и систем  $\phi^*$  может оказаться много. Поэтому ниже они фиксированы.

Здесь и далее, если особо не оговорено, запись  $\sum_{|k| \leq M}$  означает, что суммирование осуществляется по всем  $k \in N$ , удовлетворяющим условиям  $|k| \leq M$ .

**Сходимость ряда (1.2).** Обозначим через  $L_{\phi^*}$  множество

$$\left\{ \sum_{|k| \leq M} a_k \phi_k^*(x) \mid a_k \in \mathbb{C}, M = 0, 1, 2, \dots \right\},$$

где  $\mathbb{C}$  – множество всех комплексных чисел.

Введем множество  $(L_{\phi^*})^*$  всех линейных отображений  $L_{\phi^*} \rightarrow B$ ; его элементы называются  $\phi_B$ -распределениями. Так как  $B$  фиксировано, то вместо записи  $\phi_B$ -распределения будем использовать запись  $\phi$ -распределения.

Очевидно, что каждая функция  $\sum_{|k| \leq m} v_k \phi_k(x)$ , где  $v_k \in B$ , порождает  $\phi$ -распределение  $v$ , определяемое равенством  $v[\psi] = \sum_{|k| \leq m} v_k \langle \psi, \phi_k(x) \rangle$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в  $H_0$ . Такое  $\phi$ -распределение называют регулярным, при

этом полагается  $v = \sum_{|k| \leq m} v_k \phi_k(x)$ . Напомним, что  $H_0$  – то линейное пространство, в котором  $\phi$  и  $\phi^*$  биортогональны.

**Определение 1.** Последовательность  $\{u_m \in (L_{\phi^*})^*, m = 1, 2, \dots\}$  называется сходящейся, если существует  $u \in (L_{\phi^*})^*$ , для которого  $\|u_m[\psi] - u[\psi]\| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$  для каждой  $\psi \in L_{\phi^*}$ .

Здесь и далее,  $\|\cdot\|$  – символ нормы в  $B$ ,  $u[\psi]$  – значение  $\phi$ -распределения  $u$  на функции  $\psi$ . Пространство  $(L_{\phi^*})^*$  с введённым понятием сходимости обозначим  $D'_\phi$ .

**Теорема 1.** Пространство  $D'_\phi$  полное.

**Доказательство.** Следует доказать, что фундаментальная последовательность  $\{u_m \in D'_\phi, m = 1, 2, 3, \dots\}$  сходится в  $D'_\phi$ . Пусть для каждой фиксированной  $\psi \in L_{\phi^*}$  фундаментальна последовательность  $\{u_m[\psi], m = 1, 2, \dots\}$ , то есть  $\|u_m[\psi] - u_{(j)}[\psi]\| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty$ . Поскольку  $B$  – банахово пространство, то существует  $v_\psi \in B$ , для которого  $\|u_m[\psi] - v_\psi\| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty$ . Обозначим  $u[\psi] = v_\psi$ . Очевидно, что  $u$  – линейное отображение  $L_{\phi^*} \rightarrow B$ . Поэтому  $u \in D'_\phi$ .

**Теорема 2.** В  $D'_\phi$  сходятся все ряды  $\sum v_k \phi_k(x)$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 1 достаточно доказать фундаментальность последовательности  $\{S_m = \sum_{|k| \leq m} v_k \phi_k(x), m = 1, 2, \dots\}$ , то есть доказать, что  $T_{m,j} = \|S_m[\psi] - S_j[\psi]\| \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow +\infty, j \rightarrow +\infty$  для каждой  $\psi \in L_{\phi^*}$ . Не нарушая общности, можно считать  $m > j$ . В этом случае  $T_{m,j} = \left\| \sum_{|k|=j+1}^m v_k \langle \psi, \phi_k(x) \rangle \right\|$ . Так как  $\psi \in L_{\phi^*}$ , то существует  $M$ , при котором  $\psi = \sum_{|q| \leq M} c_q \phi_q^*(x)$ , причём  $M$  не зависит ни от  $m$ , ни от  $j$ . В этом случае при  $|k| > M$  имеем  $\langle \psi, \phi_k(x) \rangle = \sum_{|q| \leq M} c_q \langle \phi_q^*(x), \phi_k(x) \rangle = 0$ , то есть  $T_{m,j} = 0$ , если  $j > M$ .

Здесь и далее вместо  $\phi_k(x), \phi_k^*(x)$  часто будем использовать записи  $\phi_k, \phi_k^*$ . Запись 0 будем использовать и для числа нуль, и для нулевого вектора, и для нулевого элемента пространства; по смыслу всегда будет понятно, что понимается под записью  $f = 0$ .

Так как  $\phi_q^* \in L_{\phi^*}$ , то можно вычислить  $u_q = u[\phi_q^*]$  – коэффициент Фурье по системе  $\phi$  для  $u \in D'_\phi$ .

**Теорема 3.** Каждое  $\phi$ -распределение разлагается в ряд Фурье по системе  $\phi$ ; каждый абстрактный элемент, разлагаемый в некотором смысле в ряд Фурье по  $\phi$ , является  $\phi$ -распределением.

**Доказательство.** Пусть  $u \in D'_\phi$ . Вычислим  $u_q = u[\phi_q^*]$ ,  $q \in N$ , и составим ряд  $\sum u_q \phi_q(x)$ . В силу теоремы 2 ряд сходится в  $D'_\phi$ . Пусть  $v$  – его сумма. Следует доказать, что  $u = v$ , то есть  $u[\psi] = v[\psi]$  при каждой  $\psi \in L_{\phi^*}$ . Имеем  $v[\phi_q^*] = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{|k| \leq m} u_k \langle \phi_q^*, \phi_k \rangle = u_q = u[\phi_q^*]$  при каждом  $q \in N$ . С другой

стороны,  $\psi = \sum_{|k| \leq M} c_k \phi_k^*$ , и  $M$  зависит только от  $\psi$ , значит,  $v[\psi] = \sum_{|k| \leq M} c_k v[\phi_k^*] = \sum_{|k| \leq M} c_k u[\phi_k^*] = u[\psi]$  при каждой  $\psi$ . Это означает, что  $v = u$ .

Пусть имеется пространство  $\hat{X}$ , элементы которого разлагаются в ряд Фурье по системе  $\phi$ , то есть выполняется равенство  $h = \sum a_q \phi_q(x)$ , и это представление единственное. Очевидно, что функционал  $u_h : u_h[\psi] = \sum a_p \langle \psi, \phi_p \rangle$  является  $\phi$ -распределением, ибо в  $\{\langle \psi, \phi_p \rangle\}$  – конечное множество ненулевых чисел. Как и в пространстве обобщённых функций,  $u_h$  называется продолжением элемента  $h$  до  $\phi$ -распределения, и полагается  $h = u_h$ .

Из теорем 1–3 следует: если линейную задачу решаем методом Фурье и системы  $\phi$ ,  $\phi^*$  биортогональны относительно некоторого скалярного произведения, то всегда можно положить  $X = D'_\phi$ .

Понятие  $\phi_B$ -распределения было введено и изучалось в [8, 9]. Задача о колебании струны, рассмотренная в примере 1, не имеющая обобщенного решения, если  $s$  – число Лиувилля, как установлено в [8], корректно разрешима в пространстве  $X = D'_\phi$ .

В [10] в пространстве  $X = D'_\phi$  рассмотрен процесс, описываемый задачей для дифференциального уравнения общего вида с частными производными. Приведены условия, при которых процесс является динамическим.

Введение  $\phi_B$ -распределений позволило по-новому взглянуть на понятие решения дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами [9]. Это продолжило исследования, начатые в [11].

Выделим случай, когда пространство  $X$  можно построить без предположения существования биортогональной системы.

**Теорема 4.** Пусть  $\phi_{(1)} = \{\phi_k(x), k \in N_1\}$  имеет биортогональную систему в  $H_1$ , причём  $N_1 \subset N$ ,  $N_2 = \{k \in N, k \notin N_1\}$  – конечное множество,  $\phi_k(x) \in H_1$  для  $k \in N_2$ .

Тогда при произвольно заданных  $v_k \in B$  ряд  $\sum_{k \in N} v_k \phi_k(x)$  сходится в  $D'_{\phi_{(1)}}$ .

**Доказательство.** Как отмечено выше, каждый элемент  $v \in H_1$  можно считать  $\phi_{(1)}$ -распределением, определяемым равенствами  $v[\psi] = \langle \psi, v \rangle_1$  для всех  $\psi \in L_{\phi_{(1)}}^*$ . Поэтому при произвольных  $v \in H_1$  и  $u \in D'_{\phi_{(1)}}$  корректна запись  $v + u$  (как сумма двух  $\phi_{(1)}$ -распределений), и существуют  $v_k$ :

$$\sum_{k \in N} u_k \phi_k(x) = \sum_{k \in N_2} u_k \phi_k(x) + \sum_{k \in N_1} u_k \phi_k(x) = \sum_{k \in N_1} v_k \phi_k(x) \quad \forall u_k \in B.$$

Следовательно, можно положить  $X = D'_{\phi_{(1)}}$ .

Так как для системы  $\phi$  общего вида неизвестно, существует ли пространство, в котором она имеет биортогональную систему, то запись  $w = \sum_{k \in N} u_k \phi_k(x)$  нельзя назвать разложением в ряд Фурье по системе  $\phi$  для  $w$ .

Всюду ниже  $X$  – такое полное пространство, в котором сходятся все ряды  $\sum u_k \phi_k(x)$ ,  $u_k \in B$ .

**Сходимость ряда (1.1).** Предположим, что

$$P(x, D)(u_k \phi_k(x)) = (P(x, D)\phi_k(x))u_k \quad \forall u_k \in B \quad \forall k$$

либо

$$P(x, D)(u_k \phi_k(x)) = u_k P(x, D)\phi_k(x) \quad \forall u_k \in B \quad \forall k.$$

Введём систему функций

$$g = \{P(x, D)\phi_k(x), k \in N\}.$$

Она только обозначениями отличается от  $\phi$ . Поэтому всё сказанное о  $\phi$  с естественными изменениями переносится на  $g$ . При этом следует иметь в виду, что из существования у  $\phi$  биортогональной системы не следует существование биортогональной системы у  $g$ . В частности, справедлива

**Теорема 5.** *Предположим, что после удаления нулевых и конечного множества ненулевых элементов из  $g$  оставшаяся система  $g_1$  имеет биортогональную систему в некотором линейном пространстве  $H_2$  со скалярным произведением элементов, причём удалённые элементы принадлежат  $H_2$ . Тогда  $Y = D'_{g_1}$ .*

Напомним, через  $Y$  обозначаем пространство, в котором сходятся все ряды  $\sum P(x, D)(v_k \phi_k(x))$ ,  $v_k \in B$ . При этом  $H_0$  и  $H_2$  могут оказаться разными. По этой причине пространства  $D'_\phi$ ,  $D'_g$  могут оказаться разными и равенство  $P(x, D)u(x) = \lambda u(x)$ , где  $\lambda$  – число, может оказаться бессмысленным, например тогда, когда  $D'_\phi \cap D'_g = \{0\}$ . Поэтому для сохранения понятий "собственное значение", "собственная функция" следует использовать запись  $(P(x, D) - \lambda I)u(x) = 0$ .

**Дифференцируемость и интегрируемость элементов из  $X_\phi$ .** Ниже через  $X_\beta$  обозначено множество, в котором при всех  $z_k \in B$  сходятся ряды  $\sum z_k \beta_k(x)$ . Ранее были рассмотрены случаи, когда  $\beta = \phi$  либо  $\beta = g$ .

В случае, когда  $u \in X_\phi$ , имеем  $u = \sum v_k \phi_k(x)$ . Пусть каждая функция  $\phi_k(x)$  имеет производную порядка  $\alpha$ ; введём систему функций  $h = \{\phi_k^{(\alpha)}(x), k \in N\}$ ; если существует пространство  $X_h$ , то в этом пространстве сходится ряд  $\sum v_k \phi_k^{(\alpha)}(x)$ . Его сумма  $v_\alpha$  называется производной порядка  $\alpha$  от  $u$  и обозначается через  $u_\phi^{(\alpha)}$ . Очевидно, что в случае  $\phi_k^{(\alpha)}(x) = b_k \phi_k(x)$  при всех  $k \in N$ , где  $b_k$  не зависят от  $x$ , имеет место включение  $X_\phi^{(\alpha)} \subset X_\phi$ .

Через  $\int F(x)(dx)^\alpha$  обозначим множество всех первообразных порядка  $\alpha$  от  $F(x)$ , то есть множество всех функций  $w(x)$ , для которых почти всюду существует обычная производная  $w^{(\alpha)}(x)$  и почти всюду  $w^{(\alpha)}(x) = F(x)$ . В случае, когда  $w(x)$  непрерывна, под записью  $\int F(x)(dx)^\alpha$  понимаем неопределённый интеграл. Например, функция  $w(t) = -t^{-1} + c_1$  при  $t < 0$ ,  $w(t) = -t^{-1} + c_2$  при  $t > 0$ , и  $w(0) = c_3$ , где  $c_j$  – постоянные, является первообразной первого порядка от  $F(t) = t^{-2}$  при  $t \neq 0$ , а функция  $h(t) = 2t^{1/2} + c_1$  – неопределённым интегралом от функции  $F(t) = t^{-1/2}$ .

Всюду  $\int_1 F(x)(dx)^\alpha$  – одна из первообразных порядка  $\alpha$  для  $F(x)$ .

Введём множество  $\gamma = \left\{ \int_1 \phi_k(x)(dx)^\alpha, k \in N \right\}$ . Пусть для некоторых первообразных существует  $X_\gamma$ , то есть при любых  $z_k \in B$  в  $X_\gamma$  сходятся ряды  $\sum z_k \int_1 \phi_k(x)(dx)^\alpha$ . Если  $u \in X_\phi$ , то вместе с равенством  $u = \sum v_k \phi_k(x)$  выполняются и равенства  $\sum v_k \int_1 \phi_k(x)(dx)^\alpha = z_\gamma$ ,  $\sum v_k \left( \int_1 \phi_k(x)(dx)^\alpha \right)^{(\alpha)} = u$ .

По определению производной сумма  $z_\gamma$  имеет производную порядка  $\alpha$ , причём она равна  $u$ . Поэтому  $z_\gamma$  можно считать одной из первообразных от  $u$ , то есть  $\int_1 u(dx)^\alpha = z_\gamma$ .

## 2. Выбор $\phi$ в зависимости от "граничных" условий

В этом параграфе  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $[a, b] \subset \Omega$ ,  $\Gamma$  – граница множества  $[a, b]$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)$ ,  $a_j < b_j$ ,  $k = (k_1, \dots, k_n)$ , и предположим, что существуют  $u_k$ , для которых

$$\sum P(x, D)(u_k \phi_k(x)) = f(x) \in Y, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

а условие  $A$  означает равенство элементов в  $Y$ . Поэтому вместо записи  $(\phi, Y, A, X)$ -решение используем  $(\phi, Y, X)$ -решение.

Если не существуют  $u_k$ , при которых выполнилось бы (3.1), то  $(\phi, Y, A, X_\phi)$ -решение отсутствует, и нет предмета для рассмотрения.

Ниже речь пойдёт о выборе  $\phi$  в зависимости от области изменения  $x$  и граничных условий.

### Явный вид $\phi$

1. Пусть  $T = (T_1, \dots, T_n)$ ,  $T_j > 0$ , и речь идёт о  $T$ -периодических условиях.

В этом случае используем систему  $\phi = \left\{ \phi_k(x) = C_k(x) \prod_{j=1}^n \exp\left(2\pi i \frac{k_j x_j}{T_j}\right) \right\}$ , где  $k_j$  пробегает множество всех целых чисел и  $C_k(x) = \prod_{j=1}^n T_j^{-1/2}$  при  $x \in [a, a+T]$ .

Так как система  $\phi$  ортонормирована в  $H_0 = L^2([a, a+T])$ , то можно положить  $\phi^* = \phi$ . Если  $C_k(x)$  не зависят от  $x$ , то из равенств  $\phi_k^{(\alpha)}(x) = a_{k,\alpha} \phi_k(x)$  легко следуют включения  $(X_\phi)^{(\alpha)} \subset X_\phi$  и для некоторых первообразных  $\int_1 X_\phi(dx)^\alpha \subset X_\phi$ .

$(\phi, Y, X_\phi)$ -решение будем называть  $T$ -периодическим решением, вычисленным методом Фурье.

2. Пусть условия  $lu=0$  означают, что  $u$  на  $\Gamma$  равна 0. Для такой задачи используем систему  $\phi = \left\{ \phi_k(x) = C_k(x) \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{\pi k_j(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right), k_j = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, n \right\}$ ,

$C_k(x) = \prod_{j=1}^n \sqrt{\frac{2}{b_{j,1} - a_{j,1}}}$  при  $x \in [a, b]$ . Очевидно, что система  $\phi$  ортонормирована в  $H_0 = L^2([a, b])$ . Поэтому  $\phi^* = \phi$ .

Пусть  $C_k(x)$  не зависят от  $x$ . Если все координаты у  $\alpha$  – чётные, то  $\phi_k^{(\alpha)}(x) = a_{k,\alpha,1} \phi_k(x)$ , и числа  $a_{k,\alpha,1}$  не обращаются в нуль, поэтому  $(X_\phi)^{(\alpha)} = X_\phi$ , и для некоторых первообразных  $\int_1 X_\phi(dx)^\alpha \subset X_\phi$ .

$(\phi, Y, X_\phi)$ -решение будем называть решением, обращающимся в нуль на  $\Gamma$ , вычисленным методом Фурье.

3. Условия  $lu = 0$  означают, что  $u^{(\alpha)} = 0$  на  $\Gamma$  при  $\alpha_j \leq 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . В этом случае положим

$$\phi = \left\{ \phi_k(x) = C_k(x) \left( \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{\pi k_j(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right) \right)^2, k_j = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Очевидно, что  $\int_{a_j}^{b_j} \left( \sin\left(\frac{\pi k_m(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right) \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi k_r(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right) dx_j = 0$  при  $k_m \neq k_r$ , и  $\frac{b_j - a_j}{-4}$ , если  $k_m = k_r$ .

Напомним, что  $k_j \geq 1$ . В случае, когда  $C_k(x) = \prod_{r=1}^n \left( \frac{-4}{b_r - a_r} \right)$  при  $x \in [a, b]$ , из равенств, записанных выше, следует биортогональность в  $H_0 = L^2([a, b])$  систем  $\phi$  и  $\left\{ \phi_k^*(x) = \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{2\pi k_j(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right), k_j = 1, 2, \dots, j = 1, \dots, n \right\}$ . Поэтому существует пространство  $X_\phi$  со свойствами, указанными выше.

Пусть  $C_k(x)$  не зависят от  $x$ . Если все координаты у  $\alpha$  – чётные, то  $\phi_k^{(\alpha)}(x) = a_{k,\alpha,2} \phi_k(x)$ , поэтому  $(X_\phi)^{(\alpha)} \subset X_\phi$ , и для некоторых первообразных  $\int_1 X_\phi(dx)^\alpha \subset X_\phi$ .

$(\phi, Y, X_\phi)$ -решение будем называть решением Дирихле, вычисленным методом Фурье.

4. Условия  $lu = 0$  означают, что  $u^{(\alpha)} = 0$  на  $\Gamma$  при  $|\alpha_j| = 1$ . В этом случае положим  $\phi = \left\{ \phi_k(x) = C_k(x) \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{\pi k_j(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right), k_j = 0, 1, \dots, j = 1, \dots, n \right\}$ .

Очевидно, что  $\int_{a_j}^{b_j} \cos\left(\frac{\pi k_m(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right) \cos\left(\frac{\pi k_r(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right) dx_j = 0$  при  $k_m \neq k_r$  и  $\frac{b_j - a_j}{2}$ , если  $k_m = k_r$ . В случае, когда  $C_k(x) = \prod_{r=1}^n \left( \frac{2}{b_r - a_r} \right)$  при  $x \in [a, b]$ ,

из записанных равенств следует биортогональность в  $H_0 = L^2([a, b])$  систем  $\phi$  и  $\left\{ \phi_k^*(x) = \prod_{r=1}^n \cos\left(\frac{\pi k_r(x_r - a_r)}{b_r - a_r}\right), k_r = 1, 2, \dots, r = 1, \dots, n \right\}$ . Поэтому существует пространство  $X_\phi$ .

Пусть  $C_k(x)$  не зависят от  $x$ . Если все координаты у  $\alpha$  – чётные, то  $\phi_k^{(\alpha)}(x) = a_{k,\alpha,2} \phi_k(x)$ , поэтому  $(X_\phi)^{(\alpha)} \subset X_\phi$  и для некоторых первообразных  $\int_1 X_\phi(dx)^\alpha \subset X_\phi$ .

$(\phi, Y, X_\phi)$ -решение будем называть решением Неймана, вычисленным методом Фурье.

Аналогично можно определить решения Бесселя, Лаггера, Ханкеля, Чебышева–Эрмита и многие другие, вычисленные методом Фурье.

**Выбор  $\phi$  в общем случае.** В большинстве случаев не удаётся в явном виде записать систему функций  $\phi$ , удовлетворяющих заданным линейным условиям  $lz = 0$ . Например, это имеет место в случае, когда  $\Omega \neq [a, b]$ . Поэтому полезно утверждение:

*предположим, что оператор  $P_0(x, D)$  линейно отображает  $D_{P_0} \subset L^2(\Omega)$  в  $L^2(\Omega)$ , самосопряжён и имеет вполне непрерывный обратный. Тогда некоторые собственные функции оператора  $P_0(x, D)$  образуют ортонормированный базис в  $L^2(\Omega)$ .*

### 3. Корректно разрешимая задача для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными отклонениями аргументов

Для скалярных линейных дифференциальных полиномов  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha(x) D^\alpha$ , где  $a(x)$  – непрерывные функции, известна теорема Хёрмандера [12]:

пусть оператор  $P(x, D)$  удовлетворяет условию

$$\sup_{x \in \Omega, y \in \Omega, \xi \in R^n} \left( \tilde{P}(x, \xi) / \tilde{P}(y, \xi) \right) < +\infty, \quad (4.1)$$

где  $\Omega$  – ограниченное открытое множество,  $\tilde{P}(x, \xi) = \left( \sum_{\alpha} |P_{\xi}^{(\alpha)}(x, \xi)|^2 \right)^{1/2}$ .

Тогда для любой точки  $x_0 \in R^n$  существует открытая подобласть  $\Omega_1 \subset \Omega$  такая, что  $x_0 \in \Omega_1$ , и уравнение  $P(x, D)u = f$  при всякой функции  $f \in L^2(\Omega_1)$  имеет обобщённое решение  $u \in L^2(\Omega_1)$ , для которого  $Q(D)u \in L^2(\Omega_1)$ , где  $Q(D)$  – любой оператор слабее  $P(x, D)$  в каждой фиксированной точке  $x \in \Omega_1$ .

В теореме Хёрмандера оператор  $Q(D)$  слабее оператора  $P(x, D)$ , если  $\tilde{Q}(\xi) \leq C \tilde{P}(x, \xi)$ ,  $\xi \in R^n$  в каждой точке  $x \in \Omega_1$  и  $C$  не зависит от  $\xi$ , то есть в теореме фактически утверждается, что при выполнении (4.1) для  $P(x, D)$  существует некоторая задача, разрешимая при всех  $f \in L^2(\Omega)$  в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

Нам не удалось обобщить теорему Хёрмандера на систему уравнений, тем более, на случай наличия отклонений аргументов. Одна из причин – в том, что непонятно, как понимать запись  $w(x + \tau)$  для обобщённой функции (исключениями являются случаи:  $\Omega = R^n$ ;  $\Omega = \{x \in R^n : x_j > 0, j = 1, 2, \dots, n\}$  и  $\tau > 0$ ;  $\Omega = \{x \in R^n : x_j < 0, j = 1, 2, \dots, n\}$  и  $\tau < 0$ ).

Используя  $\phi_B$ -распределения, в ряде случаев можно значительно усилить теорему Хёрмандера.

Ниже  $B = C^m$ , и речь пойдёт о нахождении методом Фурье решений  $u \in D'_\phi$  системы уравнений

$$P(D)u \equiv \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^M C_{\alpha,j} u^{(\alpha)}(x + \tau_{\alpha,j}) = f, \quad (4.2)$$

в которой  $\phi = \{\exp((\vec{\mu} + iq)x), q \in N\}$ ,  $\Phi$  – конечное множество мультииндексов,  $C_{\alpha,j}$ ,  $\vec{\mu}$  и  $\tau_{\alpha,j}$  не зависят от  $(u, x)$ ,  $C_{\alpha,j}$  – постоянные квадратные матрицы размерности  $m$ ,  $(\vec{\mu} + iq)x = (\mu + iq_1)x_1 + \dots + (\mu + iq_n)x_n$ ,  $\vec{\mu} = (\mu, \dots, \mu)$ .

Существование  $D'_\phi$  следует из очевидного факта:  $\phi$  и  $\phi^* = \{(2\pi)^{-n} \exp((\vec{\nu} + iq)x), q \in N\}$ ,  $\vec{\nu} = (-\vec{\mu}, \dots, -\vec{\mu})$ , биортогональны относительно скалярного произведения

$$\langle h, g \rangle = \int_0^{2\pi} h(x) \overline{g(x)} dx.$$

**Теорема 6.** Для почти всех  $\mu \in C^1$  в  $D'_\phi$  корректно разрешимо уравнение (4.2).

**Доказательство.** В рассматриваемом случае равенство (4.2) принимает вид  $\sum P_1(\vec{\mu} + iq) u_q \exp((\vec{\mu} + iq)x) = \sum f_q \exp((\vec{\mu} + iq)x)$ , где  $P_1(\vec{\mu} + iq) = \sum_{\alpha \in \Phi} \sum_{j=1}^M C_{\alpha,j} (iq)^\alpha \exp((\vec{\mu} + iq)\tau_{\alpha,j})$ . Докажем, что для почти всех  $\mu$  все матрицы

$P_1(\vec{\mu} + iq)$  обратимы. При каждом  $q \in N$  определитель  $\Delta(\mu)$  матрицы  $P_1(\vec{\mu} + iq)$  аналитически зависит от  $\mu \in C^1$ . Поэтому множество  $\sigma_q$  его нулей счётно. Однако множество  $N$  счётно, поэтому и  $\bigcup_{q \in N} \sigma_q$  счётно. Следовательно, всегда можно выбрать  $\mu \in C^1$  так, чтобы

$$\det(P_1(\vec{\mu} + iq)) \neq 0 \quad q \in N. \quad (4.3)$$

Из доказательства теоремы 3 следует, что равенство (4.2) будет выполняться тогда и только тогда, когда

$$P_1(\vec{\mu} + iq)u_q = f_q \quad q \in N. \quad (4.4)$$

Поэтому в случае выполнения условия (4.3) уравнение (4.2) имеет в  $D'_\phi$  единственное решение  $u_f = \sum (P_1(\vec{\mu} + iq))^{-1} f_q \exp((\vec{\mu} + iq)x)$ . Осталось доказать непрерывную зависимость решения  $u_f$  от  $f$ .

Пусть  $f_r \rightarrow f$  в  $D'_\phi$ , то есть  $f_r[\psi] \rightarrow f[\psi]$  при  $r \rightarrow +\infty$  и каждом  $\psi \in L_{\phi^*}$ . Это возможно тогда и только тогда, когда  $f_{r,q} \rightarrow f_q$  при  $r \rightarrow +\infty$  и каждом  $q \in N$ . Отсюда и из (4.4) следует  $u_{r,q} \rightarrow u_q$  при  $r \rightarrow +\infty$  и каждом  $q \in N$ . Поэтому  $u_{f_r}[\psi] \rightarrow u_f[\psi]$  при  $r \rightarrow +\infty$  и каждом  $\psi \in L_{\phi^*}$ .

В связи с теоремой 6 следует ответить на вопросы: в каких случаях решение  $u = \sum u_q \exp((\vec{\mu} + iq)x)$  уравнения (4.2) оказывается обобщённой функцией, либо элементом пространства Соболева, либо классическим решением?

Введем обозначения:  $\Omega \subset R^n$  – ограниченное открытое множество ненулевой меры;  $D'_m(\Omega)$  – множество всех элементов  $v = (v_1, \dots, v_m)$ , где  $v_j \in D'(\Omega)$  – обобщённые функции (распределения Шварца);  $W_m^{Q,2}$  – пространство Соболева, то есть множество всех  $v \in D'_m(\Omega)$ , для которых  $v_j^{(\alpha)} \in L^2(\Omega)$  при всех  $\alpha \in Q$  и  $j = 1, \dots, m$ ;  $C_0^{+\infty}(\Omega)$  – множество всех бесконечно гладких функций с компактными носителями из  $\Omega$ ;  $C_m^\Phi(\Omega)$  – множество всех  $v \in D'_m(\Omega)$ , для которых  $v_j^{(\alpha)}$  – функции, непрерывные в  $\Omega$  при всех  $\alpha \in \Phi, j = 1, \dots, m$ .

Напомним, что в этом разделе  $B = C^m$  и  $X_\phi = D'_\phi$  – пространство, в котором сходятся все ряды  $\sum v_k \exp((\vec{\mu} + iq)x)$ . Если  $u \in X_\phi$ , то включение  $u \in D'_m(\Omega)$  означает, что  $u$  продолжается до обобщённой функции  $\hat{u}$ , и существует такая функция  $w \in D'_m(\Omega)$ , для которой  $\hat{u} = w$  в смысле обобщённых функций. Аналогично следует понимать и другие включения  $u \in Z$ .

**Теорема 7.** Если  $u = \sum u_k \exp((\vec{\mu} + iq)x)$ ,  $|u_q| \leq a_1 |\vec{1} + iq|^{M_1}$ ,  $a_1, M_1$  не зависят от  $q$ , то  $u \in D'_m(\Omega)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим ряд  $\sum u_q \int_\Omega w(x) \exp((\vec{\mu} + iq)x) dx$ , где  $w \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ . Убедимся в его сходимости. Введём дополнительные обозначения

$$\vec{t} = (t, \dots, t); \quad \vec{D}_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n}), \quad z^{\vec{M}_r} = z_1^{M_r} \dots z_n^{M_r}, \quad D_{x_j} - \text{производная по } x_j.$$

Легко проверить, что

$$(\vec{1} + iq)^{\vec{M}_r} \exp((\vec{\mu} + iq)x) = (\vec{1} - \vec{\mu} + \vec{D}_x)^{\vec{M}_r} \exp((\vec{\mu} + iq)x).$$

Поэтому

$$J_q \equiv u_q \int_\Omega w(x) \exp((\vec{\mu} + iq)x) dx = \frac{u_q}{(\vec{1} + iq)^{\vec{M}_2}} \int_\Omega w(x) (\vec{1} - \vec{\mu} + \vec{D}_x)^{\vec{M}_2} \exp((\vec{\mu} + iq)x) dx.$$

После интегрирования по частям получим

$$J_q = \frac{u_q}{(\vec{1} + iq)^{\vec{M}_2}} \int_{\Omega} \left( (\vec{1} - \vec{\mu} - \vec{D}_x)^{\vec{M}_2} w(x) \right) \exp((\vec{\mu} + iq)x) dx.$$

Так как  $w \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ , то  $\left| \int_{\Omega} \left( (\vec{1} - \vec{\mu} - \vec{D}_x)^{\vec{M}_2} w(x) \right) \exp((\vec{\mu} + iq)x) dx \right| \leq a_2$  и  $a_2$  не зависит от  $q$ . Следовательно,  $J_q \leq a_2 |\vec{1} + iq|^{M_1 - M_2}$  при всех  $q \in N$ . Если  $M_2$  достаточно велико, то  $\sum |J_q| < +\infty$ , и исследуемый ряд равномерно сходится. Сумму ряда обозначим  $\hat{u}[h]$ . Этот функционал линеен и определён на  $C_0^{+\infty}(\Omega)$ . Докажем его непрерывность.

Пусть  $w_r \rightarrow w$  в  $C_0^{+\infty}(\Omega)$ . Это означает, что вне некоторого компакта  $K \subset \Omega$  все функции  $w_r$  равны нулю и  $w_r^{(\alpha)} \rightarrow w^{(\alpha)}$  равномерно при каждом  $\alpha$ . Выше было получено, что

$$\hat{u}[w_r - w] = \sum_q \frac{w_{r,q} - w_q}{(\vec{1} + iq)^{\vec{M}_2}} \int_{\Omega} \exp((\vec{\mu} + iq)x) \cdot \left( \vec{1} - \vec{\mu} - \vec{D}_x \right)^{\vec{M}_2} (w_r(x) - w(x)) dx.$$

Однако  $\left( \vec{1} - \vec{\mu} - \vec{D}_x \right)^{\vec{M}_2} (w_r(x) - w(x)) \rightarrow 0$  равномерно,  $\sum_q \left| \frac{w_{r,q} - w_q}{(\vec{1} + iq)^{\vec{M}_2}} \right| < +\infty$  (при достаточно больших  $M_2$ ) и  $|\hat{u}[w_q] - \hat{u}[w]| \rightarrow 0$  при  $q \rightarrow +\infty$ , то есть  $u \in D'_m(\Omega)$ .

Легко проверить справедливость следующих утверждений:

- 1) если  $\sum |u_q|^2 \left( \sum_{\alpha \in Q} |\vec{\mu} + iq|^{\alpha} \right)^2 < +\infty$ , то  $u \in W_m^{Q,2}(\Omega)$ ;
- 2) если  $\sum |u_q| \sum_{\alpha \in \Phi} |\vec{\mu} + iq|^{\alpha} < +\infty$ , то  $u \in C_m^{\Phi}(\Omega)$ .

В теореме 7 выделены случаи, когда решение является обобщённой функцией, при этом оно не является обобщённым решением уравнения (4.2) по двум причинам: основная – непонятен смысл записи  $u(x + \tau)$ , для ограниченного  $\Omega$  непонятно, что следует назвать сопряжённой операцией  $(P(x, D))^*$ .

#### 4. Регулярность решений

Часто от решения требуется, чтобы оно принадлежало заданному банахову пространству  $B_1$ . Очевидно, что в случае сходимости в  $B_1$  ряда  $\sum f_k \phi_k(x)$  получим, что его сумма, то есть  $(\phi, Y, A, X)$ -решение уравнения (1.3), принадлежит  $B_1$ . Обозначим  $L_{\phi, B} = \left\{ \sum_{|k| \leq M} v_k \phi_k(x) \mid v_k \in B, M = 1, 2, \dots \right\}$ .

**Теорема 8.** *Предположим, что  $L_{\phi, B} \subset B_1$ , существуют банахово пространство  $B_2$ , для которого  $P(x, D)L_{\phi, B} \subset B_2$ , и ряд  $\sum P(x, D)(f_k \phi_k(x))$  сходится в  $B_2$  к  $f$ . Если существуют постоянные  $b_1 > 0$ ,  $b_2, m$ , при которых*

$$\|P(x, D)h\|_2 \geq b_1 \|h\|_1 - b_2 \|h(m)\|_1 \quad h = \sum c_k \phi_k(x) \in L_{\phi, B}, \quad (5.1)$$

где  $h(m) = \sum_{|k| \leq m} c_k \cdot \phi_k(x)$ , то  $(\phi, Y, A, X)$ -решение задачи (1.3) принадлежит  $B_1$ .

**Доказательство.** При  $M_2 > M_1 > m$ ,  $h = \sum_{|p|=M_1}^{M_2} f_p \phi_p(x)$  имеем

$$\left\| \sum_{|p|=M_1}^{M_2} P(x, D)(f_p \phi_p(x)) \right\|_2 \geq b_1 \left\| \sum_{|p|=M_1}^{M_2} f_p \phi_p(x) \right\|_1.$$

Поэтому  $\left\| \sum_{|p|=M_1}^{M_2} f_p \phi_p(x) \right\|_1 \rightarrow 0$  при  $M_1 \rightarrow +\infty$ , и ряд  $\sum f_p \phi_p(x)$  сходится в  $B_1$  по норме.

Иногда на поставленный вопрос о принадлежности решения пространству  $B_1$  можно ответить с помощью улучшения сходимости ряда. Пусть существует  $v(x)$  со значениями в  $B_1$ , при которой  $\sum f_p \phi_p(x) - v(x) = \sum a_p \phi_p(x)$  и новый ряд сходится в  $B_1$  по норме. Тогда сумма ряда  $\sum f_p \phi_p(x)$  принадлежит  $B_1$ , хотя сам ряд может не сходиться в  $B_1$  по норме. Поясним сказанное на простом примере.

Пусть  $B_1 = C^2((0, 2\pi))$ ,  $\phi = \{\exp(ikt), k = \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , и  $y$  – сумма в  $X_\phi$  ряда  $\sum_{k \neq 0} (k^{-1} + k^{-4}) \exp(ikt)$ . Очевидно, что этот ряд не сходится в  $B_1$ . Однако

$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (-it + i\pi) dt = k^{-1}$  при  $k \neq 0$ ,  $\int_0^{2\pi} (-it + i\pi) dt = 0$ , поэтому ряд Фурье для  $y + it - i\pi$  принимает вид  $\sum_{k \neq 0} k^{-4} \exp(ikt)$ , и его сумма  $v(x)$  принадлежит  $B_1$ .

Тогда  $y = -it + i\pi + v(x)$  (как элементы пространств  $X_\phi$ ), поэтому можно считать, что  $y \in B_1$ .

**Благодарности.** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ - 2030").

### Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. 2-е изд. СПб.: Лань, 2002. 576 с.
3. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. 4-е изд. М.: Наука, 1966. 444 с.
4. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
5. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
6. *Мокейчев В.С., Мокейчев А.В.* Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных I // Изв. вузов. Матем. 1999. №1. С. 25–35.
7. *Бухштаб А.А.* Теория чисел / Под ред. Э.К. Викулиной. М.: Просвещение, 1966. 384 с.
8. *Мокейчев В.С.* Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов // Евразийское научное объединение. 2016. Т. 1, № 10. С. 24–31.
9. *Мокейчев В.С.* Метрические, банаховы, гильбертовы пространства  $\phi_B$ -распределений // Изв. вузов. Матем. 2018. № 5. С. 64–70.
10. *Mokeychev V.S., Sidorov A.M.* Dynamical processes in the space of  $\phi$ -distributions // Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: 13th International Conference, Kazan, Russia, October 20–25, 2020 / Badriev I.B., Banderov V., Lapin S.A. (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Computational Science and Engineering. V. 141. Cham: Springer, 2022, pp. 325–334. doi: 10.1007/978-3-030-87809-2\_25.

11. Мокейчев В.С. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. 226 с.
12. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

Поступила в редакцию 20.12.2022

Принята к публикации 2.05.2023

---

**Мокейчев Валерий Степанович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 35, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *Valery.Mokeichev@kpfu.ru*

**Сидоров Анатолий Михайлович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
ул. Кремлевская, д. 35, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *Anatoly.Sidorov@kpfu.ru*

---

---

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 68–81

---

---

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.68-81

### Fourier Method in the Space of $\phi_B$ -Distributions

*V.S. Mokeichev\**, *A.M. Sidorov\*\**

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: \**Valery.Mokeichev@kpfu.ru*, \*\**Anatoly.Sidorov@kpfu.ru*

Received December 20, 2022; Accepted May 2, 2023

### Abstract

In our previous articles, we introduced and explored the notion of  $\phi_B$ -distributions with values in the Banach space. This offers a new perspective on the theory of solvability of linear problems, which is important for solving partial differential equations, especially equations with deviating arguments. Here, we provide an overview of the theory of such distributions, propose a new approach to justify the use of the Fourier method for solving linear problems, and write out a correctly solvable problem for a system of partial differential equations with deviating arguments.

**Keywords:** differential equation, Fourier method,  $\phi_B$ -distribution,  $(\phi, Y, A, X)$ -solution

**Acknowledgments.** This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

## References

1. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. 5th ed. Moscow, Nauka, 1988. 512 p. (In Russian)
2. Mikhlin S.G. *Kurs matematicheskoi fiziki* [A Course in Mathematical Physics]. 2nd ed. St. Petersburg, Lan', 2002. 576 p. (In Russian)
3. Sobolev S.L. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. 4th ed. Moscow, Nauka, 1966. 444 p. (In Russian)
4. Schwartz L. *Matematicheskie metody dlya fizicheskikh nauk* [Mathematics for the Physical Sciences]. Moscow, Mir, 1965. 412 p. (In Russian)
5. Trenogin B.A. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Nauka, 1980. 496 p. (In Russian)
6. Mokeichev V.S., Mokeichev A.V. A new approach to the theory of linear problems for systems of partial differential equations. I. *Russ. Math.*, 1999, vol. 43, no. 1, pp. 22–32.
7. Buchstab A.A. *Teoriya chisel* [Number Theory]. Moscow, Prosveshchenie, 1966. 384 p. (In Russian)
8. Mokeichev V.S. A space with elements and only them expanding into Fourier series by a given system of elements. *Evrz. Nauchn. Ob'edinenie*, 2016, vol. 1, no. 10. pp. 24–31. (In Russian)
9. Mokeichev V.S. Metric, Banach, Hilbert spaces of  $\phi_B$ -distributions. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 5, pp. 55–60. doi: 10.3103/S1066369X18050080.
10. Mokeichev V.S., Sidorov A.M. Dynamical processes in the space of  $\phi$ -distributions. In: Badriev I.B., Banderov V., Lapin S.A. (Eds.) *Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications: 13th International Conference, Kazan, Russia, October 20–25, 2020*. Ser.: Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Vol. 141. Cham, Springer, 2022, pp. 325–334. doi: 10.1007/978-3-030-87809-2\_25.
11. Mokeichev V.S. *Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami* [Differential Equations with Deviating Arguments]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1985. 226 p. (In Russian)
12. Yoshida K. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. Moscow, Mir, 1967. 624 p. (In Russian)

---

⟨ **Для цитирования:** Мокейчев В.С., Сидоров А.М. Метод Фурье в пространстве  $\phi_B$ -распределений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 68–81. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.68-81. ⟩

⟨ **For citation:** Mokeichev V.S., Sidorov A.M. Fourier method in the space of  $\phi_B$ -distributions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 68–81. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.68-81. (In Russian) ⟩

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.63, 532.61, 66.088

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.82-100

**МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ПОРОШКОВЫХ  
МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА  
В ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННОЙ ПЛАЗМЕ**

*И. В. Цивильский, А. С. Мельников, А. Х. Гильмутдинов*

*Казанский национальный исследовательский технический университет  
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

**Аннотация**

Рассмотрены подходы к математическому моделированию на макро- и мезомасштабе динамики движения частиц металлического порошка в конденсационной камере плазменного реактора, сфероидизации, коагуляции и фазовых переходов, происходящих с частицами. Описаны особенности различных режимов парообразования и конденсации, а также влияние на процесс таких явлений, как броуновское движение и термофорез. Определены параметры процесса, при которых достигается формирование частиц типа «ядро–оболочка». Модель может быть применена при оптимизации и выборе эффективных режимов для обработки и синтеза порошковых материалов в индуктивно-связанной плазме.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, порошковые материалы, индуктивно-связанная плазма, фазовые переходы, сфероидизация, частицы «ядро–оболочка»

**Введение**

С развитием аддитивного производства к исходному порошкообразному сырью стали предъявляться всё более высокие требования для обеспечения изготовления продукции требуемого качества. Способ синтеза и обработки порошковых частиц в индуктивно-связанной плазме (ИСП) открывает большие перспективы и возможности в создании порошковых материалов с соответствующими свойствами. Технология плазменной обработки металлических и керамических порошков позволяет получать частицы идеальной сферической формы и необходимого размера, с заданными гранулометрией, химическим составом, морфологией. Кроме того, большой интерес представляет возможность создания композитных частиц «ядро–оболочка» из различных материалов.

ИСП достигает температуры плавления и испарения порошкового сырья, а также является химически чистым (безэлектродным), что обеспечивает идеальные условия для газофазной обработки частиц без образования оксидов и вредных примесей. Схематично плазменный реактор изображён на рис. 1. Основным элементом является кварцевая горелка 2, где возникает ИСП 4 при воздействии высокочастотного переменного магнитного поля от индукционной катушки 3. Через трубку 1

подаются инертный транспортный газ и исходное порошковое сырьё, которые проходят через область горячей плазмы. Там частицы плавятся и сфероидизируются, либо испаряются и образуют новые частицы в зависимости от условий и режима обработки. Затем в конденсационной камере 5 расплавленные частицы затвердевают и формируется порошковый материал с требуемыми гранулометрическими свойствами и сферическими частицами.

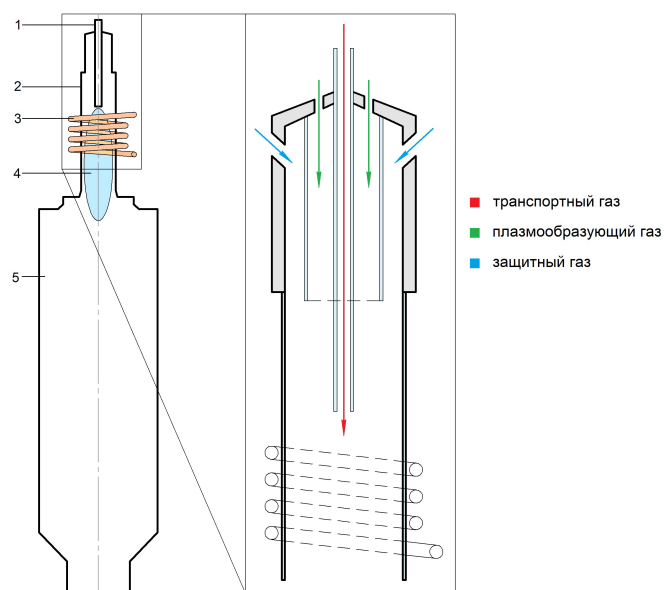


Рис. 1. Слева: схема плазменного реактора: 1 – трубка подачи газопорошковой смеси, 2 – кварцевая горелка плазмотрона, 3 – индукционная катушка, 4 – область индуктивно-связанной плазмы, 5 – конденсационная камера; справа: схема подачи газовых потоков

Однако технология плазменной обработки требует задания определённых параметров процесса. Определение таких параметров, как значения массовых расходов порошкового материала и газов, мощности плазмотрона, температурных режимов, является важнейшей задачей управляемого синтеза порошков и обеспечения эффективности и производительности технологии. Оценить влияние входных параметров на результат обработки предлагается путём разработки математической модели.

## 1. Обзор исследований и моделирования процессов плазменной обработки

Первые математические модели процессов плазменной обработки порошков были разработаны исследовательской группой Boulous et al. [1, 2]. Они изучали ненагруженную аргоновую плазму без учёта движения частиц и подачи порошкового материала в реактор. В работе Proulx et al. [3] рассчитан характер течений газопорошковой смеси в плазме с учётом теплопереноса, но без учёта испарения частиц. Группой Bernardi et al. [4] была разработана трёхмерная модель нестационарных процессов, сопровождающих горение ИСП, и впервые продемонстрировано влияние асимметрии индукционной катушки и турбулентности потока на характер течений в конденсационной камере. В указанных работах не рассматривалась возможность плазменной обработки микроразмерных композитных частиц и не моделировалась их внутренняя структура.

В работе Aghaei et al. [5] подробно изучена индуктивно-связанная плазма, используемая для спектрометрического анализа материалов. Также авторами разработана численная модель динамики наночастиц меди в ИСП. В работе Benson et al. [6] разработаны двумерные модели для расчёта динамики микрочастиц в ИСП с учётом их взаимных столкновений и уменьшения размеров за счёт испарения.

Существующие математические модели масс-спектрометрической и технологической ИСП, в том числе с подачей порошкового сырья, не учитывают полную эволюцию частиц при их обработке и синтезе.

В работе Shemakhin et al. [7] рассматривалась модель ИСП низкого давления, имеющая полезное применение в исследованиях динамики заряженных частиц и электромагнитного поля. Эта модель основана на статистическом и континуальном подходе, в отличие от ИСП атмосферного давления, когда применимы и континуальный подход к описанию течения газа, и приближение локального термодинамического равновесия, при приблизительно равной концентрации ионов и электронов. При ИСП атмосферного давления можно не рассчитывать отдельно динамику ионов в плазме, а воспользоваться уравнением Саха для определения распределения электропроводности в пространстве по температуре.

## 2. Основные решаемые уравнения

### 2.1. Моделирование динамики частиц порошка на макромасштабе

Для численного моделирования динамики параметров порошкового материала в конденсационной камере, дискретные частицы рассматриваются как отдельные материальные точки. Решение осуществляется по алгоритму с учётом следующих шагов:

#### 1) Перенос частиц

Движение отдельных частиц рассчитывается по уравнению переноса

$$\frac{d\vec{u}_p}{dt} = \frac{3}{4}C_d(\vec{u} - \vec{u}_p)|U_{rel}|(\frac{\rho}{\rho_p d_p}) + \vec{g} + \frac{\vec{f}}{m}, \quad (1)$$

где  $\vec{u}_p = (u_p, v_p)$  – скорость частицы,  $u_p$  и  $v_p$  – её осевая и радиальная составляющие,  $\vec{u} = (u, v)$  – скорость течения газа (плазмы),  $u$  и  $v$  – осевая и радиальная составляющие скорости газа (плазмы),  $|U_{rel}| = \sqrt{(u_p - u)^2 + (v_p - v)^2}$  – относительная скорость,  $\rho$  – локальная плотность газа (плазмы),  $\rho_p$  – плотность материала частицы,  $d_p$  – диаметр частицы,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения,  $\vec{f}$  – дополнительные силы,  $m$  – масса частицы порошка.

Коэффициент лобового сопротивления, определяющий режим обтекания частиц, вычисляется следующим образом:

$$C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re}, & Re \leq 0.2, \\ \frac{24}{Re} (1 + \frac{3}{16}Re), & 0.2 < Re \leq 2, \\ \frac{24}{Re} (1 + 0.11Re^{0.81}), & 2 < Re \leq 21, \\ \frac{24}{Re} (1 + 0.189Re^{0.62}), & 21 < Re \leq 200, \end{cases} \quad (2)$$

где  $Re = \frac{\rho d_p}{\eta}|U_{rel}|$  – число Рейнольдса,  $\eta$  – динамическая вязкость газа (плазмы).

Под дополнительными силами  $\vec{f}$  в правой части уравнения (1) подразумеваются броуновское движение  $\vec{F}_{br}$ , сила термофореза  $\vec{F}_{tf}$  и силы взаимодействия заряженных частиц порошка друг с другом и с электромагнитным полем ( $\vec{F}_q$ ,  $\vec{F}_e$ ,  $\vec{F}_L$ ):

$$\vec{f} = \vec{F}_{br} + \vec{F}_{tf} + \vec{F}_q + \vec{F}_e + \vec{F}_L.$$

Броуновское движение позволяет учесть хаотический характер движения частиц порошка:

$$\vec{F}_{br} = \zeta \sqrt{\frac{\pi S_0}{\Delta t}}, \quad (3)$$

где  $\zeta$  – случайное число с нулевым средним,  $S_0 = \frac{216\nu k_B T_g}{\pi^2 \rho d_p^5 (\frac{\rho_p}{\rho})^2 C_C}$ ,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T_g$  – локальная температура газа (плазмы),  $C_C$  – поправочный коэффициент Каннингема,  $\Delta t$  – шаг по времени.

Термофоретическая сила, придающая дополнительное ускорение частицам, движущимся в переменном температурном поле, определяется уравнением

$$\vec{F}_{tf} = -\frac{6\pi d_p \nu^2 C_S (K + C_t \text{Kn})}{\rho(1 + 3C_m \text{Kn})(1 + 2K + 2C_t \text{Kn})} \frac{1}{mT} \nabla T, \quad (4)$$

где  $C_S = 1.17$ ,  $C_t = 2.18$ ,  $C_m = 1.14$ ,  $K = \frac{k}{k_p}$ ,  $k = \frac{15}{4} \mu R$ ,  $k_p$  – теплопроводность частицы,  $\text{Kn} = \frac{2\lambda}{d_p}$  – число Кнудсена,  $\lambda$  – длина свободного пробега молекул газа.

Сила Кулона, возникающая в результате взаимодействия двух заряженных частиц при условии, что частицы максимально сближены между собой, определяется соотношением

$$\vec{F}_q = k_e \frac{q_1 q_2}{(\frac{d_p}{2})^2}, \quad (5)$$

где  $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $q_1$  и  $q_2$  – заряды частиц порошка.

Сила Кулона, возникающая под воздействием электрического поля, генерируемого плазмой, на заряженную частицу, определяется уравнением

$$\vec{F}_e = q\vec{E}, \quad (6)$$

где  $\vec{E}$  – напряжённость электрического поля.

Сила Лоренца, возникающая при движении заряженной частицы в магнитном поле, генерируемом плазмой, определяется уравнением

$$\vec{F}_L = q[\vec{u}_p, \vec{B}], \quad (7)$$

где  $\vec{B}$  – напряжённость магнитного поля.

## 2) Нагрев частиц

Для расчёта тепловых эффектов решается уравнение баланса энергии, для которого полный тепловой поток равен

$$Q = hS(T_g - T_p) + S\sigma_{SB}\epsilon(T_p^4 - T_a^4), \quad (8)$$

где  $h = \frac{\text{Nu}k_g}{d_p}$  – коэффициент конвективного теплообмена,  $\text{Nu}$  – число Нуссельта,  $k_g$  – коэффициент теплопроводности газа (плазмы),  $S$  – площадь поверхности частицы,  $T_p$  – температура частицы,  $\sigma_{SB}$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $\epsilon$  – коэффициент излучения материала частицы,  $T_a$  – температура окружающей среды.

Нагрев частиц в твёрдом и жидком состоянии в определённом интервале температур рассчитывается с учётом (8) как

$$mc_p \frac{dT_p}{dt} = Q, \quad (9)$$

где  $c_p$  – удельная теплоёмкость материала частицы.

### 3) Плавление частиц

Когда температура частицы достигает температуры плавления  $T_m$  материала, начинается процесс перехода частицы в жидкое состояние. С учётом (8) необходимо решить уравнение

$$mH_m \frac{d\varphi}{dt} = Q, \quad (10)$$

где  $H_m$  – удельная теплота плавления материала частицы,  $\varphi$  – безразмерный параметр, соответствующий объёмной доле материала частицы в жидком состоянии; его значение ( $\varphi = 0$ ) соответствует полностью твёрдому состоянию частицы, ( $\varphi = 1$ ) – полностью расплавленному. Температура частицы при плавлении остаётся постоянной до полного её перехода в жидкое состояние ( $\varphi \geq 1$ ).

### 4) Испарение частиц

После полного расплавления частицы ( $\varphi = 1$ ) начинается вынос паров с её поверхности при температуре выше температуры испарения  $T_v$ . Молярный поток паров определяется уравнением

$$I = k_c(c - c_g), \quad (11)$$

где  $k_c$  – коэффициент массопереноса,  $c = \frac{p_{vap}(T_p)}{RT_p}$  – концентрация паров над поверхностью расплавленной частицы,  $c_g = X_i \frac{p_{atm}}{RT_p}$  – концентрация паров в окружающем газе,  $X_i$  – мольная доля компонента,  $p_{atm}$  – атмосферное давление,  $R$  – универсальная газовая постоянная [9]. Давление паров  $p_{vap}$  над искривлённой поверхностью частицы определяется уравнением Кельвина

$$p_{vap} = p_{sat} \exp\left(\frac{4\sigma M}{RT_p \rho_p d_p}\right), \quad (12)$$

где  $p_{sat}$  – давление насыщенных паров над плоской поверхностью, выражаемое из уравнения Антуана

$$\lg(p_{sat}) = A - \frac{B}{T_p}, \quad (13)$$

где  $A$  и  $B$  – коэффициенты для определённых материалов.

Снижение температуры при испарении описывается с учётом (11) выражением

$$\frac{dT_p}{dt} = \frac{ISMH_v}{mc_p}, \quad (14)$$

где  $M$  – молярная масса материала,  $H_v$  – удельная теплота парообразования.

### 5) Кипение частиц

По достижении температуры кипения  $T_b$  начинается процесс парообразования по всему объёму частицы, при этом температура частицы остаётся постоянной до полного её испарения. Диаметр частицы изменяется с учётом (8) согласно выражению

$$\frac{S}{2} \rho_p H_v \frac{d(d_p)}{dt} = -Q. \quad (15)$$

### 6) Динамика паров материала

Облако паров испаряющихся частиц распространяется согласно уравнению переноса плотности пара

$$\frac{d\rho_v}{dt} + (\vec{u}_v \cdot \vec{\nabla})\rho_v = D_\rho \Delta \rho_v + S_{vap}, \quad (16)$$

где  $\vec{u}_v$  – скорость паров,  $D_\rho$  – коэффициент диффузии паров,  $S_{vap}(\vec{r}_p; T_p)$  – источниковое слагаемое, отвечающее за образование паров (при испарении частиц) и его исчезание (при конденсации паров на поверхностях).

## 2.2. Моделирование динамики частицы на мезомасштабе

На мезоуровне рассматриваются морфологические характеристики и внутренняя структура отдельной частицы. Материал частицы с окружающим газом (плазмой) представляется в виде бинарной смеси, движущейся в соответствии с системой уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}}{dt} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{u} + \vec{f}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\vec{u} = (u, v)$  – поле скоростей смеси,  $\rho$  – плотность,  $p$  – динамическое давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\vec{f}$  – внешнее силовое поле.

Гравитация учитывается в соответствии с приближением Буссинеска: для расчёта относительного ускорения  $\vec{g}_r$  вводится относительная плотность смеси, чтобы не вносить неустойчивость в течения [10]

$$\vec{g}_r = \vec{g} \frac{\rho - \rho_0}{\rho}, \quad (18)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_0$  – плотность преобладающего компонента смеси. В этом случае ускорение, подобное возникающему за счёт термофоретической силы для дискретной среды (4), будет также обусловлено градиентом температуры, влияющим на характер течений бинарной смеси. Изменение температуры пропорционально давлению, которое выражается из уравнения состояния следующим образом

$$p_{th} = p_0 \alpha T,$$

где  $p_0$  – стандартное давление,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения материала,  $T$  – температура смеси. В уравнении (17) термофорез учитывается в виде ускорения

$$\vec{a}_{th} = -\frac{\vec{\nabla} p_{th}}{\rho} = -\frac{\vec{\nabla}(p_0 \alpha T)}{\rho} = -\frac{p_0 \alpha}{\rho} \vec{\nabla} T. \quad (19)$$

Ускорение от конвективных течений вносит вклад, когда локальная температура бинарной смеси  $T$  отличается от комнатной температуры  $T_0$ :

$$\vec{a}_{conv} = -\alpha \vec{g}(T - T_0). \quad (20)$$

Поверхностное натяжение вызывает в смеси ускорение

$$\vec{a}_{st} = \sigma \kappa \vec{n}, \quad (21)$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\kappa$  – кривизна поверхности раздела компонентов смеси,  $\vec{n}$  – нормаль к этой поверхности. Таким образом, слагаемое  $\vec{f}$  в уравнении (17) представляет собой сумму ускорений (18)–(21):

$$\vec{f} = \vec{g}_r + \vec{a}_{th} + \vec{a}_{conv} + \vec{a}_{st}.$$

В мезомасштабной модели такие свойства материалов частиц и газа (плазмы), как плотность ( $\rho$ ), теплопроводность ( $k$ ), удельная теплоёмкость ( $c_p$ ) и кинематическая вязкость ( $\nu$ ) задаются соответственно линейными комбинациями, зависящими от безразмерного фазового параметра  $\varphi$ :

$$x = x_1(1 - \varphi) + x_2\varphi,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  – любое из свойств ( $\rho$ ,  $k$ ,  $c_p$ ,  $\nu$ ) соответствующего компонента бинарной смеси, представленное кусочно-заданными функциями температуры.

Для решения уравнения (21) необходимо определить границу раздела фаз и её кривизну. Для двумерной модели кривизна по Менгеру может быть представлена величиной, обратной радиусу окружности, проходящей через смежные точки границы раздела. Предлагается следующий алгоритм расчёта силы поверхностного натяжения: для каждого узла расчётной сетки определяются восемь ближайших точек (рис. 2). Радиус-вектор силы усредняется по этим смежным точкам, причём в материале частицы ( $\varphi = 1$ ), а в газе (плазме)  $\varphi = 0$ :

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^8 \vec{r}_i \varphi(\vec{r}_i)}{\sum_{i=1}^8 \varphi(\vec{r}_i)}.$$

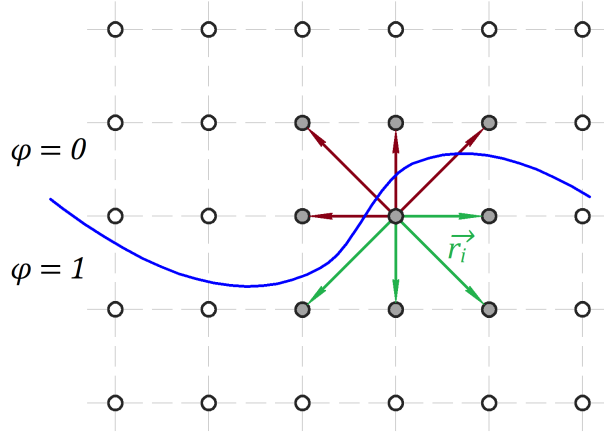


Рис. 2. Иллюстрация к алгоритму определения силы поверхностного натяжения. Синяя линия соответствует границе раздела фаз

Затем вычисляем силу поверхностного натяжения, направление которой совпадает с направлением вектора  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^8 \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^8 1},$$

а вызванное ею ускорение

$$\vec{a}_{st} = \frac{\vec{f}_{st}}{\rho V},$$

где  $V$  – объём ячейки расчётной сетки.

Когда материал частицы достигает температуры плавления  $T_m$ , всё переданное ему тепло расходуется на разрушение кристаллической решётки, а энергия этого процесса равна удельной теплоте плавления. Теплопроводность  $k$  и удельная теплоёмкость  $c_p$  существенно изменяются при фазовом переходе, а температура остаётся неизменной. Влияние удельной теплоты плавления на распределение температуры учитывается путём введения эквивалентной теплоёмкости, которая значительно возрастает вблизи точки плавления [11]. Увеличение теплоёмкости реализуется путём добавления кривой Гаусса к интерполированным табличным значениям теплоёмкости в некотором интервале  $\Delta T$  вблизи температуры плавления. Аналогичный скачок теплоёмкости добавляется вблизи температуры кипения  $T_b$ . Таким образом, выражение для эффективной теплоёмкости можно записать в следующем виде

$$c_p = \text{int}(T) + H_a \exp\left(-\frac{T - T_m}{\Delta T}\right)^2 + H_b \exp\left(-\frac{T - T_b}{\Delta T}\right)^2,$$

где  $\text{int}(T)$  – функция, содержащая интерполированные табличные значения температуры,  $H_a$ ,  $H_b$  – высоты графиков функции Гаусса (рис. 3), при которых интеграл (22) равен удельной теплоте фазового перехода:

$$H_m = \int_{T_m}^{T_m + \Delta T/2} H_a \exp\left(-\frac{T - T_m}{\Delta T}\right)^2 dT,$$

$$H_b = \int_{T_b}^{T_b + \Delta T/2} H_b \exp\left(-\frac{T - T_b}{\Delta T}\right)^2 dT. \quad (22)$$

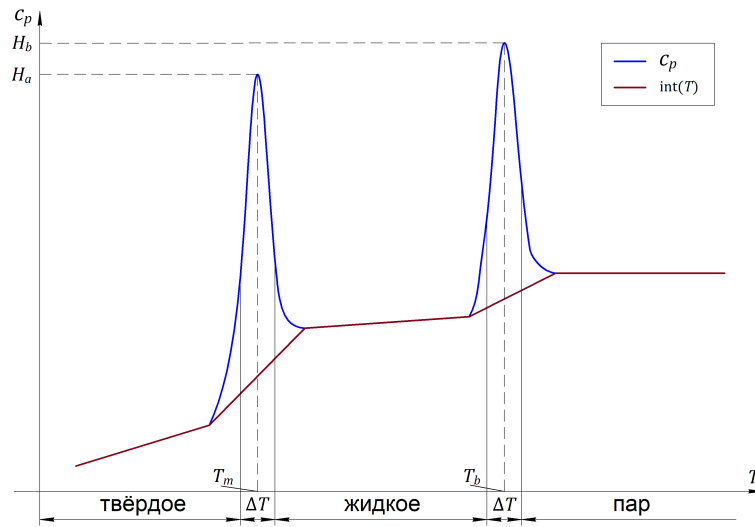


Рис. 3. Геометрическое описание теплоёмкости материала частиц вблизи точек фазового перехода (синяя линия); интерполированные табличные значения теплоёмкости в зависимости от температуры показаны красной линией

Учёт такой эффективной теплоёмкости в уравнении теплопроводности обеспечивает постоянство локальной температуры материала в точке фазового перехода, имитируя расход поглощаемого/выделяющегося тепла на разрушение/формирование кристаллической решётки.

### 3. Аналитические оценки

На макроуровне влияние броуновского движения и термофоретической силы на траектории движения особо крупных частиц (порядка десятков мкм) представляется незначительным, поэтому вклады от них в уравнение движения частицы не учитываются в решении.

По формулам (5)–(7) оценим величины сил, действующих на заряженные частицы порошка, и сравним их с газодинамической силой, определяющей траекторию частицы.

Используя данные из [8] и предположив, что  $\text{Re} = 0.5$ ,  $C_d = 48$ ,  $\rho = 100 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_p = 850 \text{ кг/м}^3$ ,  $d_p = 1 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ,  $\vec{u} = 1 \text{ м/с}$ ,  $\vec{u}_p = 0$ ,  $U_{rel} = 1 \text{ м/с}$ ,  $q = 30000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ ,  $k_e = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $\vec{B} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$ ,  $\vec{E} = 1 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ , сравним силу, действующую на частицу со стороны потока газа:

$$\frac{3}{4} C_d (u - u_p) |U_{rel}| \left( \frac{\rho}{\rho_p d_p} \right) m = \frac{3}{4} 48 \left( \frac{100}{850 \cdot 10^{-5}} \right) \frac{850\pi}{6(10^{-5})^3} \text{ Н} = 1.88 \cdot 10^{-7} \text{ Н},$$

кулоновскую силу взаимодействия частиц между собой:

$$F_q = k_e \frac{q^2}{(\frac{d_p}{2})^2} = 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{(30000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(\frac{1 \cdot 10^{-5}}{2})^2} \text{ Н}, = 3.69 \cdot 10^{-21} \text{ Н},$$

а также силы Кулона и Лоренца, действующие со стороны электромагнитного поля:

$$F_e = qE = 30000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^4 \text{ Н}, = 4.81 \cdot 10^{-11} \text{ Н},$$

$$F_L = qu_p B = 30000 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}, = -2.4 \cdot 10^{-17} \text{ Н}.$$

Как можно заметить, влияние электростатических сил для достаточно крупных порошковых частиц (100 мкм) будет пренебрежимо мало по сравнению с газодинамическими силами (газодинамическая сила превышает силы электромагнитного воздействия более, чем в 10 000 раз), поэтому эти явления в данной работе также не учитываются. Однако в случае мелких частиц (менее 10 мкм) электростатическая сила может оказывать решающее влияние на их траектории, что отмечается другими авторами [8].

#### 4. Программная реализация и результаты численного моделирования

##### 4.1. Макромасштаб на MATLAB

Уравнения (1), (8)–(10), (15)–(16) решим методом конечных разностей по неявной схеме.

По уравнению (1) введём обозначения

$$A = \frac{3}{4} C_d |U_{rel}| \left( -\frac{\rho}{\rho_p d_p} \right), \quad B = g \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_p} \right).$$

Тогда

$$\frac{du_p}{dt} = A(u - u_p) + B,$$

и в конечных разностях

$$u_p^{(n)} - u_p^{(n-1)} = (Au - Au_p^{(n)} + B)dt.$$

Пусть  $C = Au + B$ . Итерационным методом Гаусса–Зейделя будем решать следующее выражение для скорости

$$u_p^{(n)} = \frac{u_p^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt}.$$

По уравнениям (8)–(9) введём обозначения

$$A = \frac{hS}{mc_p}, \quad B = -\frac{S}{mc_p} \sigma_{SB} \varepsilon (T_p^4 - T_a^4).$$

Тогда

$$\frac{dT_p}{dt} = A(T_g - T_p) + B,$$

или в конечных разностях

$$T_p^{(n)} - T_p^{(n-1)} = (AT_g - AT_p^{(n)} + B)dt.$$

Пусть  $C = AT_p + B$ . Итерационным методом Гаусса–Зейделя будем вычислять следующее выражение для нагрева частиц

$$T_p^{(n)} = \frac{T_p^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt}.$$

По уравнению (10) введём обозначения

$$A = 0, \quad B = -\frac{Q}{mH_m}, \quad C = A\varphi + B.$$

Тогда

$$\frac{d\phi}{dt} = A(\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)}) + B = B = C,$$

или в конечных разностях

$$\phi^{(n)} - \phi^{(n-1)} = Cdt.$$

Итерационным методом Гаусса–Зейделя вычислим следующее выражение для плавления частиц

$$\varphi^{(n)} = \frac{\varphi^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt}.$$

По уравнению (15) введём обозначения

$$A = 0, \quad B = C = \frac{Q}{-\frac{S}{2}\rho_p H_v}.$$

Тогда

$$\frac{dd_p}{dt} = C,$$

или в конечных разностях

$$d_p^{(n)} - d_p^{(n-1)} = Cdt.$$

Итерационным методом Гаусса–Зейделя вычислим следующее выражение для кипения частиц

$$d_p^{(n)} = \frac{d_p^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt}.$$

По уравнению (16) введём обозначения

$$A = 4\frac{D_\rho}{h^2}, \quad advect = \frac{u_{vx}(\rho_v^{(x+1,z)} - \rho_v^{(x-1,z)})}{2h} + \frac{u_{vz}(\rho_v^{(x,z+1)} - \rho_v^{(x,z-1)})}{2h},$$

$$B = \frac{\rho_v T_p}{dtT_g} - advect, \quad C = A \frac{\rho_v^{(x+1,z)} + \rho_v^{(x-1,z)} + \rho_v^{(x,z+1)} + \rho_v^{(x,z-1)}}{4}.$$

Тогда

$$\frac{\rho_v^{(n)} - \rho_v^{(n-1)}}{dt} = C - A\rho_v^{(n)}.$$

Итерационным методом Гаусса–Зейделя найдем следующее выражение для динамики паров

$$\rho_v^{(n)} = \frac{\rho_v^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt}.$$

Таким образом, основные уравнения сводятся к выражению

$$a^{(n)} = \frac{a^{(n-1)} + Cdt}{1 + Adt},$$

для которого может быть реализована универсальная функция-решатель на языке *MATLAB*.

С помощью разработанной математической модели была выполнена серия вычислительных экспериментов для оценки траекторий и динамики движения частиц порошка, их нагрева, плавления, испарения и конденсации в конденсационной камере при известных полях распределения температуры, давления, скоростей газовых потоков. Рассматривались частицы порошка никеля диаметром 40 мкм и оксида алюминия диаметром 70 мкм. Начальная скорость частиц (скорость инъекции) 60 м/с. Рассматриваемая конфигурация технологической ИСП характеризуется параметрами [12], указанными в табл. 1. Давление в реакторе поддерживается атмосферное.

Табл. 1

Расходы газа в технологической ИСП

| Газовый поток                          | Расход, л/мин |
|----------------------------------------|---------------|
| Транспортный (несущий) газ             | 3             |
| Плазмообразующий (вспомогательный) газ | 20            |
| Защитный (охлаждающий) газ             | 30            |

На рис. 4 представлены результаты моделирования динамики частиц с учётом уравнений (1)–(16): для наглядности показано пять частиц оксида алюминия слева и пять частиц никеля справа. Заметно отклонение частиц от начальной траектории транспортного газового потока, связанное с движением частиц в условиях резкого градиента температуры; при этом по мере испарения частицы теряют массу и отклоняются сильнее из-за меньшей инертности. Также приведено поле распределения паров материала испарившихся частиц. Из-за характерных течений в конденсационной камере облако паров приобретает сердцевидную форму.

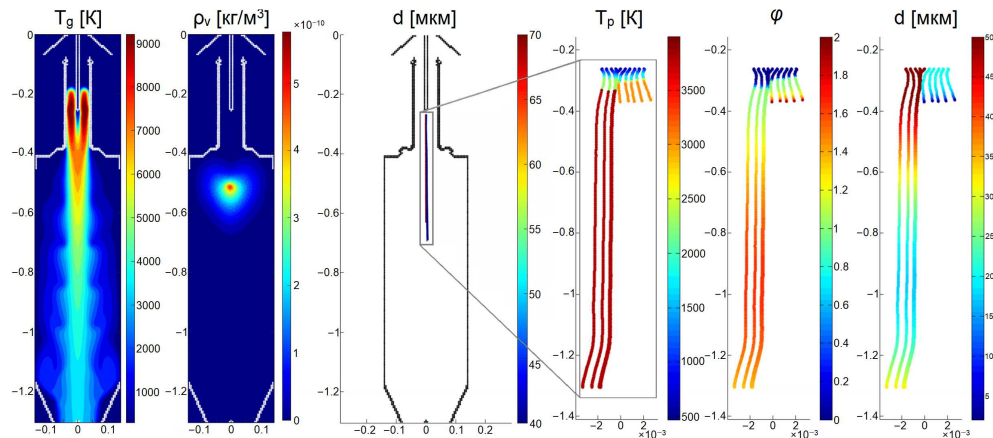


Рис. 4. Поле температуры газа (плазмы)  $T_g$ , поле плотности паров  $\rho_v$  материала частиц, траектории частиц в конденсационной камере. Цвет графиков соответствует диаметру частиц  $d$ , их температуре  $T_p$  вдоль траекторий, агрегатному состоянию  $\varphi$  (0 – твёрдое, 1 – жидкое, 2 – газообразное)

Цвет частиц на графике соответствует их температуре, агрегатному состоянию и диаметру. Конденсация паров на поверхности частиц возможна при определённых значениях температуры и давления. Так, частицы оксида алюминия, испарившись до определённого диаметра, снова начинают увеличиваться за счёт образования плёночного покрытия из паров никеля. Это режим гетерогенной

конденсации, когда пар превращается в жидкость только при контакте с холодной поверхностью. Таким образом возможно формирование двухкомпонентных частиц «ядро–оболочка».

#### 4.2. Макромасштаб в ANSYS

Для сопоставления результатов в ходе решения связанной электромагнитно-теплогидродинамической задачи были рассчитаны пространственные распределения температуры, скорости и давления процесса плазменной обработки порошковых материалов. Вычислительные эксперименты проводились в системе моделирования ANSYS, позволяющей настроить и протестировать 3D-модель испарения частиц в условиях, приближенных к ИСП.

Использована модель дискретной фазы (*Discrete Phase*), а испаряемый материал частиц был представлен в виде смеси газа и пара (*Species Model*). Вязкость жидкостей и газа рассмотрена в рамках стандартной  $k-\varepsilon$  модели турбулентности. Для учёта давления насыщенных паров при испарении решается расширенное уравнение Антуана (13) с дополнительными коэффициентами. Электромагнитные эффекты решались с использованием ранее разработанной модели ИСП [12], основанной на пользовательских функциях (*User-Defined Functions*).

Рассмотрена динамика температуры ненагруженной ИСП и ИСП с введёнными в неё частицами порошка из никеля. На рис. 5 приведены распределения полей массовой доли никеля и температуры. На рис. 5 а–б наблюдается влияние потока частиц и их паров на температуру плазмы. Также заметно вращение плазмы и паров вокруг оси реактора. На рис. 5 в представлено горение плазмы без введения частиц. В этом случае быстрого охлаждения плазмы не происходит.

Рассмотрение задачи в стационарном режиме (рис. 5 г–д) подразумевает, что частицы подаются непрерывным потоком с расходом в  $3 \cdot 10^{-5}$  кг/с. При движении смеси газа и частиц учитывается взаимодействие частиц с плазмой: горячий поток нагревает и испаряет частицы порошка, а они, в свою очередь, локально охлаждают плазму вдоль своих траекторий, особенно в области интенсивного испарения частиц. В случае с введёнными частицами в усреднённом температурном поле по центру плазменного потока наблюдается холодный след, обусловленный локальным охлаждением плазмы облаком паров от частиц.

Динамика параметров частиц (диаметр, температура, модуль скорости и время пребывания) вдоль их траектории (рис. 6 д–ж) демонстрирует сходство с результатами, полученными из расчётов в MATLAB (раздел 4.1).

#### 4.3. Мезомасштаб на Python

На мезомасштабе выполнены расчёты процессов плавления и сфероидизации частиц. Рассматриваются отдельные частицы никеля неправильной (несферической) формы (рис. 7). Граничные условия следующие: на боковых и верхних стенках расчётной области задана постоянная температура 3000 К; на нижней стенке – граничное условие Неймана, имитирующее локальное охлаждение газового потока из-за присутствия частиц. Под действием силы поверхностного натяжения частицы становятся более округлыми; при этом они быстрее оплаваются в верхней части за счёт градиента температуры. Таким образом имитируется режим обтекания нисходящим потоком горячего газа (плазмы).

Также наблюдается взаимное притяжение двух частиц. Движущая сила вызвана градиентом давления, который прямо пропорционален температуре. Частицы коагулируют, а затем начинают сфероидизироваться как единая частица. По такому же принципу происходит гетерогенная конденсация, когда образовавшиеся из

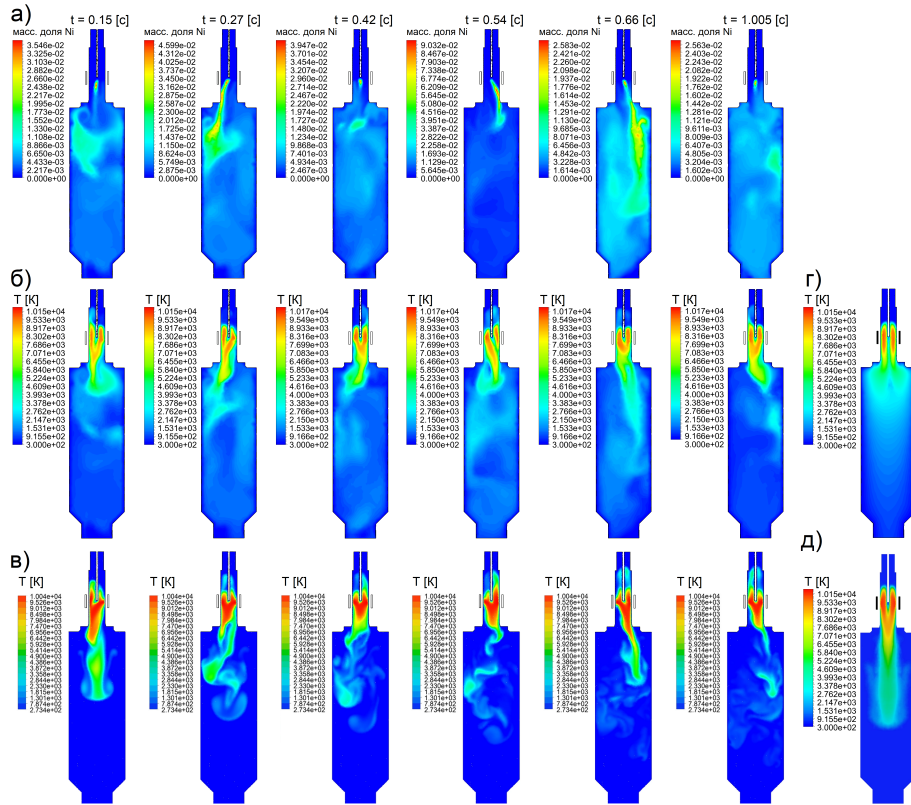


Рис. 5. Рассчитанная массовая доля никеля а) и температура плазмы б) при испарении частиц; в) температура плазмы без испарения частиц; усреднённое по времени поле температуры ненагруженной плазмы г) и плазмы с введёнными частицами порошка никеля д)

паров микрокапли материала (зародыши) осаждаются на более холодной поверхности частицы-ядра, образуя тем самым однородное плёночное покрытие.

Для достижения гетерогенной конденсации (рис. 8 а) были заданы соответствующие граничные условия: концентрация паров материала частиц на верхней стенке выражена через значение фазы ( $\varphi = 0.8$ ). Таким образом может быть получено достаточно однородное плёночное покрытие. Толщина плёнки сверху и снизу частицы оказалась разной из-за разницы в скоростях течений газа (плазмы).

Обнаружен и негативный эффект в условиях повышенной концентрации насыщенных паров в окружающем частицу газе (плазме): конденсация паров происходит не на поверхности, а в объёме газа (плазмы) в виде мелких капель. За счёт термофоретической силы эти капли притягиваются к относительно холодной частице, образуя так называемые «сателлиты» неправильной формы. Подобные частицы представляют собой дефект производства и негативно влияют на технологические свойства порошкового материала (рис. 8 б).

Совместное применение моделей на макро- и мезомасштабе со взаимной интерполяцией значений параметров и граничных условий позволит получить связанную многомасштабную модель плазменного синтеза и обработки в ИСП порошковых материалов, в том числе композитных частиц «ядро-оболочка», а также оценить характеристики конечного продукта на основе входных параметров установки и свойств исходного сырья.

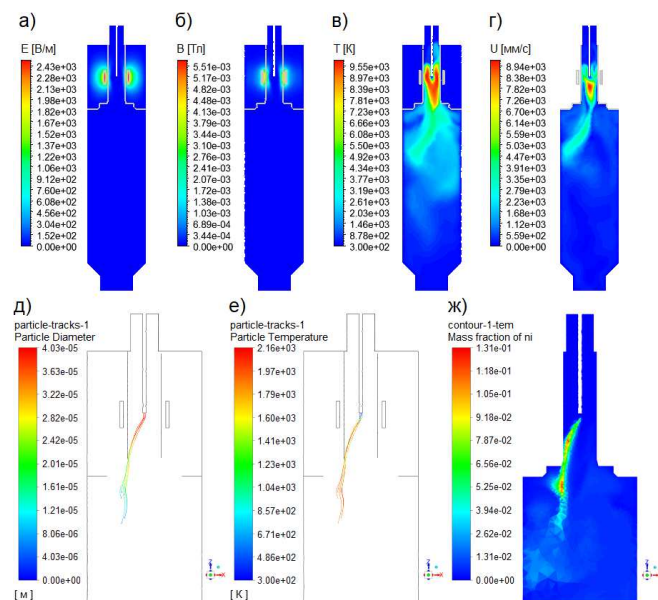


Рис. 6. Рассчитанные поля в реакторе: а) электрическое; б) магнитное; в) температура; г) модуль скорости. Параметры частиц вдоль их траекторий: д) диаметр; е) температура; ж) массовая доля никеля

## 5. Обсуждение результатов

В результате исследования была разработана математическая модель на двух масштабных уровнях. Моделирование на макромасштабе выполнено на языке программирования *MATLAB*. Реализован конечно-разностный решатель дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию дискретных частиц в конденсационной камере плазменного реактора. Учтено влияние броуновской силы и термофореза. Процесс парообразования рассмотрен с точки зрения классического подхода (кипение происходит во всём объёме частицы при критической температуре) и согласно кинетической теории (испарение паров материала частицы с поверхности полностью расплавленной частицы при любой температуре).

Выполнено сопоставление с моделью в *ANSYS*: сравнивалось горение ненагруженной ИСП и ИСП с введёнными частицами порошка никеля. Наблюдалось локальное охлаждение газа (плазмы) за счёт испарения частиц. Эти результаты качественно подтверждают результаты модели на *MATLAB*.

Модель на мезомасштабе реализована на языке программирования *Python*. Частица в окружающем газе рассматривалась как непрерывная бинарная смесь. Рассмотрены явления сфероидизации, коагуляции нескольких частиц, фазовые переходы, а также образование частиц-сателлитов и частиц «ядро-оболочка» с плёночным покрытием.

## Заключение

Для определения особенностей формирования сферических двухкомпонентных частиц в зависимости от макроскопических условий синтеза и обработки была разработана многомасштабная математическая модель динамики частиц порошка в потоках горячего газа (образующихся при горении ИСП), учитывающая плавление, испарение, конденсацию, а также термодиффузию и осаждение паров на поверхности частиц. Рассмотрена возможность образования плёночного покрытия

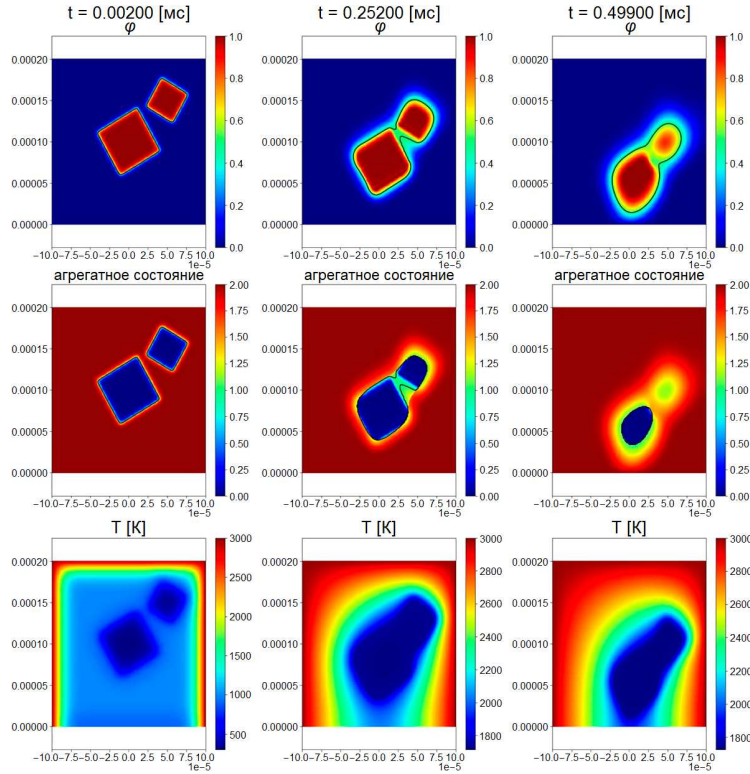


Рис. 7. Результаты моделирования коагуляции и сфероидизации двух частиц в разные моменты времени. Представлены поля фазы  $\varphi$ , агрегатного состояния и температуры  $T$

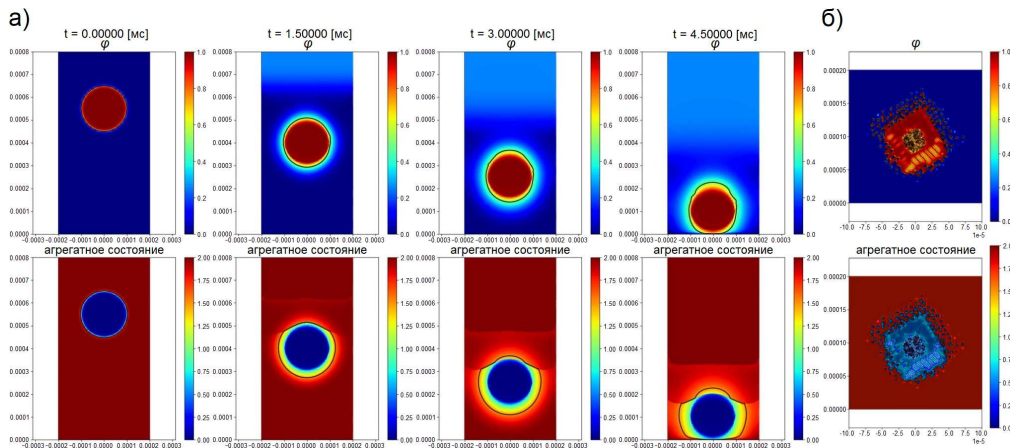


Рис. 8. а) гетерогенное осаждение паров на частицу-ядро диаметром 200 мкм. Представлены поля фазы  $\varphi$  и агрегатного состояния; б) формирование частицы-спутника при гомогенной конденсации паров

в результате гетерогенной конденсации паров. С помощью разработанной модели могут быть определены температурные режимы вдоль траектории частиц, вводимых в плазменный реактор. Для этого модель дополнена уравнениями на динамику частиц.

Применив в качестве граничных условий изменяющиеся физические параметры газа (плазмы) вокруг частицы вдоль её траектории движения, можно изучить характер фазовых переходов и сфероидизации, а также микроструктуру частицы. В дальнейших исследованиях такой подход может иметь некоторые преимущества перед экспериментальными исследованиями в выборе оптимальных режимов плазменной обработки порошковых материалов.

**Благодарности.** Научные исследования проведены при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Рег. номер НИОКТР АААА-А20-120122490071-1).

### Литература

1. *Boulos M.I.* The inductively coupled R.F. (radio frequency) plasma // *Pure Appl. Chem.* 1985. V. 57, No 9. P. 1321–1352. doi: 10.1351/pac198557091321.
2. *Boulos M.I., Gagne R., Barnes R.M.* Effect of swirl and confinement on the flow and temperature fields in an inductively coupled r.f. plasma // *Can. J. Chem. Eng.* 1980. V. 58, No 3. P. 367–376. doi: 10.1002/cjce.5450580313.
3. *Proulx P., Mostaghimi J., Boulos M.I.* Plasma-particle interaction effects in induction plasma modeling under dense loading conditions // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1985. V. 28, No 7. P. 1327–1336. doi: 10.1016/0017-9310(85)90163-2.
4. *Bernardi D., Colombo V., Ghedini E., Mentrelli A.* Three-dimensional modeling of inductively coupled plasma torches // *Pure Appl. Chem.* 2005. V. 77, No 2. P. 359–372. doi: 10.1351/pac200577020359.
5. *Aghaei M., Bogaerts A.* Particle transport through an inductively coupled plasma torch: Elemental droplet evaporation // *J. Anal. At. Spectrom.* 2015. V. 31, No 3. P. 631–641. doi: 10.1039/C5JA00162E.
6. *Benson C.M., Gimelshein S.F., Levin D.A., Montaser A.* Simulation of droplet heating and desolvation in an inductively coupled plasma – Part I // *Spectrochim. Acta, Part B.* 2001. V. 56, No 7. P. 1097–1112. doi: 10.1016/S0584-8547(01)00233-6.
7. *Shemakhin A.Yu., Zheltukhin V.S.* Mathematical modelling of RF plasma flow at low pressures with 3d electromagnetic field // *Adv. Mater. Sci. Eng.* 2019. V. 2019. art. 7120217. doi: 10.1155/2019/7120217.
8. *Файрушин И.И.* Аналитический расчет состава термической пылевой плазмы с металлическими частицами // *Химия высоких энергий.* 2020. Т. 54, № 6. с. 497–500. doi: 10.31857/S0023119320060042.
9. Sect. 16.4: Mixture Model Theory // *ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide.* Ch. 16: Multiphase Flows. Canonsburg, PA: ANSYS, Inc., 2009. URL: [www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node308.htm](http://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node308.htm).
10. *Gray D.D., Giorgini A.* The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases // *Int. J. Heat Mass Transfer.* 1976. V. 19, No 5. P. 545–551. doi: 10.1016/0017-9310(76)90168-X.
11. *Luo Z., Zhao Y.* A survey of finite element analysis of temperature and thermal stress fields in powder bed fusion Additive Manufacturing // *Addit. Manuf.* 2018. V. 21. P. 318–332. doi: 10.1016/j.addma.2018.03.022.
12. *Tsilvitskiy I.V., Gilmudinov A.Kh., Nikiforov S.A., Rublya R.S., Khamidullin B.A., Melnikov A.S., Nagulin K.Yu.* An experimentally verified three-dimensional non-stationary fluid model of unloaded atmospheric pressure inductively coupled plasmas // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2020. V. 53, No 45. art. 455203. doi: 10.1088/1361-6463/aba45f.

Поступила в редакцию 16.11.2022

Принята к публикации 24.04.2023

**Цивильский Илья Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры лазерных и аддитивных технологий

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *icivv@mail.ru*

**Мельников Антон Сергеевич**, аспирант, инженер кафедры лазерных и аддитивных технологий

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *ASMelnikov@kai.ru*

**Гильмутдинов Альберт Харисович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой лазерных и аддитивных технологий

Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А.Н. Туполева – КАИ

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *Albert.Gilmutdinov@kai.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 82–100

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.82-100

# Multiscale Modeling of Powder Materials Processing for Additive Manufacturing in Inductively Coupled Plasma

*I.V. Tsivilsky\**, *A.S. Melnikov\*\**, *A.Kh. Gilmutdinov\*\*\**

*Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev – KAI,*

*Kazan, 420111 Russia*

E-mail: *\*icivv@mail.ru*, *\*\*ASMelnikov@kai.ru*, *\*\*\*Albert.Gilmutdinov@kai.ru*,

Received November 16, 2022; Accepted April 24, 2023

## Abstract

This article analyzes the approaches to macro- and mesoscale computational modeling of the dynamics of metal powder particles motion in the condensation chamber of a plasma reactor, spheroidization, coagulation, and phase transitions in particles. The features of different regimes of vaporization and condensation were described. The influence of phenomena such as Brownian motion and thermophoresis on the process was explored. The parameters of the process at which the formation of core-shell particles occurs were determined. The model can be used to optimize and select the effective regimes for the processing and synthesis of powder materials in inductively coupled plasma.

**Keywords:** computational modeling, powder materials, inductively coupled plasma, phase transitions, spheroidization, core-shell particles

**Acknowledgments.** This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (R&D project no. AAAA-A20-120122490071-1).

### Figure Captions

Fig. 1. Left part: plasma reactor diagram: 1 – gas-powder mixture supply tube, 2 – quartz plasma torch burner, 3 – inductive coil, 4 – inductively coupled plasma area, 5 – condensation chamber; right part: diagram of gas supply.

Fig. 2. Illustration for the algorithm to determine the surface tension force. The blue line corresponds to the phase boundary.

Fig. 3. Geometric description of the heat capacity of the particle material near the phase transition points (blue line); the red line shows interpolated reference values of the heat capacity depending on temperature.

Fig. 4. Gas (plasma) temperature field  $T_g$ , vapor density field  $\rho_v$  of the particle material, particle trajectories in the condensation chamber. The color of the graphs corresponds to the diameter of particles  $d$ , their temperature  $T_p$  along the trajectories, and the state of aggregation  $\varphi$  (0 – solid, 1 – liquid, 2 – gaseous).

Fig. 5. Calculated mass fraction of nickel a) and plasma temperature b) during particle evaporation; c) plasma temperature without particle evaporation; time-averaged temperature field of unloaded plasma d) and plasma with introduced nickel powder particles e).

Fig. 6. Calculated fields in the reactor: a) electric; b) magnetic; c) temperature; d) speed module. Parameters of particles along their trajectories: e) diameter; f) temperature; g) mass fraction of nickel.

Fig. 7. Simulation results of the coagulation and spheroidization of two particles at different times. The fields of phase  $\varphi$ , state of aggregation, and temperature  $T$  are shown.

Fig. 8. a) heterogeneous vapor deposition onto the core particle with a diameter of 200  $\mu\text{m}$ . The fields of phase  $\varphi$  and state of aggregation are shown; b) formation of a satellite particle during homogeneous condensation of vapors.

### References

1. Boulos M.I. The inductively coupled R.F. (radio frequency) plasma. *Pure Appl. Chem.*, 1985, vol. 57, no. 9, pp. 1321–1352. doi: 10.1351/pac198557091321.
2. Boulos M.I., Gagne R., Barnes R.M. Effect of swirl and confinement on the flow and temperature fields in an inductively coupled r.f. plasma. *Can. J. Chem. Eng.*, 1980, vol. 58, no. 3, pp. 367–376. doi: 10.1002/cjce.5450580313.
3. Proulx P., Mostaghimi J., Boulos M.I. Plasma-particle interaction effects in induction plasma modeling under dense loading conditions. *Int. J. Heat Mass Transfer.*, 1985, vol. 28, no. 7, pp. 1327–1336. doi: 10.1016/0017-9310(85)90163-2.
4. Bernardi D., Colombo V., Ghedini E., Mentrelli A. Three-dimensional modeling of inductively coupled plasma torches. *Pure Appl. Chem.*, 2005, vol. 77, no. 2, pp. 359–372. doi: 10.1351/pac200577020359.
5. Aghaei M., Bogaerts A. Particle transport through an inductively coupled plasma torch: Elemental droplet evaporation. *J. Anal. At. Spectrom.*, 2015, vol. 31, no. 3, pp. 631–641. doi: 10.1039/C5JA00162E.
6. Benson C.M., Gimelshein S.F., Levin D.A., Montaser A. Simulation of droplet heating and desolvation in an inductively coupled plasma – Part I. *Spectrochim. Acta, Part B*, 2001, vol. 56, no. 7, pp. 1097–1112. doi: 10.1016/S0584-8547(01)00233-6.
7. Shemakhin A.Yu., Zheltukhin V.S. Mathematical modelling of RF plasma flow at low pressures with 3d electromagnetic field. *Adv. Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 2019, art. 7120217. doi: 10.1155/2019/7120217.
8. Fairushin I.I. Analytical calculation of the composition of thermal dusty plasma with metal particles. *High Energy Chem.*, 2020, vol. 54, no. 6, pp. 477–479. doi: 10.1134/S0018143920060041.

9. Sect. 16.4: Mixture Model Theory. *ANSYS FLUENT 12.0 Theory Guide*. Ch. 16: Multiphase Flows. Canonsburg, PA, ANSYS, Inc., 2009. URL: [www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node308.htm](http://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/th/node308.htm).
10. Gray D.D., Giorgini A. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1976, vol. 19, no. 5, pp. 545–551. doi: 10.1016/0017-9310(76)90168-X.
11. Luo Z., Zhao Y. A survey of finite element analysis of temperature and thermal stress fields in powder bed fusion Additive Manufacturing. *Addit. Manuf.*, 2018, vol. 21, pp. 318–332. doi: 10.1016/j.addma.2018.03.022.
12. Tsivilskiy I.V., Gilmutdinov A.Kh., Nikiforov S.A., Rublya R.S., Khamidullin B.A., Melnikov A.S., Nagulin K.Yu. An experimentally verified three-dimensional non-stationary fluid model of unloaded atmospheric pressure inductively coupled plasmas. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 2020, vol. 53, no. 45, art. 455203. doi: 10.1088/1361-6463/aba45f.

---

**Для цитирования:** Цивильский И.В., Мельников А.С., Гильмутдинов А.Х. Многомасштабное моделирование процессов обработки порошковых материалов для аддитивного производства в индуктивно-связанной плазме // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 82–100. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.82-100.

**For citation:** Tsivilsky I.V., Melnikov A.S., Gilmutdinov A.Kh. Multiscale modeling of powder materials processing for additive manufacturing in inductively coupled plasma. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 82–100. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.82-100. (In Russian)

