



ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Казанского университета

серия

ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Uchenye Zapiski
Kazanskogo Universiteta

Seriya Fiziko-Matematicheskie
Nauki

2025

Том 167

Книга 4

Volume 167

Issue 4

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

Ученые записки Казанского университета.
Серия Физико-математические науки
рецензируемый научный журнал

2025
Т. 167, кн. 4

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенюва – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

С.Р. Насыров – д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.Х. Салахов – д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстюков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»:
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 17.12.2025. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 23,6.
Уч.-изд. л. 17,13. Тираж 300 экз. Заказ 35/12

Отпечатано в типографии Издательства Казанского университета
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан,
г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.

Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

Proceedings of Kazan University.

Physics and Mathematics Series

Peer-Reviewed Scientific Journal

2025

Vol. 167, No. 4

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia

Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; website: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: December 17, 2025. Page size: 60×84/8.

Offset printing. Conventional printing sheet: 23,6.

Publisher's signature: 17,13. Circulation: 300 copies. Order: 35/12

Printed in KFU Publishing House

ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan,

Republic of Tatarstan, 420008 Russia

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Abazari R., Yildirim K.</i> Numerical study of the 2D Sivashinsky equation for binary alloy solidification problems	607
<i>Базилевский М.П.</i> О разрешимости оптимизационной задачи построения вполне интерпретируемых линейных регрессий	627
<i>Дарвиш Талей М.Ф., Муратов М.А.</i> Алгебраические и порядковые свойства оператора блочного проектирования на алгебре измеримых операторов	641
<i>Еремин И.В., Салимьянова Д.Р., Поташев К.А.</i> Учет несовершенства вертикальных скважин в двумерной модели пласта	655
<i>Zhelyazov T.</i> Numerical analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum bearings	675
<i>Калуцкий Л.А.</i> Эффективный метод анализа гибких пористых функционально-градиентных наноконических секторных панелей с учетом температурных и электрических полей	689
<i>Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D., Tagirov L.R., Hemmida M., Krug von Nidda H.-A., Croitori D., Seidov Z.Yu., Tsurkan V., Tayurskii D.A.</i> DFT prediction of metallic conductivity and experimental investigation of air-induced degradation effects in quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe ₂	705
<i>Кузнецов С.А.</i> Математически корректная постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, численно-аналитические методы и результаты решения задач	719
<i>Максеев А.Е., Бодягина К.С., Жигалов М.В., Крысько В.А.</i> Упругопластический изгиб пластинок с центральным отверстием в трехмерной постановке	744
<i>Нуриев А.Н., Баймуратова А.Р., Зайцева О.Н.</i> Асимптотическое исследование пропульсивного движения машущего цилиндрического крыла с эллиптической формой сечения	759
<i>Фаррахов Б.Ф.</i> Микроструктуры на поверхности кремния для повышения эффективности солнечных элементов, сформированные мощным световым импульсом	777
<i>Frolov O.V., Safin R.N., Tsoy T.G., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A.</i> Formation control of unmanned aerial vehicle swarms for outdoor monitoring in search and rescue tasks	786

CONTENTS

<i>Abazari R., Yildirim K.</i> Numerical study of the 2D Sivashinsky equation for binary alloy solidification problems	607
<i>Bazilevskiy M.P.</i> On the solvability of the optimization problem for constructing quite interpretable linear regressions	627
<i>Darwish Taleb M.F., Muratov M.A.</i> Algebraic and order properties of a block projection operator on the algebra of measurable operators	641
<i>Eremin I.V., Salimyanova D.R., Potashev K.A.</i> Accounting for vertical well imperfection in a two-dimensional reservoir model	655
<i>Zhelyazov T.</i> Numerical analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum bearings	675
<i>Kalutsky L.A.</i> An effective method for analyzing flexible porous functionally graded nanoconical sector panels taking into account temperature and electric fields	689
<i>Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D., Tagirov L.R., Hemmida M., Krug von Nidda H.-A., Croitori D., Seidov Z.Yu., Tsurkan V., Tayurskii D.A.</i> DFT prediction of metallic conductivity and experimental investigation of air-induced degradation effects in quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe ₂	705
<i>Kuznetsov S.A.</i> Mathematically rigorous formulation of contact problems for thin-walled structural elements, numerical and analytical methods, and solution results	719
<i>Makseev A.E., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.</i> Elastic-plastic bending of plates with a central hole in a three-dimensional setting	744
<i>Nuriev A.N., Baimuratova A.R., Zaitseva O.N.</i> Asymptotic study of the propulsive motion of a flapping cylindrical wing with an elliptical cross-section	759
<i>Farrakhov B.F.</i> Microstructures on silicon surface produced by a powerful light pulse to enhance solar cell efficiency	777
<i>Frolov O.V., Safin R.N., Tsoy T.G., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A.</i> Formation control of unmanned aerial vehicle swarms for outdoor monitoring in search and rescue tasks	786

ORIGINAL ARTICLE

UDC 519.6

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.607-626>

Numerical study of the 2D Sivashinsky equation for binary alloy solidification problems

R. Abazari¹ ✉, K. Yildirim²

¹*Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran*

²*Muş Alparslan University, Muş, Turkey*

✉ abazari-r@uma.ac.ir

Abstract

Binary alloy solidification involves the transition of a liquid mixture of two metals into a solid phase and presents several complex challenges that researchers aim to address. These problems can be categorized into issues related to thermodynamics, diffusion, and macro- and microstructural evolution during the cooling process. The Sivashinsky equation is a fourth-order nonlinear partial differential equation that arises in the mathematical modeling of binary alloy solidification problems. In this article, we apply the Fourier spectral method combined with the Euler method to numerically solve the 2D Sivashinsky equation with periodic boundary conditions. A numerical study of the Sivashinsky equation is important because its analytical solution does not exist, except for trivial solutions. The error estimation of the approximate solution is provided. Furthermore, we show, both theoretically and numerically, that the proposed method preserves the decreasing mass condition of the obtained numerical solutions. Finally, to validate the theoretical results, three examples with different initial conditions are investigated.

Keywords: Sivashinsky equation, alloy solidification, Fourier spectral method, Euler method, mass conservation

For citation: Abazari R., Yildirim K. Numerical study of the 2D Sivashinsky equation for binary alloy solidification problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 607–626. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.607-626>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.6

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.607-626>

Численное исследование двумерного уравнения Сивашинского для задач затвердевания бинарных сплавов

Р. Абазари¹✉, К. Йилдирим²¹*Кафедра математики, Университет Мохатега Ардебил, г. Ардебиль, Иран*²*Университет Муш Альпарслан, г. Муш, Турция*✉ abazari-r@uma.ac.ir

Аннотация

Затвердевание бинарных сплавов представляет собой фазовый переход смеси двух металлов из жидкого состояния в твердое с образованием бикомпонентного материала. Изучение данного процесса связано с решением ряда сложных задач, являющихся предметом многих современных исследований в области термодинамики, диффузионного переноса, а также изменения макро- и микроструктуры веществ при охлаждении. Для математического описания затвердевания бинарных сплавов используется уравнение Сивашинского, которое относится к нелинейным дифференциальным уравнениям четвертого порядка в частных производных. Настоящая статья посвящена решению двумерного уравнения Сивашинского с периодическими граничными условиями методом Эйлера – Фурье. Численное исследование этого уравнения имеет особую значимость, поскольку его аналитические решения возможны только для простейших, тривиальных случаев. Проведена оценка погрешности приближенного решения. Кроме того, результаты теоретического анализа и численных экспериментов показали, что предложенный метод обеспечивает уменьшение массы для всех вычисленных решений. Рассмотрены три примера с различными начальными условиями.

Ключевые слова: уравнение Сивашинского, затвердевание сплавов, спектральный метод Фурье, метод Эйлера, сохранение массы

Для цитирования: Abazari R., Yildirim K. Numerical study of the 2D Sivashinsky equation for binary alloy solidification problems // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 607–626. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.607-626>.

1. Introduction

Binary alloy solidification is a non-equilibrium thermodynamic process of phase transformation in which a homogeneous liquid mixture of two elements cools and transitions into a solid with crystalline microstructure. The final solid morphology is determined by the interplay between thermal diffusion, solute redistribution, and capillary forces

at the solid–liquid interface. As the solid phase grows, solute atoms are typically rejected (for most phase diagrams), leading to composition gradients in the liquid that can cause instabilities and complex patterns such as dendritic structures. A good understanding of the solidification dynamics, including constitutional undercooling and the Mullins–Sekerka instability [1], is critical for predicting and tailoring properties like strength, corrosion resistance, and ductility in cast metals and engineered components [3, 4]. It is also important that solute diffusion along temperature gradients can induce a compositional segregation behavior, affecting the final alloy properties [5]. Advanced modeling techniques, including phase-field models and cellular automata, have been developed to simulate these processes more accurately [2]. Effective control of the solidification dynamics is essential for optimizing the mechanical performance of binary alloys in various applications. Fig. 1, (a)–(d) is a typical image sequence showing the progressive nucleation and growth of Al–Cu alloys inoculated with TiB_2 particles [6]. The mathematical modeling of alloy solidification problems is based on a nonlinear evolution equation known as the Sivashinsky equation, first formulated by G.I. Sivashinsky to describe minor thermal diffusive instabilities in laminar flame fronts and slight perturbations from a baseline Poiseuille flow in a film layer on an inclined plane in higher spatial dimensions [7, 8]. The Sivashinsky equation in two dimensions takes the following form [9]:

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u + \alpha u = \Delta f(u), & \text{in } \Omega \times (0, T], \\ u = \Delta u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), & \text{in } \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (1)$$

where $f(u) = \frac{1}{2}u^2 - 2u$, Δ is the Laplacian operator, $\Omega = [0, L]^2 \subset \mathbb{R}^2$, and α is a positive constant. The Sivashinsky equation is also used to model the Bénard convection in an elongated box, long waves at the interface between two viscous fluids, and unstable drift waves in plasmas [8]. It belongs to the family of equations describing phase separation problems and shows a competition between destabilizing ($-\nabla^2 u$) and stabilizing ($\nabla^4 u$) forces, which is mediated by a nonlinear term that generates a complex pattern-forming behavior. The main feature of the Sivashinsky equation (1) is the decrease of mass condition of its solution within the time domain [7–9], i.e.,

$$\int_{\Omega} u(., t) d\Omega \leq \int_{\Omega} u(., 0) d\Omega, \quad t > 0. \quad (2)$$

It can be concluded that the conservation of mass condition, $\int_{\Omega} u(., t) d\Omega = 0$, is satisfied in the steady state.

To date, studies on the one-dimensional (1D) and two-dimensional (2D) Sivashinsky equations remain quite rare. In [10], a splitting scheme based on the Crank–Nicolson method was proposed for the 1D Sivashinsky equation. Omrani developed a semi-implicit splitting finite-difference method to approximate the numerical solutions of the 1D Sivashinsky equation [12] and subsequently solved the same equation numerically using a linearized finite-difference method in [13]. Benammous et al. [14] applied a finite element method with an error estimate for the 1D Sivashinsky equation. In [15], Omrani introduced a piecewise linear semi-discrete finite element scheme to approximate the solutions of the 2D Sivashinsky equation (1). A linearized three-level difference method was employed by Rouis and Omrani to solve the 2D Sivashinsky equation in [16]. Ilati and Dehghan formulated a meshless weak form method based on the radial point interpolation technique for the Sivashinsky equation arising in the alloy solidification problem [11].

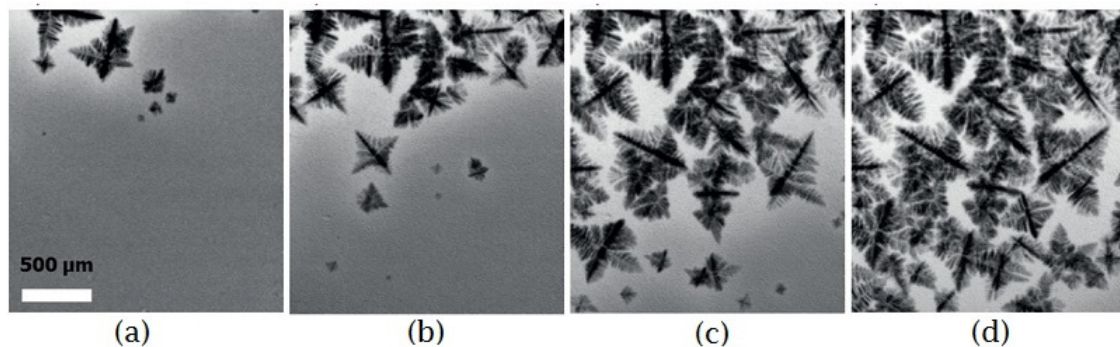


Fig. 1. Image sequence (a)–(d) illustrating the crystallization of solidifying Al–Cu alloys inoculated with TiB_2 particles [6]

Spectral methods are a class of numerical techniques for solving differential equations by expanding the solution in terms of globally defined basis functions, including orthogonal polynomials [19], Fourier series [20], wavelets [21], etc. These methods leverage the properties of these basis functions to achieve high accuracy with fewer degrees of freedom compared to traditional finite difference or finite element methods. Spectral methods are particularly effective for problems with smooth solutions, as they can capture details of the solution with exponential convergence rates. They are widely used in various fields, such as fluid dynamics, meteorology, and computational physics, to facilitate the modeling of complex systems.

In this article, the Fourier spectral method combined with the Euler scheme was applied to approximate the numerical solution of the 2D Sivashinsky equation (1), as a mathematical modeling of binary alloy solidification problems, under the periodic boundary condition. With this aim, a limited set of trigonometric fundamental functions were used as trial functions for the Fourier spectral method and then merged in a linear manner to find a numerical solution of equation (1). Finally, the Euler method was utilized to solve the reduced equation. The selected trial functions were as smooth as possible. Since the Fourier spectral method represents the obtained numerical solutions on a discrete set of grid points, it reduces the computational cost associated with evaluating higher dimensions of the differentiating terms of the Sivashinsky equation (1). The proposed method preserves the decreasing mass condition of the obtained numerical solutions.

2. Numerical Simulation

In this section, we propose a scheme based on the Fourier spectral method and the forward Euler method for solving the 2D Sivashinsky equation (1). Let N_x, N_y be positive integers and $h_x = \frac{L}{N_x}, h_y = \frac{L}{N_y}$ be the step sizes of the x - and y -directions, respectively, with $\tau = \frac{T}{N_t}$ set as the time step size. Suppose that $u_{m,n}^k$ is an approximation of $u(x_m, y_n, t_k)$, where $x_m = mh_x$, $m = 0, 1, 2, \dots, N_x$, $y_n = nh_y$, $n = 0, 1, 2, \dots, N_y$ and $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_t$ are the grid points. Here, the superscripts m, n denote a quantity associated with the spatial domain mesh points x_m, y_n , while the subscript n refers to a quantity associated with the time level t_n .

Let $S_{h_x, h_y}^\tau = \{u_{m,n}^k | m = 0, 1, 2, \dots, N_x \ \& \ n = 0, 1, 2, \dots, N_y \ \& \ k = 0, 1, \dots, N_t\}$ be a desired approximate solution. For any $u, v \in S_{h_x, h_y}^\tau$ by $(\cdot, \cdot)_{h_x, h_y}$, the discrete L^2 inner product $(\cdot, \cdot)_{h_x, h_y}$ is defined as follows:

$$(u^k, v^k)_{h_x, h_y} = h_x h_y \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} u_{m,n}^k v_{m,n}^k. \quad (3)$$

The discrete L^2 norm is denoted by $||\cdot||$ and written as

$$||u^k||^2 = (u^k, u^k)_{h_x, h_y}. \quad (4)$$

Under the above assumption, the discrete Fourier transform of $u_{m,n}^k$ and its inverse transform are

$$\hat{u}_{p,q}^k = \sum_{m=0}^{N_x-1} \sum_{n=0}^{N_y-1} u_{m,n}^k e^{i(\xi_p x_m + \eta_q y_n)} \quad (5)$$

and

$$u_{m,n}^k = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{p=0}^{N_x-1} \sum_{q=0}^{N_y-1} \hat{u}_{p,q}^k e^{i(\xi_p x_m + \eta_q y_n)}, \quad (6)$$

where $\xi_p = \frac{2\pi p}{L}$ and $\eta_q = \frac{2\pi q}{L}$. To develop an implicit-explicit Euler method for (1), we treat the terms $\Delta^2 u + 2\Delta u + \alpha u$ implicitly and the right-hand term $\frac{1}{2}\Delta u^2$ explicitly, which results in

$$\frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} + \Delta^2 u^k + 2\Delta u^k + \alpha u^k = \frac{1}{2}\Delta(u^{k-1})^2 + R^k, \quad (7)$$

where $|R^k| < c\tau$ and c is a constant. Multiplying both sides of (7) by τ and neglecting the small term τR^k , we arrive at

$$(1 + \alpha\tau)u^k + \tau\Delta^2 u^k + 2\tau\Delta u^k = u^{k-1} + \frac{\tau}{2}\Delta(u^{k-1})^2 + \tau R^k. \quad (8)$$

Since the time step size τ and the error term R^k are small, then its multiplying can be eliminated from (8). Consequently, the time discrete scheme for equation (1) yields to

$$(1 + \alpha\tau)u^k + \tau\Delta^2 u^k + 2\tau\Delta u^k = u^{k-1} + \frac{\tau}{2}\Delta(u^{k-1})^2. \quad (9)$$

Applying the Fourier transform to equation (9), we get

$$(1 + \alpha\tau)\hat{u}_{pq}^k + \tau(\xi_p^2 + \eta_q^2)^2 \hat{u}_{pq}^k - 2\tau(\xi_p^2 + \eta_q^2)\hat{u}_{pq}^k = \hat{u}_{pq}^{k-1} - \frac{\tau}{2}(\xi_p^2 + \eta_q^2)(\hat{u}_{pq}^{k-1})^2, \quad (10)$$

which simplifies to

$$\hat{u}_{pq}^k = \frac{\hat{u}_{pq}^{k-1} - \frac{\tau}{2}(\xi_p^2 + \eta_q^2)(\hat{u}_{pq}^{k-1})^2}{1 + \alpha\tau - 2\tau(\xi_p^2 + \eta_q^2) + \tau(\xi_p^2 + \eta_q^2)^2}. \quad (11)$$

Using equation (11), an approximate solution can be obtained by recovering u_{mn}^k from $\hat{u}_{pq}^k$.

In the next subsection, we demonstrate the stability of the proposed spectral method (9) in the L^2 norm and investigate its convergence.

2.1. Stability and convergence analysis. Consider the space of $L^2(\Omega)$ as the Lebesgue space with the following inner product and related L^2 norm:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uvd\Omega, \quad \|v\|_{L^2} = (v, v)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

To analyze the stability and convergence of difference scheme (9), we employ the energy method. For this purpose, we introduce the following spaces:

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) &= \{v : v \in L^2(\Omega), \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}, \\ H_0^2(\Omega) &= \left\{v \in H^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0\right\}. \end{aligned}$$

Theorem 1. *Let $u^k \in H_0^2(\Omega)$. Then the implicit-explicit Euler scheme defined in (9) is stable in the L^2 norm.*

Proof. The proof follows a strategy similar to that of [10, 18]. Let u^k and U^k be the exact and approximate solutions of equation (1), respectively, and $e^k = u^k - U^k$ be the error between them. Then the roundoff error of the implicit-explicit Euler scheme (9) takes the form

$$(1 + \alpha\tau)e^k + 2\tau\Delta e^k + \tau\Delta^2 e^k = e^{k-1} + \frac{\tau}{2}\Delta \left((u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2 \right). \quad (12)$$

Pairing equation (12) with e^k and integrating on Ω , we get

$$(1 + \alpha\tau)(e^k, e^k) + 2\tau(\Delta e^k, e^k) + \tau(\Delta^2 e^k, e^k) = (e^{k-1}, e^k) + \frac{\tau}{2} \left(\Delta \left((u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2 \right), e^k \right). \quad (13)$$

Via two consecutive integrations by part of the term $(\Delta^2 e^k, e^k)$ on Ω , we obtain

$$\begin{aligned} (\Delta^2 e^k, e^k) &= \left(\frac{\partial}{\partial k} (\Delta e^k), e^k \right)_{\partial\Omega} - (\nabla \Delta e^k, \nabla e^k) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial k} (\Delta e^k), e^k \right)_{\partial\Omega} - \left(\Delta e^k, \frac{\partial e^k}{\partial k} \right)_{\partial\Omega} + (\Delta e^k, \Delta e^k). \end{aligned} \quad (14)$$

From the boundary conditions of the Sivashinsky equation (1), $u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0$, we have $\left(\frac{\partial}{\partial k} (\Delta e^k), e^k \right)_{\partial\Omega} = \left(\Delta e^k, \frac{\partial e^k}{\partial k} \right)_{\partial\Omega} = 0$, and, since $e^k \in H_0^2(\Omega)$, it is concluded that $(\Delta^2 e^k, e^k) = (\Delta e^k, \Delta e^k)$. Then equation (13) can be rewritten as

$$(1 + \alpha\tau)(e^k, e^k) + 2\tau(\Delta e^k, e^k) + \tau(\Delta e^k, \Delta e^k) = (e^{k-1}, e^k) + \frac{\tau}{2} \left(\Delta \left((u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2 \right), e^k \right). \quad (15)$$

Applying the Schwarz inequality to equation (15) yields

$$\begin{aligned} &(1 + (\alpha + 1)\tau) \|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{7\tau}{4} \|\Delta e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|e^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{4} \|(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

The term $\|(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\|_{L^2(\Omega)}^2$ satisfies the Lipschitz condition

$$\begin{aligned} |(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2| &\leq |u^{k-1} - U^{k-1}| |u^{k-1} + U^{k-1}| \\ &\leq \frac{1}{2} M^* |u^{k-1} - U^{k-1}| \\ &\leq \mathcal{L} |u^{k-1} - U^{k-1}|, \end{aligned} \quad (17)$$

where $M^* \geq \max_{u \in C^\infty(\Omega)} |u|$ and $\mathcal{L}$ is the Lipschitz condition. Consequently, inequality (16) becomes

$$\left(\frac{1}{2} + (\alpha + 1)\tau\right) \|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{7\tau}{4} \|\Delta e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}\right) \|e^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (18)$$

After the simplification step, we have

$$\begin{aligned} \|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + (\alpha + 1)\tau}\right) \|e^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + (\alpha + 1)\tau}\right)^2 \|e^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \dots \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + (\alpha + 1)\tau}\right)^k \|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

To derive a relation between $\|e^k\|$ and $\|e^0\|$ independent of τ , we have

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + (\alpha + 1)\tau}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{T\mathcal{L}^2}{2k}}{1 + \frac{2(\alpha + 1)T}{k}}\right)^k = e^{T\left(\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1)\right)}.$$

Therefore,

$$\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ce^{T\left(\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1)\right)} \|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

where c is a positive constant. By setting $C = ce^{T\left(\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1)\right)}$, we get

$$\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|e^0\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

This completes the proof. □

Remark 1. From the result of Theorem 1, it can be concluded that

If $\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1) < 0$, then the scheme defined in (9) exhibits strong stability.

If $\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1) > 0$, then the scheme defined in (9) exhibits weak stability.

If $\frac{\mathcal{L}^2}{2} - 2(\alpha + 1) = 0$, then the scheme defined in (9) exhibits strong stability.

Remark 2. Although it must be that $\alpha > 0$, if $\alpha = 0$, then, from the result of Theorem 1, it is concluded that $\mathcal{L} < 2$ for strong stability of the scheme defined in (9).

In the next theorem, the convergence of the proposed method is investigated.

Theorem 2. Let $u^k \in H_0^2(\Omega)$. Then the time discrete solution obtained by the proposed scheme defined in (9) is L^2 -convergent with the convergence order $O(\tau)$.

Proof. The proof proceeds analogously to that of [10, 18]. Let u^k and U^k be the exact and approximate solutions of the Sivashinsky equation (1), respectively, and $\rho^k = u^k - U^k$. Substituting ρ^k in difference scheme (9), we have

$$(1 + \alpha\tau)\rho^k + 2\tau\Delta\rho^k + \tau\Delta^2\rho^k = \rho^{k-1} + \frac{\tau}{2}\Delta\left((u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\right) + \tau R^k, \quad (20)$$

where $|R^k| < C\tau$ for a positive constant C and $\rho^0 = 0$. Multiplying equation (20) by ρ^k and integrating on Ω , we get

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha\tau)(\rho^k, \rho^k) + 2\tau(\Delta\rho^k, \rho^k) + \tau(\Delta\rho^k, \Delta\rho^k) \\ &= (\rho^{k-1}, \rho^k) + \frac{\tau}{2}\left((u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2, \Delta\rho^k\right) + \tau(R^k, \rho^k). \end{aligned} \quad (21)$$

Applying the Schwarz inequality to equation (21) leads to

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + (\alpha + \frac{1}{2})\tau\right) \|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{7\tau}{4} \|\Delta\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \|\rho^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{4} \|(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|R^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

The term $\|(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\|_{L^2(\Omega)}^2$ satisfies the Lipschitz condition as

$$\|(u^{k-1})^2 - (U^{k-1})^2\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{L}^2 \|\rho^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

and inequality (22) leads to

$$\left(\frac{1}{2} + (\alpha + \frac{1}{2})\tau\right) \|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{7\tau}{4} \|\Delta\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}\right) \|\rho^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2} \|R^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (23)$$

Neglecting the term $\|\Delta\rho^k\|$ and considering that $\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) < \left(\frac{1}{2} + (\alpha + \frac{1}{2})\tau\right)$, we can rewrite inequality (23) as follows:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right) \|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}\right) \|\rho^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}\right) \|R^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (24)$$

Considering relation (24) for $k-1, k-2, \dots, 1, 0$, we get

$$\begin{aligned} \|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right) \|\rho^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right) \|R^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right)^2 \|\rho^{k-2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right)^2 \|R^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right) \|R^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \dots \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right)^k \|\rho^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau \sum_{j=1}^k \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau\mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}\right)^j \|R^{k-j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (25)$$

Since $\rho = 0$ and $|R^k| < C\tau$, we have

$$\|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tau \sum_{j=1}^k \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau \mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}} \right)^j \|R^{k-j+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq k\tau \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau \mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}} \right)^k C^2 \tau^2. \quad (26)$$

In addition,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\tau \mathcal{L}^2}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}} \right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{T \mathcal{L}^2}{2k}}{1 + \frac{T}{k}} \right)^k = e^{\frac{T}{2}(\mathcal{L}^2 - 2)}.$$

Then we obtain

$$\|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq T e^{\frac{T}{2}(\mathcal{L}^2 - 2)} C^2 \tau^2.$$

Setting $\mathcal{C} = \sqrt{TC^2 e^{\frac{T}{2}(\mathcal{L}^2 - 2)}}$, we get

$$\|\rho^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{C}\tau,$$

which shows that the implicit-explicit Euler scheme defined in (9) is L^2 -convergent with the convergence order $O(\tau)$. This completes the proof. $\square$

3. Mass-Decreasing Property

This section demonstrates that the proposed approach confirms the mass-decreasing property (2) of the Sivashinsky equation (1). Using the same reasoning as in [17, 18], a similar conclusion can be reached. With this aim, we take the inner product of equation (12) with a constant grid function $\mathbf{1}$ and get that

$$\begin{aligned} (u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} + \frac{\tau}{1 + \alpha\tau} (\Delta^2 u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} + \frac{2\tau}{1 + \alpha\tau} (\Delta u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} \\ = \frac{1}{1 + \alpha\tau} (u^{k-1}, \mathbf{1})_{h_x, h_y} + \frac{\tau}{2(1 + \alpha\tau)} (\Delta(u^{k-1})^2, \mathbf{1})_{h_x, h_y}. \end{aligned} \quad (27)$$

Let us consider the boundary values (7)-(9), for $(\Delta u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y}$, and have that

$$\begin{aligned} (\Delta u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} &= h_x h_y \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{m,n}^k \\ &= h_x h_y \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} \left(\frac{\delta_x^+ u_{m,n}^k - \delta_x^+ u_{m-1,n}^k}{h_x} + \frac{\delta_y^+ u_{m,n}^k - \delta_y^+ u_{m,n-1}^k}{h_y} \right) \\ &= h_y \sum_{m=1}^{N_x} (\delta_x^+ u_{m,N_y}^k - \delta_x^+ u_{m-1,0}^k) + h_x \sum_{n=1}^{N_y} (\delta_y^+ u_{N_x,n}^k - \delta_y^+ u_{0,n-1}^k) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Since $(\Delta^2 u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} = (\Delta u^k, \Delta \mathbf{1})_{h_x, h_y} = (\Delta u^k, 0)_{h_x, h_y}$, then $(\Delta^2 u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} = 0$. Similarly, we have $(\Delta(u^{k-1})^2, \mathbf{1})_{h_x, h_y} = 0$. By substitution of these values in equation (27), it is found that

$(u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} = \frac{1}{1 + \alpha\tau} (u^{k-1}, \mathbf{1})_{h_x, h_y}$. Since α is a positive constant, the following theorem can be derived.

Theorem 3. *The mass of scheme (12) under the boundary conditions (7)–(9) satisfies the decreasing property, i.e.,*

$$(u^k, \mathbf{1})_{h_x, h_y} \leq (u^{k-1}, \mathbf{1})_{h_x, h_y} \quad \forall k \geq 1.$$

4. Numerical Experiment

As mentioned in the Introduction, solidification represents a fundamental process in materials science that has a significant influence on the microstructure and properties of metals and alloys. Binary alloy solidification, which is the focus of this study and consists in the cooling and phase transformation of a mixture of two metallic elements from a liquid to a solid state, determines and can alter many functional properties of alloys, including their mechanical strength, thermal stability, corrosion resistance, etc.

During solidification, numerous processes take place, such as nucleation, dendritic growth, spinodal decomposition, solute partitioning, and microsegregation (coring). The dynamics of these processes depends on the cooling rates and alloy composition. Binary alloy solidification occurs naturally in metallurgy and even planetary science. In this section, three examples are shown, each with a different type of initial condition: benchmark cross initial value (as a toy model of alloy solidification), smooth initial value (a more realistic model of alloy solidification) [9], and random initial value (as a spinodal decomposition model), all presented in Fig. 2. The experiments were performed using Python 3.9.

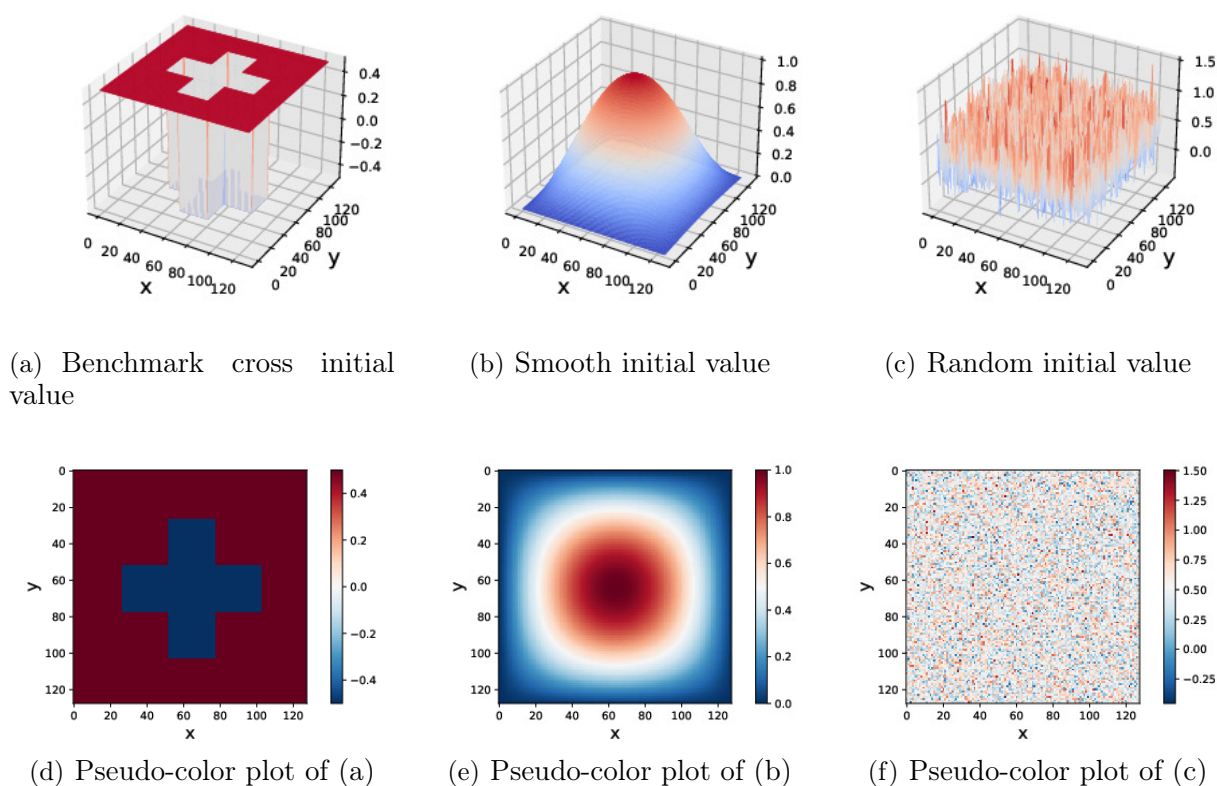


Fig. 2. Initial values of (a) example 1, (b) example 2, and (c) example 3. Panels (d), (e), and (f) display the pseudo-color plots of (a), (b), and (c), respectively, on a uniform 128×128 mesh

The obtained numerical results for each of the three examples confirm that the proposed method satisfies the property of mass decreasing condition (2). In all examples, we set $\alpha = 1$ and we divide the domain $(0, 1)^2$ into $N_x \times N_y$ meshgrid, where $N_x = N_y = N = \{8, 16, 32, 64, 128\}$ with the corresponding step size h_x and h_y in the x - and y -directions such that $h_x = h_y = h_d = \frac{1}{N(d)}$ for $d = 1, 2, 3, 4, 5$. In order to further assess the numerical results, the discrete L^2 error is estimated as a difference between the approximate solutions $u_{m,n}^k$ computed on two consecutive grids with the time grid $t_k = k\tau$ for $k = 0, 1, 2, \dots, N_t$ as follows

$$\|\cdot\|_2 = \left((h_d)^2 \sum_{m=1}^{N(d)} \sum_{n=1}^{N(d)} \left(u_{m,n}^{N_t, \tau} - u_{m,n}^{\frac{N_t}{2}, 2\tau} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

where $u_{m,n}^{N_t, \tau} = u_{m,n}^{N_t}$ is the numerical solution with the splitting time step size τ . Since no exact solution exists for the Sivashinsky equation (1), we can assess the convergence rate of the proposed approach by measuring the ratios of differences between the approximate solutions $u_{m,n}^k$ computed for different step sizes h_x and h_y . Most commonly, we compare solutions, where h_x and h_y are halved successively, then the convergence rate can be computed by the formula

$$\text{order} = \log_2 \left(\frac{\|\mathbf{u}^{\frac{N}{2}, 2\tau} - \mathbf{u}^{\frac{N}{4}, 4\tau}\|_2}{\|\mathbf{u}^{N, \tau} - \mathbf{u}^{\frac{N}{2}, 2\tau}\|_2} \right). \quad (29)$$

Most studies conducted on the 2D Sivashinsky equation have approached the problem from a theoretical perspective, and only a few of them report numerical results. To compare the numerical results of the proposed method and other similar methods, we consider examples 2 and 3 from [11], with the outcomes presented in Tables 1, 3, and 4. The numerical comparisons demonstrate a decrease in mass conservation of the proposed method as time increases, which is consistent with the statement of Theorem 3.

In light of the above, the following three examples are considered.

Example 1. In the first example, we consider the Sivashinsky equation (1) under the following benchmark cross initial value (Fig. 2, (a)):

$$\begin{aligned} u_0(x, y) = & \frac{1}{2} - \left(H\left(x - \frac{1}{5}\right) - H\left(x - \frac{4}{5}\right) \right) \left(H\left(y - \frac{2}{5}\right) - H\left(y - \frac{3}{5}\right) \right) \\ & - \left(H\left(x - \frac{2}{5}\right) - H\left(x - \frac{3}{5}\right) \right) \left(H\left(y - \frac{3}{5}\right) - H\left(y - \frac{4}{5}\right) \right) \\ & - \left(H\left(x - \frac{2}{5}\right) - H\left(x - \frac{3}{5}\right) \right) \left(H\left(y - \frac{1}{5}\right) - H\left(y - \frac{2}{5}\right) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

where $(x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ and $H(x - \cdot)$ and $H(y - \cdot)$ are the Heaviside functions. Binary alloy solidification with a cross initial value is a common benchmark problem in computational materials science for testing solidification models and numerical methods. It describes the solidification of a binary alloy from a molten state with an initial composition profile shaped like a cross. The numerical solutions of the Sivashinsky equation (1) corresponding to initial condition (30) with step sizes $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = \{0.5, 3, 5, 10, 30, 50\}$ are shown in Fig. 3. According to Fig. 3, the solution loses its mass and tends to a steady state.

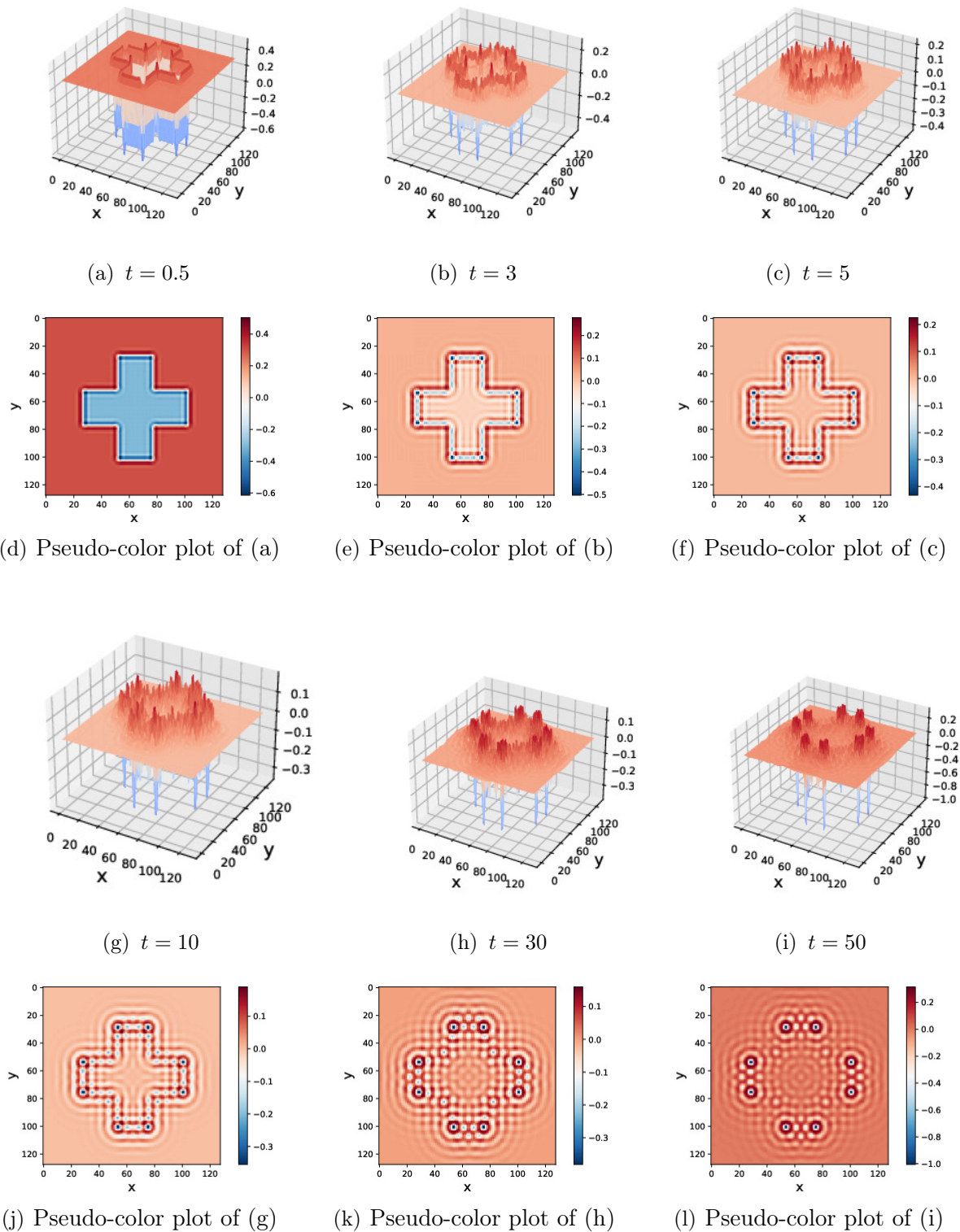


Fig. 3. The first and third rows are the numerical solutions of example 1 with $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times (a) $t=0.5$, (b) $t=3$, (c) $t=5$, (g) $t=10$, (h) $t=30$, and (i) $t=50$. The second and fourth rows are the pseudo-color plots of the first and third rows on a uniform 128×128 mesh

The L^2 error and convergence rate of the numerical solution of example 1 at times $t = 0.5, 1.5, 3, 5$ for $h = k = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \right\}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ are given in Table 1. The reduction in mass condition observed in the numerical solution of example 1 with initial values (30) is also illustrated in Fig. 4 (solid line).

Table 1. L^2 error of example 1 with $h = k = \frac{1}{N}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = 0.5, 1.5, 3$ and $t = 5$

N	$t = 0.5$	order	$t = 1.5$	order	$t = 3$	order	$t = 5$	order
16	9.7076e-02	—	1.1125e-01	—	1.3685e-01	—	1.5663e-01	—
32	4.3349e-02	1.16	4.1864e-02	1.41	4.1988e-02	1.70	4.1432e-02	1.92
64	1.5336e-02	1.49	1.4496e-02	1.53	1.1330e-02	1.89	1.0504e-02	1.98
128	2.8300e-03	2.43	2.6352e-03	2.46	1.9485e-03	2.54	1.7573e-03	2.58

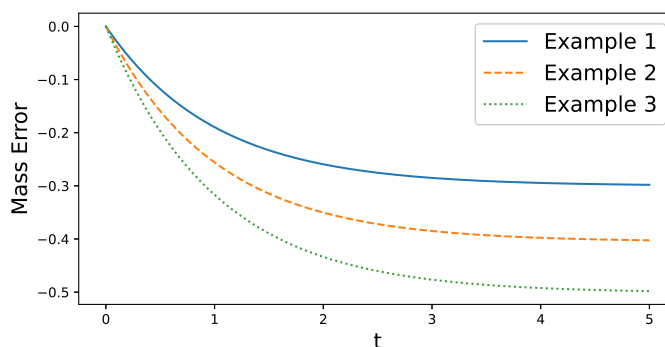


Fig. 4. Decrease in the mass error for the numerical solution of example 1 (solid line), example 2 (dashed line), and example 3 (dotted line) at $t = 0 : \frac{1}{128} : 5$ on a 128×128 mesh

Example 2. In the second example [9], the following smooth initial value is considered for the Sivashinsky equation (1)

$$u_0(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]. \quad (31)$$

Binary alloy solidification with smooth initial conditions is a fundamental problem in computational materials science for studying how smooth composition and temperature gradients evolve during solidification. This approach avoids discontinuities present in sharp interface benchmarks, making well-suited to diffuse-interface models like phase-field methods. The numerical profiles of this example with step sizes $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = \{0.5, 1.5, 3, 4, 5, 6\}$ are shown in Fig. 5.

The L_2 errors of the proposed numerical solution and the L_2 errors of the meshless global weak form method under the same initial condition (31) with $\tau = 0.001$ at $t = 1$ is shown in Table 2. The numerical results of this example agree with those discussed in [11] for the same example using the meshless method based on the radial point interpolation technique.

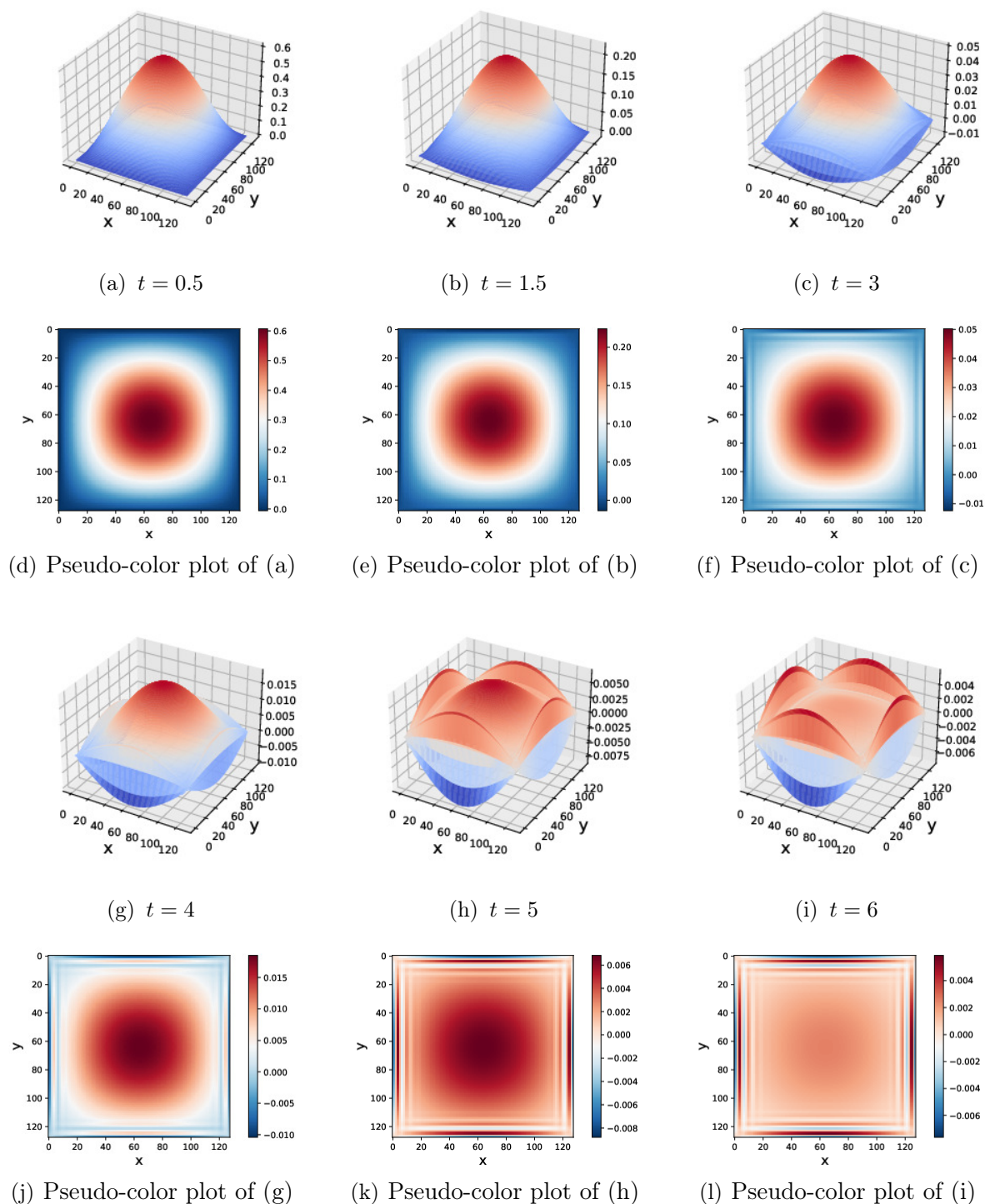


Fig. 5. The first and third rows are the numerical solutions of example 2 with $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times (a) $t=0.5$, (b) $t=1.5$, (c) $t=3$, (g) $t=4$, (h) $t=5$, and (i) $t=6$. The second and fourth rows are the pseudo-color plots of the first and third rows on a uniform 128×128 mesh

The L^2 error and convergence rate of the results of example 2 at times $t = 0.5, 1.5, 3, 5$ with steps $h = k = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \right\}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ are presented in Table 3. Similarly, the dashed line in Fig. 4 confirms the decrease in mass condition of the numerical solution obtained by the proposed method for this example.

Table 2. The L^2 error of example 1 with $h = k = \frac{1}{N}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = 0.5, 1.5, 3$ and $t = 5$

$h = k$	L_2 -error	L_2 -error [11]
1/10	9.3614e-04	9.1972e-04
1/20	2.1364e-04	2.3743e-04
1/40	2.2245e-04	2.1476e-04

Table 3. L^2 error of example 2 with $h = k = \frac{1}{N}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = 0.5, 1.5, 3$ and $t = 5$

N	$t = 0.5$	order	$t = 1.5$	order	$t = 3$	order	$t = 5$	order
16	3.8496e-02	–	5.2156e-02	–	5.7316e-02	–	8.0701e-02	–
32	1.4997e-02	1.36	1.9222e-02	1.44	1.7397e-02	1.72	2.3202e-02	1.80
64	4.2471e-03	1.82	4.9415e-03	1.96	6.4727e-03	2.15	5.0142e-03	2.21
128	9.6364e-04	2.14	1.0339e-03	2.25	1.1674e-03	2.47	1.0181e-03	2.30

Example 3. In the last example, we simulate spinodal decomposition, energy dissipation, and mass conservation. We consider the Sivashinsky equation (1) with respect to the following random (normal distribution) initial value:

$$u_0(x, y) = 0.5 + \sigma \text{randn}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad (32)$$

with the mean deviation $\sigma = 0.5$ and the standard deviation $\sigma = 0.25$. Binary alloy solidification with random initial conditions is used to study how microscopic fluctuations evolve into macroscopic solidification patterns. Similar to the above examples, the numerical profiles of this example with steps sizes $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = \{3, 10, 20, 40, 80, 120\}$ are shown in Fig. 6.

The L^2 errors, including the convergence rate of the numerical results of example 3 at times $t = 0.5, 1.5, 3, 5$ with steps $h = k = \left\{ \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128} \right\}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$, are given in Table 4. The dotted line in Fig. 4 also shows the decrease in mass of the proposed scheme for example 3.

Table 4. L^2 error of example 3 with $h = k = \frac{1}{N}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times $t = 0.5, 1.5, 3$ and $t = 5$

N	$t = 0.5$	order	$t = 1.5$	order	$t = 3$	order	$t = 5$	order
16	4.3364e-02	–	3.0082e-02	–	2.3488e-02	–	1.8926e-02	–
32	2.7793e-02	0.64	1.9014e-02	0.66	1.4676e-02	0.68	1.2242e-02	0.63
64	1.1613e-02	1.26	8.3152e-03	1.19	6.9209e-03	1.08	6.1555e-03	0.99
128	2.4584e-03	2.24	1.8479e-03	2.17	1.5921e-03	2.12	1.4457e-03	2.09

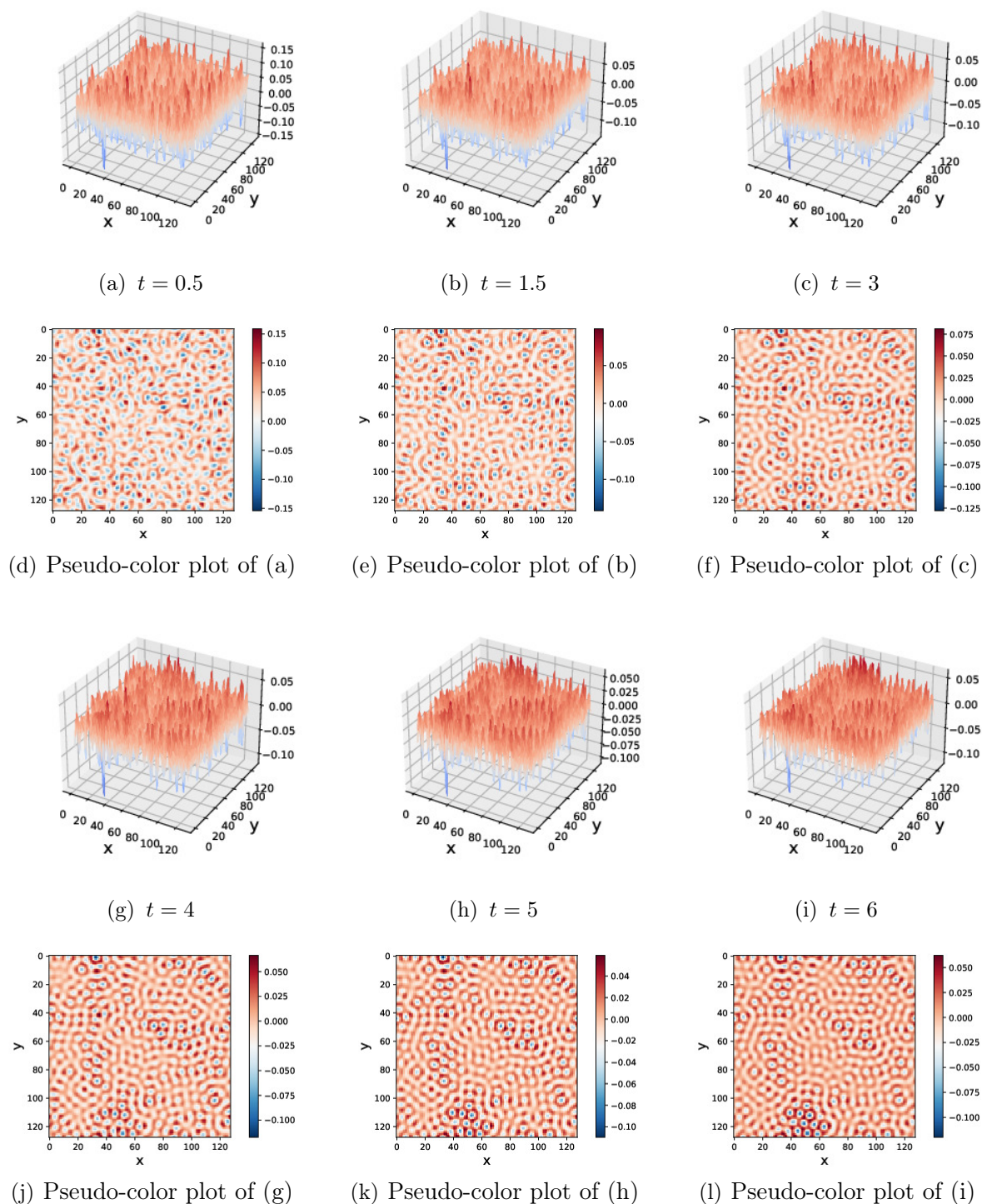


Fig. 6. The first and third rows are the numerical solutions of example 3 with $h = k = \frac{1}{128}$ and $\tau = \frac{4}{25}h$ at times (a) $t=3$, (b) $t=10$, (c) $t=20$, (g) $t=40$, (h) $t=80$, and (i) $t=120$. The second and fourth rows are the pseudo-color plots of the first and third rows on a uniform 128×128 mesh

Remark 3. The numerical profiles of examples 1, 2, and 3 with the same initial values as in (30), (31), and (32) are listed in Figs. 7, 8, and 9, respectively, but for $\alpha = 0.5$. A comparison of the results for $\alpha = 1$ and $\alpha = 0.5$ reveals that a decrease in the positive constant α causes the numerical solutions to tend rapidly towards the equilibrium state.

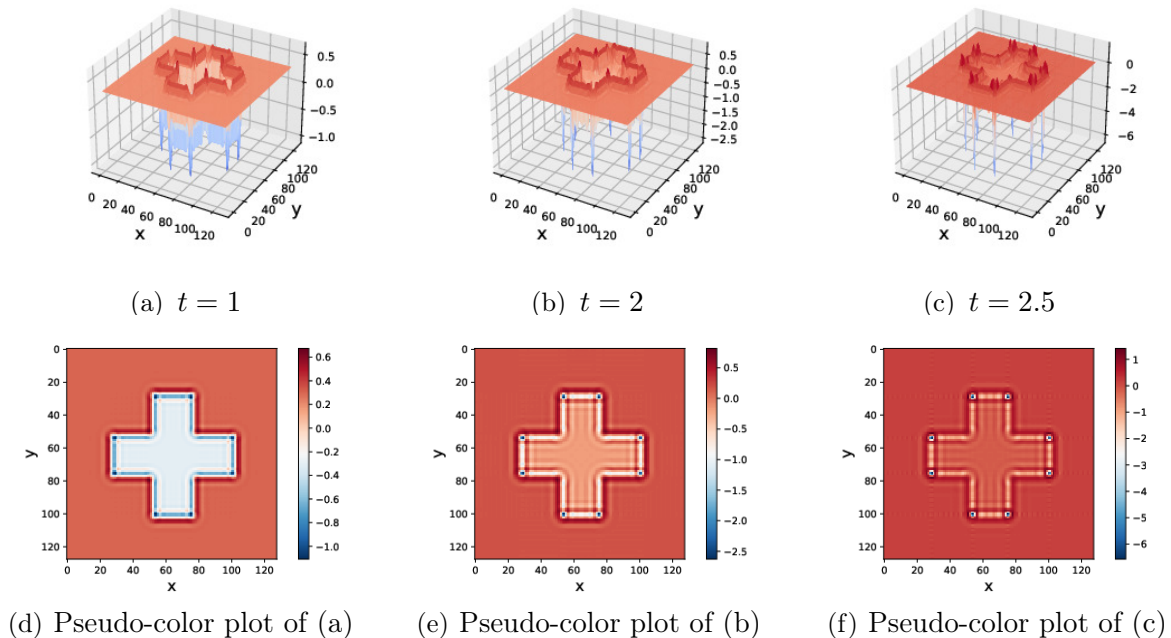


Fig. 7. Numerical profile of example 1 for $\alpha = 0.5$, (a) $t = 1$, (b) $t = 2$, and (c) $t = 2.5$. Panels (d), (e), and (f) are the pseudo-color plots of (a), (b), and (c), respectively, on a uniform 128×128 mesh

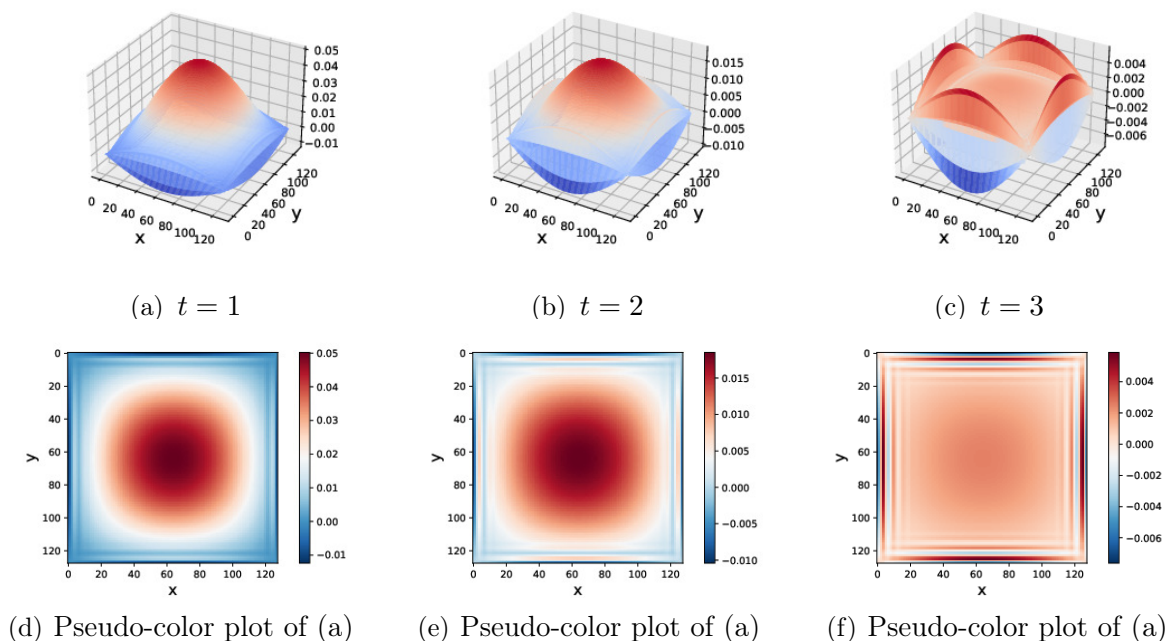


Fig. 8. Numerical profile of example 2 for $\alpha = 0.5$, (a) $t = 1$, (b) $t = 2$, and (c) $t = 3$. Panels (d), (e), and (f) are the pseudo-color plots of (a), (b), and (c), respectively, on a uniform 128×128 mesh

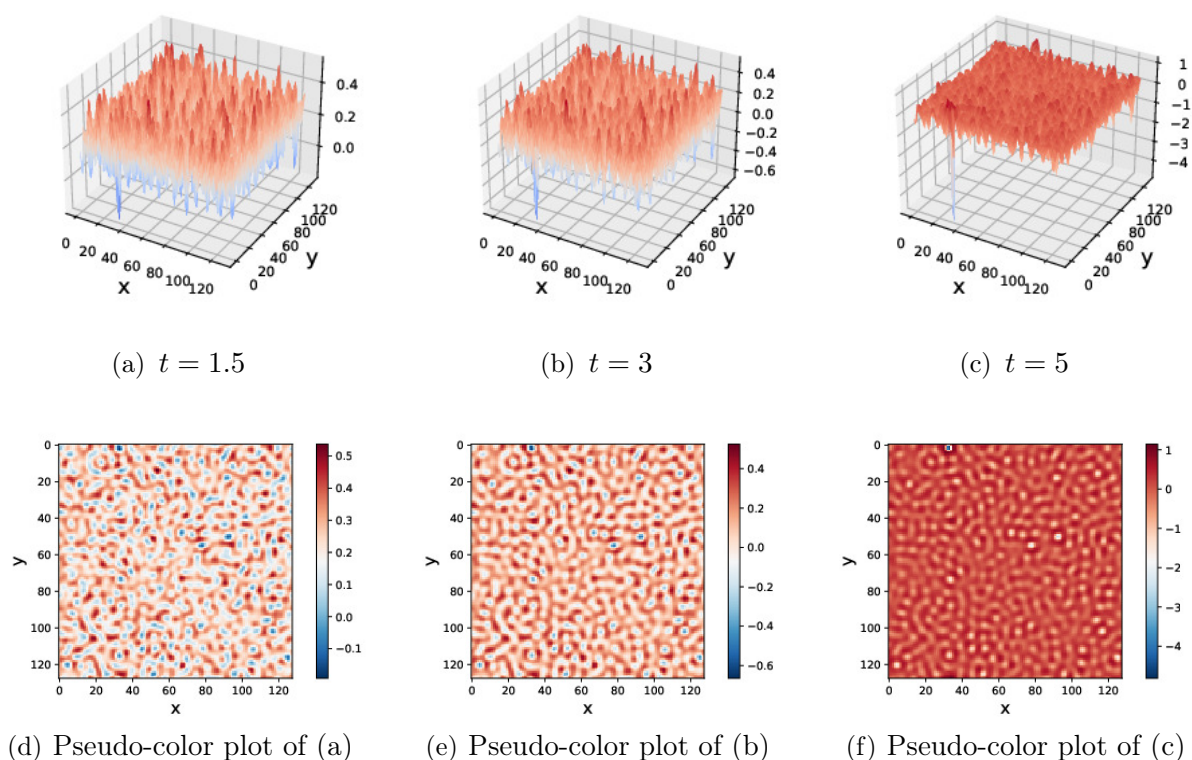


Fig. 9. Numerical profile of example 3 for $\alpha = 0.5$, (a) $t = 1.5$, (b) $t = 3$, and (c) $t = 5$. Panels (d), (e), and (f) are the pseudo-color plots of (a), (b), and (c), respectively, on a uniform 128×128 mesh

5. Conclusions

In this article, the 2D Sivashinsky equation was studied numerically as a mathematical model for a planar solid–liquid interface dynamics in a binary alloy that naturally arises in material sciences. The mathematical formulation of this model is a fourth-order nonlinear partial differential equation for which no analytical solution exists, except for trivial solutions. The Fourier spectral method combined with the Euler method was proposed to approximate the solution of the governing equation with periodic boundary conditions. It was proved theoretically that the numerical solutions obtained by the proposed approach preserve the decreasing of mass property. Three examples (with a benchmark cross initial value, with a smooth initial value, and with a random initial value) were analyzed to validate the performance of the introduced scheme. A custom Python code was developed to solve numerically the selected examples. The accuracy of the method was assessed in the L_2 error norm. Based on the obtained numerical results, the following conclusions were reached:

- The numerical experiments confirm that the theoretical results are in good agreement with previously published data.
- With an increase in time, the numerical mass of the solutions decreased in all examples, and the obtained numerical solutions tend to a steady state.
- Figs. 3, 5, and 6 demonstrate that, for a smooth initial value, as time increased, the coarsening process led to a sample with separated regions of the blue and red phases.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Caroli B., Caroli C., Roulet B. The Mullins-Sekerka instability in directional solidification of thin samples. *J. Cryst. Growth*, 1986, vol. 76, no. 1, pp. 31–49. [https://doi.org/10.1016/0022-0248\(86\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0022-0248(86)90006-0).
2. Karma A., Rappel W.-J. Quantitative phase-field modeling of dendritic growth in two and three dimensions. *Phys. Rev. E*, 1998, vol. 57, no. 4, pp. 4323–4349. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.4323>.
3. Dantzig J.A., Rappaz M. *Solidification*. Ser.: Materials. Engineering Sciences. Boca Raton, FL, EPFL Press, 2009. 621 p.
4. Das A., Mittemeijer E.J. Simulation of solidification structures of binary alloys. *Z. Metallkd.*, 2002, vol. 93, no. 5, pp. 459–467. <http://dx.doi.org/10.3139/146.020459>.
5. Rappaz M. et al. Solute redistribution during solidification: Principles and applications. *J. Mater. Sci.*, 2008, vol. 43, no. 15, pp. 4890–4899.
6. Liotti E., Arteta C., Zisserman A., Lui A., Lempitsky V., Grant P.S. Crystal nucleation in metallic alloys using x-ray radiography and machine learning. *Sci. Adv.*, 2018, vol. 4, no. 4, art. eaar4004. <https://doi.org/10.1126/sciadv.aar4004>.
7. Sivashinsky G.I. On cellular instability in the solidification of a dilute binary alloy. *Phys. D*, 1983, vol. 8, nos. 1–2, pp. 243–248. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90321-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90321-4).
8. Gertsberg V.L., Sivashinsky G.I. Large cells in nonlinear Rayleigh-Bénard convection. *Prog. Theor. Phys.*, 1981, vol. 66, no. 4, pp. 1219–1229. <https://doi.org/10.1143/PTP.66.1219>.
9. Sharma N., Sharma S. An efficient off-step exponential spline technique to solve Kuramoto–Sivashinsky and extended Fisher–Kolmogorov equations. *Int. J. Comput. Methods*, 2025, vol. 22, no. 5, art. 2450078. <https://doi.org/10.1142/S0219876224500786>.
10. Abazari R., Yildirim K. Numerical study of Sivashinsky equation using a splitting scheme based on Crank-Nicolson method. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, vol. 42, no. 16, pp. 5509–5521. <https://doi.org/10.1002/mma.5454>.
11. Ilati M., Dehghan M. Error analysis of a meshless weak form method based on radial point interpolation technique for Sivashinsky equation arising in the alloy solidification problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, vol. 327, pp. 314–324. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.06.022>.
12. Omrani K. A second-order splitting method for a finite difference scheme for the Sivashinsky equation. *Appl. Math. Lett.*, 2003, vol. 16, no. 3, pp. 441–445. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(03\)80070-8](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(03)80070-8).
13. Omrani K., Ben Mohamed M.L. A linearized difference scheme for the Sivashinsky equation. *Far East J. Appl. Math.*, 2005, vol. 20, no. 2, pp. 179–188.
14. Benammou S., Omrani K. A finite element method for the Sivashinsky equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2002, vol. 142, no. 2, pp. 419–431. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(01\)00370-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00370-3).

15. Omrani K. Numerical methods and error analysis for the nonlinear Sivashinsky equation. *Appl. Math. Comput.*, 2007, vol. 189, no. 1, pp. 949–962. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.11.169>.
16. Rouis M., Omrani K. On the numerical solution of two dimensional model of an alloy solidification problem. *Model. Numer. Simul. Mater. Sci.*, 2016, vol. 6, no. 1, pp. 1–9. <http://dx.doi.org/10.4236/mnsms.2016.61001>.
17. Abazari R., Rezazadeh H., Akinyemi L., Inc M. Numerical simulation of a binary alloy of 2D Cahn–Hilliard model for phase separation. *Comput. Appl. Math.*, 2022, vol. 41, no. 8, art. 389. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-02109-5>.
18. Abazari R., Yildirim K. Numerical study of the 2D Cahn–Hilliard model of phase separation with logarithmic potential. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 2025, no. 2 (390), pp. 73–95. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315360>.
19. Rai N., Mondal S. Spectral methods to solve nonlinear problems: A review. *Partial Differ. Equations Appl. Math.*, 2021, vol. 4, art. 100043. <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100043>.
20. Moumni M., Douiri S.M., Kim J.S. Fourier-spectral method for the Landau–Lifshitz–Gilbert equation in micromagnetism. *Results Appl. Math.*, 2023, vol. 19, art. 100380. <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2023.100380>.
21. Khader M.M., Tedjani A.H. Numerical simulation for the fractional-order smoking model using a spectral collocation method based on the Gegenbauer wavelet polynomials. *J. Appl. Anal. Comput.*, 2024, vol. 14, no. 2, pp. 847–863. <https://doi.org/10.11948/20230178>.

Author Information

Reza Abazari, PhD, Assistant Professor, Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili

E-mail: abazari-r@uma.ac.ir

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0125-2958>

Kenan Yildirim, PhD, Professor, Faculty of Mathematics, Muş Alparslan University

E-mail: k.yildirim@alparslan.edu.tr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4471-3964>

Информация об авторах

Реза Абазари, PhD, ассистент-профессор, кафедра математики, Университет Мохагеха Ардебил

E-mail: abazari-r@uma.ac.ir

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0125-2958>

Кенан Йилдирим, PhD, профессор, факультет математики, Университет Муш Альпарслан

E-mail: k.yildirim@alparslan.edu.tr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4471-3964>

Received March 25, 2025

Accepted September 22, 2025

Поступила в редакцию 25.03.2025

Принята к публикации 22.09.2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.862.6

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.627-640>**О разрешимости оптимизационной задачи построения
вполне интерпретируемых линейных регрессий****М.П. Базилевский***Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия**mik2178@yandex.ru***Аннотация**

Статья посвящена совершенствованию технологии построения интерпретируемых регрессионных моделей, параметры которых оцениваются с помощью метода наименьших квадратов. Введено определение вполне интерпретируемой линейной регрессии. К ней предъявлены требования согласованности знаков оценок параметров содержательному смыслу переменных, значимости оценок, низкой степени мультиколлинеарности и высокого качества аппроксимации. Принадлежность модели к классу вполне интерпретируемых регрессий зависит от уровня значимости. В терминах аппарата частично-булевого линейного программирования, прогрессирующего за последние годы в вычислительном плане, сформулирована оптимизационная задача построения вполне интерпретируемых линейных регрессий с довольно большим количеством линейных ограничений. Доказана разрешимость этой задачи при определенных условиях. Предлагаемый математический аппарат может успешно применяться для обработки больших данных, поскольку число ограничений в сформулированной задаче, в отличие от существующих зарубежных аналогов, не зависит от объема выборки.

Ключевые слова: линейная регрессия, метод наименьших квадратов, интерпретируемость, мультиколлинеарность, значимость, задача частично-булевого линейного программирования, разрешимость

Для цитирования: Базилевский М.П. О разрешимости оптимизационной задачи построения вполне интерпретируемых линейных регрессий // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 627–640. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.627-640>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.627-640>

On the solvability of the optimization problem for constructing quite interpretable linear regressions

M.P. Bazilevskiy*Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia**mik2178@yandex.ru***Abstract**

This article is devoted to improving the technique for constructing interpretable regression models in which parameters are estimated using the ordinary least squares method. A definition of quite interpretable linear regressions is provided. The main requirements for such regressions include the consistency between the signs of the parameter estimates and the substantive meanings of the variables, the significance of the estimates, the low degree of multicollinearity, and the high quality of approximation. Whether a model belongs to the class of quite interpretable regressions or not depends on its significance level. In terms of mixed 0-1 integer linear programming, which has made progress in recent years due to computational advances, an optimization problem is formulated for constructing quite interpretable linear regressions with a fairly large number of linear constraints. The problem is proved to be solvable under certain conditions. The proposed mathematical framework can be successfully applied to processing big data, as the number of constraints in the formulated problem does not depend on the sample size, unlike existing foreign analogues.

Keywords: linear regression, ordinary least squares method, interpretability, multicollinearity, significance, mixed 0-1 integer linear programming problem, solvability

For citation: Bazilevskiy M.P. On the solvability of the optimization problem for constructing quite interpretable linear regressions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 627–640. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.627-640>. (In Russian)

Введение

В настоящее время в научных исследованиях (см., например, работы [1, 2]) выделилось новое направление, связанное с тем, что при построении моделей машинного обучения важно обеспечивать не только их высокое качество, но и интерпретируемость. Среди моделей машинного обучения наиболее просто интерпретируются модели линейной регрессии, чему посвящен отдельный раздел в монографии [1]. Однако даже при построении простейшей линейной регрессии с помощью метода наименьших квадратов (МНК) возникают две проблемы. Во-первых, еще до оценивания неизвестных параметров модели требуется определить состав входящих в нее объясняющих переменных. Во-вторых, нет гарантии,

что модель, построенную с помощью МНК, можно будет адекватно интерпретировать. Выделим монографию [3], в которой предложен алгоритм построения интерпретируемой регрессионной модели с использованием анализа последовательностей. Но в нем для выбора наиболее существенных регрессоров в линейной регрессии использован метод всех возможных регрессий [4], требующий больших объемов вычислений.

Вместо метода всех возможных регрессий для построения линейной регрессии с помощью МНК в зарубежных исследованиях применяют аппарат частично-булевого квадратичного программирования (ЧБКП). Считается, что начало этому положила статья [5] 2009 года авторов Х. Конно и Р. Ямамото. Благодаря этому вышли работы [6, 7], посвященные отбору в линейной регрессии оптимального числа регрессоров по критериям Акаике, Шварца и Мэллоуза, а также по скорректированному коэффициенту детерминации. В [8, 9] исследованы вопросы снижения при моделировании эффекта мультиколлинеарности. Разработке новых эффективных алгоритмов решения задач ЧБКП для выбора структуры линейной регрессии посвящены статьи [10, 11].

Однако в 2018 году в отечественной работе [12] появилась новая формализация задачи построения линейной регрессии, но уже в терминах аппарата частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП). Своевременность такого подхода обусловлена тем, что, как отмечено в [13], в среднем с 2001 по 2020 год компьютерное оборудование для решения задач ЧБЛП стало примерно в двадцать раз быстрее, а алгоритмы – в пятьдесят. Задача, предложенная в [12], за последние годы была существенно расширена. Так, в ней появились ограничения на мультиколлинеарность [14], значимость оценок по t -критерию Стьюдента [15], значимость модели по F -критерию Фишера [16] и т. д. В зарубежных исследованиях параллельным ходом стало принято делать так, чтобы задача ЧБКП не просто осуществляла отбор переменных в линейной регрессии, но и по возможности гарантировала значимость оценок, выполнение условий теоремы Гаусса – Маркова и т. д. Например, в [17] для этого использовано понятие регрессионной диагностики, а в [18] – целостной регрессии.

Цель данной статьи состоит в слиянии рассмотренных в работах [12, 14–16] и в других манускриптах автора задач ЧБЛП в единую задачу построения интерпретируемой линейной регрессии, а также в исследовании предложенной задачи на разрешимость.

1. Вполне интерпретируемая линейная регрессия

Рассмотрим модель множественной линейной регрессии, включающую объясняемую переменную y и l объясняющих переменных $x_1, x_2, \dots, x_l$:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^l \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ – неизвестные параметры; n – объем выборки; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – ошибки регрессии.

Приведем кратко некоторые предпосылки, позволившие сформулировать определение вполне интерпретируемой линейной регрессии. Во-первых, если в оцененной с помощью МНК модели (1) отсутствует мультиколлинеарность, то недопустимо, чтобы знаки оценок $\tilde{\alpha}_j$, $j = \overline{1, l}$, противоречили смыслу стоящих при них переменных. Во-вторых, степень

мультиколлинеарности, негативно влияющей на интерпретацию оценок регрессии, должна быть низкой, причем как пары объясняющих переменных не должны сильно коррелировать, так и линейные зависимости каждой переменной с остальными предикторами должны быть неадекватны. Для получения выводов о наличии или отсутствии значимых связей между переменными мы предлагаем использовать классический аппарат проверки статистических гипотез, предполагающий на начальном этапе выбор уровня значимости α . В-третьих, интерпретация модели (1) будет сомнительной, если среди ее оценок будут незначимые по t -критерию Стьюдента. К тому же недопустимо, чтобы относительные вклады переменных в общую детерминацию R^2 , которые находятся по формулам $C_{x_j}^{abs} = \frac{\sigma_{x_j}}{\sigma_y} r_{yx_j} \tilde{\alpha}_j$, $j = \overline{1, l}$, где $\sigma_y, \sigma_{x_1}, \dots, \sigma_{x_l}$ – стандартные отклонения переменных, r_{yx_j} , $j = \overline{1, l}$, – коэффициенты корреляции переменной y с предикторами, были не положительными. В-четвертых, интерпретация недопустима, если коэффициент детерминации R^2 слишком низок либо модель не значима в целом по F -критерию Фишера.

Определение 1. Линейная регрессия (1), оцененная с помощью МНК, называется вполне интерпретируемой (ВИЛинР) для выбранного уровня значимости α и нижней границы θ абсолютных вкладов $C_{x_j}^{abs}$ переменных в общую детерминацию R^2 , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) знаки коэффициентов корреляции r_{yx_j} , $j = \overline{1, l}$, соответствуют содержательному смыслу решаемой задачи;
- 2) знаки всех оценок $\tilde{\alpha}_j$ согласуются со знаками соответствующих коэффициентов корреляции r_{yx_j} , т.е. $\tilde{\alpha}_j r_{yx_j} > 0$, $j = \overline{1, l}$;
- 3) $C_{x_j}^{abs} \geq \theta$, $j = \overline{1, l}$;
- 4) коэффициенты интеркорреляций $r_{x_i x_j}$, $i = \overline{1, l-1}$, $j = \overline{i+1, l}$, не значимы по t -критерию Стьюдента;
- 5) все вспомогательные зависимости каждой объясняющей переменной x_j на остальные предикторы не значимы по F -критерию Фишера;
- 6) оценки $\tilde{\alpha}_j$, $j = \overline{1, l}$, значимы по t -критерию Стьюдента;
- 7) модель в целом значима по F -критерию Фишера;
- 8) $R^2 \geq 0.8$.

Отметим, что для выполнения условия 1) ВИЛинР еще до построения модели необходимо привлекать эксперта из соответствующей предметной области, который способен выявить объясняющие переменные, по-настоящему влияющие по смыслу на отклик y , а также направления их влияния.

Как видно из определения, относится ли построенная модель (1) к ВИЛинР или не относится, зависит от параметров α и θ . Уровень значимости α традиционно можно принять равным 0.1, 0.05 или 0.01, а нижнюю границу вкладов θ выбрать из промежутка $[0, 1]$, причем чем ниже α и выше θ , тем жестче требования к ВИЛинР, а значит, ниже шанс, что такая модель для конкретной выборки вообще существует. Выбранное нами пороговое значение 0.8 для R^2 в условии 8) ВИЛинР также может быть скорректировано в соответствии с предпочтением исследователя.

2. Постановка оптимизационной задачи

Упростить расчеты определения оценок неизвестных параметров модели (1) позволяет стандартизация (нормирование) переменных [19]:

$$y_i^\bullet = \frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y}, \quad x_{i1}^\bullet = \frac{x_{i1} - \bar{x}_1}{\sigma_{x_1}}, \dots, x_{il}^\bullet = \frac{x_{il} - \bar{x}_l}{\sigma_{x_l}}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\bar{y}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$ – средние значения переменных. Тогда уравнение линейной регрессии (1) в стандартизованном масштабе [19] приобретет вид

$$y_i^\bullet = \sum_{j=1}^l \beta_j x_{ij}^\bullet + \varepsilon_i^\bullet, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_l$ – неизвестные стандартизованные коэффициенты; $\varepsilon_1^\bullet, \dots, \varepsilon_n^\bullet$ – ошибки стандартизованной регрессии.

МНК-оценки стандартизованных коэффициентов регрессии (2) находятся в результате решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$R_{xx} \beta = R_{yx},$$

$$R_{xx} = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & s & r_{x_1 x_l} \\ r_{x_1 x_2} & 1 & s & r_{x_2 x_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{x_1 x_l} & r_{x_2 x_l} & s & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{yx} = \begin{pmatrix} r_{yx_1} \\ r_{yx_2} \\ \vdots \\ r_{yx_l} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_l \end{pmatrix},$$

а коэффициент детерминации R^2 модели – по формуле

$$R^2 = R_{yx}^T \beta,$$

где T – операция транспонирования.

С использованием этих формул в [12] была сформулирована следующая задача ЧБЛП:

$$R^2 = \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \beta_j \rightarrow \max; \quad (3)$$

$$-(1 - \delta_j) M \leq \sum_{k=1}^l r_{x_j x_k} \beta_k - r_{yx_j} \leq (1 - \delta_j) M, \quad j = \overline{1, l}; \quad (4)$$

$$-\delta_j M \leq \beta_j \leq \delta_j M, \quad j = \overline{1, l}; \quad (5)$$

$$\delta_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, l}; \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^l \delta_j = m, \quad (7)$$

где m – число наиболее существенных регрессоров, причем $m \leq \min\{l, n - 1\}$; M – достаточно большое положительное число; $\delta_j, j = \overline{1, l}$, – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j\text{-я стандартизованная переменная входит в регрессию;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Важно, что в задаче (3)–(7) число M на всей области допустимых решений должно удовлетворять неравенству $M \geq \max_{j=1, \overline{l}} \{ |r_{x_j x_k} \beta_k - r_{y x_j}|, |\beta_j| \}$, иначе можно «упустить» оптимальное решение задачи. Будем считать, что число $M \rightarrow \infty$. Тогда решение задачи (3)–(7) приводит к выбору наилучшей по критерию R^2 линейной регрессии с фиксированным числом m регрессоров.

Используя результаты работ [12, 14–16], сформулируем единую задачу построения ВИЛинР. Для выполнения условия 2) ВИЛинР вместо (5) введем ограничения

$$0 \leq \beta_j \leq \delta_j M, \quad j \in J^+; \quad (8)$$

$$-\delta_j M \leq \beta_j \leq 0, \quad j \in J^-, \quad (9)$$

где J^+ , J^- – индексные множества, элементы которых удовлетворяют условиям $r_{y x_j} > 0$ и $r_{y x_j} < 0$ соответственно;

для выполнения условия 3) ВИЛинР используем ограничения

$$r_{y x_j} \beta_j \geq \theta \delta_j, \quad j = \overline{1, l}; \quad (10)$$

для выполнения условия 4) ВИЛинР – ограничения

$$|r_{x_i x_j}| (\delta_i + \delta_j - 1) \leq r, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad j = \overline{i+1, l}, \quad (11)$$

в которых для обеспечения незначимости коэффициентов интеркорреляций по t -критерию Стьюдента для выбранного уровня значимости α число $r = \frac{t_{\text{крит}}(\alpha, n-2)}{\sqrt{n-2 + t_{\text{крит}}^2(\alpha, n-2)}}$;

для выполнения условия 5) ВИЛинР – ограничения

$$\sum_{j=1}^{l-1} r_{x_{q_{kj}} x_k} \beta_{kj} - (1 - \delta_k) M - (1 - \rho_i) M \leq r_i^*, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, m^*}; \quad (12)$$

$$-(1 - \delta_{q_{ki}}) M \leq \sum_{j=1}^{l-1} r_{x_{q_{ki}} x_{q_{kj}}} \beta_{kj} - r_{x_{q_{ki}} x_k} \leq (1 - \delta_{q_{ki}}) M, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad (13)$$

$$-\delta_{q_{ki}} M \leq \beta_{ki} \leq \delta_{q_{ki}} M, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad (14)$$

$$-M(1 - \rho_j) \leq \sum_{k=1}^l \delta_k - j \leq M(1 - \rho_j), \quad j = \overline{1, m^*}; \quad (15)$$

$$\rho_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, m^*}; \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{m^*} \rho_j = 1, \quad (17)$$

где q_{ij} – элементы матрицы $Q_{l \times (l-1)}$, полученной путем вычеркивания главной диагонали

из квадратной матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & s & l \\ 1 & 2 & s & l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & s & l \end{pmatrix}$; β_{kj} , $k = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l-1}$, – стандартизованные коэффициенты вспомогательных регрессий для каждой переменной $x_j^\bullet$ на все остальные

ные предикторы; $m^* = \min\{l, n-1\}$; числа $r_1^* = 1$, $r_j^* = \frac{F_{\text{крит}}(\alpha, j-1, n-j-2)}{\frac{n-j-2}{j-1} + F_{\text{крит}}(\alpha, j-1, n-j-2)}$, $j = \overline{2, m^*}$; ρ_j , $j = \overline{1, m^*}$, – булевы переменные, заданные по правилу

$$\rho_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=1}^l \delta_k = j; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

для выполнения условия 6) ВИЛинР – ограничения

$$\sum_{j=1}^l r_{yx_j} \beta_j - \sum_{j=1}^{l-1} r_{yx_{q_{kj}}} \beta_{kj}^{\bullet} \geq (1 - \sum_{j=1}^l r_{yx_j} \beta_j) T_i - M(1 - \delta_k) - M(1 - \rho_i), \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, m^*}; \quad (18)$$

$$-(1 - \delta_{q_{ki}}) M \leq \sum_{j=1}^{l-1} r_{x_{q_{ki}} x_{q_{kj}}} \beta_{kj}^{\bullet} - r_{yx_{q_{ki}}} \leq (1 - \delta_{q_{ki}}) M, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l-1}; \quad (19)$$

$$-\delta_{q_{ki}} M \leq \beta_{ki}^{\bullet} \leq \delta_{q_{ki}} M, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad (20)$$

где $\beta_{kj}^{\bullet}$, $k = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l-1}$, – стандартизованные коэффициенты вспомогательных регрессий переменной $y^{\bullet}$ на все остальные предикторы без $x_j^{\bullet}$; числа $T_j = \frac{t_{\text{крит}}^2(\alpha, n-j-1)}{n-j-1}$, $j = \overline{1, m^*}$;

для выполнения условия 7) ВИЛинР – ограничения

$$R^2 \geq G_j - M(1 - \rho_j), \quad j = \overline{1, m^*}, \quad (21)$$

где числа $G_j = \frac{F_{\text{крит}}(\alpha, j, n-j-1)}{\frac{n-j-1}{j} + F_{\text{крит}}(\alpha, j, n-j-1)}$, $j = \overline{1, m^*}$.

Как видно, сформулированная задача ЧБЛП (3), (4), (6), (8)–(21) содержит довольно большое количество линейных ограничений, поэтому возникает вопрос, будет ли эта задача разрешима, т. е. будет ли она иметь хотя бы одно решение в зависимости от назначенных параметров α и θ .

3. Исследование оптимизационной задачи на разрешимость

Теорема. Пусть из всех оцененных с помощью МНК парных линейных регрессий y от x_j , $j = \overline{1, l}$, $l \geq 2$, наибольшее значение $\theta^{\#}$, $\theta^{\#} < 1$, коэффициента детерминации R^2 имеет модель, значимая по F -критерию Фишера для заданного уровня значимости $\alpha^{\#}$. Тогда задача ЧБЛП (3), (4), (6), (8)–(21) при $M \rightarrow \infty$ разрешима для любого уровня значимости $\alpha \in [\alpha^{\#}, 1)$ и числа $\theta \in [0, \theta^{\#}]$.

Доказательство. Для удобства будем считать, что из всех объясняющих переменных наиболее тесно коррелирует с откликом y , например, переменная x_1 . Тогда по условию теоремы по F -критерию Фишера для уровня $\alpha^{\#}$ значима стандартизованная парная линейная регрессия

$$y^{\bullet} = \beta_1 x_1^{\bullet} + \varepsilon^{\bullet}. \quad (22)$$

Последнее равносильно значимости для уровня $\alpha^\#$ коэффициента β_1 регрессии (22), а также коэффициента корреляции r_{yx_1} по t -критерию Стьюдента.

МНК-оценка параметра β_1 модели (22) равна r_{yx_1} , а коэффициент детерминации $R^2 = r_{yx_1}^2$, откуда $\theta^\# = r_{yx_1}^2$.

Покажем, что при $M \rightarrow \infty$ всем ограничениям задачи для любого уровня значимости $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$ и числа $\theta \in [0, \theta^\#]$ удовлетворяет следующее решение:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= r_{yx_1}, \quad \beta_j = 0, \quad j = \overline{2, l}; \\ \delta_1 &= 1, \quad \delta_j = 0, \quad j = \overline{2, l}; \\ \beta_{k1} &= r_{x_1 x_k}, \quad k = \overline{2, l}, \quad \beta_{1i} = 0, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad \beta_{ki} = 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}; \\ \rho_1 &= 1, \quad \rho_j = 0, \quad j = \overline{2, m^*}; \\ \beta_{k1}^\bullet &= r_{yx_1}, \quad k = \overline{2, l}, \quad \beta_{1i}^\bullet = 0, \quad i = \overline{1, l-1}, \quad \beta_{ki}^\bullet = 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}.\end{aligned}$$

Подставим значения всех этих переменных в ограничения задачи. Тогда ограничения (4) примут вид

$$\begin{aligned}0 &\leq 0 \leq 0 \quad \text{при } j = 1; \\ -M &\leq r_{x_1 x_j} r_{yx_1} - r_{yx_j} \leq M, \quad j = \overline{2, l};\end{aligned}$$

ограничения (8), (9) при $r_{yx_1} > 0$:

$$\begin{aligned}0 &\leq r_{yx_1} \leq M \quad \text{при } j = 1; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad j \in J^+ \setminus \{1\}; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad j \in J^-;\end{aligned}$$

ограничения (8), (9) при $r_{yx_1} < 0$:

$$\begin{aligned}0 &\leq 0 \leq 0, \quad j \in J^+; \\ -M &\leq r_{yx_1} \leq 0 \quad \text{при } j = 1; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad j \in J^- \setminus \{1\};\end{aligned}$$

ограничения (10):

$$\begin{aligned}r_{yx_1}^2 &\geq \theta \quad \text{при } j = 1; \\ 0 &\geq 0, \quad j = \overline{2, l};\end{aligned} \tag{23}$$

ограничения (11):

$$0 \leq \frac{t_{\text{крит}}(\alpha, n-2)}{\sqrt{n-2+t_{\text{крит}}^2(\alpha, n-2)}}, \quad i = 1, \quad j = \overline{2, l}; \tag{24}$$

$$-|r_{x_i x_j}| \leq \frac{t_{\text{крит}}(\alpha, n-2)}{\sqrt{n-2+t_{\text{крит}}^2(\alpha, n-2)}}, \quad i = \overline{2, l-1}, \quad j = \overline{i+1, l}; \tag{25}$$

ограничения (12):

$$\begin{aligned}0 &\leq 1, \quad k = 1, \quad i = 1; \\ r_{x_1 x_k}^2 - M &\leq 1, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \\ -M &\leq r_i^*, \quad k = 1, \quad i = \overline{2, m^*}; \\ r_{x_1 x_k}^2 - 2M &\leq r_i^*, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, m^*};\end{aligned}$$

ограничения (13):

$$\begin{aligned} -M &\leq -r_{x_{q_{ki}}x_k} \leq M, \quad k = 1, \quad i = \overline{1, l-1}; \\ -M &\leq -r_{x_{q_{ki}}x_k} \leq M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \end{aligned}$$

ограничения (14):

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = 1, \quad i = \overline{1, l-1}; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}; \\ -M &\leq r_{x_1x_k} \leq M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \end{aligned}$$

ограничения (15):

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0 \leq 0 \quad \text{при } j = 1; \\ -M &\leq 1 - j \leq M, \quad j = \overline{2, m^*}; \end{aligned}$$

ограничение (17):

$$1 = 1;$$

ограничения (18):

$$\begin{aligned} r_{yx_1}^2 &\geq (1 - r_{yx_1}^2) \frac{t_{\text{крит}}^2(\alpha, n-2)}{n-2}, \quad k = 1, \quad i = 1; \\ r_{yx_1}^2 &\geq (1 - r_{yx_1}^2) T_1 - M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \\ r_{yx_1}^2 &\geq (1 - r_{yx_1}^2) T_i - M, \quad k = 1, \quad i = \overline{2, m^*}; \\ r_{yx_1}^2 &\geq (1 - r_{yx_1}^2) T_i - 2M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, m^*}; \end{aligned} \tag{26}$$

ограничения (19):

$$\begin{aligned} -M &\leq -r_{yx_{q_{ki}}} \leq M, \quad k = 1, \quad i = \overline{1, l-1}; \\ -M &\leq -r_{yx_{q_{ki}}} \leq M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \end{aligned}$$

ограничения (20):

$$\begin{aligned} 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = 1, \quad i = \overline{1, l-1}; \\ 0 &\leq 0 \leq 0, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = \overline{2, l-1}; \\ -M &\leq r_{yx_1} \leq M, \quad k = \overline{2, l}, \quad i = 1; \end{aligned}$$

ограничения (21):

$$\begin{aligned} r_{yx_1}^2 &\geq \frac{F_{\text{крит}}(\alpha, 1, n-2)}{n-2 + F_{\text{крит}}(\alpha, 1, n-2)}, \quad j = 1; \\ r_{yx_1}^2 &\geq G_j - M, \quad j = \overline{2, m^*}. \end{aligned} \tag{27}$$

Очевидно, что все вышеприведенные неравенства, кроме (23)–(27), справедливы при $M \rightarrow \infty$. Также выполнены условия (6) и (16) булевости переменных.

Рассмотрим неравенство (23). Поскольку $\theta^\# = r_{yx_1}^2$, то оно справедливо для любого $\theta \in [0, \theta^\#]$. Поскольку $t_{\text{крит}}(\alpha, n-2) > 0$ для любого уровня значимости α , то неравенства (24) и (25) справедливы для любого α , в частности, для $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$.

Поскольку коэффициент β_1 парной регрессии (22) значим для уровня $\alpha^\#$ по t -критерию Стюдента, то он значим и при $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$. Это означает, что для любого $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$ справедливо неравенство

$$|t_{\text{набл}}| \geq t_{\text{крит}}(\alpha, n - 2),$$

где наблюдаемое значение t -критерия Стюдента находится по формуле

$$t_{\text{набл}} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2}{1 - r_{yx_1}^2}} (n - 2).$$

Отсюда следует справедливость неравенства (26) для любого $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$.

Для парной линейной регрессии (22) $F_{\text{крит}}(\alpha, 1, n - 2) = t_{\text{крит}}^2(\alpha, n - 2)$, поэтому неравенства (26) и (27) равносильны. Отсюда неравенство (27) справедливо для любого $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$.

Таким образом, при $M \rightarrow \infty$ для любых $\theta \in [0, \theta^\#]$ и $\alpha \in [\alpha^\#, 1)$ множество допустимых решений задачи (3), (4), (6), (8)–(21) не пусто. А поскольку все переменные ограничены сверху и снизу, то рассматриваемая задача разрешима.

Теорема доказана. $\square$

Решение задачи (3), (4), (6), (8)–(21) приводит к построению линейной регрессии с оптимальным по критерию R^2 числом регрессоров, удовлетворяющей первым семи условиям ВИЛинР. Выполнение условия 8) ВИЛинР проверяется после решения задачи ЧБЛП.

Сделаем два важных замечания касательно задачи (3), (4), (6), (8)–(21).

Замечание 1. Значения коэффициентов корреляции при решении этой задачи неизбежно подвергаются округлению. Если матрица R_{xx} плохо обусловлена [20], то из-за округлений решение задачи может оказаться неоптимальным. Поэтому значения коэффициентов корреляции следует брать с большей точностью, снижая ошибки округления.

Замечание 2. При решении задачи неминуемо придется ограничиваться каким-то конкретным значением числа M из-за невозможности обеспечения условия $M \rightarrow \infty$. Следует помнить, что число M должно быть достаточно большим, иначе оптимальное решение может быть «упущено».

Заключение

Дано определение вполне интерпретируемой линейной регрессии. Для ее построения в терминах аппарата частично-булевого линейного программирования сформулирована оптимизационная задача. Доказана разрешимость задачи при определенных условиях. Значимость разработанного математического аппарата состоит в том, что многие этапы построения линейной регрессионной модели удалось формализовать в виде единой задачи, которая может быть решена с использованием современных эффективных решателей CPLEX или Gurobi.

Нерешенным до конца остается вопрос, связанный с выбором достаточно больших чисел M в некоторых линейных ограничениях задачи. Дальнейшие исследования автора будут посвящены исследованию этого вопроса.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. *Molnar C.* Interpretable Machine Learning: A Guide for Making Black Box Models Explainable. Lulu.com, 2020. 320 p.
2. *Doshi-Velez F., Kim B.* Towards a rigorous science of interpretable machine learning. Ver. 2. arXiv Preprint 1702.08608. 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.08608>.
3. *Горбач А.Н., Цейтлин Н.А.* Покупательское поведение: анализ спонтанных последовательностей и регрессионных моделей в маркетинговых исследованиях. Киев: Освіта України, 2011. 220 с.
4. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: Юнити, 1998. 1005 с.
5. *Konno H., Yamamoto R.* Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming // J. Global Optim. 2009. V. 44, No 2. P. 273–282. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9323-9>.
6. *Miyashiro R., Takano Y.* Mixed integer second-order cone programming formulations for variable selection in linear regression // Eur. J. Oper. Res. 2015. V. 247, No 3. P. 721–731. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.081>.
7. *Miyashiro R., Takano Y.* Subset selection by Mallows' C_p : A mixed integer programming approach // Expert Syst. Appl. 2015. V. 42, No 1. P. 325–331. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.07.056>.
8. *Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T.* Mixed integer quadratic optimization formulations for eliminating multicollinearity based on variance inflation factor // J. Global Optim. 2019. V. 73, No 2. P. 431–446. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0713-3>.
9. *Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T.* Best subset selection for eliminating multicollinearity // J. Oper. Res. Soc. Jpn. 2017. V. 60, No 3. P. 321–336. <https://doi.org/10.15807/jorsj.60.321>.
10. *Bertsimas D., King A., Mazumder R.* Best subset selection via a modern optimization lens // Ann. Stat. 2016. V. 44, No 2. P. 813–852. <https://doi.org/10.1214/15-AOS1388>.
11. *Bertsimas D., King A.* OR forum—an algorithmic approach to linear regression // Oper. Res. 2016. V. 64, No 1. P. 2–16. <https://doi.org/10.1287/opre.2015.1436>.
12. *Базилевский М.П.* Сведение задачи отбора информативных регрессоров при оценивании линейной регрессионной модели по методу наименьших квадратов к задаче частично-булевого линейного программирования // МОИТ. 2018. Т. 6, № 1 (20). С. 108–117.
13. *Koch T., Berthold T., Pedersen J., Vanaret C.* Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020 // EURO J. Comput. Optim. 2022. V. 10. Art. 100031. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2022.100031>.
14. *Базилевский М.П.* Отбор информативных регрессоров с учетом мультиколлинеарности между ними в регрессионных моделях как задача частично-булевого линейного программирования // МОИТ. 2018. Т. 6, № 2 (21). С. 104–118.

15. *Базилевский М.П.* Отбор значимых по критерию Стьюдента информативных регрессоров в оцениваемых с помощью МНК регрессионных моделях как задача частично-булевого линейного программирования // Вестн. ВГУ. Сер.: Сист. анализ и информ. технол. 2021. № 3. С. 5–16. <https://doi.org/10.17308/sait.2021.3/3731>.
16. *Базилевский М.П.* Оптимизационные задачи отбора информативных регрессоров в линейной регрессии с контролем ее значимости по критерию Фишера // Изв. Самарск. науч. центра РАН. 2024. Т. 26, № 6. С. 200–207.
17. *Chung S., Park Y.W., Cheong T.* A mathematical programming approach for integrated multiple linear regression subset selection and validation // Pattern Recognit. 2020. V. 108. Art. 107565. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107565>.
18. *Bertsimas D., Li M.L.* Scalable holistic linear regression // Oper. Res. Lett. 2020. V. 48, No 3. P. 203–208. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.008>.
19. *Ферстер Э., Рениц Б.* Методы корреляционного и регрессионного анализа. М.: Финансы и статистика, 1983. 303 с.
20. *Лебедева А.В., Рябов В.М.* О численном решении систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами // Вестн. СПбГУ. Матем. Механ. Астрон. 2019. Т. 6, № 4. С. 619–626. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407>.

References

1. Molnar C. *Interpretable Machine Learning: A Guide for Making Black Box Models Explainable*. Lulu.com, 2020. 320 p.
2. Doshi-Velez F., Kim B. Towards a rigorous science of interpretable machine learning. Ver. 2. arXiv Preprint 1702.08608. 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.08608>.
3. Gorbach A.N., Tseitlin N.A. *Pokupatel'skoe povedenie: analiz spontannykh posledovatel'nykh i regressionnykh modelei v marketingovykh issledovaniyakh* [Buying Behavior: Analysis of Spontaneous Sequences and Regression Models in Marketing Research]. Kyiv, Osvita Ukrainy, 2011, 220 p. (In Russian)
4. Aivazyan S.A., Mkhitaryan V.S. *Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki* [Applied Statistics and Basics of Econometrics]. Moscow, Yuniti, 1998, 1005 p. (In Russian)
5. Konno H., Yamamoto R. Choosing the best set of variables in regression analysis using integer programming. *J. Global Optim.*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 273–282. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9323-9>.
6. Miyashiro R., Takano Y. Mixed integer second-order cone programming formulations for variable selection in linear regression. *Eur. J. Oper. Res.*, 2015, vol. 247, no. 3, pp. 721–731. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.06.081>.
7. Miyashiro R., Takano Y. Subset selection by Mallows' C_p : A mixed integer programming approach. *Expert Syst. Appl.*, 2015, vol. 42, no. 1, pp. 325–331. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2014.07.056>.
8. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Mixed integer quadratic optimization formulations for eliminating multicollinearity based on variance inflation factor. *J. Global Optim.*, 2019, vol. 73, no. 2, pp. 431–446. <https://doi.org/10.1007/s10898-018-0713-3>.

9. Tamura R., Kobayashi K., Takano Y., Miyashiro R., Nakata K., Matsui T. Best subset selection for eliminating multicollinearity. *J. Oper. Res. Soc. Jpn.*, 2017, vol. 60, no. 3, pp. 321–336. <https://doi.org/10.15807/jorsj.60.321>.
10. Bertsimas D., King A., Mazumder R. Best subset selection via a modern optimization lens. *Ann. Stat.*, 2016, vol. 44, no. 2, pp. 813–852. <https://doi.org/10.1214/15-AOS1388>.
11. Bertsimas D., King A. OR forum—an algorithmic approach to linear regression. *Oper. Res.*, 2016, vol. 64, no. 1, pp. 2–16. <https://doi.org/10.1287/opre.2015.1436>.
12. Bazilevskiy M.P. Reduction the problem of selecting informative regressors when estimating a linear regression model by the method of least squares to the problem of partial-Boolean linear programming. *Model., Optim. Inf. Technol.*, 2018, vol. 6, no. 1 (20), pp. 108–117. (In Russian)
13. Koch T., Berthold T., Pedersen J., Vanaret C. Progress in mathematical programming solvers from 2001 to 2020. *EURO J. Comput. Optim.*, 2022, vol. 10, art. 100031. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2022.100031>.
14. Bazilevskiy M.P. Subset selection in regression models with considering multicollinearity as a task of mixed 0-1 integer linear programming. *Model., Optim. Inf. Technol.*, 2018, vol. 6, no. 2 (21), pp. 104–118. (In Russian)
15. Bazilevskiy M.P. Selection of informative regressors significant by Student's t-test in regression models estimated using OLS as a partial Boolean linear programming problem. *Proc. Voronezh State Univ. Series: Syst. Anal. Inf. Technol.*, 2021, no. 3, pp. 5–16. <https://doi.org/10.17308/sait.2021.3/3731>. (In Russian)
16. Bazilevskiy M.P. Optimization problems of subset selection in linear regression with control of its significance using F-test. *Izv. Samara Sci. Cent. Russ. Acad. Sci.*, 2024, vol. 26, no. 6, pp. 200–207. (In Russian)
17. Chung S., Park Y.W., Cheong T. A mathematical programming approach for integrated multiple linear regression subset selection and validation. *Pattern Recognit.*, 2020, vol. 108, art. 107565. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107565>.
18. Bertsimas D., Li M.L. Scalable holistic linear regression. *Oper. Res. Lett.*, 2020, vol. 48, no. 3, pp. 203–208. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.02.008>.
19. Foerster E., Renz B. *Metody korrelyatsionnogo i regressionnogo analiza* [Methods of Correlation and Regression Analysis]. Moscow, Finans. Stat., 1983. 303 p. (In Russian)
20. Lebedeva A.V., Ryabov V.M. On the numerical solution of system of linear algebraic equations with ill-conditioned matrices. *Vestn. St. Petersburg Univ. Math. Mech. Astron.*, 2019, vol. 6, no. 4, pp. 619–626. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.407>. (In Russian)

Информация об авторах

Михаил Павлович Базилевский, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения

E-mail: mik2178@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

Author Information

Mikhail P. Bazilevskiy, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University

E-mail: *mik2178@yandex.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3253-5697>

Поступила в редакцию 12.10.2025

Принята к публикации 8.11.2025

Received October 12, 2025

Accepted November 8, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.983: 517.986

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654>Алгебраические и порядковые свойства оператора
блочного проектирования на алгебре измеримых
операторовМ.Ф. Дарвиш Талев¹, М.А. Муратов² ✉¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия²Крымский федеральный университет, г. Симферополь, Россия✉ mamuratov@gmail.com

Аннотация

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследован оператор блочного проектирования $\tilde{\mathcal{P}}_n$ ($n \geq 2$) в $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов. Показано, что $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ для каждой операторно монотонной функции f на $\mathbb{R}^+$ и $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Для операторно выпуклой функции f на $\mathbb{R}^+$ имеем $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ для $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Изучены условия, при которых $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ принадлежит классам $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ τ -компактных операторов, $F(\mathcal{M}, \tau)$ элементарных операторов, $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ τ -интегрируемых с p -й степенью операторов или самой алгебре $\mathcal{M}$. Если $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ является левым (правым) обратным для оператора A , то $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ также является левым (соответственно, правым) обратным для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, след, измеримый оператор, оператор блочного проектирования

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1) и в рамках реализации Программы развития Регионального научно-образовательного математического центра «Азово-Черноморский математический центр» (соглашение № 075-02-2025-1543 от 27 февраля 2025 г.).

Для цитирования: Дарвиш Талев М.Ф., Муратов М.А. Алгебраические и порядковые свойства оператора блочного проектирования на алгебре измеримых операторов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 641–654.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654>

Algebraic and order properties of a block projection operator on the algebra of measurable operators

M.F. Darwish Taleb¹, M.A. Muratov² ✉

¹Kazan Federal University, Kazan, Russia

²V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

✉ mamuratov@gmail.com

Abstract

Let τ be a faithful normal semifinite trace on a von Neumann algebra $\mathcal{M}$. The block projection operator $\tilde{\mathcal{P}}_n$ ($n \geq 2$) on the $*$ -algebra $S(\mathcal{M}, \tau)$ of all τ -measurable operators is investigated. It is shown that $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ for any operator monotone function f on $\mathbb{R}^+$ and $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. For an operator convex function f on $\mathbb{R}^+$, we have $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ for $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Conditions are established under which $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ belongs to the class $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ of τ -compact operators, to the class $F(\mathcal{M}, \tau)$ of elementary operators, to the classes $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ of operators τ -integrable with p -th power, or to the $\mathcal{M}$ algebra itself. If $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ and $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ is a left (right) inverse for the operator A , then $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ is also a left (respectively, right) inverse for the operator $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, trace, measurable operator, block projection operator

Acknowledgments. This study was supported by the Development Program of the Research and Educational Mathematical Center of the Volga Region Federal District (agreement no. 075-02-2025-1725/1) and by the Development Program of the Regional Research and Educational Mathematical Center “Azov-Black Sea Mathematical Center” (agreement no. 075-02-2025-1543 dated February 27, 2025).

For citation: Darwish Taleb M.F., Muratov M.A. Algebraic and order properties of a block projection operator on the algebra of measurable operators. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 641–654. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654>. (In Russian)

Введение

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$ и τ – точный нормальный полу-конечный след на $\mathcal{M}$. Для фиксированного набора $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ определим оператор блочного проектирования $\tilde{\mathcal{P}}_n : S(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow S(\mathcal{M}, \tau)$ формулой $\tilde{\mathcal{P}}_n(X) = \sum_{k=1}^n P_k X P_k$

$(X \in S(\mathcal{M}, \tau))$. В [1] с использованием одного нетривиального неравенства из [2] показано, что оператор $\tilde{P}_n$ является положительным линейным сжатием в $\mathcal{M}$ и в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Этот факт был применен для описания крайних точек выпуклых вполне симметричных подмножеств в банаховом пространстве $L_1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$. В [3] доказано, что оператор $\tilde{P}_n$ определяет линейное положительное сжатие для всех нормированных идеальных пространств $\mathcal{X} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$, обладающих свойствами (А) и (В). Определения свойств (А) и (В) см. в [4, гл. 4, §3]. В [5] установлены неравенства равномерной субмажоризации для оператора $\tilde{P}_n$ на симметричных пространствах на $(\mathcal{M}, \tau)$. В квазинормируемом случае для пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ с $0 < p \leq 1$ были доказаны обратные неравенства.

При $P_1 + \dots + P_n = I$ в [6] показано, что $X \leq n\tilde{P}_n(X)$ для каждого оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$; если оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{P}_n(X)$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$; уточнен и усилен один пример из [5]. Напомним, что при $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \text{tr}$ оператор $\tilde{P}_n$ был исследован в [7, гл. II, §5; гл. III, теорема 4.2; §7, п. 6°; теорема 8.7] и в случае, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$, в [8].

В данной статье исследуются алгебраические и порядковые свойства оператора $\tilde{P}_n$ в $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов, присоединенных к алгебре $\mathcal{M}$. Наши результаты развивают и дополняют предыдущие работы других авторов в этой области.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ – решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, I – единица в $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Отображение $\psi : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется следом, если $\psi(X + Y) = \psi(X) + \psi(Y)$ и $\psi(\lambda X) = \lambda\psi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$ и $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\psi(Z^*Z) = \psi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След ψ называется *точным*, если $\psi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$; *полукопечным*, если $\psi(X) = \sup\{\psi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \psi(Y) < +\infty\}$ для любого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если из соотношения $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) следует, что $\psi(X) = \sup_i \psi(X_i)$ (см. [9, гл. V, §2], [10, гл. 1, §1.15]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полукопечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $D(X)$, называется τ -измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset D(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [11, гл. IX], [10, гл. 2, §2.3]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^h$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение оператора X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим функцию сингулярных значений оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf \{ \|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t \}, \quad t > 0.$$

Тогда $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*)$ и $\mu(t; |X|^p) = \mu(t; X)^p$ для всех $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $0 < p, t < +\infty$. Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p -пространство Лебега ($0 < p < +\infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(\cdot; X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F -нормой (нормой для $1 \leq p < +\infty$) $\|X\|_p = \|\mu(\cdot; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ . В $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ вводится топология t_τ сходимости по мере ([11, гл. IX, §2], [10, гл. 2, §2.5]), фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon, \delta} = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \|XQ\| \leq \varepsilon, \tau(Q^\perp) \leq \delta \text{ для некоторого } Q \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\}, \quad \varepsilon > 0, \delta > 0.$$

Множество $S_0(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t; X) = 0\}$ является замкнутым в топологии t_τ идеалом в $S(\mathcal{M}, \tau)$. Если $\tau(I) < +\infty$, то $S_0(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \tau)$ и t_τ является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в $S(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [12]). Множество элементарных операторов $F(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in \mathcal{M} : \mu(t; X) = 0 \text{ для некоторого } t > 0\}$ является идеалом в $\mathcal{M}$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \text{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$, $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и $F(\mathcal{M}, \tau)$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, с идеалом $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов в $\mathcal{H}$ и с идеалом $F(\mathcal{H})$ конечномерных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Топология t_τ совпадает с задаваемой C^* -нормой $\|\cdot\|$ равномерной топологией на $\mathcal{M}$. Имеем

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s -чисел компактного оператора X ; χ_A – индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$ [7, гл. II]. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т.е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \int_\Omega f d\nu$, где (Ω, Σ, ν) – локализуемое пространство с мерой, $*$ -алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν) , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$.

Пусть $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Определим оператор блочного проектирования $\tilde{P}_n : S(\mathcal{M}, \tau) \rightarrow S(\mathcal{M}, \tau)$ формулой: $\tilde{P}_n(X) = \sum_{k=1}^n P_k X P_k$, $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется τ -существенно обратимым справа, если существует $B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такой, что оператор $I - AB$ является τ -компактным; τ -существенно обратимым слева, если существует $B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такой, что оператор $I - BA$ является τ -компактным [13; 14]. Обозначим через $F(\mathbb{R}^+)$ множество всех непрерывных функций $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для которых $f(0) = 0$.

2. Основные результаты

Лемма 1. Если $f \in F(\mathbb{R}^+)$, то для любого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ выполняется равенство:

$$f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) = \sum_{k=1}^n f(P_k A P_k).$$

Доказательство. Шаг 1. Для функций вида $f(\lambda) = \lambda^m$ ($m \in \mathbb{N}$) равенство очевидно. Для произвольного $A \in \mathcal{M}^+$ утверждение следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной полиномиальной аппроксимации непрерывных функций на отрезке.

Шаг 2. Для любого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ существует последовательность операторов $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+$, сходящаяся к A в топологии t_τ сходимости по мере τ при $i \rightarrow +\infty$. Далее применяем результат О.Е. Тихонова о t_τ -непрерывности операторных функций [15]. $\square$

Теорема 1. Пусть $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $n \geq 2$ и $f \in F(\mathbb{R}^+)$.

- (i) Если f является операторно монотонной на $\mathbb{R}^+$, то $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$.
- (ii) Если f является операторно выпуклой на $\mathbb{R}^+$, то $f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \tilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$.

Доказательство. (i). Для операторно монотонной функции $f \in F(\mathbb{R}^+)$ согласно неравенству Хансена [16] выполняются соотношения $f(P_k A P_k) \geq P_k f(A) P_k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Затем применяем лемму 1.

(ii). Для операторно выпуклой функции $f \in F(\mathbb{R}^+)$ по неравенству Хансена–Педерсена [17] имеем $f(P_k A P_k) \leq P_k f(A) P_k$ при всех $k = 1, \dots, n$. Далее снова используем лемму 1. $\square$

Лемма 2. Пусть $f \in F(\mathbb{R}^+)$. Тогда для любого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и любой изометрии $U \in \mathcal{M}$ ($U^*U = I$) выполняется равенство $f(UAU^*) = Uf(A)U^*$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. $\square$

Теорема 2. Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $n \geq 2$ и $f \in F(\mathbb{R}^+)$ – возрастающая функция.

- (i) Если f выпукла, то $\tau(f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A))) \leq \tau(f(A))$.
- (ii) Если f вогнута, то $\tau(f(\tilde{\mathcal{P}}_n(A))) \geq \tau(f(A))$.

Доказательство. Утверждение следует из представления (см. [3, лемма 2])

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} S_k A S_k^* \quad (1)$$

и приведенного в лемме 2 равенства. $\square$

Теорема 3. Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Тогда

- (i) $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)A$;

- (ii) $P_k A P_k \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ для всех $k = 1, \dots, n$;
- (iii) оператор A представим в виде суммы n проекторов из $\mathcal{M}$.

Доказательство. (i). Из [6, лемма 1] следует неравенство $n^{-1}A \leq \tilde{\mathcal{P}}_n(A)$. Применяем известный результат, который утверждает, что

«если $0 \leq \lambda A \leq P$ для некоторого $\lambda > 0$ и P – проектор, то A коммутирует с P » (см. [18, гл. 2, п. 2.17]), и получаем соотношение перестановочности $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)A$.

- (ii). Поскольку $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)^2$, имеем равенство

$$\sum_{k=1}^n P_k A P_k = \sum_{k=1}^n P_k A P_k A P_k.$$

Умножая обе части этого равенства слева и справа на проектор P_j , получаем соотношение $P_j A P_j = (P_j A P_j)^2$ для всех $j = 1, \dots, n$. Следовательно, каждый $P_j A P_j$ является идемпотентом и тем самым проектором, поскольку $P_j A P_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

- (iii). Для каждого j определим частичную изометрию $V_j := \sqrt{A}P_j$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) сопряженный оператор $V_j^* = P_j \sqrt{A}$ также является частичной изометрией;
- 2) оператор $V_j V_j^* = \sqrt{A}P_j \sqrt{A}$ есть проектор (см. [19, задача 127]);
- 3) справедливо разложение

$$A = \sum_{j=1}^n \sqrt{A}P_j \sqrt{A},$$

что представляет оператор A как сумму n проекторов из алгебры $\mathcal{M}$. □

Теорема 4. Пусть $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < +\infty$ и $n \geq 2$. Тогда

- (i) если $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$;
- (ii) если $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$;
- (iii) если $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$;
- (iv) если $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}$;
- (v) если $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. (i). Пусть $A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \sum_k A^* P_k A P_k = 0$. Умножая все части этого равенства слева на проектор P_k , получаем $P_k A^* P_k A P_k = |P_k A P_k|^2 = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$, откуда $P_k A P_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$.

- (ii). Из соотношения $P_k A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) = P_k A^* P_k A P_k = |P_k A P_k|^2 \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, определения идеала $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и свойства функции сингулярных значений [20] $\mu(t; |X|^2) = \mu(t; X)^2$ следует, что $P_k A P_k \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

(iii). Так как множество $F(\mathcal{M}, \tau)$ замкнуто относительно извлечения корня из своих неотрицательных операторов, из $P_k A^* P_k A P_k \in F(\mathcal{M}, \tau)$ следует $|P_k A P_k| \in F(\mathcal{M}, \tau)$. Поэтому $P_k A P_k \in F(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \sum_{k=1}^n P_k A P_k \in F(\mathcal{M}, \tau)$.

(iv). Из $P_k A^* P_k A P_k \in \mathcal{M}$ следует $|P_k A P_k|^2 \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$\mu(t; |P_k A P_k|^2) = \mu(t; |P_k A P_k|)^2 = \mu(t; P_k A P_k)^2 < +\infty$$

для всех $t > 0$ и $k = 1, \dots, n$. Таким образом, $P_k A P_k \in \mathcal{M}$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}$.

(v). Имеем

$$|P_k A P_k|^2 = P_k A^* P_k A P_k = P_k \cdot A^* \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \cdot P_k \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$$

для всех $k = 1, \dots, n$. Поэтому $|P_k A P_k| \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $k = 1, \dots, n$. Следовательно, $P_k A P_k \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $k = 1, \dots, n$, и в силу линейности пространства $L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$ получаем

$$\sum_{k=1}^n P_k A P_k = \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau). \quad \square$$

Теорема 5. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $0 < p < +\infty$. Тогда

- (i) если $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(B) A$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \tilde{\mathcal{P}}_n(A)$;
- (ii) имеем $\tilde{\mathcal{P}}_n(A \tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tilde{\mathcal{P}}_n(\tilde{\mathcal{P}}_n(A) B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B)$. В частности, если $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = 0$ или $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) B = 0$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = 0$;
- (iii) если $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$;
- (iv) если $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$;
- (v) если $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in F(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in F(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. (i). Имеем

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \left(\sum_{i=1}^n P_i A P_i \right) \left(\sum_{j=1}^n P_j B P_j \right) = \sum_{i,j=1}^n P_i A P_i P_j B P_j = \sum_{i=1}^n P_i A P_i B P_i.$$

Аналогично

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(B) \tilde{\mathcal{P}}_n(A) = \sum_{i=1}^n P_i B P_i A P_i.$$

Умножая обе части равенства $A \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(B) A$ слева и справа на проектор P_i , получаем

$$P_i A P_i B P_i = P_i B P_i A P_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(B) \tilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

(ii). Имеем

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^n P_k \left(A \sum_{i=1}^n P_i B P_i \right) P_k = \sum_{k=1}^n P_k A P_k B P_k.$$

Сравнивая с равенством $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \sum_{k=1}^n P_k A P_k B P_k$, заключаем, что $\tilde{\mathcal{P}}_n(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$. Если $A\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = 0$, то

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tilde{\mathcal{P}}_n(0) = 0 = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B).$$

Аналогично для $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B = 0$.

(iii)–(v). Из пункта (ii) следуют соотношения

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^n P_k A P_k B P_k \in S_0(\mathcal{M}, \tau). \quad \square$$

Следствие 1. Пусть $A \in \mathcal{M}$, $B \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ (или $B \in \mathcal{M}$, $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$). Тогда

(i) имеем $\tau(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B)$;

(ii) если $P_1 + \dots + P_n = I$, то $\tau(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B))$.

Доказательство. (i). Имеем $\tau(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\sum_{k=1}^n A P_k B P_k) = \sum_{k=1}^n \tau(A P_k B P_k)$. Так как $\tau(XY) = \tau(YX)$ для всех $X \in \mathcal{M}$ и $Y \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [11, гл. IX, теорема 2.13] и [21, теорема 17]), то $\tau(A P_k B P_k) = \tau(P_k A P_k B)$ и

$$\tau(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^n \tau(P_k A P_k B) = \tau\left(\sum_{k=1}^n P_k A P_k B\right) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B).$$

(ii). Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$. Тогда из представления (1) следует, что $\tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(X)) = \tau(X)$ для любого оператора $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Подставляя в последнее равенство $X = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)B$, получаем

$$\tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B)).$$

В силу п. (ii) теоремы 5 имеем $\tilde{\mathcal{P}}_n(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$. Таким образом,

$$\tau(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B)). \quad \square$$

Следствие 2. Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$, $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$, и предположим, что $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ является правым обратным для оператора A (соответственно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – левым обратным для оператора B). Тогда $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ будет правым обратным для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (соответственно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – левым обратным для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$).

Доказательство. Если $A\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = I$, то в силу п. (ii) теоремы 5 имеем

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B).$$

Поскольку $\tilde{\mathcal{P}}_n(I) = I$, получаем $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = I$. Таким образом, $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ – правый обратный для $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$. Аналогично, если $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B = I$, то

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(\tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) = I,$$

следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ является левым обратным для $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$. $\square$

Следствие 3. Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$, $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$, и предположим, что $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ является τ -существенным правым обратным для оператора A (соответственно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ -существенным левым обратным для оператора B). Тогда $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ будет τ -существенным правым обратным для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (соответственно, $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ -существенным левым обратным для оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$).

Доказательство. А. Случай τ -существенного правого обратного. По условию оператор $I - A\tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Применяя п. (ii) теоремы 5, получаем

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(I - A\tilde{\mathcal{P}}_n(B)) = I - \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$

Следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ – τ -существенный правый обратный для $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$, так как оператор $I - \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$ τ -компактен.

В. Случай τ -существенного левого обратного. Аналогичным образом, если $I - \tilde{\mathcal{P}}_n(A)B \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\tilde{\mathcal{P}}_n(I - \tilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = I - \tilde{\mathcal{P}}_n(A)\tilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$

Следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ -существенный левый обратный для $\tilde{\mathcal{P}}_n(B)$. $\square$

Теорема 6. Пусть $P_1 + \dots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $n \geq 2$ и $0 < p, q < +\infty$. Тогда

- (i) если $\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно, $L_p(\mathcal{M}, \tau); \mathcal{M}$), то $A \in F(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно, $L_p(\mathcal{M}, \tau); \mathcal{M}$);
- (ii) если $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$, то $A = 0$;
- (iii) если $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$;
- (iv) если $A \in \mathcal{M}^+$ и $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in F(\mathcal{M}, \tau)$;
- (v) если $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_q(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in L_{\frac{3pq}{p+q}}(\mathcal{M}, \tau)$;
- (vi) если $A \in \mathcal{M}^+$ и $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in L_{3p}(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. (i). Следует из неравенства $A \leq n\tilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (см. [6, лемма 2]).

(ii). Имеем

$$A\tilde{\mathcal{P}}_n(A)A = \sum_{k=1}^n AP_kAP_kA = 0.$$

Так как $AP_kAP_kA \geq 0$, то $AP_kAP_kA = \left| \sqrt{A}P_kA \right|^2 = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$. Следовательно, $\sqrt{A}P_kA = 0$ для всех $k = 1, \dots, n$ и

$$A^{3/2} = \sqrt{A} \cdot I \cdot A = \sqrt{A} \cdot \sum_{k=1}^n P_k \cdot A = \sum_{k=1}^n \sqrt{A}P_kA = 0.$$

Получили $0 = \mu(t; A^{3/2}) = \mu(t; A)^{3/2}$ для всех $t > 0$. Значит, $\mu(t; A) = 0$ для всех $t > 0$ и $A = 0$.

(iii). Аналогично (ii), но с заменой «0» на соотношение « $\in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ » и с учетом равенства

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t; A^{3/2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t; A)^{3/2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t; A).$$

(iv). Следует из (i) и свойств следа τ .

(v). Используем то, что $A\tilde{\mathcal{P}}_n(A)A \in L_r(\mathcal{M}, \tau)$, где $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ [22]. Из соотношения

$\left| \sqrt{A}P_kA \right|^2 \in L_r(\mathcal{M}, \tau)$ следует $\sqrt{A}P_kA \in L_{2r}(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $L_{2r}(\mathcal{M}, \tau)$ является линейным пространством, имеем

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{A}P_kA = \sqrt{A} \cdot \sum_{k=1}^n P_k \cdot A = \sqrt{A} \cdot I \cdot A = A^{3/2} \in L_{2r}(\mathcal{M}, \tau).$$

Отсюда в силу определения пространства $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ получаем $A \in L_{3r}(\mathcal{M}, \tau)$, где $3r = \frac{3pq}{p+q}$.

(vi). Частный случай п. (v) при $q \rightarrow +\infty$. □

Заключение

В этой работе получены новые алгебраические и порядковые свойства оператора $\tilde{\mathcal{P}}_n$ в $*$ -алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Возможно, часть наших результатов переносится и на изученные в [23] алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольным алгебрам фон Неймана.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A. Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integr. Equations Oper. Theory. 1992. V. 15, No 2. P. 186–226. <https://doi.org/10.1007/BF01204237>.
2. Kaftal V., Weiss G. Compact derivations relative to semifinite von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1985. V. 62, No 2. P. 202–220. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(85\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(85)90003-5).

3. Бикчентаев А.М. Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов // Изв. вузов. Матем. 2012. № 2. С. 86–91.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб.: Невский Диалект, 2004. 816 с.
5. Bikchentaev A., Sukochev F. Inequalities for the block projection operators // J. Funct. Anal. 2021. V. 280, No 7. Art. 108851. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108851>.
6. Бикчентаев А.М. Оператор блочного проектирования в алгебре измеримых операторов // Изв. вузов. Матем. 2023. № 10. С. 77–82. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-10-77-82>.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.
8. Бикчентаев А.М. Неравенства для определителей и характеристика следа // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 314–321. <https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.206>.
9. Takesaki M. Theory of Operator Algebras I. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. V. 124. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. xix, 415 p.
10. Dodds P.G., de Pagter B., Sukochev F.A. Noncommutative Integration and Operator Theory. Ser.: Progress in Mathematics. V. 349. Cham: Birkhäuser, 2023. xi, 577 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-49654-7>.
11. Takesaki M. Theory of Operator Algebras II. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. V. 125. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. xxii, 518 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4>.
12. Бикчентаев А.М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349. <https://doi.org/10.4213/mzm36>.
13. Bikchentaev A.M. On τ -essential invertibility of τ -measurable operators // Int. J. Theor. Phys. 2019. V. 60, No 2. P. 567–575. <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w>.
14. Бикчентаев А.М. Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полу-конечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282. <https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203>.
15. Тихонов О.Е. Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана // Изв. вузов. Матем. 1987. № 1. С. 77–79.
16. Hansen F. An operator inequality // Math. Ann. 1980. V. 246, No 3. P. 249–250. <https://doi.org/10.1007/BF01371046>.
17. Hansen F., Pedersen G.K. Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem // Math. Ann. 1982. V. 258, No 3. P. 229–241. <https://doi.org/10.1007/BF01450679>.
18. Strătilă S.V., Zsidó L. Lectures on von Neumann Algebras. Cambridge IISc Ser. Cambridge Univ. Press, 2019. xii, 427 p. <https://doi.org/10.1017/9781108654975>.
19. Halmos P.R. A Hilbert Space Problem Book. Ser.: Graduate Texts in Mathematics. V. 19. New York, NY: Springer, 1982. xvii, 373 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>.
20. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators // Pac. J. Math. 1986. V. 123, No 2. P. 269–300. <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1986.123.269>.

21. Brown L.G., Kosaki H. Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras // J. Oper. Theory. 1990. V. 23, No 1. P. 3–19.
22. Kosaki H. On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^* -algebra // J. Funct. Anal. 1984. V. 59, No 1. P. 123–131. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(84\)90055-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(84)90055-7).
23. Муратов М.А., Чулин В.И. Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // СМФН. 2016. Т. 61. С. 115–163.

References

1. Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A. Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators. *Integr. Equations Oper. Theory*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 186–226. <https://doi.org/10.1007/BF01204237>.
2. Kaftal V., Weiss G. Compact derivations relative to semifinite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 1985, vol. 62, no. 2, pp. 202–220. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(85\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-1236(85)90003-5).
3. Bikchentaev A.M. Block projection operator in normed solid spaces of measurable operators. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 75–79. <https://doi.org/10.3103/S1066369X12020107>.
4. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. St. Petersburg, Nevskii Dialekt, 2004. 816 p. (In Russian)
5. Bikchentaev A., Sukochev F. Inequalities for the block projection operators. *J. Funct. Anal.*, 2021, vol. 280, no. 7, art. 108851. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108851>.
6. Bikchentaev A.M. A block projection operator in the algebra of measurable operators. *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 10, pp. 70–74. <https://doi.org/10.3103/S1066369X23100031>.
7. Gohberg I.C., Krein M.G. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space]. Moscow, Nauka, 1965. 448 p. (In Russian)
8. Bikchentaev A.M. Inequalities for determinants and characterization of the trace. *Sib. Math. J.*, 2020, vol. 61, no. 2, pp. 248–254. <https://doi.org/10.1134/S0037446620020068>.
9. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras I*. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 124. Berlin, Heidelberg, Springer, 2002. xix, 415 p.
10. Dodds P.G., de Pagter B., Sukochev F.A. *Noncommutative Integration and Operator Theory*. Ser.: Progress in Mathematics. Vol. 349. Cham, Birkhäuser, 2023. xi, 577 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-49654-7>.
11. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras II*. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 125. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003. xxii, 518 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4>.
12. Bikchentaev A.M. Minimality of convergence in measure topologies on finite von Neumann algebras. *Math. Notes*, 2004, vol. 75, no. 3, pp. 315–321. <https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000023310.15215.c6>.
13. Bikchentaev A.M. On τ -essential invertibility of τ -measurable operators. *Int. J. Theor. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 2, pp. 567–575. <https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w>.

14. Bikchentaev A.M. Essentially invertible measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra and commutators. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 224–232. <https://doi.org/10.1134/S0037446622020033>.
15. Tikhonov O.E. Continuity of operator functions in topologies connected with a trace on a von Neumann algebra. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 1, pp. 110–114.
16. Hansen F. An operator inequality. *Math. Ann.*, 1980, vol. 246, no. 3, pp. 249–250. <https://doi.org/10.1007/BF01371046>.
17. Hansen F., Pedersen G.K. Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem. *Math. Ann.*, 1982, vol. 258, no. 3, pp. 229–241. <https://doi.org/10.1007/BF01450679>.
18. Strătilă S.V., Zsidó L. *Lectures on von Neumann Algebras*. Cambridge IISc Ser. Cambridge Univ. Press, 2019. xii, 427 p. <https://doi.org/10.1017/9781108654975>.
19. Halmos P.R. *A Hilbert Space Problem Book*. Ser.: Graduate Texts in Mathematics. Vol. 19. New York, NY, Springer, 1982. xvii, 373 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6>.
20. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators. *Pac. J. Math.*, 1986, vol. 123, no. 2, pp. 269–300. <http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1986.123.269>.
21. Brown L.G., Kosaki H. Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras. *J. Oper. Theory*, 1990, vol. 23, no. 1, pp. 3–19.
22. Kosaki H. On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^* -algebra. *J. Funct. Anal.* 1984, vol. 59, no. 1, pp. 123–131. [https://doi.org/10.1016/0022-1236\(84\)90055-7](https://doi.org/10.1016/0022-1236(84)90055-7).
23. Muratov M.A., Chilin V.I. Topological algebras of measurable and locally measurable operators. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 239, no. 5, pp. 654–705. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04320-y>.

Информация об авторах

Мохаммад Фирас Дарвиш Талеб, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: m.firas.darwish.d@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3554-7123>

Мустафа Абдурешитович Муратов, доктор физико-математических наук, профессор, Крымский федеральный университет

E-mail: mamuratov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9993-2275>

Author Information

Mohammed Firas Darwish Taleb, Postgraduate Student, Kazan Federal University

E-mail: m.firas.darwish.d@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-3554-7123>

Mustafa A. Muratov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, V.I. Vernadsky Crimean Federal University

E-mail: *mamuratov@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9993-2275>

Поступила в редакцию 8.10.2025

Принята к публикации 20.10.2025

Received October 8, 2025

Accepted October 20, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>

Учет несовершенства вертикальных скважин в двумерной модели пласта

И.В. Еремин¹ ✉, Д.Р. Салимьянова^{1,2}, К.А. Поташев¹¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия✉ ieremin726@gmail.com

Аннотация

Рассмотрен вопрос о возможности учета несовершенства вертикальных скважин по степени вскрытия пласта в двумерной численной модели фильтрации, осредненной по высоте неоднородного коллектора. Для верификационного моделирования на прямоугольной сетке конечных объемов использован специализированный пакет MATLAB Reservoir Simulation Toolbox с открытым исходным кодом. В осредненной двумерной модели скважины моделируются точечными источниками с коэффициентами продуктивности, вычисляемыми через радиус скважин. Учет несовершенства скважин сведен к определению их эффективного радиуса. Для этого в работе использованы известные аналитические методы и метод локального численного апскейлинга радиуса скважины в ее призабойной зоне, который может быть использован как относительно простой инструмент при построении двумерной модели пласта. На основе сравнения двумерного и трехмерного численных решений задачи взаимодействия скважин показано существенное превосходство метода локального апскейлинга по сравнению с аналитическими моделями.

Ключевые слова: нефтяной пласт, гидродинамическое моделирование, осреднение по высоте пласта, двумерная фильтрационная модель, несовершенные скважины, продуктивность скважин, эффективный радиус скважин, взаимодействие скважин, линии тока

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при финансовой поддержке Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» в рамках государственного задания.

Для цитирования: Еремин И.В., Салимьянова Д.Р., Поташев К.А. Учет несовершенства вертикальных скважин в двумерной модели пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 655–674. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>

Accounting for vertical well imperfection in a two-dimensional reservoir model

I.V. Eremin¹ ✉, D.R. Salimyanova^{1,2}, K.A. Potashev¹¹Kazan Federal University, Kazan, Russia²National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia✉ ieremin726@gmail.com

Abstract

In this study, a methodology is proposed to account for vertical well imperfection, depending on the degree of reservoir penetration, in a two-dimensional vertically averaged numerical flow model of a heterogeneous reservoir. Verification modeling is performed on a rectangular finite-volume grid using the open-source MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). In the averaged two-dimensional model, wells are represented as point sources with productivity indices calculated from the wellbore radius. Accounting for well imperfection is reduced to determining the effective wellbore radius by established analytical methods and local numerical upscaling of the wellbore radius in the near-wellbore region, which appears as a relatively simple tool for constructing a two-dimensional reservoir model. Based on a comparison of the two- and three-dimensional numerical solutions for the problem of well interference, a significant superiority of local numerical upscaling over analytical models is demonstrated.

Keywords: oil reservoir, hydrodynamic modeling, vertical averaging, two-dimensional flow model, imperfect wells, well productivity, effective wellbore radius, well interference, streamlines

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030) and performed as part of the state assignment to the National Research Centre “Kurchatov Institute”.

For citation: Eremin I.V., Salimyanova D.R., Potashev K.A. Accounting for vertical well imperfection in a two-dimensional reservoir model. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 655–674.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>. (In Russian)

Введение

Наилучшим способом моделирования фильтрационных процессов в нефтяных пластах с точки зрения достоверности результата и прозрачности формулировки вычислительных алгоритмов является трехмерное моделирование. Однако его главным недостатком при попытке учесть все значимые эффекты и особенности системы является огромная вычислительная сложность, которая, как правило, приводит к недопустимо большим затратам

машинного времени расчета, особенно в условиях большого числа многовариантных расчетов [1–4]. В этой связи многие исследования были посвящены вопросам построения упрощенных моделей фильтрации, позволяющих принципиально сократить вычислительную сложность алгоритмов решения поставленной задачи с сохранением приемлемой точности. Известны различные упрощенные (квази) модели [5–14], одной из которых является усредненная по высоте двумерная латеральная модель пласта. Эта модель, хоть и является достаточно простой и наглядной, однако требует определенной модификации вычислительных алгоритмов для учета трехмерных эффектов. Основными причинами, вызывающими зависимость от вертикальной координаты фильтрационных течений в пласте, являются неоднородность фильтрационно-емкостных свойств коллектора и неполное по высоте вскрытие пласта скважинами. Последнее условие принято называть несовершенством скважин по степени вскрытия пласта [15, 16].

Для несовершенных скважин известен ряд аналитических способов вычисления т. н. «эффективного радиуса», т. е. такого радиуса, с которым совершенная скважина обладала бы тем же коэффициентом продуктивности, что и рассматриваемая. Под коэффициентом продуктивности понимается отношение дебита скважины к перепаду давления между ее забоем и некоторым контуром питания в пласте или средним давлением в прискважинной области. К таким способам относятся, например, формулы Гириного, Маскета и Козени [17]. Их преимущество состоит в возможности мгновенного вычисления эффективного радиуса скважин, однако все они являются приближенными, поскольку получены в рамках некоторых упрощающих допущений о строении пласта и расположении интервалов перфорации вдоль ствола скважины. Таким образом, возникает вопрос об оценке достоверности и условий применимости перечисленных упрощенных методов в условиях, приближенных к реальным пластовым системам, причем их точность будет ожидаемо снижаться при нарушении предположений, заложенных при их выводе. Поэтому возникает необходимость разработки надежного универсального метода расчета эффективного радиуса скважин, не требующего значительных затрат вычислительных ресурсов.

В качестве такого метода в настоящей работе рассмотрен способ вычисления эквивалентного, или эффективного, радиуса несовершенной скважины, основанный на построении численного решения задачи пониженной размерности в малой призабойной области скважины. Понижение размерности задачи осуществляется переходом к двумерной постановке, симметричной относительно оси скважины, в предположении о сохранении высоты пласта и его преимущественно слоистой неоднородности в малой окрестности скважины. Такие допущения оказываются вполне обоснованными, поскольку радиус моделируемой призабойной зоны (~ 10 м) намного меньше характерного латерального масштаба неоднородности пласта ($\sim 10^2 \dots 10^3$ м) [18–20].

Решение указанной задачи приобретает особую ценность для реализации высокопроизводительной модели фильтрации в фиксированных трубках тока, для которой требуется надежный расчет поля давления в усредненной по высоте модели пласта с последующим построением латерального поля скорости фильтрации и структуры линий тока [21–24].

Оценка достоверности рассматриваемых методов выполнена на основе сравнения с результатами численного моделирования трехмерной задачи, которое явно воспроизводит все значимые факторы и потому условно считается «точным». Для численного моделирования на прямоугольной сетке конечных объемов использован специализированный пакет с открытым исходным кодом MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST) [25].

Предложенный метод локального численного апскейлинга радиуса несовершенной скважины может быть использован как относительно простой инструмент при построении двумерной модели пласта. Изложенный алгоритм реализован в виде отдельного расчетного модуля, который размещен в открытом доступе для использования на этапе осреднения трехмерных моделей пласта средствами данного программного пакета в рамках общедоступной лицензии [26].

1. Трехмерная модель

Математическая модель стационарной фильтрации несжимаемой жидкости в несжимаемой пористой среде в пренебрежении массовыми силами может быть описана системой уравнений [27]:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = -\sigma \operatorname{grad} p, \quad \sigma = \frac{k}{\mu}, \quad (1.2)$$

где (x, y, z) – эйлеровы координаты точки; z – вертикальная координата, направленная вверх от подошвы пласта; $\mathbf{u}(u, v, w)$ – вектор скорости фильтрации; p – давление в жидкости; k – абсолютная проницаемость пласта; μ – динамическая вязкость флюида.

Уравнения (1.1) и (1.2) записаны в области Ω нефтяного пласта, ограниченной снизу и сверху поверхностями $z = B(x, y)$ и $z = T(x, y)$, называемыми «подошвой» и «кровлей» пласта соответственно, а сбоку – вертикальной цилиндрической поверхностью $\Gamma(x, y)$ (рис. 1).

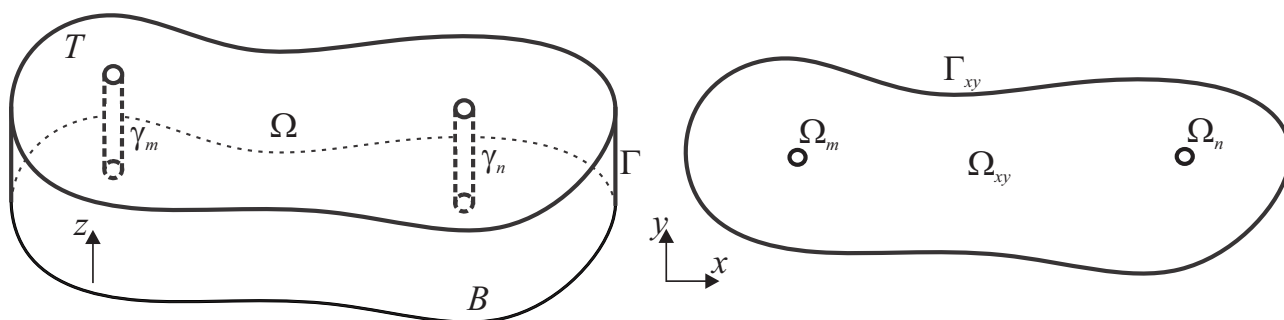


Рис. 1. Схема области решения трехмерной задачи и ее двумерное осреднение

Fig. 1. Schematic of the three-dimensional problem domain and its two-dimensional vertically averaged representation

Внутренними границами пласта являются поверхности $\gamma_m = \gamma_m^I \cup \gamma_m^{II}$ ($m = 1, \dots, M$) вертикальных скважин, пробуренных в нем, где γ_m^I и γ_m^{II} – перфорированные и невскрытые участки скважины.

Верхняя и нижняя поверхности пласта считаются непроницаемыми:

$$(x, y, z) \in B, T : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \equiv u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали, внешней к области Ω .

Изолированные участки скважины γ_m^{II} непроницаемы:

$$(x, y, z) \in \gamma_m^{II} : \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (1.4)$$

а на вскрытых участках γ_m^I заданы забойное давление или нелокальное граничное условие в виде суммарного расхода (дебита)

$$(x, y, z) \in \gamma_m^I : p = p_m^I, \quad (1.5)$$

$$\int_{\gamma_m^I} u_n d\gamma = - \int_{\gamma_m^I} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q_m. \quad (1.6)$$

Заметим, что с учетом (1.4) интеграл в (1.6) может быть взят по всей γ_m .

На вертикальной боковой границе Γ зададим давление или условие непроницаемости:

$$(x, y, z) \in \Gamma : p = p_\Gamma \quad \vee \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (1.7)$$

Решение трехмерной задачи (1.1)–(1.7) назовем «точным» и будем строить численно в специализированном пакете MRST [25], поскольку ее аналитическое решение в общем случае не существует.

2. Двумерная модель, усредненная по высоте пласта

С помощью операции усреднения параметра $(\cdot)$ по высоте пласта

$$\overline{(\cdot)}(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \int_{B(x, y)}^{T(x, y)} (\cdot)(x, y, z) dz, \quad h(x, y) = T(x, y) - B(x, y), \quad (2.1)$$

введем средние компоненты $(\bar{u}, \bar{v})(x, y)$ и $\bar{w} = 0$ вектора скорости фильтрации с учетом граничных условий (1.3), а также среднее давление $\bar{p}(x, y)$.

Обозначим через Ω_{xy} проекцию области Ω на плоскость (x, y) . В рамках данной работы будем полагать, что поверхности γ_m скважин являются вертикальными круговыми цилиндрами радиуса r_m . Тогда проекции скважин будут образовывать в Ω_{xy} внутренние круговые вырезы Ω_m . Через $\bar{\Omega}$ обозначим область в плоскости (x, y) , ограниченную лишь проекцией поверхности Γ , т. е. $\Omega_{xy} = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_m \Omega_m$.

Интегрирование уравнения (1.1) по высоте пласта в точках $(x, y) \in \Omega_{xy}$ дает

$$\int_B^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_B^T u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_B^T v dz = \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим через $h\bar{\mathbf{U}}$ непрерывное продолжение вектор-функции $h\bar{\mathbf{u}}$ на все области Ω_m . Такая функция определена на всей области $\bar{\Omega}$. Для проекции скважины с учетом смены направления нормали имеем

$$\int_{\Omega_m} \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{U}}) dV = \int_{\partial\Omega_m} h\bar{u}_n dV = -q_m \quad \forall m,$$

а в областях V , не содержащих области Ω_m скважин, согласно (2.2)

$$\int_V \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{U}}) dV = 0.$$

Следовательно, продолжение $h \bar{\mathbf{U}}$ должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}_{xy} (h \bar{\mathbf{U}}) = F(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.3)$$

с правой частью $F(x, y)$, обладающей для любого m следующими свойствами

$$1) (x, y) \notin \Omega_m : F(x, y) = 0; \quad 2) \int_V F dV = -q_m, \quad \Omega_m \in V. \quad (2.4)$$

В силу несоизмеримой малости радиусов скважин по сравнению с характерными расстояниями между ними можно перейти к пределу $r_m \rightarrow 0$, стягивая области Ω_m в точки с координатами (x_m, y_m) проекции оси скважин. Тогда свойства (2.4) позволят выразить функцию $F(x, y)$ через дельта-функции Дирака δ , а итоговое выражение (2.3) с учетом аддитивности второго свойства (2.4) для нескольких областей Ω_m перепишется в виде

$$\operatorname{div}_{xy} (h \bar{\mathbf{U}}) = - \sum_m q_m \delta(x - x_m) \delta(y - y_m), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2.5)$$

Таким образом, вертикальные скважины заменены точечными источниками ($q_m < 0$) или стоками ($q_m > 0$) заданной интенсивности q_m .

По аналогии со структурой закона Дарси (1.2) примем приближенные выражения средних компонент скорости фильтрации через компоненты градиента среднего давления

$$h \bar{\mathbf{U}} = (h \bar{U}, h \bar{V}) = - \int_B^T \sigma \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) dz \approx -h \bar{\sigma} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right), \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{k}}{\mu}. \quad (2.6)$$

Определение усредненной абсолютной проницаемости в общем случае является решением специальных задач апскейлинга [28, 29]. Однако, предполагая вертикальную неоднородность пласта наиболее значимой, в рамках данного исследования для простоты будем использовать выражение эффективной проницаемости слоисто-неоднородного пласта, которое совпадает с записью $\bar{k}(x, y)$, определяемой согласно (2.1).

Граничные условия (1.7) на границе Γ перейдут в условия на ее проекции Γ_{xy} :

$$(x, y) \in \Gamma_{xy} : \bar{p} = \bar{p}_\Gamma \quad \vee \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0. \quad (2.7)$$

Задачу (2.5)–(2.7) решим в области $\bar{\Omega}$. В случае заданных дебитов скважин правая часть уравнения (2.5) определяется из условий (1.6). Если же заданы забойные давления условиями (1.5), то при записи правой части (2.5) применим выражения дебитов скважин как функций искомого давления, заданных величин забойного давления, проницаемости пласта, радиуса скважин r_m и параметров перфорации $\wp_m$:

$$q_m = q_m(r_m, \wp_m, p_m, \bar{p}, \bar{k}). \quad (2.8)$$

Задача настоящей работы состоит в решении уравнения (2.5) именно с заданным давлением на скважинах. Явный вид функции (2.8) в общем случае не может быть получен и на практике задается приближенно в зависимости от выбора схемы численного решения уравнения (2.5). В частности, при конечнообъемной (КО) схеме решения, когда искомыми

являются величины среднего давления в конечных объемах, зависимость (2.8) выражает линейную связь дебита с разностью искомого среднего давления в содержащем скважину КО и забойного давления на скважине. Обычно эту зависимость выводят из упрощенных решений, например, формулы Дююи для радиального притока в однородном круговом пласте к совершенной скважине радиуса r_m . Тогда учет всевозможных видов несовершенства скважин сведется к вычислению т. н. эффективного радиуса скважины r_m^{eff} , который обеспечивает тот же расход при заданном забойном давлении, вычисленный по введенной упрощенной зависимости.

3. Вычисление эффективного радиуса несовершенной скважины

Рассмотрим способ вычисления эффективного радиуса r_m^{eff} для скважины радиуса r_m , несовершенной по степени вскрытия пласта. С этой целью рассмотрим цилиндрическую область Φ высоты H и такого радиуса R вокруг несовершенной вертикальной скважины, на котором давление можно считать постоянным по вертикали (рис. 2). Расстояние R определяет возможную область распространения вертикального возмущения давления, вызванного неполным вскрытием пласта скважиной. Положив величину R меньшей характерного масштаба латеральной неоднородности пласта, основания цилиндра Φ будем считать горизонтальными, а распределение проницаемости в нем и притока к контуру скважины [30] – зависящим лишь от вертикальной координаты z . Последнее можно приблизить моделью слоисто-неоднородного пласта, эффективная проницаемость которого, как было указано выше, совпадает со средней по высоте величиной $\bar{k}$.

Фильтрация в области Φ описывается уравнениями (1.1), (1.2).

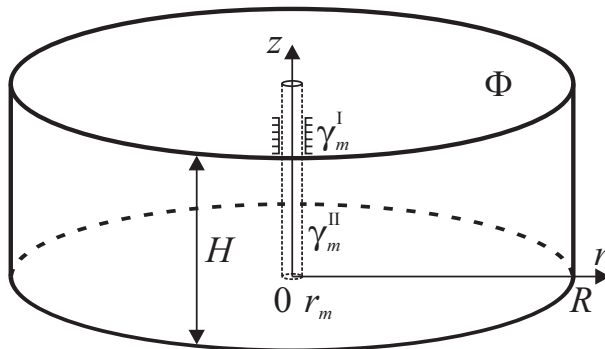


Рис. 2. Расчетная область задачи о дебите несовершенной скважины

Fig. 2. Computational domain for the imperfect well production rate

На основаниях цилиндра и на неперфорированной поверхности скважины поставим условия непроницаемости аналогично (1.3) и (1.4), на перфорированной поверхности скважины и на боковой поверхности цилиндра зададим величины давления граничными условиями (1.5) и

$$r = R : p = p_R. \quad (3.1)$$

Решение задачи (1.1)–(1.5), (3.1) в области Φ дает распределение давления в ней, по которому с помощью (1.6) вычисляется дебит несовершенной скважины q_m^l .

В силу перечисленных допущений данная задача может быть сведена к двумерной осесимметричной постановке в цилиндрических координатах (r, z) . Это приводит к понижению размерности задачи и тем самым расширяет возможности использования расчетных сеток повышенной детальности с локальным измельчением вблизи перфорированных интервалов ствола скважины. В общем случае для решения задачи может быть сохранена трехмерная постановка в координатах (x, y, z) с явным учетом поля проницаемости пласта.

3.1. Оценка допустимого размера расчетной области. Допустимый минимальный радиус R цилиндра Φ был определен из решения вспомогательной задачи (1.1)–(1.5) и (3.1) в области большого радиуса $100H$, на котором вертикальные возмущения давления пренебрежимо малы. Из полученного решения было найдено такое минимальное расстояние от скважины $\tilde{R}$, на котором среднеквадратичное отклонение давления от средней по вертикали величины с учетом (2.1) уже не превосходило заданного значения ε :

$$\tilde{R}: e(\tilde{R}) \leq \varepsilon, \quad e^2(r) = \overline{E}(r), \quad E(r, z) = \left(\frac{p(r, z) - \bar{p}(r)}{\bar{p}(r)} \right)^2.$$

На рис. 3 представлены варианты зависимости $\tilde{R}$ от положения перфорации и степени вскрытия пласта при $\varepsilon = 0.01$. При построении графика были рассмотрены два варианта расположения перфорации: 1) скважина вскрывает пласт от кровли на величину $l \in [0.02H, 0.98H]$; 2) скважина вскрывает пласт на величину $l = H/15$ с отметки $z = bH$. Задачи решались в однородном и слоисто-неоднородном пластах, когда $k = k(z)$ задавалась кусочно-постоянной функцией на трех равных интервалах со значениями $k_1 = 100k_2 = 10k_3$.

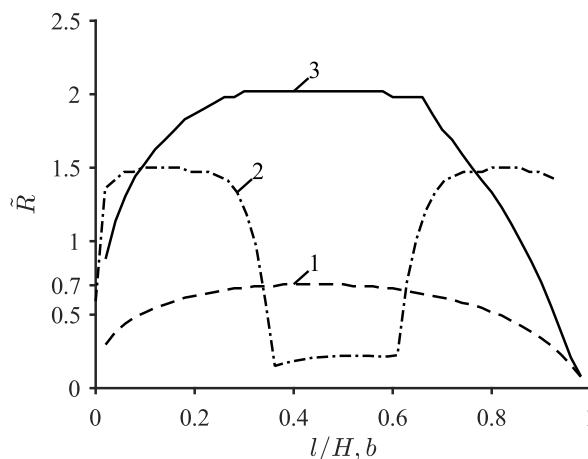


Рис. 3. Зависимость величины $\tilde{R}$ от степени вскрытия l при $b = 0$ (1, 3) и от положения перфорации b (2) при $l = H/15$ в слоистом (2, 3) и однородном (1) пластах

Fig. 3. Dependence of the $\tilde{R}$ value on the penetration degree l at $b = 0$ (1, 3) and on the perforation position b (2) at $l = H/15$ in the layered (2, 3) and homogeneous (1) reservoirs

Из рис. 3 видно, что $\tilde{R}$ заметно не превосходит двух высот пласта, что в реальности эквивалентно $10 \div 100$ м, что, как правило, кратно меньше характерного масштаба латеральной неоднородности и подтверждает принятую гипотезу о слабой горизонтальной изменчивости параметров пласта в призабойной зоне Φ скважины.

3.2. Алгоритм вычисления эффективного радиуса скважины. Значение r_m^{eff} эквивалентной совершенной скважины отыскивалось из условия равенства ее дебита, вычисляемого по формуле Дюпюи для радиального притока к скважине в гомогенизированном круговом пласте, дебиту несовершенной скважины q_m^l :

$$\frac{2\pi k H}{\mu} \frac{\Delta p}{\ln R/r_m^{eff}} = q_m^l.$$

Используя аналогичное выражение дебита совершенной скважины q_m^p исходного радиуса r_m , искомый эффективный радиус можно выразить через них, исключив величины разности давлений и гидропроводности пласта:

$$\frac{r_m^{eff}}{R} = \left(\frac{r_m}{R} \right)^{\frac{q_m^p}{q_m^l}}.$$

Вычислительный алгоритм решения задачи (1.1)–(1.5), (3.1) в двумерной осесимметричной постановке и определения r_m^{eff} был реализован в виде отдельной расчетной программы на языке C++ [26] с использованием ортогональной сетки конечных объемов и двухточечной аппроксимации потока на гранях [25, 31].

4. Апробация методики и результаты

4.1. Слоисто-неоднородный пласт. Верификация алгоритма вычисления эффективного радиуса скважины была выполнена на основе решения серии стационарных задач однофазной фильтрации (1.1)–(1.5), (1.7) в области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ (рис. 4):

$$L_x = 3L_y, \quad L_z = 0.1 L_y, \quad L_y = 100.$$

Пласт состоит из трех параллельных слоев толщины $h = L_z/3$ с величинами проницаемости $k/k_0 = 1, 0.1, 0.5$. Ось вертикальной нагнетательной скважины γ_I имеет координаты $(L_x/2, L_y/2)$. Симметрично от нее расположены две вертикальные добывающие скважины γ_{P1}, γ_{P2} с координатами осей $(L_x/2 \mp L_y, L_y/2)$ соответственно. Радиус всех трех скважин одинаков и равен $r_w = 0.1$ м. На скважинах с помощью условий (1.5) заданы одинаковые величины забойного давления для добывающих скважин $p_{P1} = p_{P2} \equiv p_P$ и величина забойного давления $p_I > p_P$ для нагнетательной скважины.

Скважина γ_{P1} вскрывает пласт по всей высоте. Скважина γ_{P2} вскрывает пласт только на интервале $z = [L_z - d - l, L_z - d]$.

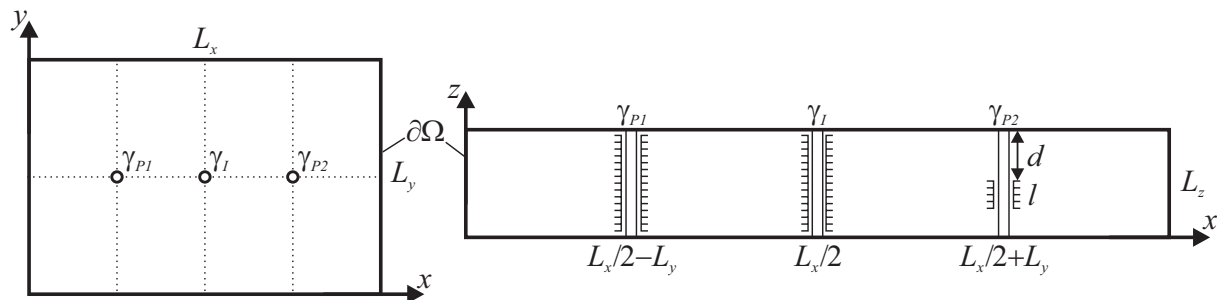


Рис. 4. Схема расчетной области

Fig. 4. Schematic of the computational domain

При записи условия (1.7) граница расчетной области полагалась непроницаемой, что вместе с граничными условиями (1.3) на кровле и подошве дает единое граничное условие изоляции на всей внешней границе расчетной области:

$$\partial\Omega : \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (4.1)$$

Расчеты проведены для фиксированного значения длины интервала перфорации $l = L_z/15$ и различных значений его заглубления $0 < d < L_z - l$.

Численное решение трехмерной задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (4.1) было построено в пакете MRST. Полученный результат принимался за эталонный при сравнении с решением двумерной задачи (2.5)–(2.8) в усредненной по высоте пласта области $\bar{\Omega} = [0, L_x] \times [0, L_y]$ с непроницаемой границей Γ_{xy} и со средней проницаемостью $\bar{k}$ согласно (2.1). Для несовершенной добывающей скважины в двумерной постановке были использованы значения r_w^{eff} , рассчитанные как по аналитическим формулам Гирина, Маскета и Козе-ни [17], так и по предложенному алгоритму.

Область Ω построения численного решения трехмерной задачи была покрыта равномерной конечно-объемной сеткой. Допустимые значения шага сетки по координатным осям были определены из анализа сеточной сходимости решения:

$$h_{x,y,z} = L_{x,y,z}/N_{x,y,z}, \quad N_x = 201, \quad N_y = 101, \quad N_z = 45.$$

Нечетные значения N_x, N_y задавались для расположения скважин в центрах блоков. Для двумерной области $\bar{\Omega}$ использовалось аналогичное разрешение N_x, N_y .

Для отыскания r_w^{eff} по изложенному алгоритму была использована конечно-объемная расчетная сетка размерности $N_r = 500$ и $N_z = 1035$ блоков с равномерным разбиением по оси z и логарифмическим сгущением по оси r вблизи скважины.

Точность алгоритма вычисления эффективного радиуса была оценена по величине относительного отклонения E распределения закачиваемой в пласт жидкости по добывающим скважинам, вычисленного по двумерной и трехмерной моделям:

$$E = (\alpha^{2D} - \alpha^{3D})/\alpha^{3D}, \quad \alpha = q_{P2}/q_{P1}.$$

Здесь $(\cdot)^{3D}$ – эталонное значение, вычисленное по трехмерной модели; $(\cdot)^{2D}$ – значение, полученное из двумерной модели с использованием эффективного радиуса скважины r_{eff} .

Результаты верификации приведены на рис. 5. Относительная ошибка вычисления распределения закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами в модели, усредненной по высоте пласта, с использованием изложенного метода расчета эффективного радиуса не превышает 30 %. При этом максимальное отклонение наблюдается для положения интервала перфорации, примыкающего к границе раздела слоев различной проницаемости. По-видимому, это связано с заложенными в вычислительный алгоритм пакета MRST поправочными коэффициентами в выражениях (2.8), выражающими продуктивность участка ствола скважины, полученными из упрощенных формул в случае двумерного течения, аналогично формуле Писмана [32]. Расчет же эффективного радиуса выполнялся на сетке высокого разрешения с подробной детализацией поля скорости фильтрации, как в области радиального, так и сферического притока к участкам перфорации скважины. Поэтому использование вычисленного предложенным способом эффективного радиуса может привести даже к повышению точности двумерной численной модели

по сравнению с трехмерной, с чем связаны фиктивные всплески отклонения E . Из рис. 6 видно, что при остальных вариантах расположения интервала перфорации отклонение E не превосходит 1 % при том, что сама величина α (распределение нагнетания по добывающим скважинам) изменяется примерно пятикратно от 0.1 до 0.5.

В то же время аналитические формулы расчета эффективного радиуса приводят к значительному увеличению относительной погрешности E от 1 до 2 порядков величины. В случае расположения перфорации в высокопроницаемом слое отклонение E для аналитических формул составило порядка 0.5 вместо 0.002 для изложенного алгоритма. Когда перфорация расположена в низкопроницаемом слое, соответствующие величины принимают значения порядка $2.5 \div 3.5$ вместо 0.01 (рис. 5). Это, очевидно, связано с отсутствием учета перечисленными аналитическими выражениями, во-первых, слоистой неоднородности пласта и, во-вторых, конкретного положения перфорации кроме степени вскрытия высоты пласта.

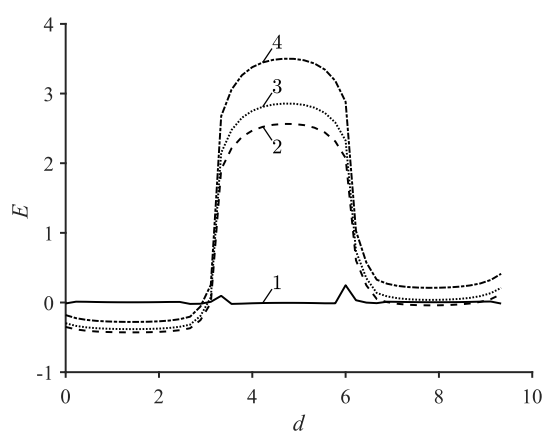


Рис. 5. Относительная ошибка распределения закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами: по предложенному методу (1) и по формулам Гиринского (2), Маскета (3) и Козени (4)

Fig. 5. Relative error in the distribution of injected fluid among production wells: using the proposed method (1) and according to the Girinsky (2), Muskat (3), and Kozeny (4) formulas

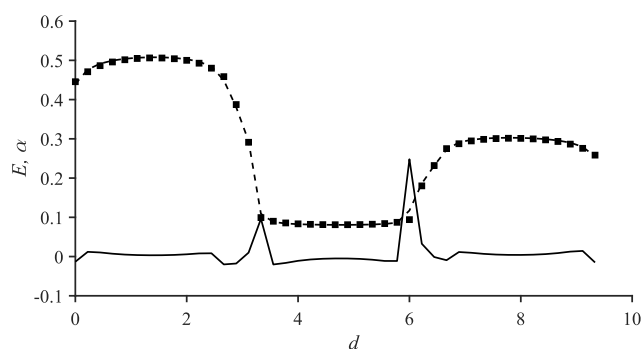


Рис. 6. Распределение закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами из трехмерного (маркеры) и двумерного (пунктир) решений по предложенному методу и относительная ошибка (сплошная линия)

Fig. 6. Distribution of injected fluid among the production wells from the three-dimensional (markers) and two-dimensional (dashed line) solutions, obtained using the proposed method, and the relative error (solid line)

Важно отметить, что указанные различия в расчетах приводят к существенной погрешности при вычислении распределения потоков между скважинами, структуре поля скорости фильтрации, а вместе с ним и в структуре линий тока (рис. 7). Последнее, в частности, может приводить к значительной погрешности при построении трубок тока и вычислении долей общего расхода между ними, которые, как было указано выше, необходимы для реализации расчетной схемы быстродействующей модели фильтрации в фиксированных трубках тока [33, 34].

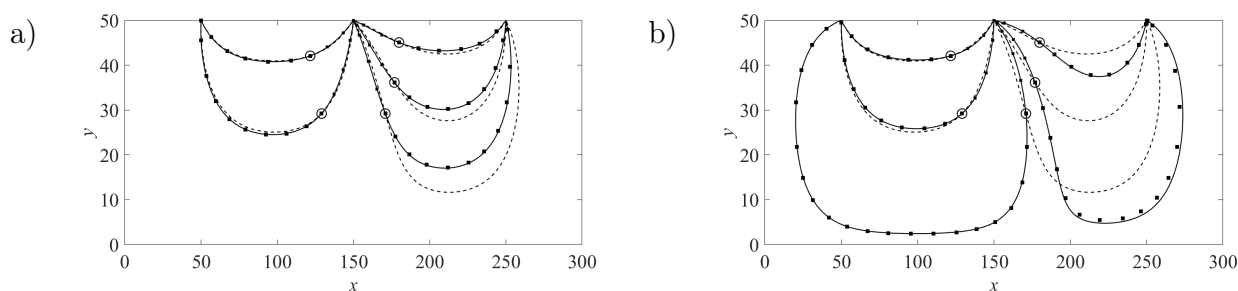


Рис. 7. Структура линий тока: маркеры – трехмерное решение; линии – двумерное решение: с применением формулы Гиринского (пунктир) и предложенного алгоритма (сплошная); а) $d = 0$; б) $d = 0.4Lz$; $\bigcirc$ – стартовые точки построения линий тока

Fig. 7. Streamline structure: markers – three-dimensional solution; lines – two-dimensional solution: using the Girinsky formula (dashed) and the proposed algorithm (solid); а) $d = 0$; б) $d = 0.4Lz$; $\bigcirc$ indicates the streamline starting points

4.2. Случайно-неоднородный пласт. В отличие от рассмотренного выше идеализированного случая реальное геологическое строение коллекторов обладает некоторой латеральной изменчивостью поля проницаемости вдоль пропластков [18, 19]. При этом средняя величина проницаемости в пределах каждого пропластка может принимать существенно различные значения, отражая преимущественно вертикальную (слоистую) неоднородность пласта, приобретенную в соответствующие геологические периоды формирования залежи.

Для верификации изложенного алгоритма в условиях, приближенных к реальным, была выполнена имитация неоднородной структуры поля проницаемости k с сохранением тех же наиболее вероятных величин в трех вертикальных интервалах h высоты пласта $k/k_0 = 1, 0.1, 0.5$ и с вариацией относительной величины корреляционного шага $\rho \equiv r^* = 0.1, 0.25, 0.5, 1$. Корреляционный шаг поля проницаемости определяет средний линейный масштаб латеральной неоднородности данного поля [35]. В пределах каждого интервала h фиксированной средней проницаемости («пачке») генерировалось от одного до трех пропластков, для каждого из которых строилось неоднородное двумерное поле проницаемости (рис. 8). Для каждого значения ρ генерировалось по десять реализаций для выполнения усредненной оценки достигаемой точности решения. Вычисление эффективного радиуса по изложенному алгоритму осуществлялось в предположении о локальной слоисто-неоднородной структуре пласта согласно последовательности величин проницаемости в пересеченных скважиной блоках расчетной сетки. Для использования аналитических моделей по тем же значениям вычислялась средняя проницаемость $\bar{k}$ по формуле (2.1).

Рис. 9 показывает, что при применении предложенного способа вычисления эффективного радиуса с увеличением параметра ρ уменьшается погрешность вычисления расходов скважин. Так, с увеличением ρ от 0.1 до 1 погрешность E в среднем снижается от двух (рис. 9, а) до пяти (рис. 9, б) раз в зависимости от числа пропластков. Это можно объяснить тем, что заложенные в алгоритм гипотезы о слабой латеральной изменчивости проницаемости вблизи скважины становятся более достоверными с увеличением масштаба неоднородности поля проницаемости. Сама ошибка по-прежнему лежит в интервале 1–5 %. При этом аналитические формулы приводят примерно к тем же неприемлемо высоким уровням погрешности, что и в случае слоисто-неоднородного пласта.

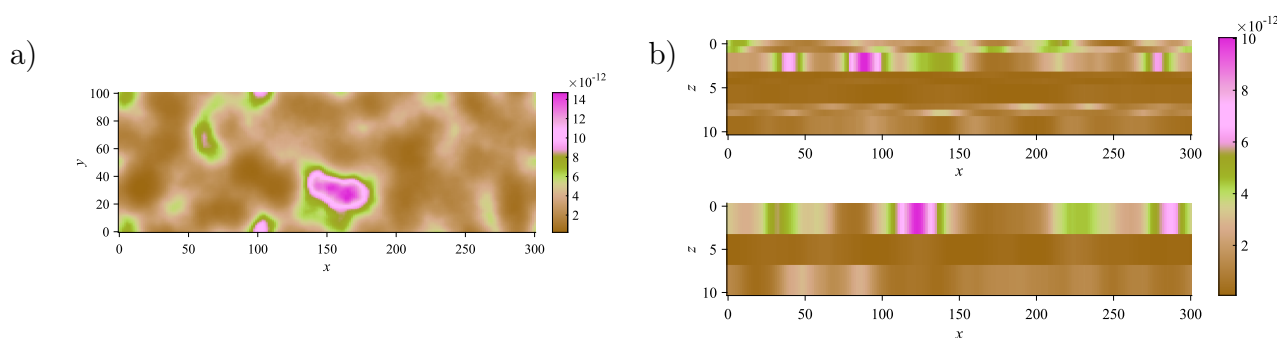


Рис. 8. Пример поля проницаемости в пределах одного пропластка (а) и в вертикальном сечении пласта (б) при корреляционном шаге $\rho = 0.2$

Fig. 8. Example of the permeability field within a single layer (a) and in a vertical cross-section of the reservoir (b) with correlation length $\rho = 0.2$

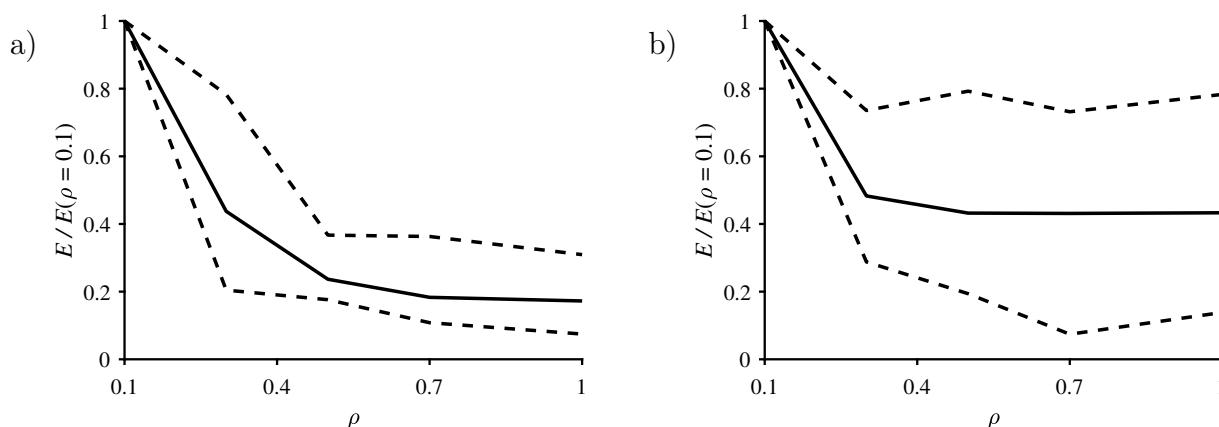


Рис. 9. Влияние шага латеральной неоднородности пласта на среднюю, минимальную и максимальную по параметру d относительную погрешность при одном (а) и трех (б) пропластках в каждой пачке пласта

Fig. 9. Effect of lateral heterogeneity spacing on the mean, minimum, and maximum relative error with respect to parameter d for one (a) and three (b) permeable layers per reservoir zone

Заключение

Исследован способ вычисления эффективного радиуса скважины, несовершенной по степени вскрытия пласта, основанный на построении численного решения задачи пониженной размерности в малой призабойной области скважины. Понижение размерности задачи осуществлено переходом к двумерной постановке, симметричной относительно оси скважины, в предположении о сохранении высоты пласта и его преимущественно слоистой неоднородности вблизи скважины. Дана постановка соответствующей задачи фильтрации и реализован алгоритм ее численного решения. Показано, что данный подход снижает погрешность в определении расходов и взаимодействия скважин по сравнению с применением известных формул расчета эффективного радиуса, не учитывающих неоднородность пласта, на один-два порядка в случае слоисто-неоднородного пласта. В резервуарах с геологически характерной структурой неоднородности погрешность также составляет 1–5 % и снижается с ростом корреляционного шага поля неоднородности проницаемости. Достигаемый высокий уровень точности позволяет достоверно воспроизводить структуру линий и трубок тока между скважинами в усредненной по высоте модели пласта, соответствующей усреднению трехмерной модели. Данная характеристика алгоритма является необходимой при расчете параметров взаимодействия скважин, а также при оснащении высокопроизводительной модели фильтрации в трубках тока расходными характеристиками.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Monteiro L., Baptista-Pereira C., Azevedo L.* Sensitivity analysis of injection parameters in steam assisted gravity drainage under geological uncertainty // J. Pet. Sci. Eng. 2022. V. 208, Pt. E. Art. 109732. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109732>.
2. *Chen H., Sen D.* A flow feature clustering-assisted uncertainty analysis workflow for optimal well rates in waterflood projects // SPE J. 2022. V. 27, No 4. P. 2453–2469. <https://doi.org/10.2118/209608-pa>.
3. *Afanasyev A., Sytchenko I., Andreeva A., Grechko S., Dymochkina M., Pavlov V., Maksakov K., Tsvetkova Yu., Vedeneva E., Chernova A., Penigin A.* Uncertainty quantification for the CO₂ storage efficiency in heterogeneous saline aquifers: The impact of variability in the lithology distribution // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2025. V. 144. Art. 104384. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2025.104384>.
4. *Fatemi S.A., Jansen J.D., Rossen W.R.* Discerning in-situ performance of an EOR agent in the midst of geological uncertainty I: Layer cake reservoir model // J. Pet. Sci. Eng. 2017. V. 158. P. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.08.021>.
5. *Chengtai G., Hedong S.* Material balance equation of multilayer gas reservoir // Well Test Analysis for Multilayered Reservoirs with Formation Crossflow. Ch. 10. Gulf Prof. Publ., 2017. P. 247–269. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812853-4.00010-7>.
6. *Tarek A.* Oil recovery mechanisms and the material balance equation // Reservoir Engineering Handbook. Ch. 11. Gulf Prof. Publ., 2010. P. 733–809. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50019-5>.

7. *HuiNong Z.* Interference test and pulse test // *Dynamic Well Testing in Petroleum Exploration and Development*. Ch. 6. Elsevier, 2013. P. 411–495.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397161-6.00006-1>.
8. *Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C.S., Lake L.W.* The use of capacitance–resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization // *J. Pet. Sci. Eng.* 2009. V. 69, Nos 3–4. P. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>.
9. *Alghamdi A., Hiba M., Aly M., Awotunde A.* Critical review of capacitance-resistance models // *Proc. SPE Russ. Petroleum Technology Conf.* 2021. Art. SPE-206555-MS.
<https://doi.org/10.2118/206555-MS>.
10. *Husein N., Drobot A., Vasechkin D., Urvantsev S., Bydzan A., Bolshakov V.* Using hybrid digital models to analyse well interference and optimise field development management // *Proc. SPE Annu. Caspian Technical Conf. Nur-Sultan*, 2022. Art. SPE-212120-MS.
<https://doi.org/10.2118/212120-MS>.
11. *Choubineh A., Chen J., Coenen F., Ma F., Wood D.A.* Machine learning to improve natural gas reservoir simulations // *Wood D.A., Cai A. (Eds.) Sustainable Natural Gas Reservoir and Production Engineering*. Ch. 3. Ser.: The Fundamentals and Sustainable Advances in Natural Gas Science and Engineering. V. 1. Gulf Prof. Publ., 2021. P. 55–82.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824495-1.00011-5>.
12. *Bascialla G., Rat C., Sheth S., Dias D., Mohammad R.H.* Physics-informed machine learning application to complex compositional model in a giant field // *Proc. Int. Petroleum Technology Conf. Dhahran*, 2024. Art. IPTC-23730-MS. <https://doi.org/10.2523/IPTC-23730-MS>.
13. *McLean K., Zarrouk S.J.* Pressure transient analysis of geothermal wells: A framework for numerical modelling // *Renewable Energy*. 2017. V. 101. P. 737–746.
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.09.031>.
14. *Zarrouk S.J., McLean K.* Numerical pressure-transient analysis modelling framework // *Geothermal Well Test Analysis: Fundamentals, Applications and Advanced Techniques*. Ch. 8. Acad. Press, 2019. P. 193–215. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814946-1.00008-6>.
15. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: ГНТИНГТЛ, 1963. 397 с.
16. *Пыхачев Г.Б., Исаев Р.Г.* Подземная гидравлика. М.: Недра, 1973. 360 с.
17. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
18. *Дойч К.В.* Геоestatистическое моделирование коллекторов. М.-Ижевск: ИКИ, 2011. 400 с.
19. *Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А.* Математическая геология. Т. I. Введение в геостатистику. М.-Ижевск: ИКИ, 2012. 228 с.
20. *Котенев Ю.А., Султанов Ш.Х., Чибисов А.В., Чиликин В.М.* Комплексная оценка геологической неоднородности пластовых систем при решении задачи регулирования процесса выработки запасов нефти // *Нанотехнол. в строит.: научн. Интернет-журн.* 2024. Т. 16, № 5. С. 473–484. <https://doi.org/10.15828/2075-8545-2024-16-5-473-484>.
21. *Поташев К.А., Мазо А.Б.* Численное моделирование локального воздействия на нефтяной пласт с применением фиксированных трубок тока для типичных схем заводнения // *Георесурсы*. 2020. Т. 22, № 4. С. 70–78. <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>.

22. *Potashev K.A., Mazo A.B.* Mathematical modeling of oil reservoir waterflooding using fixed streamtube at various values of viscosity ratio // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, No 8. P. 2023–2029. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080254>.
23. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Баушин В.В., Булыгин Д.В.* Расчет полимерного заводнения нефтяного пласта по модели фильтрации с фиксированной трубкой тока // *Георесурсы*. 2017. Т 19, № 1. С. 15–20. <https://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>.
24. *Салимьянова Д.Р., Поташев К.А., Баушин В.В.* Целесообразность удаленного размещения от нагнетательной скважины водоизолирующего состава в высокопроницаемом слое // *Георесурсы*. 2025. Т. 27, № 1. С. 261–266. <https://doi.org/10.18599/grs.2025.1.27>.
25. *Lie K.-A.* An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2019. 678 p.
26. Effective well radius.
URL: https://drive.google.com/drive/folders/1zrJgsOWwgCT_oGrULpc4XvvbQo-6fP6k (дата обращения: 28.10.2025).
27. *Баренблатт Г.И., Енттов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
28. *Mazo A.B., Potashev K.A.* Absolute permeability upscaling for superelement modeling of petroleum reservoir // *Math. Models Comput. Simul.* 2018. V. 10, No 1. P. 26–35. <https://doi.org/10.1134/S207004821801009X>.
29. *Durlofsky L.* Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation // *Proc. 8th Int. Forum on Reservoir Simulation*. V. 2024. Iles Borromees, 2005. P. 1–59.
30. *Поташев К.А., Ахунов Р.Р.* Оценка неоднородности притока пластового флюида к контуру поперечного сечения вертикальной скважины // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2020. № 162, кн. 2. С. 180–192. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.180-192>.
31. *Рочу П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
32. *Peaceman D.W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // *Soc. Pet. Eng. J.* 1978. V. 18, No 3. Art. SPE-6893-PA. <https://doi.org/10.2118/6893-PA>.
33. *Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B.* Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube // *Conf. Ser.: J. Phys.* 2019. V. 1158, No 4. Art. 042024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>.
34. *Поташев К.А., Ахунов Р.Р., Мазо А.Б.* Вычисление перетоков флюида между скважинами в фильтрационной модели разработки нефтяного пласта с помощью линий тока // *Георесурсы*. 2022. Т. 24, № 1. С. 27–35. <https://doi.org/10.18599/grs.2022.1.3>.
35. *Oliver D.S.* Moving averages for Gaussian simulation in two and three dimensions // *Math. Geol.* 1995. V. 27, No 8. P. 939–960. <https://doi.org/10.1007/BF02091660>.

References

1. Monteiro L., Baptista-Pereira C., Azevedo L. Sensitivity analysis of injection parameters in steam assisted gravity drainage under geological uncertainty. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2022, pt. E, vol. 208, art. 109732. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109732>.
2. Chen H., Sen D. A flow feature clustering-assisted uncertainty analysis workflow for optimal well rates in waterflood projects. *SPE J.*, 2022, vol. 27, no. 4, pp. 2453–2469. <https://doi.org/10.2118/209608-pa>.
3. Afanasyev A., Sypchenko I., Andreeva A., Grechko S., Dymochkina M., Pavlov V., Maksakov K., Tsvetkova Yu., Vedeneeva E., Chernova A., Penigin A. Uncertainty quantification for the CO₂ storage efficiency in heterogeneous saline aquifers: The impact of variability in the lithology distribution. *Int. J. Greenhouse Gas Control*, 2025, vol. 144, art. 104384. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2025.104384>.
4. Fatemi S.A., Jansen J.D., Rossen W.R. Discerning in-situ performance of an EOR agent in the midst of geological uncertainty I: Layer cake reservoir model. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2017, vol. 158, pp. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.08.021>.
5. Chengtai G., Hedong S. Material balance equation of multilayer gas reservoir. In: *Well Test Analysis for Multilayered Reservoirs with Formation Crossflow*. Ch. 10. Gulf Prof. Publ., 2017, pp. 247–269. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812853-4.00010-7>.
6. Tarek A. Oil recovery mechanisms and the material balance equation. In: *Reservoir Engineering Handbook*. Ch. 11. Gulf Prof. Publ., 2010, pp. 733–809. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50019-5>.
7. HuiNong Z. Interference test and pulse test. In: *Dynamic Well Testing in Petroleum Exploration and Development*. Ch. 6. Elsevier, 2013, pp. 411–495. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397161-6.00006-1>.
8. Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C.S., Lake L.W. The use of capacitance–resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2009, vol. 69, nos. 3–4, pp. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>.
9. Alghamdi A., Hiba M., Aly M., Awotunde. A. Critical review of capacitance-resistance models. *Proc. SPE Russ. Petroleum Technology Conf.*, 2021, art. SPE-206555-MS. <https://doi.org/10.2118/206555-MS>.
10. usein N., Drobot A., Vasechkin D., Urvantsev S., Bydzan A., Bolshakov V. Using hybrid digital models to analyse well interference and optimise field development management. *Proc. SPE Annu. Caspian Technical Conf.* Nur-Sultan, 2022, art. SPE-212120-MS. <https://doi.org/10.2118/212120-MS>.
11. Choubineh A., Chen J., Coenen F., Ma F., Wood D.A. Machine learning to improve natural gas reservoir simulations. In: Wood D.A., Cai A. (Eds.) *Sustainable Natural Gas Reservoir and Production Engineering*. Ch. 3. Ser.: The Fundamentals and Sustainable Advances in Natural Gas Science and Engineering. Vol. 1. Gulf Prof. Publ., 2021, pp. 55–82. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824495-1.00011-5>.
12. Bascialla G., Rat C., Sheth S., Dias D., Mohammad R.H. Physics-informed machine learning application to complex compositional model in a giant field. *Proc. Int. Petroleum Technology Conf.* Dhahran, 2024, art. IPTC-23730-MS. <https://doi.org/10.2523/IPTC-23730-MS>.

13. McLean K., Zarrouk S.J. Pressure transient analysis of geothermal wells: A framework for numerical modelling. *Renewable Energy*, 2017, vol. 101, pp. 737–746.
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.09.031>.
14. Zarrouk S.J., McLean K. Numerical pressure-transient analysis modelling framework. *Geothermal Well Test Analysis: Fundamentals, Applications and Advanced Techniques*. Ch. 8. Acad. Press, 2019, pp. 193–215. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814946-1.00008-6>.
15. Charnyi I.A. *Podzemnaya gidrogazodinamika* [Underground Fluid Dynamics]. Moscow, GNTINGTL, 1963. 397 p. (In Russian)
16. Pykhachev G.B., Isaev R.G. *Podzemnaya gidravlika* [Underground Hydraulics]. Moscow, Nedra, 1973. 360 p. (In Russian)
17. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground Hydromechanics]. Moscow, Nedra, 1993. 416 p. (In Russian)
18. Deutsch C.V. *Geostaticheskoe modelirovanie kollektorov* [Geostatistical Reservoir Modeling]. Moscow, Izhevsk, IKI, 2011. 400 p. (In Russian)
19. Baikov V.A., Bakirov N.K., Yakovlev A.A. *Matematicheskaya geologiya* [Mathematical Geology]. Vol. 1: Introduction to geostatistics. Moscow, Izhevsk, IKI, 2012. 228 p. (In Russian)
20. Kotenev Yu.A., Sultanov Sh.Kh., Chibisov A.V., Chilikin V.M. Comprehensive assessment of the geological heterogeneity of reservoir systems in the process of regulating the development of oil fields. *Nanotechnol. Constr.*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 473–484.
<https://doi.org/10.15828/2075-8545-2024-16-5-473-484>.
21. Potashev K.A., Mazo A.B. Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes. *Georesources*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 70–78.
<https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>. (In Russian)
22. Potashev K.A., Mazo A.B. Mathematical modeling of oil reservoir waterflooding using fixed streamtube at various values of viscosity ratio. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 2023–2029. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080254>.
23. Mazo A.B., Potashev K.A., Baushin V.V., Bulygin D.V. Numerical simulation of oil reservoir polymer flooding by the model of fixed stream tube. *Georesources*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 15–20.
<http://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>. (In Russian)
24. Salimyanova D.R., Potashev K.A., Baushin V.V. The expediency of remote location from an injection well of water shut-off material in a high-permeability sublayer. *Georesources*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 261–266. <https://doi.org/10.18599/grs.2025.1.27>. (In Russian)
25. Lie K.-A. *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST)*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2019. 678 p.
26. Effective well radius.
URL: https://drive.google.com/drive/folders/1zrJgsOWwgCT_oGrULpc4XvzbQo-6fP6k.
27. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks]. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)

28. Mazo A.B., Potashev K.A. Absolute permeability upscaling for superelement modeling of petroleum reservoir. *Math. Models Comput. Simul.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 26–35. <https://doi.org/10.1134/S207004821801009X>.
29. Durlowsky L. Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation. *Proc. 8th Int. Forum on Reservoir Simulation*. Vol. 2024. Iles Borromees, 2005, pp. 1–59.
30. Potashev K.A., Akhunov R.R. Estimation of the heterogeneity of the reservoir fluid inflow to the cross-sectional contour of a vertical well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 180–192. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.180-192>. (In Russian)
31. Roache P. *Vychislitel'naya gidrodinamika* [Computational Fluid Dynamics]. Moscow, Mir, 1980. 616 p. (In Russian)
32. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1978, vol. 18, no. 3, art. SPE-6893-PA. <https://doi.org/10.2118/6893-PA>.
33. Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B. Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 4, art. 042024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>.
34. Potashev K.A., Akhunov R.R., Mazo A.B. Calculation of the flow rate between wells in the flow model of an oil reservoir using streamlines. *Georesources*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 27–35. <https://doi.org/10.18599/grs.2022.1.3>. (In Russian)
35. Oliver D.S. Moving averages for Gaussian simulation in two and three dimensions. *Math. Geol.*, 1995, vol. 27, no. 8, pp. 939–960. <https://doi.org/10.1007/BF02091660>.

Информация об авторах

Илья Валерьевич Еремин, магистрант, младший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ieremin726@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7559-2912>

Дилара Радиковна Салимьянова, аспирант, ассистент, Казанский (Приволжский) федеральный университет; младший научный сотрудник, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

E-mail: Dilara.Salimyanova@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4381-9073>

Константин Андреевич Поташев, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: kpotashev@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7107-2974>

Author Information

Ilya V. Eremin, Master's Student, Junior Researcher, Kazan Federal University

E-mail: *ieremin726@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7559-2912>

Dilara R. Salimyanova, Postgraduate Student, Assistant, Kazan Federal University; Junior Researcher, National Research Centre "Kurchatov Institute"

E-mail: *Dilara.Salimyanova@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4381-9073>

Konstantin A. Potashev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Department of Aerohydraulics, Kazan Federal University

E-mail: *kpotashev@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7107-2974>

Поступила в редакцию 28.10.2025

Принята к публикации 8.11.2025

Received October 28, 2025

Accepted November 8, 2025

ORIGINAL ARTICLE

UDC 531

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.675-688>

Numerical analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum bearings

T. Zhelyazov*National Institute of Geophysics, Geodesy and Geography (NIGGG),
Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria**elovar@yahoo.com***Abstract**

This article focuses on the implementation of a lightweight model of a friction pendulum bearing in the finite-element model of a base-isolated structure. The proposed approach appears as an alternative to a high-fidelity finite-element model. The model considers the slider moving on the sliding surface as a material point with three degrees of freedom. The equations of motion for the slider are derived by leveraging the Lagrangian formalism. The three-degrees-of-freedom model is compared with other available analytical approaches that can be employed to define the response of friction pendulum bearings, mainly unidirectional formulations. From the numerical experiments, the dynamic response of a structure with and without base isolation is obtained using a finite-element analysis. Acceleration time series, recorded during an earthquake, are employed as an input. The numerical results, in terms of displacement and acceleration evolutions, demonstrate the positive effect of seismic isolation on mitigating the risk of failure in the structure.

Keywords: base-isolated structure, friction pendulum bearing, analytical model, finite-element modeling, transient analysis

For citation: Zhelyazov T. Numerical analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum bearings. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 675–688. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.675-688>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 531

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.675-688>**Численное исследование динамической реакции
конструкции с фрикционно-маятниковыми опорами****Т. Желязов***Национальный институт геофизики, геодезии и географии (НИГГГ),
Болгарская академия наук, г. София, Болгария**elovar@yahoo.com***Аннотация**

Разработана упрощенная модель фрикционно-маятниковой опоры, применяемой при конечно-элементном расчете конструкции с сейсмоизолированным фундаментом. Упрощенная модель выступает в качестве альтернативы детализированной конечно-элементной модели опоры и описывает движение, совершаемое ползуном, представленным в виде материальной точки с тремя степенями свободы, по поверхности скольжения. Уравнения движения ползуна получены с использованием формализма Лагранжа. Проведено сравнение данной модели с известными аналитическими моделями, прогнозирующими поведение фрикционно-маятниковых опор, преимущественно однонаправленных. Динамическое поведение сейсмоизолированной конструкции и её варианта при отсутствии сейсмоизоляции изучено посредством численных экспериментов с помощью метода конечных элементов. В качестве входных данных использовались акселерограммы, записанные во время землетрясения. Анализ численных данных, характеризующих амплитуду перемещения и ускорения сейсмоизолированной конструкции, показал, что применение сейсмоизоляции значительно снижает риск повреждения конструкций.

Ключевые слова: строительная конструкция с сейсмоизоляцией, фрикционно-маятниковая опора, аналитическая модель, конечно-элементное моделирование, анализ переходных процессов

Для цитирования: Zhelyazov T. Numerical analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum bearings // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 675–688. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.675-688>.

Introduction

Seismic isolation decouples the structure from the ground by providing lateral flexibility, while ensuring sufficient rigidity to withstand vertical loads transmitted from the superstructure [1, 2]. Base isolation serves as an efficient method to reduce displacements in the superstructure during a strong ground motion by dissipating the energy from seismic waves. This goal is achieved by adding friction or flexibility. The most common examples of dissipative devices are friction pendulum systems [3], high damping rubber bearings, and lead core rubber bearings (LRB) [4].

Typically, a friction pendulum isolator consists of top and bottom steel plates and a steel slider. The bottom steel plate is machined to form a concave sliding surface on which the slider moves. The surfaces of the slider, which are in contact with other elements of the bearing, may be covered with a composite material liner to obtain some desired characteristics of the sliding behavior (Fig. 1).

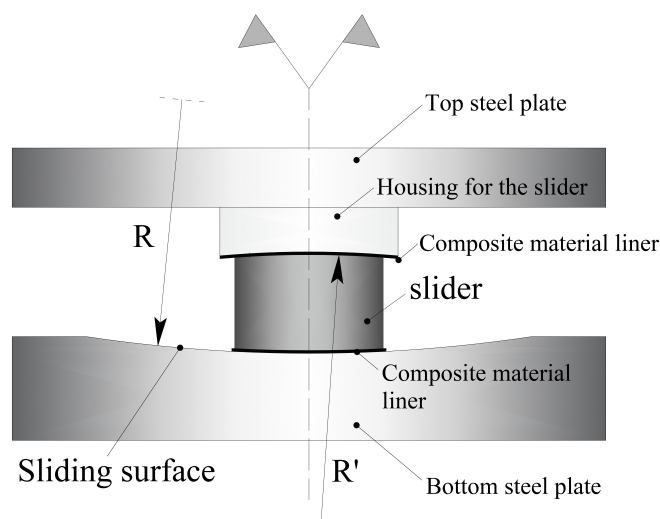


Fig. 1. Friction pendulum isolator

The sliding surface is characterized by little resistance to lateral movement due to the low coefficient of friction. Therefore, the device has a large capacity for movement, which is limited only by its geometric dimensions in the plane.

Friction isolators have garnered substantial research interest [5–8]. The period of oscillation of a structure equipped with friction pendulums depends mainly on the radius of curvature of the concave sliding surface rather than on the supported mass [7]. Friction isolators are generally compact, making them an attractive option for retrofitting existing buildings [8]. They have proven effective for seismic isolation of certain types of structures [9,10] and bridges [11] as well.

Some technological demands, such as the need to limit displacement of the sliding isolator during a strong ground motion, have led to the development of triple [12,13] and quintuple [14] friction isolators that accommodate more sliding surfaces and provide multiple regimes of response during a seismic excitation. Furthermore, friction pendulum bearings with variable curvature were proposed and studied [15–19]. The variable curvature of the sliding surface theoretically enables an adaptive frequency conversion, thus minimizing the likelihood of undesired effects associated with resonance. In contrast, classical friction pendulum bearings provide a constant isolation frequency, which is associated with a higher risk for resonance occurrence. Apart from being an option for base isolation, friction pendulum bearings emerge as a solution for inter-story seismic isolation. High-rise buildings equipped with inter-story isolation reportedly demonstrate a better response compared to those with base isolation [20].

Dynamic structural behavior analysis has always been a challenge, given that no straightforward recipe exists. Finite-element analysis of a base-isolated structure can provide some insight into the response during an earthquake without restriction regarding possible irregular geometry. In terms of seismic isolation modeling, several approaches are possible. One solution is to develop a high-fidelity finite-element model of the bearing, which will

add a considerable number of degrees of freedom to the finite-element model of the base-isolated structure that might be comparable to the degrees of freedom of the structure. This approach will clearly result in an increased overhead in terms of computational resources and time for analysis. The question arises of how to implement less demanding models to reduce the computational load in the transient finite-element analysis of the entire structure.

Existing analytical models have evolved from single-degree-of-freedom (SDOF) approximations, capable of capturing the response of friction seismic isolators with acceptable accuracy, to a vector superposition of two, inherently SDOF responses, along two orthogonal directions assumed independent of each other [21, 22].

The need to go beyond SDOF approaches and take into account the multiaxial response of friction pendulum bearings was suggested by indicating that the bearing response depends on the supported vertical load [23, 24]. In more recent studies [25], it was argued that models rooted in SDOF approximations neglect some phenomenological aspects of the friction pendulum response, which might be important in the case of near-fault ground motions characterized by a better pronounced vertical component. In one of the proposed models, the motion of the slider on the spherical concave surface is considered as the motion of a particle with three degrees of freedom.

Machine learning algorithms also find application in analyzing the dynamic response of structures, as well as in reproducing the behavior of seismic isolation. The relative displacement of stories was investigated in [26]. A hybrid analysis comprising modeling of the superstructure using linear frame models and ANN implementation for the force-displacement relationship of the seismic isolators was presented in [27] and validated in [28] via a comparison with conventional time history analysis and test data. It should be noted that this analysis was conducted for another type of isolator, not for friction pendulum bearings.

The scope of the contribution is confined to the application of approaches rooted in analytical mechanics combined with time-history analysis using finite-element models for structures with base isolation in classical friction-pendulum bearings (Fig. 1).

The article is organized as follows. The SDOF model application is illustrated through the numerical simulation of a friction pendulum bearing characterization test. The force-displacement relationships in two orthogonal directions are numerically obtained. The analytical approach in which the motion of the slider is considered a motion of a material point with three degrees of freedom is then introduced. Finally, the behavior of a base-isolated structure, in which the three-degrees-of-freedom model of the device is implemented, during an earthquake is analyzed using a transient finite-element analysis. The response of the structure is obtained in terms of displacements and accelerations. To underscore the effect of the seismic isolation, the responses of two identical structures with and without base isolation are compared.

1. Combination of One-Dimensional Models in Two Orthogonal Directions

In this section, an approach assuming a combination of two SDOF models in two orthogonal directions is considered. The analytical model is implemented to numerically evaluate the behavior of a friction pendulum bearing subjected to in-plane excitation and a vertical load. In the sequel, the numerically obtained relationships are referred to as U-F relationships.

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{N}}{r} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \mu \mathbf{N} \frac{1}{\|\dot{\mathbf{u}}\|} \begin{pmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where $\mathbf{N}$ is the vertical load transferred from the superstructure, r is the effective radius of the sliding surface $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$, $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y)^T$, and T denotes a transpose.

The model defined by equation (1) can be implemented in the characterization test shown in Fig. 2. The bottom plate of the isolator is kept fixed, whereas prescribed in-plane displacements are applied to the top surface according to the planned testing protocol.

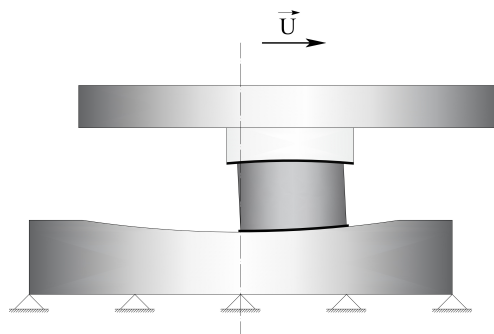


Fig. 2. Scheme of the characterization test

The numerical results describing the interface response in terms of the force-displacement relationships (or U-F relationships) obtained using the testing protocol depicted in Fig. 3, for two orthogonal directions, denoted as X- and Y-, are shown in Fig. 4 and Fig. 5, respectively.

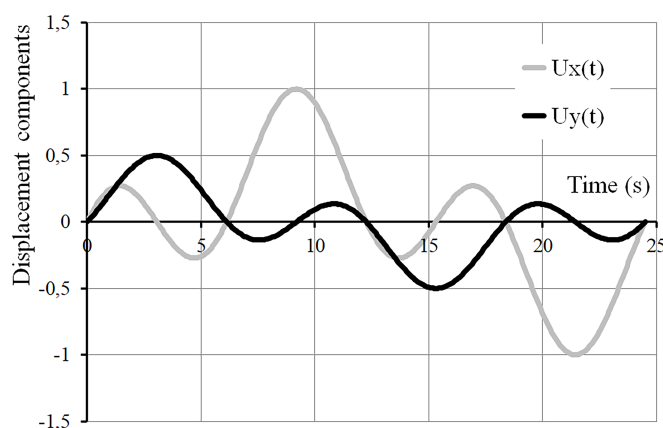


Fig. 3. Testing protocol for displacements

2. Seismic Isolator Considered as a Mechanical System with Three Degrees of Freedom

The slider, taken as a material point, has three degrees of freedom (r, θ, φ) . The equations of motion are derived by using the Lagrangian formalism as follows:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad L = E_k - E_p. \quad (2)$$

In equation (2), $\dot{q}_i$ denote the generalized velocities, q_i correspond to the generalized coordinates, and Q_i represent the generalized forces ($i = 1, \dots, 3$), while E_k and E_p stand

for the kinetic and potential energy, respectively. In the expanded form, a system of three equations is obtained:

$$\begin{cases} -mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) - N \cos(\theta) = Q_r, \\ mr^2\ddot{\theta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + Nr \sin(\theta) = Q_\theta, \\ mr^2(\ddot{\varphi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)) = Q_\varphi. \end{cases} \quad (3)$$

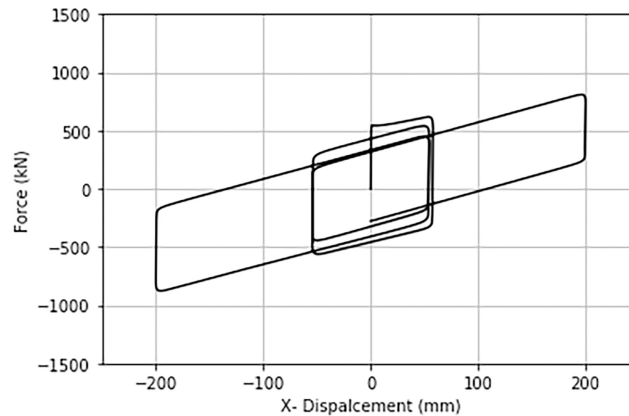


Fig. 4. Force-displacement relationship in the X-direction: $U_x - F_x$

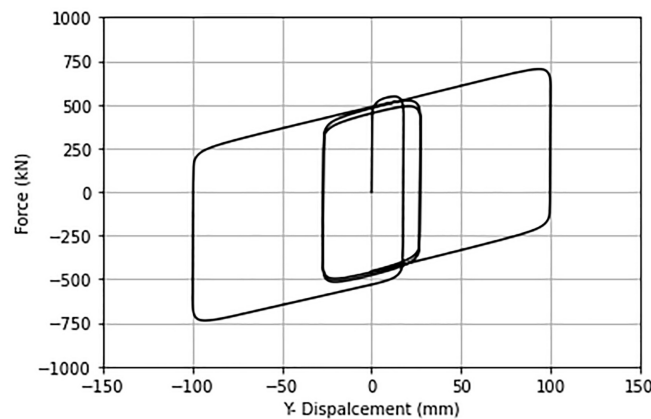


Fig. 5. Force-displacement relationship in the Y-direction: $U_y - F_y$

The generalized forces on the right-hand sides of the equations in the system of equations (3) are obtained by summing the inertia force components with the normal reaction R_n (for the first equation) and the friction forces R_θ and R_φ (for the second and third equations, respectively), as shown in Fig.6:

$$\begin{cases} -mr(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) - N \cos(\theta) = -ma_r - R_n, \\ mr^2\ddot{\theta} - mr^2\dot{\varphi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + Nr \sin(\theta) = r(-ma_\theta + R_\theta), \\ mr^2(\ddot{\varphi} \sin^2(\theta) + 2\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta)) = r \sin(\theta)(-ma_\varphi + R_\varphi). \end{cases} \quad (4)$$

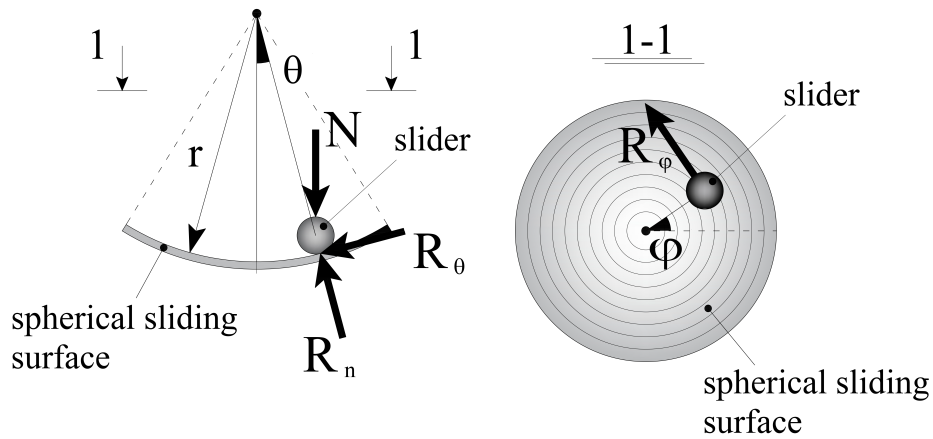


Fig. 6. Generalized coordinates, normal reaction, and friction forces acting on the slider

In equation (4), the acceleration vector is defined in polar coordinates $(a_r, a_\theta, a_\varphi)$, but the recorded acceleration contains the Cartesian components of the acceleration vector (a_x, a_y, a_z) . The equation below describes the relationship between the acceleration vector components expressed in polar and Cartesian coordinate systems:

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Given that the slider is forced to move along the sliding surface, an expression for the normal reaction can be obtained from the first equation in the system of equations (4):

$$R_n = -mr(\ddot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) - mg \cos(\theta) + m(\cos(\varphi) \sin(\theta) a_x + \sin(\varphi) \sin(\theta) a_y - \cos(\theta) a_z). \quad (6)$$

Leveraging the expression for the normal reaction, the friction force components are expressed as:

$$\begin{aligned} R_\theta &= -\mu R_n \operatorname{sgn}(\dot{\theta}), \\ R_\varphi &= -\mu R_n \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \sin(\theta)). \end{aligned} \quad (7)$$

Thus, the system of equations (4) reduces to the following two equations:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \mu \dot{\theta}^2 \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + [g/r - \dot{\varphi}^2 \cos(\theta) + a_z/r - \mu \dot{\varphi}^2 (\sin(\theta) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) + (\mu/r)(\cos(\varphi) a_x + \\ + \sin(\varphi) a_y) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}))] \sin(\theta) + (1/r)(\cos(\varphi) \cos(\theta) a_x + \sin(\varphi) \cos(\theta) a_y) - \\ - (\mu/r)(g \cos(\theta) + \cos(\theta) a_z) \operatorname{sgn}(\ddot{\theta}) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \mu \sin(\theta) \operatorname{sgn}(\sin(\theta) \dot{\varphi}) + 2\dot{\varphi} \dot{\theta} \tan(\theta) + (1/r \sin(\theta))(\mu \sin(\theta) a_y \operatorname{sgn}(\sin(\theta) \dot{\varphi}) - \\ - a_x \sin(\varphi) + (1/r \sin(\theta))(\cos(\varphi) a_y - \mu(r \dot{\theta}^2 + g \cos(\theta) - \cos(\varphi) \sin(\theta) a_x + \\ + \cos(\theta) a_z) \operatorname{sgn}(\sin(\theta) \dot{\varphi})) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

which are solved numerically.

3. Dynamic Response Analysis of a Structure with Seismic Isolation

The general-purpose finite-element code ANSYS Mechanical APDL is employed to build the finite-element model of a reinforced concrete structure (with elasticity modulus $E = 30$ GPa, Poisson's ratio $\nu = 0.2$, and density $\rho = 2500$ kg/m³) shown in Fig. 7. Point masses ($m = 2000$ kg) are defined at each level, at points E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, and P. Two versions of the model are developed: one equipped with base isolation and another without seismic isolation, for reference. For the reference model (without seismic isolation), the seismic input is applied to all nodes located at $z = 0$, whereas, for the model of the seismically isolated structure, seismic accelerations act at locations where the friction pendulum bearings are installed (i.e., points A, B, C, and D at $z = 0$, see Fig. 7, b).

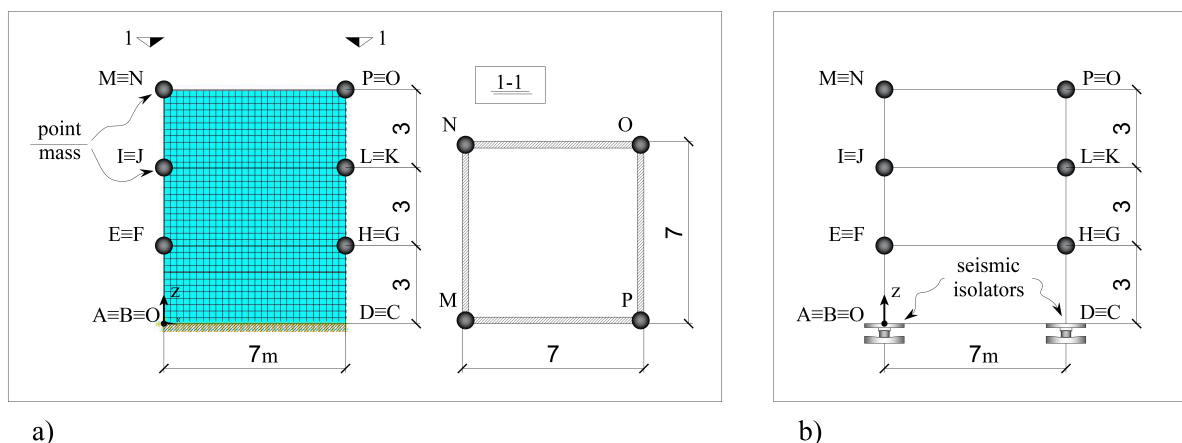


Fig. 7. Reference structure without seismic isolation (a), structure with base isolation (b)

The generated finite-element mesh (Fig. 7, a) contains 4044 finite elements SHELL181 and 12 finite elements MASS21. SHELL181 is a four-node element with six degrees of freedom per node (translations in the X-, Y-, and Z-directions and rotations about the X-, Y-, and Z-axes). MASS21 is a point element with six degrees of freedom (translations in the nodal X-, Y-, and Z- directions and rotations about the nodal X-, Y-, and Z-axes).

A transient analysis is then carried out using the recorded acceleration time series (the X-component of the input is displayed in Fig. 8). It should be noted that the employed input is an excitation with the X-, Y-, and Z- components.

The response of the structure is obtained in terms of displacement evolution (Fig. 9) and acceleration evolution (Fig. 10) monitored at point P, as shown in Fig. 7.

It is apparent that the implementation of friction pendulum seismic isolators leads to a significant decrease in the monitored displacement. The decrease in acceleration is not so well pronounced. In this context, seismic isolation can positively modify the fragility curves (or surfaces) typically employed in quantitative risk assessment.

A comparison of the dynamic response of the base-isolated structure for various characteristics of the friction pendulum bearing R and μ is given in Fig. 11. An increase in the equivalent radius of curvature (from 3 m to 4 m) leads to a decrease in the maximum value of the monitored displacement up to 33%. On the other hand, an (almost) double increase in the friction coefficient increases the maximum absolute value of the monitored displacement by 49%. It should be noted that choosing the equivalent radius of curvature is much easier to

control, given that the friction coefficient is strongly material specific. However, an in-depth understanding of the interface behavior (i.e., the precise assessment of the friction coefficient degradation) is crucial for accurately predicting the response of the isolator and the base-isolated structure.

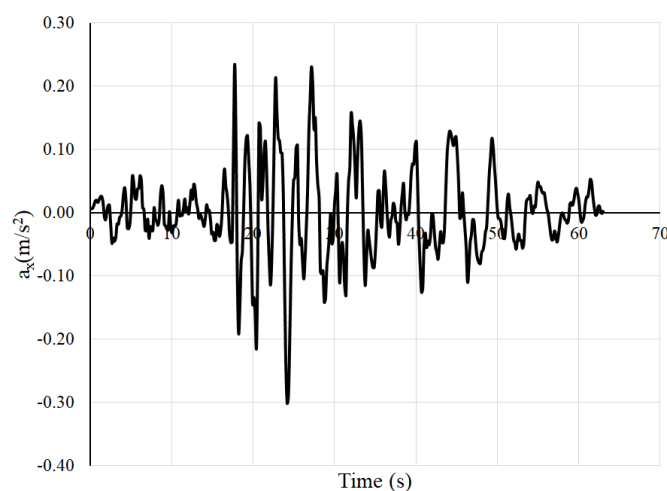


Fig. 8. X-component of the input acceleration time series

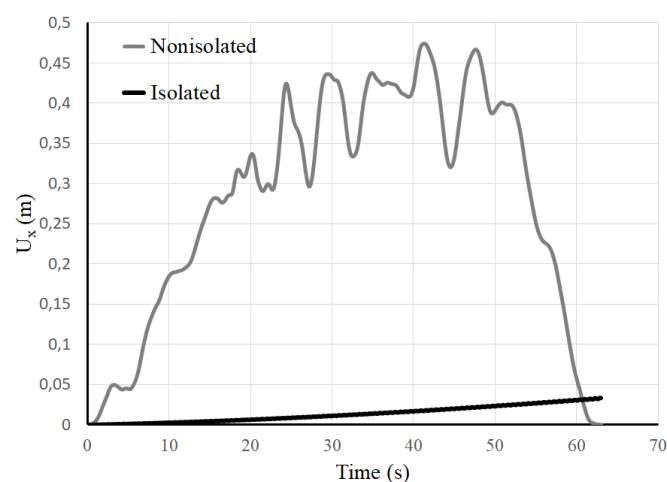


Fig. 9. Comparison of the X-component of the displacement at point P for the nonisolated and isolated structures

It should be mentioned that the numerical results are obtained by assuming a constant value for the friction coefficient. As an illustration of a variable friction coefficient, its evolution (and, more precisely, its decrease in the X-direction), predicted in the context of the characterization test (Fig. 2), is shown in Fig. 12.

These results are consistent with the data provided in [29], on a decrease in the friction coefficient from 0.07 to 0.04.

In a comprehensive research with an experimental basis, reported in [6], it was deduced that the friction coefficient depends on the sliding velocity and the normal pressure acting on the sliding surface. The behavior illustrated in Fig. 12 has been obtained [30]

using phenomenological models that postulate a dependence of the friction coefficient on the sliding velocity, normal pressure, and the rise in temperature during sliding [31, 32]. The temperature rise can be experimentally detected using either thermocouples [33, 34] or thin-film thermocouples [35]. The accurate assessment of available models reveals discrepancies between theoretical predictions and experimental data, which can reach up to 40–50 % for sliding paths longer than 10 m. The above implies that simulation of the characterization test may and should be included in the design of bearings for a better model constant identification prior to the time history analysis of the base-isolated structure.

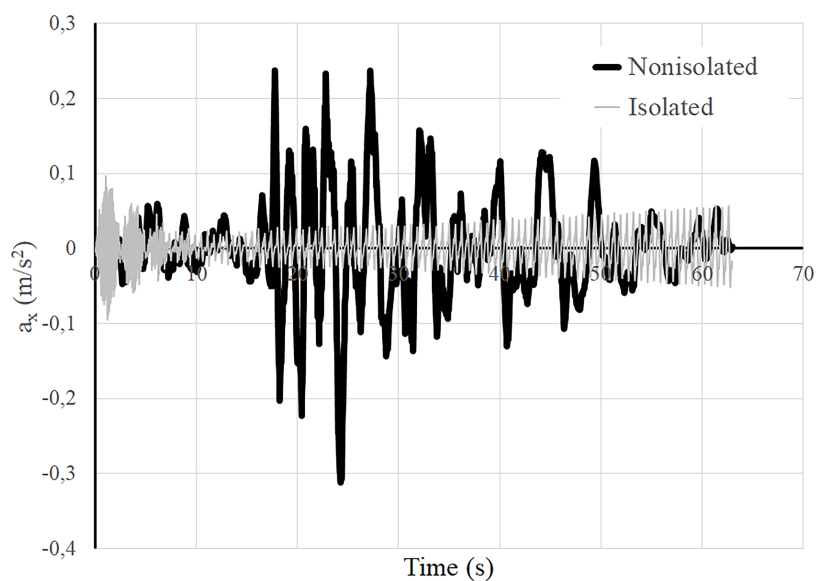


Fig. 10. Comparison of the X-component of the acceleration at point P for the nonisolated and isolated structures

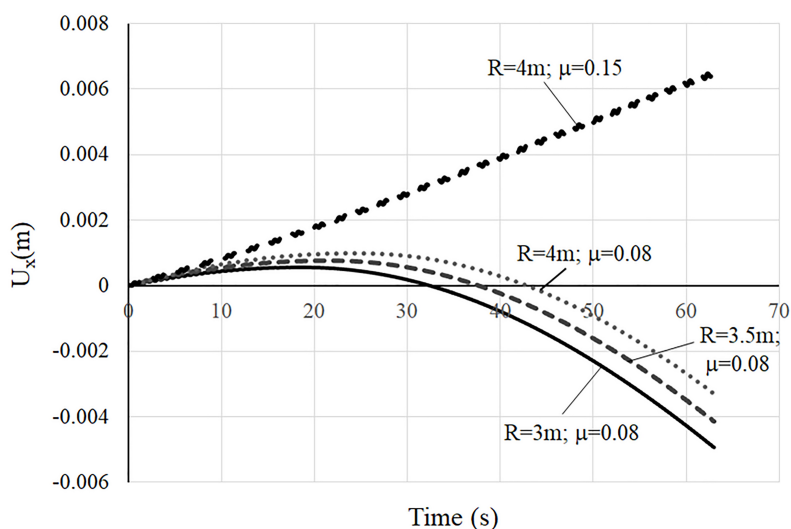


Fig. 11. Comparison of the X-component of the displacement at point P for various characteristics of the friction pendulum bearing

Conclusions

Some theoretical models of friction pendulum seismic isolators, their applications in the mathematical modeling of experimental characterization of bearings (such as the U-F relationships), and their implementation in the analysis of the dynamic response of a structure equipped with friction pendulum isolators were considered. Although SDOF models possess some drawbacks in predicting the friction pendulum bearing within base-isolated structures, they should be employed in the model constant identification phase. Models that consider all degrees of freedom for the isolator provide a more accurate assessment of its multiaxial response and are better suited for the analysis of the dynamic behavior of the overall structure. Additionally, lightweight analytical models are clearly more efficient in a transient finite-element analysis compared to detailed high-fidelity finite-element models of the bearings.

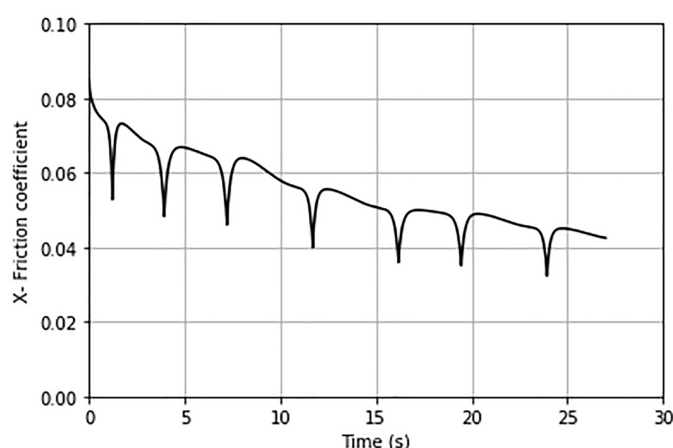


Fig. 12. Change in the friction coefficient, in the X-direction, obtained in a simulation of a friction pendulum bearing characterization test

The obtained numerical results showcase the favorable effect of seismic isolation on the dynamic response of a structure during earthquakes. The proposed algorithm can be applied for the design of seismic isolators, for their placement within the structure, as well as for optimizing the response of the structure considering a specific seismic hazard. In some cases, base isolation positively modifies the fragility curves/surfaces of the structure, providing a less conservative risk assessment for structures in seismic regions.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Kavyashree B.G., Patil S., Rao V.S. Review on vibration control in tall buildings: From the perspective of devices and applications. *Int. J. Dyn. Control*, 2021, vol. 9, no. 3, pp. 1316–1331. <https://doi.org/10.1007/s40435-020-00728-6>.
2. Naeim F., Kelly J.M. *Design of Seismic Isolated Structures: From Theory to Practice*. New York, NY, John Wiley & Sons, 1999. xiv, 290 p. <https://doi.org/10.1002/9780470172742>.
3. Zayas V.A., Low S.S., Mahin S.A. A simple pendulum technique for achieving seismic isolation. *Earthquake Spectra*, 1990, vol. 6, no. 2, pp. 317–333. <https://doi.org/10.1193/1.1585573>.

4. Megget L.M. Analysis and design of a base-isolated reinforced concrete frame building. *N. Z. Soc. Earthquake Eng.*, 1978, vol. 11, no. 4, pp. 245–254. <https://doi.org/10.5459/bnzsee.11.4.245-254>.
5. Mokha A., Constantinou M., Reinhorn A. Teflon bearings in base isolation. I: Testing. *J. Struct. Eng.*, 1990, vol. 116, no. 2, pp. 438–454. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1990\)116:2\(438\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:2(438)).
6. Constantinou M.C., Mokha A., Reinhorn A. Teflon bearings in base isolation. II: Modeling. *J. Struct. Eng.*, 1990, vol. 116, no. 2, pp. 455–474. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1990\)116:2\(455\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1990)116:2(455)).
7. Mokha A., Constantinou M.C., Reinhorn A.M. Further results on frictional properties of Teflon bearings. *J. Struct. Eng.*, 1991, vol. 117, no. 2, pp. 622–626. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1991\)117:2\(622\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1991)117:2(622)).
8. Mokha A., Amin N., Constantinou M.C., Zayas V. Seismic isolation retrofit of large historical building. *J. Struct. Eng.*, 1996, vol. 122, no. 3, pp. 298–308. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1996\)122:3\(298\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1996)122:3(298)).
9. Kim H.-m., Constantinou M.C. Performance-based testing specifications for seismic isolators. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 2023, vol. 52, no. 15, pp. 5141–5161. <https://doi.org/10.1002/eqe.4006>.
10. Castaldo P., Palazzo B., Della Vecchia P. Seismic reliability of base-isolated structures with friction pendulum bearings. *Eng. Struct.*, 2015, vol. 95, pp. 80–93. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2015.03.053>.
11. Tsopelas P., Constantinou M.C., Kim Y.S., Okamoto S. Experimental study of FPS system in bridge seismic isolation. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1996, vol. 25, no. 1, pp. 65–78. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199601\)25:1%3C65::AID-EQE536%3E3.0.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199601)25:1%3C65::AID-EQE536%3E3.0.CO;2-A).
12. Fenz D.M., Constantinou M.C. Spherical sliding isolation bearings with adaptive behavior: Theory. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 2008, vol. 37, no. 2, pp. 163–183. <https://doi.org/10.1002/eqe.751>.
13. Fenz D.M., Constantinou M.C. Spherical sliding isolation bearings with adaptive behavior: Experimental verification. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 2008, vol. 37, no. 2, pp. 185–205. <https://doi.org/10.1002/eqe.750>.
14. Lee D., Constantinou M.C. Quintuple friction pendulum isolator: Behavior, modeling, and validation. *Earthquake Spectra*, 2016, vol. 32, no. 3, pp. 1607–1626. <https://doi.org/10.1193/040615EQS053M>.
15. Zheng W., Tan P., Li J., Wang H., Liu Y. Superelastic pendulum isolator with multi-stage variable curvature for seismic resilience enhancement of cold-regional bridges. *Eng. Struct.*, 2023, vol. 284, art. 115960. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.115960>.
16. Admane H.A., Murnal P. Comparative analysis of SIVC systems using simplified analytical modeling for practical design. *Pract. Period. Struct. Des. Constr.*, 2021, vol. 26, no. 1, art. 04020051. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000536](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000536).
17. Zhang F., Deng J., Cao S., Dang X. Experimental and simulation studies of adaptive stiffness double friction pendulum bearing. *Structures*, 2023, vol. 57, art. 105026. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.105026>.

18. Shahbazi P., Taghikhany T. Sensitivity analysis of variable curvature friction pendulum isolator under near-fault ground motions. *Smart Struct. Syst.*, 2017, vol. 20, no. 1, pp. 23–33. <https://doi.org/10.12989/sss.2017.20.1.023>.
19. Shaikhzadeh A.A., Karamoddin A. Effectiveness of sliding isolators with variable curvature in near-fault ground motions. *The Struct. Des. Tall Spec. Build.*, 2016, vol. 25, no. 6, pp. 278–296. <https://doi.org/10.1002/tal.1258>.
20. Zhang C., Duan C., Sun L. Inter-storey isolation versus base isolation using friction pendulum systems. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2024, vol. 24, no. 2, art. 2450022. <https://doi.org/10.1142/S0219455424500226>.
21. Almazán J.L., De La Llera J.C., Inaudi J.A. Modeling aspects of structures isolated with the friction pendulum system. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1998, vol. 27, no. 8, pp. 845–867. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199808\)27:8<845::AID-EQE760>3.0.CO;2-T](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199808)27:8<845::AID-EQE760>3.0.CO;2-T).
22. Mosqueda G., Whittaker A.S., Fenves G.L. Characterization and modeling of friction pendulum bearings subjected to multiple components of excitation. *J. Struct. Eng.*, 2004, vol. 130, no. 3, pp. 433–442. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2004\)130:3\(433\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2004)130:3(433)).
23. Wang Y.-P., Chung L.-L., Liao W.-H. Seismic response analysis of bridges isolated with friction pendulum bearings. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 1998, vol. 27, no. 10, pp. 1069–1093. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9845\(199810\)27:10<1069::AID-EQE770>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9845(199810)27:10<1069::AID-EQE770>3.0.CO;2-S).
24. Tsai C.S., Chiang T.-C., Chen B.-J. Finite element formulations and theoretical study for variable curvature friction pendulum system. *Eng. Struct.*, 2003, vol. 25, no. 14, pp. 1719–1730. [https://doi.org/10.1016/S0141-0296\(03\)00151-2](https://doi.org/10.1016/S0141-0296(03)00151-2).
25. Monti G., Petrone F. Analytical thermo-mechanics 3D model of friction pendulum bearings. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 2016, vol. 45, no. 6, pp. 957–977. <https://doi.org/10.1002/eqe.2693>.
26. Asteris P.G., Nozhati S., Nikoo M., Cavaleri L., Nikoo M. Krill herd algorithm-based neural network in structural seismic reliability evaluation. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2019, vol. 26, no. 13, pp. 1146–1153. <https://doi.org/10.1080/15376494.2018.1430874>.
27. Mekaoui N., Saito T. A deep learning-based integration method for hybrid seismic analysis of building structures: Numerical validation. *Appl. Sci.*, 2022, vol. 12, no. 7, art. 3266. <https://doi.org/10.3390/app12073266>.
28. Yavas M.S., Gao Z., Mekaoui N., Saito T. A machine learning-based hybrid seismic analysis of a lead rubber bearing isolated building specimen. *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 2023, vol. 174, art. 108217. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2023.108217>.
29. Li J., Kishiki S., Yamada S., Yamazaki S., Watanabe A., Terashima M. Energy-based prediction of the displacement of DCFP bearings. *Appl. Sci.*, 2020, vol. 10, no. 15, art. 5259. <https://doi.org/10.3390/app10155259>.
30. Zhelyazov T., Debray K. Prediction of the thermo-mechanical behavior of a sliding isolator based on finite element and analytical analysis. *Proc. 2020 III Int. Con. on High Technology for Sustainable Development (HiTech)*. Sofia, IEEE, 2020, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/HiTech51434.2020.9363973>.
31. Lomiento G., Bonessio N., Benzoni G. Friction model for sliding bearings under seismic excitation. *J. Earthquake Eng.*, 2013, vol. 17, no. 8, pp. 1162–1191. <https://doi.org/10.1080/13632469.2013.814611>.

32. Kumar M., Whittaker A.S., Constantinou M.C. Characterizing friction in sliding isolation bearings. *Eng. Struct. Dyn.*, 2015, vol. 44, no. 9, pp. 1409–1425. <https://doi.org/10.1002/eqe.2524>.
33. Quaglini V., Bocciarelli M., Gandelli E., Dubini P. Numerical assessment of frictional heating in sliding bearings for seismic isolation. *J. Earthquake Eng.*, 2014, vol. 18, no. 8, pp. 1198–1216. <https://doi.org/10.1080/13632469.2014.924890>.
34. De Domenico D., Ricciardi G., Benzoni G. Analytical and finite element investigation on the thermo-mechanical coupled response of friction isolators under bidirectional excitation. *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 2018, vol. 106, pp. 131–147. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.12.019>.
35. Li J., Yang K., Xiang Y., Tan P. Experimental investigation of frictional heating in variable friction pendulum bearings using thin-film thermocouples. *Tribol. Int.*, 2025, vol. 212, art. 110982. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2025.110982>.

Author Information

Todor Zhelyazov, PhD, Researcher, National Institute of Geophysics, Geodesy and Geography (NIGGG), Bulgarian Academy of Sciences

E-mail: elovar@yahoo.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1889-3789>

Информация об авторах

Тодор Желязов, PhD, научный сотрудник, Национальный институт геофизики, геодезии и географии (НИГГГ), Болгарская академия наук

E-mail: elovar@yahoo.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1889-3789>

Received August 16, 2025

Accepted October 6, 2025

Поступила в редакцию 16.08.2025

Принята к публикации 6.10.2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.4

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>

Эффективный метод анализа гибких пористых функционально-градиентных наноконических секторных панелей с учетом температурных и электрических полей

Л.А. Калущкий

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск, Россия*

leon199703@gmail.com

Аннотация

На основе модифицированной моментной теории упругости разработана новая математическая модель состояния пористых функционально-градиентных (ПФГ) конических секторных микро-/нанопластин со свойствами, зависящими от температуры. Метод вариационных итераций применен для решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изгиб гибких конических (кольцевых) секторных пластин под действием термомеханической нагрузки. Он позволил получить практически точное решение при существенно меньших затратах машинного времени по сравнению с методами конечных разностей и конечных элементов.

Ключевые слова: конические секторные пористые пластины, модифицированная моментная теория упругости, пористые функционально-градиентные материалы, метод вариационных итераций

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00160-П.

Для цитирования: Калущкий Л.А. Эффективный метод анализа гибких пористых функционально-градиентных наноконических секторных панелей с учетом температурных и электрических полей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 689–704. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>

An effective method for analyzing flexible porous functionally graded nanoconical sector panels taking into account temperature and electric fields

L.A. Kalutsky

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia*

leon199703@gmail.com

Abstract

A new mathematical model of porous functionally graded (PFG) conical sector micro/nanoplates with temperature-dependent properties was developed based on the modified couple stress theory. The variational iteration method was employed to solve the nonlinear differential equations describing the bending of flexible conical (annular) sector plates under thermomechanical loading. The proposed method yielded an almost exact solution while requiring much less computational time compared to the finite difference and finite element methods.

Keywords: conical sector porous plates, modified couple stress theory, porous functionally graded materials, variational iteration method

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00160-P).

For citation: Kalutsky L.A. An effective method for analyzing flexible porous functionally graded nanoconical sector panels taking into account temperature and electric fields. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 689–704. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>. (In Russian)

Введение

Конические (кольцевые) секторные пластины из функционально-градиентных материалов находят применение в различных инженерных конструкциях. Секторные пластины применяются в авиации, космонавтике, строительстве, приборостроении, электро- и машиностроении в качестве крепежных элементов для лопаток и роторов турбин, оптических элементов, а также для соединения трубопроводов и крепления обшивки летательных аппаратов. Применение функционально-градиентных материалов (ФГМ) обеспечивает решение сложных инженерных задач за счет плавного изменения свойств материала.

Метод вариационных итераций (МВИ) использован в линейной постановке в исследованиях [1–5] для анализа состояния конических секторных пластин. В результате применения МВИ управляющее уравнение преобразуется в два отдельных обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) относительно полярных координат r и θ . Решения, полученные МВИ, хорошо согласуются с результатами, полученными методом конечных элементов с помощью ANSYS, как для функции прогибов, так и для напряжений [1]. Установлено, что предложенный метод применим для получения практически точных решений для других типов конструкций, таких как круговые цилиндры [4].

Исследование конических (кольцевых) пластин с использованием метода конечных элементов и его модификаций проведено в работах [6–11]. В них выполнен анализ геометрических параметров, количества элементов и типов распределения сетки конических секторных пластин. Метод конечных элементов применялся в рамках анализа конических (кольцевых) пластин с периодическими радиальными сквозными трещинами, параллельными радиальному направлению. Для этой цели был рассмотрен изопараметрический элемент секторного типа, имеющий четыре узла [6]. В работе [7] также исследовано влияние термомеханической нагрузки на НДС секторных пластин. Условия механической нагрузки включают равномерное осевое, окружное и двухосное давление, а тепловая нагрузка задана как равномерное повышение температуры по всему сектору. Было также исследовано влияние различных параметров, таких как размеры сектора, направления механической нагрузки, углы волокон каждого слоя пластины, на термомеханический изгиб секторной пластины. При этом в работах [1–11] не рассмотрены размерные микро- и наноэффекты.

С использованием аналитического метода, основанного на технике возмущения и рядах Фурье, были применены секторные функционально-градиентные методы анализа поведения пластин в линейной постановке [12–15]. На основе ряда Фурье в [12] исследованы сжатие кольцевой круговой секторной пластины, размеры отверстия, направления механической нагрузки и углы волокон каждого слоя на термомеханическую потерю устойчивости. В работах [14, 15] изучены механические свойства функционально-градиентных пористых структур.

В настоящей работе впервые построена новая математическая модель и проведено исследование напряженно-деформированного состояния конических секторных пластин, учитывающее совместное влияние пористости, функциональной градиентности, температурного поля и размерных эффектов. Для анализа предложенной модели разработан высокоточный вычислительно эффективный метод вариационных итераций [16–19]. Проведенный с его помощью комплекс вычислительных экспериментов позволил установить степень и характер влияния каждого из названных факторов на НДС пластин.

1. Постановка задачи и математическая модель

Исследуем напряженно-деформированное состояние (НДС) конической секторной пластины постоянной толщины h с углом сектора α и радиусом выреза R при действии поперечной нагрузки $q(r, \theta)$ с использованием полярной системы координат (рис. 1).

Управляющие уравнения выведем с учетом следующих гипотез:

- 1) гипотеза Кирхгофа;
- 2) размерные эффекты учтены в рамках модифицированной моментной теории упругости [20];

3) свойства материала зависят от температуры T и изменяются по толщине. Приняты три типа распределения пористых функционально-градиентных (ПФГ) материалов (ПФГ-U, ПФГ-X, ПФГ-O). Модуль Юнга E , коэффициент Пуассона ν и коэффициент температурного расширения α являются функциями z .

1) ПФГ-U – поры распределены равномерно по всей пластине:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \frac{\Gamma}{2}(P_m + P_c). \quad (1)$$

2) ПФГ-X – максимальное распределение пор вблизи середины поверхности секторной пластины:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \Gamma(P_m + P_c) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right).$$

3) ПФГ-O – уменьшение концентрации пор от срединной поверхности к верхней и нижней граням секторной пластины:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \Gamma(P_m + P_c) \left(\frac{2|z|}{h}\right),$$

где p – функционально-градиентный индекс, отвечающий за соотношения объемных долей материала; Γ – показатель пористости материала; E_m и E_c – модули Юнга; ν_m и ν_c – коэффициенты Пуассона; α_m и α_c – коэффициенты температурного расширения металлической и керамической фаз материала соответственно.

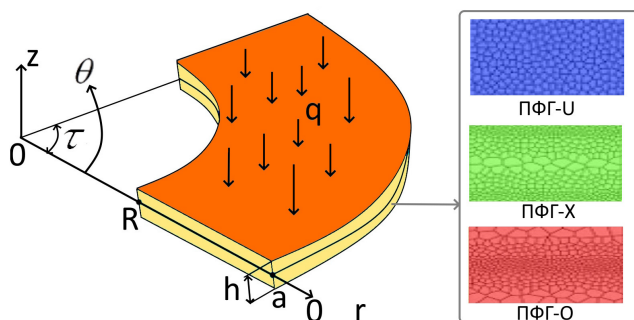


Рис. 1. Расчетная схема конической секторной пластины

Fig. 1. Schematic representation of a conical sector plate

На основе принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W) dt = 0, \quad (2)$$

где U – энергия упругой деформации конической секторной пластины, K – кинетическая энергия и W – работа внешних сил, получена система нелинейных дифференциальных уравнений

$$L_1(w, F) = \nabla^4 w - L(w, F) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (M_T + M_E) - q = 0, \quad (3)$$

$$L_2(w, F) = \nabla^4 F + \frac{1}{2} L(w, w) = 0, \quad (4)$$

где w – функция прогиба; F – функция усилий; M_T , N_T , P_T – температурные моменты; M_E – сумма электрических сил на единицу площади [21]; ∇^4 – оператор Лапласа; l_1 и l_2 – размерно-зависимые параметры ($l = 0$ для классической теории). Выведенная система уравнений описывает НДС гибких конических секторных ПФГ пластин, граничные и начальные условия с учетом произвольно температурного поле $T(r, \theta, z)$. Уравнения (3) приведены в безразмерном виде для статических задач.

Граничные условия конической секторной пластины опишем следующими выражениями:

– шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые ребра по контуру пластины

$$w = 0, \quad M_r = 0, \quad N_r = 0, \quad N_{r\theta} = 0; \quad (5)$$

– защемление на гибкие нерастяжимые по контуру пластины

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad N_r = 0, \quad N_{r\theta} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (3) и (4) с граничными условиями (5) и (6) приведены к безразмерному виду согласно соотношениям

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{E_0 h^3}, \quad \bar{q} = \frac{q a^4}{E_0 h^4},$$

черточки над безразмерными параметрами для простоты опущены. Выведенные уравнения позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния гибких размерно-зависимых конических секторных ПФГ пластин, свойства которых зависят от температуры.

Для исследования изгиба конических секторных пластин используем высокоточный метод вариационных итераций, обладающий высоким быстродействием.

2. Методы решения

В основе метода вариационных итераций (МВИ) лежит идея метода Бубнова–Галеркина (МБГ). В отличие от МБГ, уравнения сводятся не к системе алгебраических уравнений, а к системе ОДУ. Решение системы уравнений в частных производных в операторном виде $L_i(w, F) = 0$ ищем в виде суммы произведений функций $w(r, \theta) = \sum_{i=1}^n R_i(r) \Theta_i(\theta)$, $F(r, \theta) = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i(r) \bar{\Theta}_i(\theta)$. Применение процедуры Бубнова–Галеркина по координате θ позволяет получить систему ОДУ

$$\int_0^1 \left[L_i \left(\sum_{k=1}^N R_k(r) \Theta_k(\theta), \sum_{k=1}^N \bar{R}_k(r) \bar{\Theta}_k(\theta) \right) - q(r, \theta) \right] R_i(r) dr = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которую решим методом конечных разностей с дискретизацией координаты r на n отрезков. Для численного решения нелинейной системы алгебраических уравнений применим метод Ньютона–Рафсона. Последующее использование процедуры Галеркина по координате r приводит к итерационному алгоритму в рамках МВИ. Подробное описание данной процедуры приведено в работах [17, 18].

Чтобы гарантировать надежность и точность получаемых решений, описывающих НДС конических секторных пластин, необходимо решить рассматриваемую задачу различными методами. Нами проведен сравнительный анализ решений систем уравнений

в частных производных, полученных методами вариационных итераций (МВИ), конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) для линейного случая ($F = 0$) для граничных условий (2).

Решение МКЭ было получено с помощью программного обеспечения ANSYS [1]. В табл. 1 приведены сравнения безразмерного прогиба в центре пластины, полученные вышеописанными методами. Решения были получены для конических секторных пластин при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки q_0 с радиусом выреза $R = 0.2$ и углом $\alpha = \pi/2$.

Табл. 1. Сравнение решений МВИ, МКР и МКЭ

Table 1. Comparison of the solutions obtained by the variational iteration method, the finite difference method, and the finite element method

Метод	$w_{\max}$	Погрешность относительно МВИ2	Время решения
МКР, $n = 25$	0.2823	0.46 %	15.6 с
МКЭ (ANSYS) [1]	0.2840	0.14 %	-
МВИ, $n = 25$	0.2834	0.07 %	0.04 с
МВИ2, $n = 25$	0.2836	0.00 %	0.12 с

Результаты, полученные методами конечных элементов, конечных разностей и вариационных итераций, демонстрируют хорошее согласование: различие в результатах составляет менее 1 % (см. табл. 1). При этом время решения для МКР превышает время расчета МВИ более чем в сто раз. Расчеты проводились на процессоре с тактовой частотой 3 ГГц. Это показывает эффективность метода вариационных итераций как с точки зрения точности, так и быстродействия.

3. Исследование пористых функционально-градиентных конических секторных пластин при решении нелинейных уравнений с учетом температурного поля, когда свойства материалов $P(T)$ зависят от температуры

Решим задачу о нагружении ПФГ конических секторных пластин, находящихся в температурном поле, свойства которых зависят от температуры и изменяются по толщине $P(T)$. Анализ подвергнуты секторные пластины с тремя типами распределения пор (ПФГ-У, ПФГ-Х, ПФГ-О), функционально-градиентный материал пластин состоит из керамики и металла при действии равномерно распределенного температурного поля T_0 . Параметры материала в зависимости от температуры секторной пластины определены многочленом

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3).$$

Параметры материалов секторных пластин $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ приведены в табл. 2.

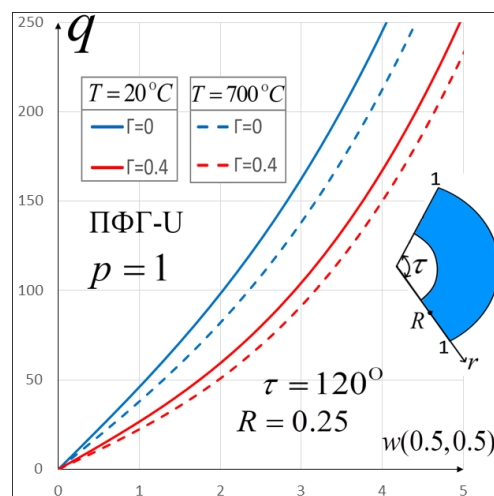
Табл. 2. Параметры композита для керамики и металла**Table 2.** Composite parameters for ceramic and metal

Параметр	Материал	P_0	P_{-1}	P_1	P_2
E (Па)	Al_2O_3	349.55e9	0	-3.853e-4	4.027e-7
	SUS304	201.04e9	0	3.079e-4	-6.534e-7
ν	Al_2O_3	0.24	0	0	0
	SUS304	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7
α (1/K)	Al_2O_3	6.8269e-6	0	1.838e-4	0
	SUS304	12.330e-6	0	8.086e-4	0

Напряженно-деформированное состояние секторных ПФГ пластин существенно зависит от пористости материала и температуры. Поэтому при анализе НДС конических секторных пластин необходимо учитывать объем и характер распределения пор. Также критически важно учитывать влияние температурного поля, которое существенно сказывается на свойствах материалов пластины, таких как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения.

3.1. Анализ влияния показателя пористости на изгиб конических секторных пластин. На секторные пластины действует термомеханическая нагрузка; q_0 – равномерная поперечная нагрузка. На рис. 2 представлена зависимость $w_{\max}(q_0)$ для секторной пластины для типа пор ПФГ-U (1) при $p = 1$ с радиусом выреза $R = 0.2$ и углом сектора $\alpha = \pi/2$. Дано сопоставление кривых для конических секторных пластин при действии постоянного температурного поля интенсивности $T_0 = 300\text{ K}$.

Увеличение показателя пористости приводит к существенному снижению несущей способности конических пластин. Увеличение температуры конических пластин приводит к значительному увеличению прогибов независимо от показателя пористости пластин и интенсивности нагрузки q_0 (рис. 2).

**Рис. 2.** Зависимость $w_{\max}(q_0)$ секторной пластины ПФГ-U для $\Gamma = 0.1$ при действии температуры $T_0 = 300\text{ K}$ **Fig. 2.** Dependency $w_{\max}(q_0)$ of the PFG-U sector plate for $\Gamma = 0.1$ at a temperature $T_0 = 300\text{ K}$

3.2. Исследование типов распределения пористости материала и влияние параметра p на НДС конических секторных ПФГ пластин. Функционально-градиентный индекс определяет соотношение материалов в конической секторной пластине. Исследованы пластины для трех типов распределения пор (ПФГ-У, ПФГ-Х, ПФГ-О). Построены зависимости $w_{\max}(q_0)$ для секторной пластины при $\Gamma = 0.2$. Представлено сравнение графиков для $p = 0.5$ (сплошные линии), $p = 2$ (пунктирные линии). Цвет кривых задан в соответствии с типом распределения пор (рис. 3).

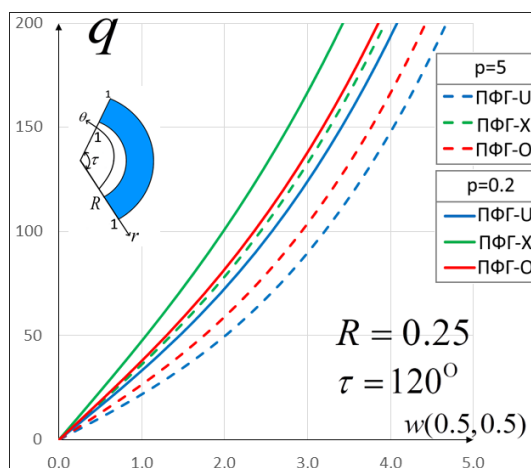


Рис. 3. Зависимость $w_{\max}(q_0)$ секторной ПФГ пластины для трех типов пор (У, Х, О) при $\Gamma = 0.2$
Fig. 3. Dependency $w_{\max}(q_0)$ of the PFG sector plate for three types of pores (U, X, O) at $\Gamma = 0.2$

Результаты, представленные на рис. 3, показывают, что конические секторные пластины с распределением пор ПФГ-Х (максимальным объемом пор, сконцентрированным в центре пластины) обладают наибольшей несущей способностью из трех рассмотренных типов. Увеличение функционально-градиентного индекса приводит к увеличению доли стали SUS304 в материале секторной пластины и снижает несущую способность для всех значений поперечной нагрузки.

Свойства микро-/наномасштабных объектов существенно отличаются от макроскопических. Согласно модифицированной моментной теории упругости для учета микро-/наноэффектов введем размерно-зависимый параметр l ; для классической теории упругости $l = 0$.

Исследуем НДС конических секторных пластин ПФГ-Х в зависимости от значения размерно-зависимого параметра l . На рис. 4 приведены зависимости $w_{\max}(q_0)$ при действии равномерного температурного поля $T_0 = 300\text{ K}$ (пунктирные линии), $T_0 = 600\text{ K}$ (сплошные линии) для параметров $\Gamma = 0.2$, $p = 1$. Цвет кривых, изображенных на графике, соответствует значениям размерно-зависимого параметра l .

Увеличение размерно-зависимого параметра приводит к значительному снижению несущей способности конических секторных ПФГ пластин. При этом увеличение температуры приводит к увеличению прогибов не только для макропластин, но и для секторных микро-/нанопластин (рис. 4).

С целью анализа влияния геометрических параметров (радиуса выреза R и угла сектора α) на изгиб конических секторных пластин были проведены вычислительные эксперименты.

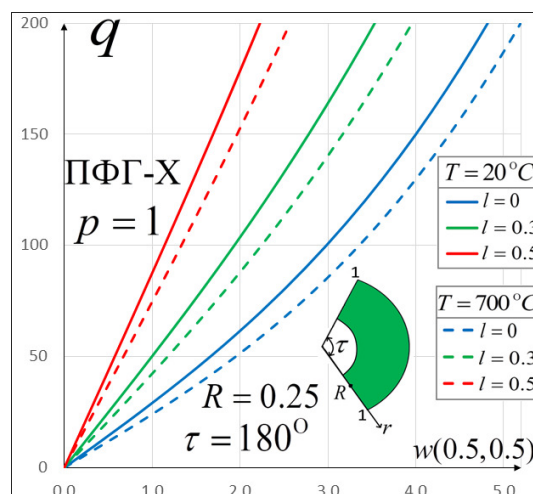


Рис. 4. Зависимость $w_{\max}(q_0)$ секторной пластины ПФГ-Х для $l = 0, 1, 2$ при действии температуры $T_0 = 300\text{ K}$, 600 K

Fig. 4. Dependency $w_{\max}(q_0)$ of the PFG-X sector plate for $l = 0, 1, 2$ at a temperature $T_0 = 300\text{ K}$, 600 K

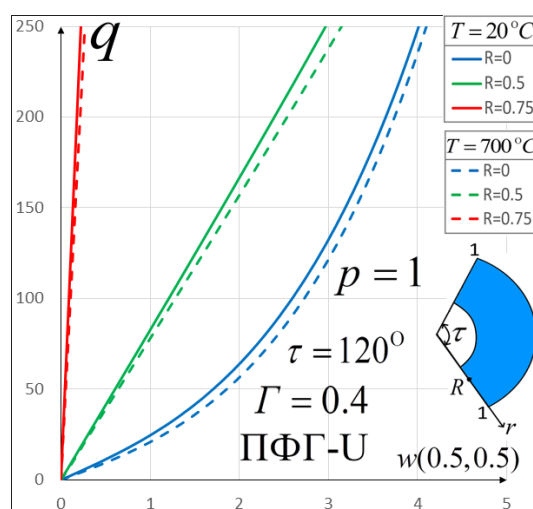


Рис. 5. Зависимость $w_{\max}(q_0)$ секторной пластины ПФГ-У для различных R при действии температуры $T_0 = 300\text{ K}$, 600 K

Fig. 5. Dependency $w_{\max}(q_0)$ of the PFG-U sector plate for various R at a temperature $T_0 = 300\text{ K}$, 600 K

3.3. Исследование радиуса выреза пластины. На рис. 5 представлена зависимость $w_{\max}(q_0)$ для конической секторной пластины U-PFGM ($\Gamma = 0.2$) при различных значениях радиуса выреза $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$. Кривые для температурного поля $T_0 = 300\text{ K}$ изображены пунктиром, для $T_0 = 600\text{ K}$ – сплошными линиями.

Анализ графика на рис. 5 показал, что увеличение радиуса выреза конической секторной пластины от $R = 0$ до $R = 0.75$ приводит к значительному увеличению жесткости ПФГ пластин. Повышение температуры от $T_0 = 300\text{ K}$ до $T_0 = 600\text{ K}$ приводит к увеличению прогибов на 3–5 %.

3.4. Исследование угла секторной пластины и размерно-зависимого параметра l . На рис. 6 показана зависимость $w_{\max}(q_0)$ для конической секторной пластины ПФГ-U ($\Gamma = 0.2$) при различных значениях угла $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. Кривые для случаев отсутствия учета размерной зависимости ($l = 0$) и для нанопластин ($l = 2$) изображены сплошными линиями.

Анализ данных, приведенных на рис. 6, показал, что увеличение угла секторной пластины оказывает существенное влияние на НДС как макро-, так и нанопластин и приводит к снижению их несущей способности. Увеличение размерно-зависимого параметра l приводит к уменьшению прогиба для всех рассматриваемых значений угла α .

Проанализируем влияние радиуса выреза R и угла сектора пластины α на изгибание пластин. На рис. 7 представлены графики зависимости значения $w_{\max}$ в зависимости от радиуса выреза пластины R для значений угла $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$. На рис. 8 показаны графики зависимости $w_{\max}$ от угла сектора α для радиуса выреза $R = 0.2$. Решения получены методом вариационных итераций для $n = 35$ при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки.

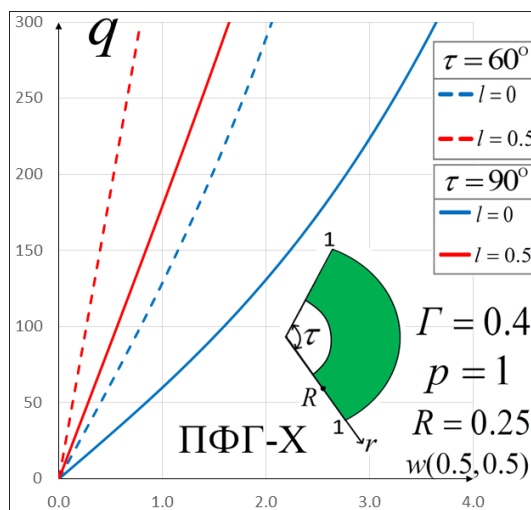


Рис. 6. Зависимость $w_{\max}(q_0)$ секторной пластины ПФГ-U для различных α при $l = 0, 2$

Fig. 6. Dependency $w_{\max}(q_0)$ of the PFG-U sector plate for various α at $l = 0, 2$

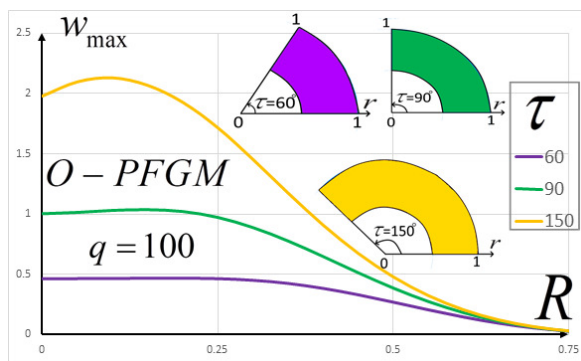


Рис. 7. Зависимость максимального прогиба $w_{\max}(R)$ для шарнирно опертой пластины (5) для различных α

Fig. 7. Dependency of the maximum deflection $w_{\max}(R)$ for the pivotally supported plate (5) at various α

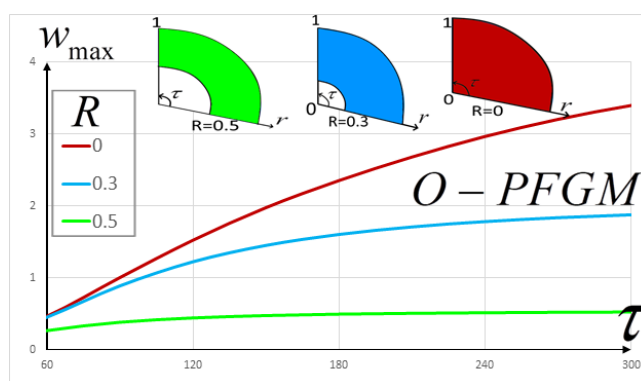
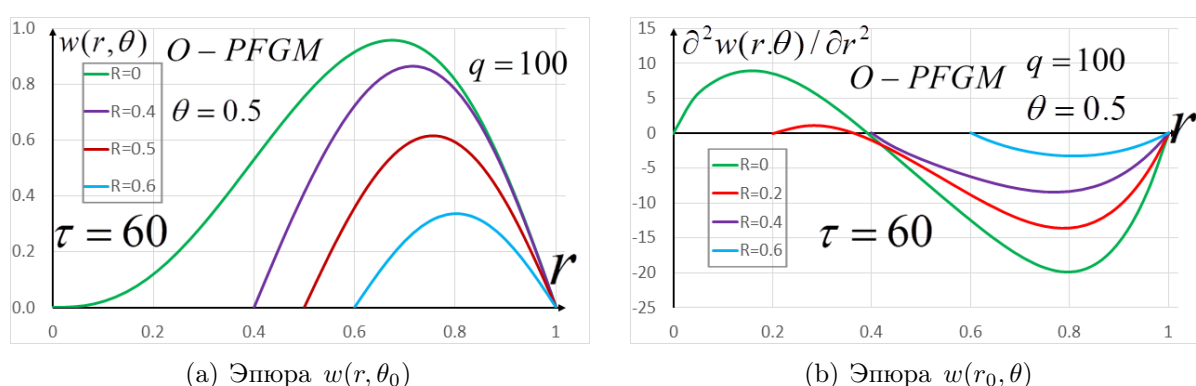


Рис. 8. Зависимость максимального прогиба $w_{\max}(\alpha)$ шарнирно опертой пластины (5)

Fig. 8. Dependency of the maximum deflection $w_{\max}(\alpha)$ for the pivotally supported plate (5)



(a) Эпюра $w(r, \theta_0)$

(b) Эпюра $w(r_0, \theta)$

Рис. 9. Эпюры: (a) $w(r, \theta_0)$, (b) $w(r_0, \theta)$ шарнирно опертой секторной пластины (5) для радиуса выреза $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$

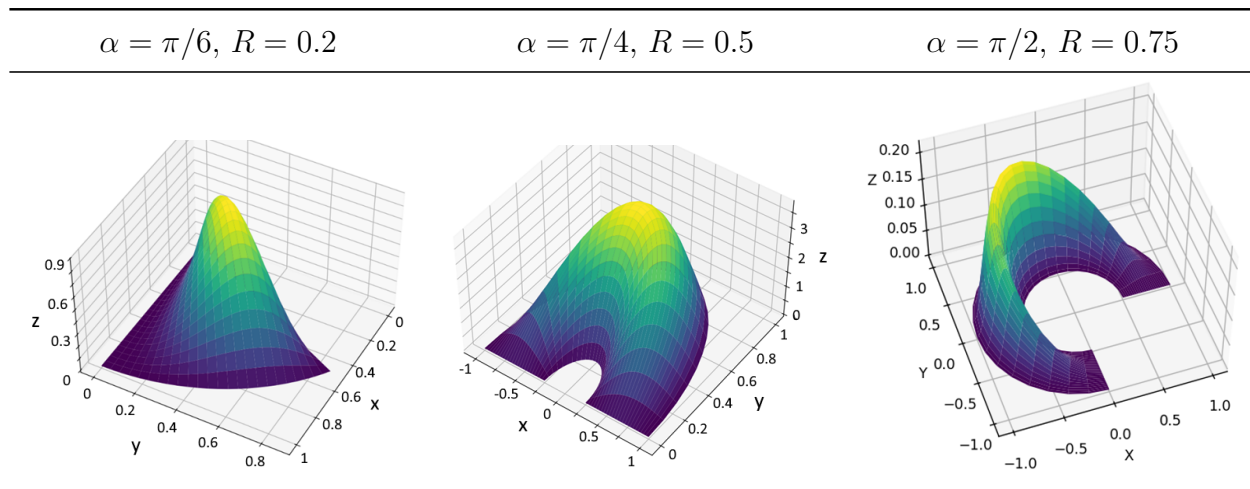
Fig. 9. Epures: (a) $w(r, \theta_0)$, (b) $w(r_0, \theta)$ of the pivotally supported sector plate (5) for the cutout radius $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$

Построены эпюры функций прогиба секторной пластины $w(r, \theta)$ для секторной пластины с граничными условиями (5). На пластину действует поперечная нагрузка $q_0 = 100$ для различных значений радиуса выреза $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$. Эпюры $w(r, \theta_0)$, $w(r_0, \theta)$ построены для угла сектора $\alpha = \pi/2$. Цвет кривых на рис. 9 задан в соответствии с выбором значения радиуса R .

Анализ результатов, представленных на рис. 5–9, показал, что увеличение угла α и радиуса выреза пластины R приводит к уменьшению несущей способности. При этом влияние изменения параметра α снижается с увеличением параметра R .

Построены поверхности изгиба $w(r, \theta)$ для секторной макроразмерной пластины для различных значений углов сектора пластины α и радиуса выреза R при действии равномерно распределенной нагрузки (табл. 3).

Результаты, приведенные на рис. 7–9 и в табл. 3, показывают, что характер изгиба секторных пластин $w(r, \theta)$ существенно изменяется с увеличением параметра α . Отметим, что влияние параметра R также уменьшается с ростом α (рис. 7–9). Таким образом, варьирование геометрических параметров пластины – радиуса выреза и угла сектора – позволяет проектировать конструкции с улучшенными прочностными характеристиками.

Табл. 3. Поверхности прогиба конической секторной пластины**Table 3.** Deflection surfaces of the conical sector plate

Заключение

1) Построена математическая модель гибких ПФГ конических секторных пластин, свойства материала которых зависят от температуры. Метод вариационных итераций позволил найти решения полученных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с высокой точностью и минимальными затратами машинного времени.

2) Распределение и величина объема пор существенно влияет на изгиб гибких ПФГ конических секторных пластин. Пластины ПФГ-Х обладают наибольшей несущей способностью из рассматриваемых. Увеличение параметра Γ приводит к существенному увеличению прогиба гибких секторных ПФГ пластин. Соотношение материалов в ПФГ секторных пластин оказывает значительное влияние на несущую способность, а увеличение функционально-градиентного индекса приводит к увеличению доли стали в композите и уменьшению несущей способности.

3) Увеличение температуры конических секторов пластин от $T_0 = 300\text{ K}$ до $T_0 = 600\text{ K}$ приводит к увеличению максимального значения прогиба $w_{\max}$ на 3–5% как для нано-, так и для макроразмерных секторных пластин.

4) Геометрические параметры секторных пластин оказывают существенное влияние на НДС конических секторных ПФГ пластин. Увеличение угла приводит к росту прогибов, причем эта зависимость существенно изменяется с изменением радиуса выреза R . В свою очередь, увеличение радиуса выреза от $R = 0$ до $R = 0.75$ приводит к значительному повышению несущей способности конических секторных пластин.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. *Aghdam M.M., Shahmansouri N., Bigdeli K.* Bending analysis of moderately thick functionally graded conical panels // *Compos. Struct.* 2011. V. 93, No 5. P. 1376–1384. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.10.020>.
2. *Aghdam M.M., Shahmansouri N., Mohammadi M.* Extended Kantorovich method for static analysis of moderately thick functionally graded sector plates // *Math. Comput. Simul.* 2012. V. 86. P. 118–130. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.029>.
3. *Fallah F., Khakbaz A.* On an extended Kantorovich method for the mechanical behavior of functionally graded solid/annular sector plates with various boundary conditions // *Acta Mech.* 2017. V. 228, No 7. P. 2655–2674. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1851-2>.
4. *Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V.* Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method // *Thin-Walled Struct.* 2007. V. 45, No 12. P. 983–990. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.07.012>.
5. *Aghdam M.M., Babaei M.H.* Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using extended Kantorovich method // *Proc. 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology*. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2006. Art. 159. <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>.
6. *Demir A., Mermertas V.* A study on annular plates with radial through cracks by means of sector type element // *J. Sound Vib.* 2007. V. 300, Nos 3–5. P. 466–478. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.057>.
7. *Shaterzadeh A., Behzad H., Shariyat M.* Stability analysis of composite perforated annular sector plates under thermomechanical loading by finite element method // *Int. J. Struct. Stab. Dyn.* 2018. V. 18, No 7. Art. 1850100. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501006>.
8. *Khan A.H., Patel B.P.* Nonlinear periodic response of bimodular laminated composite annular sector plates // *Composites, Part B*. 2019. V. 169. P. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.061>.
9. *Demir Ç., Ersoy H., Mercan K., Civalek Ö.* Free vibration analysis of annular sector plates via conical shell equations // *Curved Layered Struct.* 2017. V. 4, No 1. P. 146–157. <https://doi.org/10.1515/cls-2017-0011>.
10. *Babaei M., Asemi K., Kiarasi F.* Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2023. V. 51, No 3. P. 1272–1296. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1864401>.
11. *Xia L., Wang R., Chen W., Asemi K., Tounsi A.* The finite element method for dynamics of FG porous truncated conical panels reinforced with graphene platelets based on the 3-D elasticity // *Adv. Nano Res.* 2023. V. 14, No 4. P. 375–389. <https://doi.org/10.12989/anr.2023.14.4.375>.
12. *Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour S.R.* An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates // *Mater. Des.* 2009. V. 30, No 9. P. 3679–3685. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.011>.
13. *Alavi S.H., Eipakchi H.* An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates // *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. V. 29, No 23. P. 3372–3386. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896821>.

14. Afshari H., Adab N. Size-dependent buckling and vibration analyses of GNP reinforced microplates based on the quasi-3D sinusoidal shear deformation theory // *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 2022. V. 50, No 1. P. 184–205. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1713158>.
15. Zheng J., Zhang C., Khan A., Sebaey T.A., Farouk N. On the asymmetric thermal stability of FGM annular plates reinforced with graphene nanoplatelets // *Eng. Comput.* 2022. V. 38, Suppl. 5. P. 4569–4581. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01463-y>.
16. Tahan N., Pavlovic M.N., Kotsovos M.D. Annular sector plates under in-plane loading: General symbolic solution and its application to the collinear compression case // *J. Strain Anal. Eng. Des.* 2004. V. 39, No 3. P. 299–313. <https://doi.org/10.1243/030932404323042722>.
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Jr., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Computing static behavior of flexible rectangular von Kármán plates in fast and reliable way // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2022. V. 146. Art. 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>.
18. Krysko V.A., Jr., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates // *Comput. Math. Appl.* 2023. V. 133. P. 61–84. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>.
19. Крысько А.В., Калущкий Л.А., Захарова А.Н., Крысько В.А. Математическое моделирование пористых геометрически нелинейных металлических нанопластин с учетом влажности // *Изв. ТПУ.* 2023. Т. 334, № 9. С. 36–48.
20. Krysko A.V., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. *Thin-Walled Structures.* 2024. V. 196. 111512. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>.
21. Karimipour I., Beni Y.T., Zeighampour H. Nonlinear size-dependent pull-in instability and stress analysis of thin plate actuator based on enhanced continuum theories including nonlinear effects and surface energy // *Microsyst. Technol.* 2018. V. 24, No 4. P. 1811–1839. <https://doi.org/10.1007/s00542-017-3540-4>.

References

1. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Bigdeli K. Bending analysis of moderately thick functionally graded conical panels. *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 5, pp. 1376–1384. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.10.020>.
2. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Mohammadi M. Extended Kantorovich method for static analysis of moderately thick functionally graded sector plates. *Math. Comput. Simul.*, 2012, vol. 86, pp. 118–130. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.029>.
3. Fallah F., Khakbaz A. On an extended Kantorovich method for the mechanical behavior of functionally graded solid/annular sector plates with various boundary conditions. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 7, pp. 2655–2674. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1851-2>.
4. Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V. Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method. *Thin-Walled Struct.*, 2007, vol. 45, no. 12, pp. 983–990. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.07.012>.

5. Aghdam M.M., Babaei M.H. Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using extended Kantorovich method. *Proc. 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology*. Stirlingshire, Civil-Comp Press, 2006, art. 159. <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>.
6. Demir A., Mermertaş V. A study on annular plates with radial through cracks by means of sector type element. *J. Sound Vib.*, 2007, vol. 300, nos. 3–5, pp. 466–478. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.057>.
7. Shaterzadeh A., Behzad H., Shariyat M. Stability analysis of composite perforated annular sector plates under thermomechanical loading by finite element method. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2018, vol. 18, no. 7, art. 1850100. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501006>.
8. Khan A.H., Patel B.P. Nonlinear periodic response of bimodular laminated composite annular sector plates. *Composites, Part B*, 2019, vol. 169, pp. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.061>.
9. Demir Ç., Ersoy H., Mercan K., Civalek Ö. Free vibration analysis of annular sector plates via conical shell equations. *Curved Layered Struct.*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 146–157. <https://doi.org/10.1515/cls-2017-0011>.
10. Babaei M., Asemi K., Kiarasi F. Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2023, vol. 51, no. 3, pp. 1272–1296. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1864401>.
11. Xia L., Wang R., Chen W., Asemi K., Tounsi A. The finite element method for dynamics of FG porous truncated conical panels reinforced with graphene platelets based on the 3-D elasticity. *Adv. Nano Res.*, 2023, vol. 14, no. 4, pp. 375–389. <https://doi.org/10.12989/.2023.14.4.375>.
12. Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour S.R. An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates. *Mater. Des.*, 2009, vol. 30, no. 9, pp. 3679–3685. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.011>.
13. Alavi S.H., Eipakchi H. An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2022, vol. 29, no. 23, pp. 3372–3386. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896821>.
14. Afshari H., Adab N. Size-dependent buckling and vibration analyses of GNP reinforced microplates based on the quasi-3D sinusoidal shear deformation theory. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2022, vol. 50, no. 1, pp. 184–205. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1713158>.
15. Zheng J., Zhang C., Khan A., Sebaey T.A., Farouk N. On the asymmetric thermal stability of FGM annular plates reinforced with graphene nanoplatelets. *Eng. Comput.*, 2022, vol. 38, suppl. 5, pp. 4569–4581. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01463-y>.
16. Tahan N., Pavlovic M.N., Kotsovos M.D. Annular sector plates under in-plane loading: General symbolic solution and its application to the collinear compression case. *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 2004, vol. 39, no. 3, pp. 299–313. <https://doi.org/10.1243/030932404323042722>.
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Jr., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Computing static behavior of flexible rectangular von Kármán plates in fast and reliable way. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2022, vol. 146, art. 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>.

18. Krysko V.A., Jr., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Comput. Math. Appl.*, 2023, vol. 133, pp. 61–84. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>.
19. Krysko A., Kalutsky L., Zakharova A., Krysko V. Mathematical modeling of porous geometrically nonlinear metal nanoplates taking into account moisture. *Bull. Tomsk Polytech. Univ. Geo Assets Eng.*, 2023, vol. 334, no. 9, pp. 36–48. (In Russian)
20. Krysko A.V., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. *Thin-Walled Struct.*, 2024, vol. 196, art. 111512. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>.
21. Karimipour I., Beni Y.T., Zeighampour H. Nonlinear size-dependent pull-in instability and stress analysis of thin plate actuator based on enhanced continuum theories including nonlinear effects and surface energy. *Microsyst. Technol.*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 1811–1839. <https://doi.org/10.1007/s00542-017-3540-4>.

Информация об авторах

Леонид Александрович Калуцкий, младший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: leon199703@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>

Author Information

Leonid A. Kalutsky, Junior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: leon199703@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>

Поступила в редакцию 27.08.2025

Принята к публикации 3.10.2025

Received August 27, 2025

Accepted October 3, 2025

ORIGINAL ARTICLE

UDC 537

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.705-718>

DFT prediction of metallic conductivity and experimental investigation of air-induced degradation effects in quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe₂

A.G. Kiiamov¹ ✉, M.D. Kuznetsov¹, L.R. Tagirov², M. Hemmida³,
H.-A. Krug von Nidda³, D. Croitori⁴, Z.Yu. Seidov^{3,5},
V. Tsurkan^{3,4}, D.A. Tayurskii¹

¹Kazan Federal University, Kazan, Russia

²Zavoisky Physical-Technical Institute, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia

³Experimental Physics V, Center for Electronic Correlations and Magnetism, Institute of Physics,
University of Augsburg, Augsburg, Germany

⁴Institute of Applied Physics, Moldova State University, Chisinau, Moldova

⁵Institute of Physics, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

✉ airatphd@kazanfederaluniversity.ru

Abstract

A comprehensive study, combining density functional theory (DFT) calculations and experimental investigations, of the quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe₂ is carried out. The non-spin-polarized ab initio calculations show that its metallic conductivity is above the Néel temperature $T_N = 248$ K, with no gap in the electron density of states at the Fermi energy. The experimental four-probe conductivity measurements yet reveal an insulating behavior throughout the temperature range of 4–300 K. Following these measurements, an X-ray diffraction analysis is conducted. Its results demonstrate a severe degradation of the sample after air exposure (7–9 min), with the reduction in selenium occupancy by more than 20 % below stoichiometric values and the formation of elemental selenium phase ($P3_221$ space group). The discrepancy between theoretical predictions and the obtained experimental results is attributed to the rapid air-induced oxidation leading to structural defects and electron localization. The results obtained highlight the critical importance of rigorous atmospheric control when studying iron chalcogenides, provide quantitative insights into the degradation mechanisms affecting electronic properties, and indicate that standard DFT approaches may overestimate metallicity in quasi-one-dimensional systems, particularly when structural defects are present.

Keywords: *ab initio* calculations, quasi-one-dimensional compound, air-induced degradation, electron localization, iron chalcogenide stability

Acknowledgments. This study was supported by the grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to

support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan “Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan.”

For citation: Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D., Tagirov L.R., Hemmida M., Krug von Nidda H.-A., Croitori D., Seidov Z.Yu., Tsurkan V., Tayurskii D.A. DFT prediction of metallic conductivity and experimental investigation of air-induced degradation effects in quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe₂. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 705–718. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.705-718>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 537

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.705-718>

Предсказание металлической проводимости квазиодномерного антиферромагнетика RbFeSe₂ в рамках теории функционала плотности и экспериментальное исследование его свойств при деградации на воздухе

А.Г. Киямов¹ ✉, М.Д. Кузнецов¹, Л.Р. Тагиров², М. Хеммида³,
Х.-А. Круг фон Нидда³, Д. Кройтори⁴, З.Ю. Сеидов^{3,5},
В. Цуркан^{3,4}, Д.А. Таюрский¹

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

²Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского
ФИЦ Казанский научный центр РАН, г. Казань, Россия

³Кафедра экспериментальной физики V, Центр по изучению электронных корреляций и магнетизма,
Институт физики, Аугсбургский университет, г. Аугсбург, Германия

⁴Институт прикладной физики, Молдавский государственный университет, г. Кишинев, Молдова

⁵Институт физики, Министерство науки и образования Азербайджанской Республики,
г. Баку, Азербайджан

✉ airatphd@kazanfederaluniversity.ru

Аннотация

В работе представлены результаты комплексного изучения квазиодномерного антиферромагнетика RbFeSe₂ на основе предсказаний в рамках теории функционала плотности (DFT) и экспериментальных данных. Проведенные не спин-поляризованные *ab initio* расчеты предсказывают наличие металлической проводимости выше температуры Неля $T_N = 248$ К и провала в электронной плотности состояний на уровне Ферми. В противоположность этому, методом

четырёхконтактного измерения электропроводности установлено изолирующее поведение образца в исследуемом температурном интервале от 4 до 300 К. Анализ рентгеновской дифракции после измерений выявил существенную деградацию свойств образца после воздействия воздуха (7–9 мин): доля селена снизилась более чем на 20 % относительно стехиометрии с образованием элементарного селена (пространственная группа $P3_221$). Обнаруженное несоответствие между теорией и экспериментом объясняется быстрой окислительной деградацией на воздухе, приводящей к структурным дефектам и локализации электронов. Полученные результаты подчеркивают особую важность строгого контроля газовой среды при изучении железосодержащих халькогенидов. Даны количественные оценки механизмов деградации, влияющих на их электронные свойства. Показано, что использование стандартных DFT-подходов может привести к переоценке металлических свойств квазиодномерных систем, особенно при наличии структурных дефектов.

Ключевые слова: *ab initio* расчеты, квазиодномерное соединение, деградация под действием воздуха, локализация электронов, стабильность железосодержащих халькогенидов

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан».

Для цитирования: Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D., Tagirov L.R., Hemmida M., Krug von Nidda H.-A., Croitori D., Seidov Z.Yu., Tsurkan V., Tayurskii D.A. DFT prediction of metallic conductivity and experimental investigation of air-induced degradation effects in quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe₂ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 705–718. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.705-718>.

Introduction

Since the discovery of superconductivity in iron-based compounds [1], iron chalcogenides with low-dimensional structures have attracted considerable interest due to their unique electrical and magnetic properties (see numerous reviews [2–10, 14] and references therein). The reduction in dimensionality introduces novel phenomena that do not normally occur in bulk counterparts, such as enhanced quantum fluctuations, geometric frustration, and spin–charge separation [3, 10–14]. These phenomena are associated with the development of exotic magnetic states, unconventional phase transitions, and emergent behavior, offering new avenues for scientific exploration and potential technological applications in quantum computing and spintronics [15, 16].

Iron chalcogenides represent a particularly fascinating subclass within the broader family of iron-based superconductors, distinguished by remarkable structural diversity and electronic properties [2, 17]. Unlike iron pnictides, they exhibit a rich phase diagram encompassing superconducting, magnetic, and insulating phases, often in close proximity to each other [18, 19]. The electronic structure of these materials is characterized by strong electron correlations and orbital-dependent interactions, leading to orbital ordering, nematic phases, and unconventional superconducting gap structures [20, 21].

Within iron chalcogenides, there is a subgroup of quasi-one-dimensional compounds with chains of edge-sharing $[\text{FeX}_4]$ tetrahedra ($\text{X} = \text{S}, \text{Se}, \text{Te}$), which can be considered as an extreme case of dimensional reduction that amplifies quantum many-body effects [22]. In such systems, the mutual impact of magnetic interactions, structural distortions, and electronic correlations on one another becomes especially pronounced, often yielding complex phase diagrams with multiple competing ground states. The reduced dimensionality can result in spin-Peierls transitions, charge density waves, and metal-insulator transitions driven by magnetic ordering [23, 24].

However, one of the critical challenges in studying iron chalcogenides is their inherent instability in ambient atmospheric conditions. The sensitivity to oxidation can dramatically alter their intrinsic electronic and magnetic properties, leading to discrepancies between theoretical predictions and experimental observations [25, 26]. The most highly air-sensitive compounds are selenides having relatively weak Se-Fe bonds that make them susceptible to oxygen substitution and selenium volatilization. Understanding the above mechanisms is crucial for both fundamental research and potential applications of these materials.

The oxidation processes in iron chalcogenides involve complex chemical reactions that can proceed through multiple pathways, ranging from direct oxygen substitution to formation of oxide phases and elemental chalcogen segregation [27]. They tend to happen very quickly, within minutes of air exposure, and significantly alter the material's electronic structure and transport properties. The defects from oxidation can act as scattering centers, promoting electron localization and suppressing metallic conductivity, even in materials that are theoretically predicted to be metallic.

In the present study, we focus on RbFeSe_2 , which crystallizes in a monoclinic structure with the $C2/c$ space group [28]. The crystal structure consists of chains of $[\text{FeSe}_4]$ tetrahedra sharing common edges and aligned along the crystallographic c -axis. These chains are cross-linked by Rb atoms to form a three-dimensional structure [28]. The quasi-one-dimensional nature of the electronic structure, with preferential electron hopping along the iron chains, makes this compound an ideal candidate for investigating the interplay among dimensionality, magnetic ordering, and electronic transport properties. The magnetic behavior of RbFeSe_2 is determined by antiferromagnetic interactions within and between the iron chains. Below the Néel temperature $T_N = 248$, the antiferromagnetic interactions induce long-range antiferromagnetic ordering [29]. The magnetic structure consists of ferromagnetic chains coupled antiferromagnetically, which together organize into a complex three-dimensional magnetic configuration. This magnetic ordering is expected to have profound effects on the electronic structure, potentially driving a metal-insulator transition as predicted by theoretical models for quasi-one-dimensional magnetic systems.

Previous studies on RbFeSe_2 single crystals have utilized measurements of X-ray diffraction, magnetic susceptibility, magnetization, specific heat, as well as Mössbauer spectroscopy [29]. They have conclusively established the basic structural and magnetic properties but so far have failed to address the question of electronic transport and its relationship to the theoretical electronic structure. The absence of systematic conductivity measurements is a critical gap in our understanding of this material, primarily due to the strong predictions for metallic behavior based on available electronic structure calculations.

The theoretical prediction of metallic conductivity in RbFeSe_2 above T_N is based on the quasi-one-dimensional electronic structure and the relatively short Fe-Fe distances within the chains. However, the realization of such metallic behavior in practice depends on the structural

integrity of the material and the absence of defects that could lead to electron localization. The Anderson localization mechanism, which is relevant in low-dimensional systems, predicts that even small concentrations of disorder can completely suppress metallic conductivity.

The primary objectives of this work are: (i) to examine the electronic band structure of RbFeSe_2 using density functional theory calculations, providing theoretical predictions for the temperature-dependent electronic properties; (ii) to investigate electrical conductivity through direct experimental measurements using four-probe techniques in order to test these theoretical predictions; (iii) to quantitatively analyze the air-induced degradation effects through detailed structural characterization; and (iv) to establish the influence of structural degradation on the observed discrepancies between theoretical predictions and experimental observations. Our approach combines state-of-the-art *ab initio* calculations with careful experimental characterization, including post-measurement structural analysis to assess sample integrity. This comprehensive methodology is helpful in disentangling intrinsic electronic properties from extrinsic effects related to environmental degradation. Our findings reveal the critical importance of atmospheric control in chalcogenide research and provide methodological insights for future investigations of similar environmentally sensitive materials. The broader implications of this work extend beyond the specific compound studied, addressing fundamental questions about the stability and characterization of air-sensitive quantum materials. The quantitative analysis of degradation kinetics and mechanisms provides valuable insights for the design of protective strategies and measurement protocols for similar materials. Furthermore, our results highlight important limitations of existing theoretical approaches when applied to real materials with structural imperfections, contributing to the ongoing dialogue about the predictive power of computational materials science.

1. Theoretical Approach and Experimental Methods

1.1. *Ab initio* calculations. The *ab initio* calculations were based on density functional theory (DFT) [30]. Exchange and correlation effects were treated using the generalized gradient approximation (GGA) as parameterized by the Perdew, Burke, and Ernzerhof (*PBE-sol*) functional [31]. The Kohn–Sham equations were solved using projector-augmented wave (PAW) potentials [32] as implemented in the Vienna *Ab-Initio* Simulation Package (VASP) [33], which is part of the MedeA software suite [34].

Computational parameters were set as follows: plane-wave cutoff of 500 eV, energy tolerance for self-consistency of 10^{-6} eV, and Brillouin zone sampling on Monkhorst–Pack grids of $6 \times 6 \times 7$ k -points. Full structure optimization was performed, involving atomic positions, cell dimensions, and shape.

Two magnetic configurations were considered: (i) non-spin-polarized calculations to model the paramagnetic state above the Néel temperature $T_N = 248$ K and (ii) spin-polarized calculations incorporating the antiferromagnetic ground state below T_N . The antiferromagnetic spin configuration was constructed according to neutron diffraction data [28]. This approach enables correct description of temperature-dependent magnetic states during electronic property calculations [35].

It should be noted that standard DFT calculations may have limitations when applied to quasi-one-dimensional systems, particularly regarding the accurate description of correlation effects and potential overestimation of metallic character. These limitations are important to consider when comparing theoretical predictions with experimental results.

1.2. Experimental methods. Single-crystal RbFeSe_2 samples were prepared for subsequent electrical conductivity measurements using the four-probe method in a Physical Property Measurement System PPMS-9 (Quantum Design, USA). All measurements were conducted both parallel and perpendicular to the iron chains over the temperature range of 4–300 K.

Sample preparation was performed in a glove box under argon atmosphere to minimize oxidation. However, due to experimental constraints, the samples were exposed to ambient atmosphere for approximately 7–9 min during the transfer from the sealed ampule to the measurement setup. Conductivity measurements were carried out in helium atmosphere.

To investigate potential sample degradation, powder X-ray diffraction studies were performed both on fresh samples and after conductivity measurements. During X-ray diffraction measurements, the samples were coated with an oil-based cryoprotectant (Paratone) to prevent further deterioration.

2. Results and Discussion

2.1. Electronic structure calculations. Fig. 1 shows the calculated electronic band structure and density of states for RbFeSe_2 in the paramagnetic regime (temperatures above $T_N = 248$ K). The electron density of states at the Fermi level is significantly non-zero, suggesting that the material exhibits metallic conductivity. The substantial contribution to the density of states around the Fermi level originates from electronic states localized on Fe atoms. Given that the Fe–Fe distance of $2.850(1)$ Å is only approximately 14 % longer than in metallic iron (2.48 Å) [29], metallic conductivity along the quasi-one-dimensional iron chains would be expected, indicating anisotropic conducting behavior.

The electronic band structure and density of states in the antiferromagnetic regime (below $T_N = 248$ K) are displayed in Fig. 2. A significant band gap separates the valence and conduction bands, pointing to insulating behavior. A comparison between the high- and low-temperature regimes revealed a metal–insulator transition accompanying the magnetic phase transition.

This transition can be understood within the framework of the Hubbard model [36], which predicts that the metal–insulator transition in quasi-one-dimensional systems can be a first-order transition from an antiferromagnetic insulator to a paramagnetic metal. Such transitions have been theoretically established for linear chain lattices, particularly relevant to the $[\text{FeSe}_4]$ chain structure in RbFeSe_2 .

2.2. Experimental conductivity measurements. Contrary to theoretical predictions, the experimental four-probe conductivity measurements revealed no metallic behavior in RbFeSe_2 throughout the entire temperature range of 4–300 K, regardless of measurement geometry (parallel or perpendicular to the iron chains). The sample exhibited insulating behavior at all temperatures investigated.

While the insulating behavior below T_N is consistent with the antiferromagnetic DFT calculations, the absence of metallic conductivity above T_N represents a significant discrepancy with theoretical predictions. This discrepancy suggests that factors not accounted for in the idealized DFT calculations may be controlling the experimental transport properties.

2.3. Sample degradation analysis. To understand the origin of the theory–experiment discrepancy, we conducted a detailed structural analysis of the samples after air exposure and measured their conductivity. The powder X-ray diffraction pattern of RbFeSe_2 after 7–9 min of air exposure is given in Fig. 3.

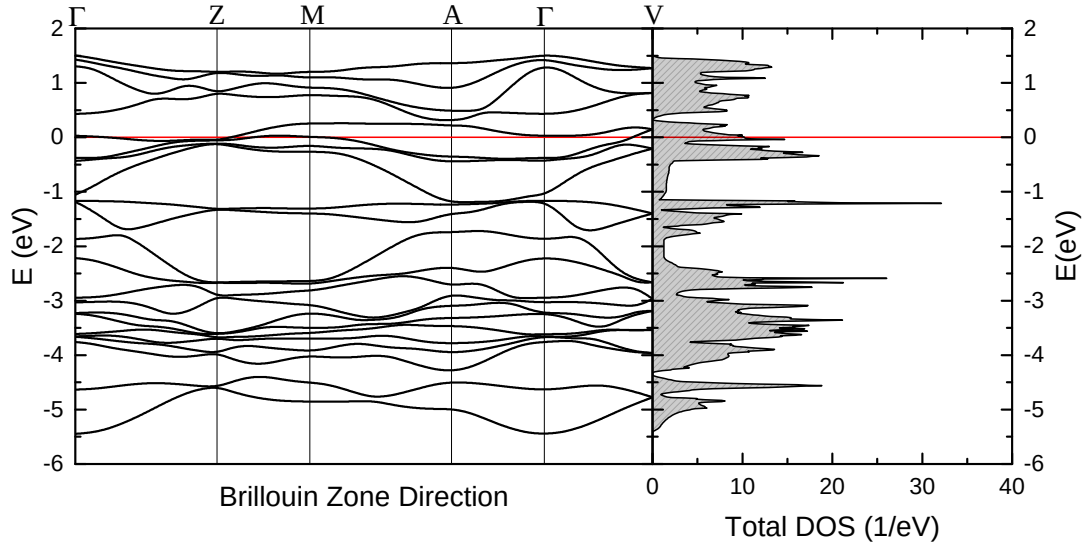


Fig. 1. Calculated band structure and density of states of RbFeSe_2 in the non-magnetic state. Notation for the Brillouin zone points is the same as in Ref. [35]. The red horizontal line indicates the Fermi-level energy

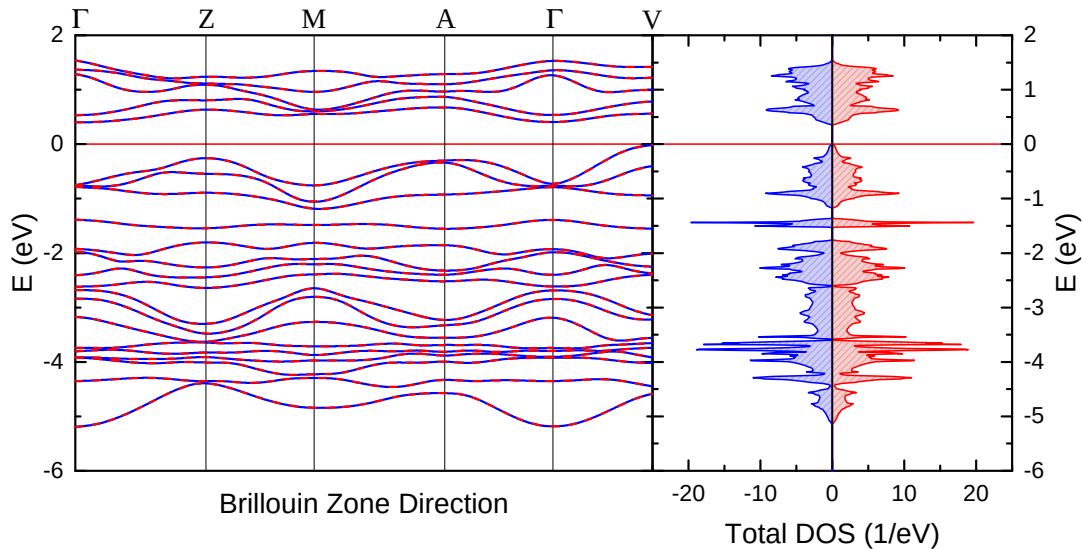


Fig. 2. Calculated band structure and density of states of RbFeSe_2 in the antiferromagnetic state. Notation for the Brillouin zone points is the same as in Ref. [35]. The spin-up and spin-down densities and bands are marked with blue and red, respectively

The obtained diffraction pattern reveals a two-phase system: (i) the original RbFeSe_2 structure with significantly altered stoichiometry, and (ii) a selenium phase with the $P3_221$ space group symmetry. Critically, the Rietveld refinement demonstrates that the selenium occupancy in the RbFeSe_2 phase is reduced by more than 20 % compared to the ideal stoichiometric composition.

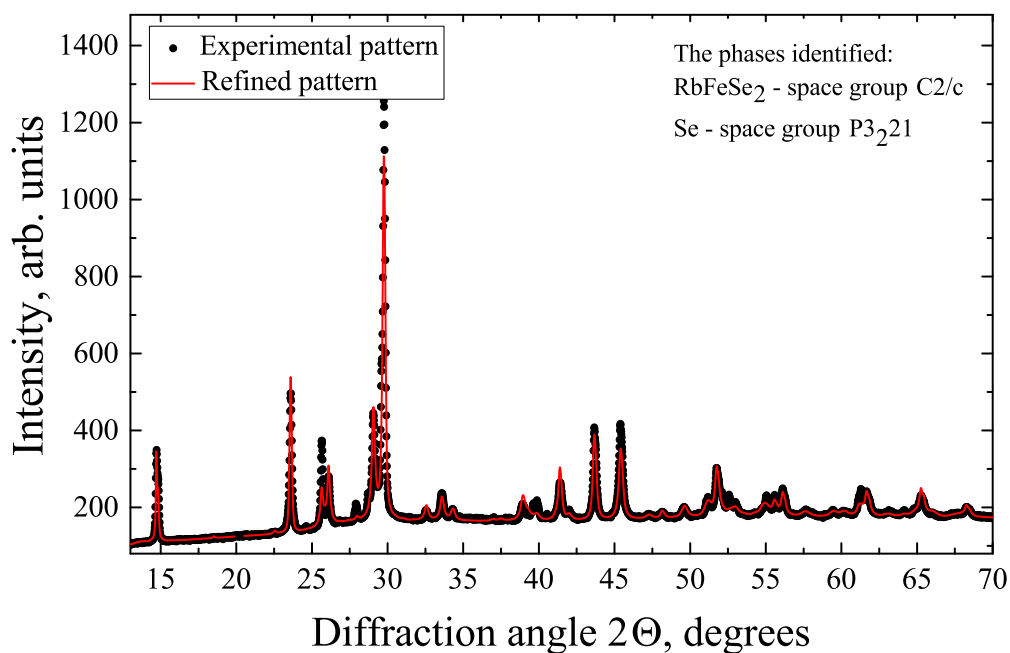


Fig. 3. Powder X-ray diffraction pattern of RbFeSe_2 after exposure to ambient atmosphere. The black circles show the measured intensities, and the red solid line corresponds to the refined pattern

This dramatic selenium deficiency can be associated with the following two mechanisms: (i) the formation of selenium vacancies, and (ii) the replacement of selenium with oxygen atoms during air oxidation. The absence of detectable iron oxide phases in the diffraction pattern supports the selenium-to-oxygen substitution mechanism. Such oxidation fundamentally alters the crystal field environment of iron atoms and disrupts the electronic structure of the conducting chains.

2.4. Implications for electronic transport. The observed structural air-induced degradation provides a compelling explanation for the discrepancy between theoretical predictions and experimental observations. In quasi-one-dimensional systems, even relatively small concentrations of defects can lead to electron localization through the Anderson localization mechanisms. The reduction of selenium occupancy factor by more than 20% represents a substantial defect concentration that would be expected to completely suppress metallic conductivity.

The rapid degradation kinetics (with significant structural changes observed within 7–9 min of air exposure) highlight the extreme sensitivity of RbFeSe_2 to oxidative environments. This finding has important implications for both fundamental research and potential applications of iron chalcogenides.

A similar behavior has been reported for the related compound KFeS_2 [37,38] when different sample treatment procedures resulted in dramatically different transport properties, ranging from insulating behavior to features of metal–insulator transitions near the Néel temperature. This further supports our conclusion that environmental factors critically influence the observed electronic properties.

2.5. Limitations of DFT approach. Our results also highlight important limitations of standard DFT calculations when applied to quasi-one-dimensional systems. While DFT correctly predicts the electronic structure of ideal, defect-free RbFeSe_2 , it fails to account for the effects of structural defects that dominate real experimental samples. Additionally, correlation effects, which may be particularly important in quasi-one-dimensional systems, are not fully captured by standard GGA functionals.

Future theoretical investigations should consider: (i) explicit modeling of defect structures and their effects on electronic properties, (ii) including correlation effects through DFT+U or hybrid functional approaches, and (iii) incorporating electron–phonon coupling effects that may influence transport properties.

3. Conclusions

A comprehensive investigation of the electronic properties of quasi-one-dimensional antiferromagnet RbFeSe_2 was carried out using a combination of theoretical and experimental approaches. Key findings include:

- **Theoretical predictions:** DFT calculations predict a first-order metal–insulator transition at the Néel temperature ($T_N = 248$ K), with metallic conductivity expected above T_N and insulating behavior below it.
- **Experimental observations:** Four-probe conductivity measurements reveal insulating behavior across the entire temperature range (4–300 K), contradicting theoretical predictions for the paramagnetic regime.
- **Degradation mechanism:** Post-measurement structural analysis indicates that even brief air exposure (7–9 min) induces significant sample degradation, with selenium occupancy reduced by $>20\%$ and elemental selenium phase formation.
- **Methodological insights:** The rapid degradation kinetics demonstrate the critical importance of rigorous atmospheric control when studying iron chalcogenides. Standard sample handling procedures may be insufficient to preserve intrinsic electronic properties.
- **Theoretical limitations:** The limitations of standard DFT approaches for quasi-one-dimensional systems, particularly the need to consider correlation effects and defect-induced localization, are shown.

Our work establishes a foundation for understanding degradation mechanisms in quasi-one-dimensional iron chalcogenides and provides methodological guidelines for reliable characterization of these environmentally sensitive materials.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Hsu F.-C., Luo J.-Y., Yeh K.-W., Chen T.-K., Huang T.-W., Wu P.M., Lee Y.-C., Huang Y.-L., Chu Y.-Y., Yan D.-C., Wu M.-K. Superconductivity in the PbO-type structure α -FeSe. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2008, vol. 105, no. 38, pp. 14262–14264. <https://doi.org/10.1073/pnas.0807325105>.

2. Mizuguchi Y., Takano Y. Review of Fe chalcogenides as the simplest Fe-based superconductor. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 2010, vol. 79, no. 10, art. 102001. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.79.102001>.
3. Johnston D.C. The puzzle of high temperature superconductivity in layered iron pnictides and chalcogenides. *Adv. Phys.*, 2010, vol. 59, no. 6, pp. 803–1061. <https://doi.org/10.1080/00018732.2010.513480>.
4. Mizokawa T., Sudayama T., Wakisaka Y., Ootsuki D., Imaizumi M., Noji T., Koike Y., Pyon S., Kudo K., Nohara M., Anzai H., Arita M., Namatame H., Taniguchi M., Saini N.L. Orbital degeneracy, Jahn–Teller effect, and superconductivity in transition-metal chalcogenides. *J. Supercond. Novel Magn.*, 2012, vol. 25, no. 5, pp. 1343–1346. <https://doi.org/10.1007/s10948-012-1626-x>.
5. Mousavi T., Grovenor C.R.M., Speller S.C. Structural parameters affecting superconductivity in iron chalcogenides: A review. *Mater. Sci. Technol.*, 2014, vol. 30, no. 15, pp. 1929–1943. <https://doi.org/10.1179/1743284714Y.0000000551>.
6. Glasbrenner J.K., Mazin I.I., Jeschke H.O., Hirschfeld P.J., Fernandes R.M., Valentí R. Effect of magnetic frustration on nematicity and superconductivity in iron chalcogenides. *Nat. Phys.*, 2015, vol. 11, no. 11, pp. 953–958. <https://doi.org/10.1038/nphys3434>.
7. Chang C.-C., Chen T.K., Lee W.C., Lin P.H., Wang M.J., Wen Y.C., Wu P.M., Wu M.K. Superconductivity in Fe-chalcogenides. *Phys. C: Supercond. Its Appl.*, 2015, vol. 514, pp. 423–434. <https://doi.org/10.1016/j.physc.2015.02.011>.
8. Mizuguchi Y. Recent advances in layered metal chalcogenides as superconductors and thermoelectric materials: Fe-based and Bi-based chalcogenides. *Chem. Rec.*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 633–651. <https://doi.org/10.1002/tcr.201500263>.
9. Si Q., Yu R., Abrahams E. High-temperature superconductivity in iron pnictides and chalcogenides. *Nat. Rev. Mater.*, 2016, vol. 1, no. 4, art. 16017. <https://doi.org/10.1038/natrevmats.2016.17>.
10. Li L., Parker D.S., dela Cruz C.R., Sefat A.S. Multi-layered Chalcogenides with potential for magnetism and superconductivity. *Phys. C: Supercond. Its Appl.*, 2016, vol. 531, pp. 25–29. <https://doi.org/10.1016/j.physc.2016.10.005>.
11. Vasiliev A., Volkova O., Zvereva E., Markina M. Milestones of low-D quantum magnetism. *npj Quantum Mater.*, 2018, vol. 3, no. 1, art. 18. <https://doi.org/10.1038/s41535-018-0090-7>.
12. Furdyna J.K., Dong S.-N., Lee S., Liu X., Dobrowolska M. Magnetic chalcogenides in 3 and lower dimensions. *Phys. C: Supercond. Its Appl.*, 2018, vol. 549, pp. 44–53. <https://doi.org/10.1016/j.physc.2018.02.049>.
13. Vasiliev A.N., Volkova O.S., Zvereva E.A., Markina M.M. *Low-Dimensional Magnetism*. Rieckensky V.E. (Trans.). Boca Raton, FL, CRC Press, 2019. 314 p. <https://doi.org/10.1201/9780429288319>.
14. Gupta R.K., Mishra S.R., Nguyen T.A. *Fundamentals of Low Dimensional Magnets*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2022. 380 p. <https://doi.org/10.1201/9781003197492>.
15. Xu Y., Awschalom D.D., Nitta J. *Handbook of Spintronics*. Dordrecht, Springer, 2016. xxiv, 1609 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-6892-5>.

16. Gupta R.K., Mishra S.R., Nguyen T.A. *Emerging Applications of Low Dimensional Magnets*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2022. 334 p. <https://doi.org/10.1201/9781003196952>.
17. Fernandes R.M., Coldea A.I., Ding H., Fisher I.R., Hirschfeld P.J., Kotliar G. Iron pnictides and chalcogenides: A new paradigm for superconductivity. *Nature*, 2022, vol. 601, no. 7891, pp. 35–44. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-04073-2>.
18. Opačić M.R., Lazarević N.Ž. Lattice dynamics of iron chalcogenides – Raman scattering study. *J. Serb. Chem. Soc.*, 2017, vol. 82, no. 9, pp. 957–983. <https://doi.org/10.2298/JSC170321077O>.
19. Kreisel A., Hirschfeld P.J., Andersen B.M. On the remarkable superconductivity of FeSe and its close cousins. *Symmetry*, 2020, vol. 12, no. 9, art. 1402. <https://doi.org/10.3390/sym12091402>.
20. Yi M., Liu Z.-K., Zhang Y., Yu R., Zhu J.-X., Lee J.J., Moore R.G., Schmitt F.T., Li W., Riggs S.C., Chu J.-H., Lv B., Hu J., Hashimoto M., Mo S.-K., Hussain Z., Mao Z.Q., Chu C.W., Fisher I.R., Si Q., Shen Z.-X., Lu D.H. Observation of universal strong orbital-dependent correlation effects in iron chalcogenides. *Nat. Commun.*, 2015, vol. 6, no. 1, art. 7777. <https://doi.org/10.1038/ncomms8777>.
21. Matsuura K., Roppongi M., Qiu M., Sheng Q., Cai Y., Yamakawa K., Guguchia Z., Day R.P., Kojima K.M., Damascelli A., Sugimura Y., Saito M., Takenaka T., Ishihara K., Mizukami Y., Hashimoto K., Gu Y., Guo Y., Fu L., Zhang Z., Ning F., Zhao G., Dai G., Jin C., Beare J.W., Luke G.M., Uemura Y.J., Shibauchi T. Two superconducting states with broken time-reversal symmetry in $\text{FeSe}_{1-x}\text{S}_x$. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2023, vol. 120, no. 21, art. e2208276120. <https://doi.org/10.1073/pnas.2208276120>.
22. Ke F., Niu S., Feng J., Yin K., Han M., Yang H., Wang B.Y., Celeste A., Jia C., Chen B., Wang L., Hwang H.Y., Tian Y., Mao W.L., Lin Y. Superconductivity in compressed quasi-one-dimensional face-sharing hexagonal perovskite chalcogenides. *Sci. Adv.*, 2025, vol. 11, no. 37, art. eadv1894. <https://doi.org/10.1126/sciadv.adv1894>.
23. Xu Z., Schneeloch J.A., Wen J., Božin E.S., Granroth G.E., Winn B.L., Feynson M., Birgeneau R.J., Gu G., Zaliznyak I.A., Tranquada J.M., Xu G. Thermal evolution of antiferromagnetic correlations and tetrahedral bond angles in superconducting $\text{FeTe}_{1-x}\text{Se}_x$. *Phys. Rev. B*, 2016, vol. 93, no. 10, art. 104517. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.104517>.
24. Wang B., Yao Y., Hong W., Hong Z., He X., Wang T., Jian C., Ju Q., Cai Q., Sun Z., Liu W. The controllable synthesis of high-quality two-dimensional iron sulfide with specific phases. *Small*, 2023, vol. 19, no. 23, art. 2207325. <https://doi.org/10.1002/smll.202207325>.
25. Wu H., Lu S., Xu S., Zhao J., Wang Y., Huang C., Abdelkader A., Wang W.A., Xi K., Guo Y., Ding S., Gao G., Kumar R.V. Blowing iron chalcogenides into two-dimensional flaky hybrids with superior cyclability and rate capability for potassium-ion batteries. *ACS Nano*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 2506–2519. <https://doi.org/10.1021/acsnano.0c06667>.
26. Mele P. Superconducting properties of iron chalcogenide thin films. *Sci. Technol. Adv. Mater.*, 2012, vol. 13, no. 5, art. 054301. <https://doi.org/10.1088/1468-6996/13/5/054301>.
27. Krzton-Maziopa A. Intercalated iron chalcogenides: Phase separation phenomena and superconducting properties. *Front. Chem.*, 2021, vol. 9, art. 640361. <https://doi.org/10.3389/fchem.2021.640361>.

28. Bronger W., Kyas A., Müller P. The antiferromagnetic structures of KFeS_2 , RbFeS_2 , KFeSe_2 , and RbFeSe_2 and the correlation between magnetic moments and crystal field calculations. *J. Solid State Chem.*, 1987, vol. 70, no. 2, pp. 262–270. [https://doi.org/10.1016/0022-4596\(87\)90065-X](https://doi.org/10.1016/0022-4596(87)90065-X).
29. Seidov Z., Krug von Nidda H.-A., Tsurkan V., Filippova I.G., Günther A., Gavrilova T.P., Vagizov F.G., Kiiamov A.G., Tagirov L.R., Loidl A. Magnetic properties of the covalent chain antiferromagnet RbFeSe_2 . *Phys. Rev. B*, 2016, vol. 94, no. 13. art. 134414. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.134414>.
30. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous electron gas. *Phys. Rev. Online Arch.*, 1964, vol. 136, no. 3B, pp. B864–B871. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.136.B864>.
31. Perdew J.P., Burke K., Ernzerhof M. Generalized gradient approximation made simple. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 77, no. 18, pp. 3865–3868. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.3865>.
32. Blöchl P.E. Projector augmented-wave method. *Phys. Rev. B*, 1994, vol. 50, no. 24, 17953–17979. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.50.17953>.
33. Kresse G., Furthmüller J. Efficient iterative schemes for ab initio total-energy calculations using a plane-wave basis set. *Phys. Rev. B*, 1996, vol. 54, no. 16, pp. 11169–11186. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.54.11169>.
34. Kiiamov A.G., Lysogorskiy Y.V., Vagizov F.G., Tagirov L.R., Tayurskii D.A., Croitori D., Tsurkan V., Loidl A. Mössbauer spectroscopy evidence of intrinsic non-stoichiometry in iron telluride single crystals. *Ann. Phys.*, 2017, vol. 529, no. 4, art. 1600241. <https://doi.org/10.1002/andp.201600241>.
35. Lysogorskiy Y.V., Kijamov A.G., Nedopekin O.V., Tayurskii D.A. Ab initio studying of topological insulator Bi_2Se_3 under the stress. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2012, vol. 394, no. 1, art. 012022. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/394/1/012022>.
36. Katsnelson M.I., Irkhin V.Yu. Metal-insulator transition and antiferromagnetism in the ground state of the Hubbard model. *J. Phys. C: Solid State Phys.*, 1984, vol. 17, no. 24, art. 4291. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/17/24/011>.
37. Bronger W., Müller P. Electrical and magnetic properties of KFeS_2 single crystals. *J. Inorg. Nucl. Chem.*, 1973, vol. 35, pp. 1891–1896.
38. Takahashi H., Akimitsu J. Metal-insulator transition in KFeS_2 . *Phys. Rev. B*, 1998, vol. 57, pp. 15211–15218.

Author Information

Airat G. Kiiamov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Kazan Federal University

E-mail: airatphd@kazanfederaluniversity.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5376-7000>

Maksim D. Kuznetsov, Postgraduate Student, Kazan Federal University

E-mail: kuznetsov.kpfu@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0413-7519>

Lenar R. Tagirov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Zavoisky Physical-Technical Institute, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: ltagirov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1549-7940>

Mamoun Hemmida, PhD, Academic Staff, Experimental Physics V, Center for Electronic Correlations and Magnetism, Institute of Physics, University of Augsburg

E-mail: mamoun.hemmida@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8538-7477>

Hans-Albrecht Krug von Nidda, Dr. Habil., Privatdozent, Experimental Physics V, Center for Electronic Correlations and Magnetism, Institute of Physics, University of Augsburg

E-mail: hans-albrecht.krug@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5215-7673>

Dorina Croitori, PhD, Senior Scientific Researcher, Institute of Applied Physics, Moldova State University

E-mail: dorinacroitori@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8724-8876>

Zakir Yu. Seidov, PhD, Senior Researcher, Experimental Physics V, Center for Electronic Correlations and Magnetism, Institute of Physics, University of Augsburg; Senior Researcher, Institute of Physics, Ministry of Science and Education of the Republic of Azerbaijan

E-mail: zsyu@rambler.ru

Vladimir Tsurkan, PhD, Senior Researcher, Experimental Physics V, Center for Electronic Correlations and Magnetism, Institute of Physics, University of Augsburg; Principal Scientific Researcher, Institute of Applied Physics, Moldova State University

E-mail: vladimir.tsurkan@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6001-3151>

Dmitrii A. Tayurskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, First Vice-Rector – Vice-Rector for Research, Kazan Federal University

E-mail: Dmitry.Tayurskii@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6106-7581>

Информация об авторах

Айрат Газинурович Киямов, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: airatphd@kazanfederaluniversity.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5376-7000>

Максим Дмитриевич Кузнецов, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: kuznetsov.kpfu@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0413-7519>

Ленар Рафгатович Тагиров, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского ФИЦ Казанский научный центр РАН

E-mail: ltagirov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1549-7940>

Мамун Хеммида, PhD, сотрудник научно-педагогического состава, кафедра экспериментальной физики V, Центр по изучению электронных корреляций и магнетизма, Институт физики, Аугсбургский университет

E-mail: mamoun.hemmida@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8538-7477>

Ханс-Альбрехт Круг фон Нидда, Dr. Habil., приват-доцент, кафедра экспериментальной физики V, Центр по изучению электронных корреляций и магнетизма, Институт физики, Аугсбургский университет

E-mail: hans-albrecht.krug@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5215-7673>

Дорина Кройтори, PhD, старший научный сотрудник, Институт прикладной физики, Молдавский государственный университет

E-mail: dorinacroitori@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-8724-8876>

Закир Юрьевич Сеидов, PhD, старший научный сотрудник, кафедра экспериментальной физики V, Центр по изучению электронных корреляций и магнетизма, Институт физики, Аугсбургский университет; старший научный сотрудник, Институт физики, Министерство науки и образования Азербайджанской Республики

E-mail: zsyu@rambler.ru

Владимир Цуркан, Dr.Sci., старший научный сотрудник, кафедра экспериментальной физики V, Центр по изучению электронных корреляций и магнетизма, Институт физики, Аугсбургский университет; главный научный сотрудник, Институт прикладной физики, Молдавский государственный университет

E-mail: vladimir.turkan@physik.uni-augsburg.de

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6001-3151>

Дмитрий Альбертович Таюрский, доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор – проректор по научной деятельности, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Dmitry.Tayurskii@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6106-7581>

Received October 14, 2025

Accepted October 28, 2025

Поступила в редакцию 14.10.2025

Принята к публикации 28.10.2025

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>**Математически корректная постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, численно-аналитические методы и результаты решения задач****С.А. Кузнецов***Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия**skuznets@kpfu.ru***Аннотация**

Даны обоснование математически корректной постановки контактных задач теории пластин и оболочек и обзор решенных за последние годы статических и динамических контактных задач, их аналитических и численных решений, а также анализ полученных результатов. В том числе приведены примеры задач, в которых принципиально важным является корректное определение распределения контактных напряжений.

Ключевые слова: контактная задача, теория пластин и оболочек, математически корректная постановка

Для цитирования: Кузнецов С.А. Математически корректная постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, численно-аналитические методы и результаты решения задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 719–743. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>.

REVIEW ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>

Mathematically rigorous formulation of contact problems for thin-walled structural elements, numerical and analytical methods, and solution results

S.A. Kuznetsov

Kazan Federal University, Kazan, Russia

skuznets@kpfu.ru

Abstract

A mathematically rigorous formulation of contact problems in the theory of plates and shells is justified. An overview of the recently solved static and dynamic problems, their analytical and numerical solutions, is carried out, and the results of the obtained solutions are analyzed. Additionally, examples are provided of such problems where the correct determination of contact stress distribution is fundamentally important.

Keywords: contact problem, theory of plates and shells, mathematically rigorous formulation

For citation: Kuznetsov S.A. Mathematically rigorous formulation of contact problems for thin-walled structural elements, numerical and analytical methods, and solution results. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 719–743. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>. (In Russian)

1. О математически корректной постановке

Одним из наиболее сложных разделов теории оболочек, имеющим широкую область практических приложений, являются задачи анализа прочности тонкостенных элементов конструкций при их взаимодействии с другими упругими или жесткими телами. При этом контактные задачи теории оболочек имеют свою специфику, отличающую их от контактных задач теории упругости. При рассмотрении последних трудности возникают, как правило, на этапе вывода и решения уравнений, а с выбором самой теории, используемой при формулировке задачи, все бывает ясно. В контактных задачах теории оболочек выбор той или иной теории существенно влияет на конечный результат. Рассмотрим, например, хорошо известное [1] решение задачи о цилиндрическом изгибе параболическим штампом пластины, шарнирно опертой по краям $x = \pm l$ (рис. 1).

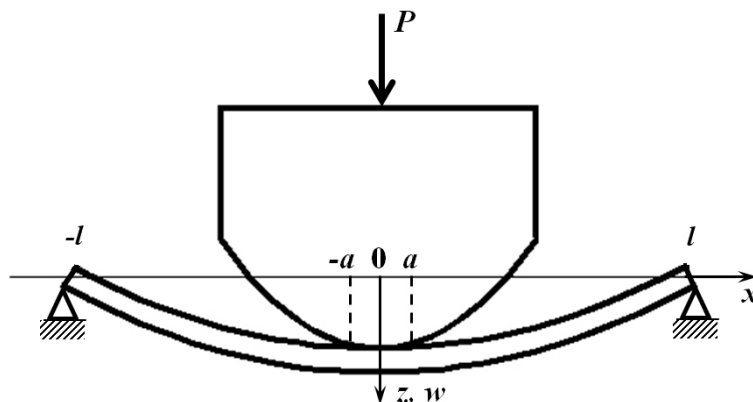


Рис. 1. Контактная задача при цилиндрическом изгибе

Fig. 1. Contact problem in cylindrical bending

При решении задачи на основе классической теории Кирхгофа – Лява условие контакта записывается в виде равенства перемещений штампа перемещениям срединной поверхности пластины и приводит к уравнению

$$\int_{-a}^a G(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = \alpha - f(x), \quad |x| < a, \quad (1)$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина, являющаяся решением краевой задачи

$$G^{IV}(x, \xi) = \frac{1}{D} \delta(x - \xi), \quad G(\pm l, \xi) = 0, \quad G''(\pm l, \xi) = 0,$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины, $\delta(x - \xi)$ – дельта-функция Дирака, α и $f(x)$ – жесткое смещение и форма подошвы штампа, $\sigma(x)$ – неизвестное контактное давление.

Нетрудно получить функцию Грина в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} [l|x - \xi|^3 + x\xi(x^2 + \xi^2 + 2l^2) - 3l^2(x^2 + \xi^2) + 2l^4].$$

Уравнение (1) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода. Известно, что решение уравнений Фредгольма 1-го рода с гладким ядром (а у нас функция $G(x, \xi)$ гладкая) является задачей, математически некорректной. Это значит, что бесконечно малому изменению правой части будет соответствовать конечное изменение решения. Физически же некорректность постановки может проявляться по-разному, в зависимости от решаемой задачи и от того объекта или процесса, который мы моделируем таким интегральным уравнением. Надо быть готовым в таком случае ко всяким неожиданностям. В нашем случае некорректность проявляется в том, что для штампа параболической формы $f(x) = cx^2$ решение контактной задачи имеет вид

$$\sigma(x) = -\frac{P}{2} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

При этом смещение штампа α , размер области контакта a и прижимающая сила P связаны соотношениями

$$P = \frac{4cD}{l-a}, \quad \alpha = -\frac{P}{12D}(a^3 - 3la^2 + 2l^3).$$

Что мы видим в этом решении?

Во-первых, напряжения под штампом отсутствуют, а на границах они настолько велики, что сосредоточены в точках $x = \pm a$. Но при гладкой форме штампа как раз на границе напряжений быть не должно, и из простых физических соображений ясно, что $\sigma(\pm a) = 0$.

Во-вторых, зависимость $P(a)$ (рис. 2) имеет две особые точки: $a = 0$ и $a = l$. В нулевой точке мы имеем конечное значение силы P , т. е. бесконечно малому приращению длины области контакта a соответствует конечное приращение силы P , прижимающей штамп. А для того чтобы область контакта распространилась на всю длину l , требуется бесконечно большое значение силы P .

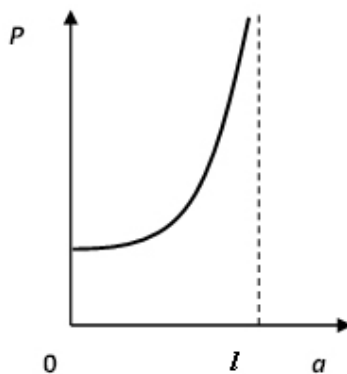


Рис. 2. Зависимость $P(a)$

Fig. 2. Dependence $P(a)$

Контактную задачу теории оболочек можно сделать математически корректной, используя методы регуляризации для перехода к уравнению Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi) d\xi = \alpha - f(x), \quad |x| < a. \quad (2)$$

Важнейшим при этом является выбор значения параметра регуляризации k_0 . Это значение должно делать решение устойчивым и вместе с тем незначительно искажать первоначальное интегральное уравнение первого рода. В методе регуляризации А.Н. Тихонова [2] используется априорная информация о решении для сужения области поиска и окончательного выбора параметра.

Другой подход к проблеме регуляризации уравнений рассматриваемых контактных задач основан на уточнении физической постановки задачи. В варианте Г.Я. Попова [3] срединная поверхность тонкостенного элемента покрывается слоем упругого винклера основания с коэффициентом податливости k_0 , значение которого необходимо определять

экспериментально. Более логичной представляется интерпретация параметра регуляризации как коэффициента обжатия оболочки по толщине, характеризующего смещение контактирующей поверхности относительно срединной. Такая постановка была предложена независимо друг от друга и практически одновременно Э.И. Григолюком и В.М. Толкачевым [4], М.В. Блохом и С.Я. Цукровым [5], Ю.П. Артюхиным и С.Н. Карасевым [6]. Выражения для коэффициента обжатия получены ими путем интегрирования соотношений закона Гука для поперечной деформации при нормальном напряжении, найденном из уравнений равновесия. Позднее Ю.П. Артюхин [7] получил коэффициент обжатия из решения задачи о сжатии тонкого слоя, лежащего на недеформируемом основании.

Коэффициент обжатия может быть представлен в общем случае в виде $k_0 = F(\nu)h/E$, где $F(\nu)$ – некоторая функция коэффициента Пуассона ν или константа, которая представлена в табл. 1.

Табл. 1. Вид и значения функции $F(\nu)$

Table 1. Type and values of the function $F(\nu)$

Источник	[4]	[5]	[6]	[7]
Вид функции	13/32	3/8	$13(1 - \nu^2)/32$	$(1 + \nu)(0,5 - \nu)/(1 - \nu)$
$F(0,3)$	0,406	0,375	0,370	0,371

Диапазон изменения $F(\nu)$ укладывается в $\pm 5\%$. В то же время ядро интегрального уравнения (2) можно переписать в виде

$$G(x, \xi) = (1 - \nu^2) \frac{h}{E} \left(\frac{l}{h} \right)^4 G_0(x, \xi),$$

где

$$G_0(x, \xi) = |x_* - \xi_*|^3 + x_* \xi_* (x_*^2 + \xi_*^2 + 2) - 3(x_*^2 + \xi_*^2) + 2, \quad x_* = x/l, \quad \xi_* = \xi/l.$$

Тогда очевидно, что $G(x, \xi)$ имеет порядок $(1 - \nu^2)(h/E)(l/h)^4$, и слагаемое $k_0 \sigma(x)$ на несколько порядков меньше прогиба срединной поверхности не только для тонких, но и для пластин и оболочек средней толщины.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\sigma(x) = \frac{\lambda P}{s} (\sinh[\lambda(a+x)] \sin[\lambda(a-x)] + \sinh[\lambda(a-x)] \sin[\lambda(a+x)]),$$

где $\lambda = 1/\sqrt{4k_0 D}$, $s = \sinh \varphi - \sin \varphi$, $\varphi = 2\lambda a$. Смещение штампа α , размер области контакта a и прижимающая сила P связаны при этом соотношениями

$$P = \frac{4cD\lambda s}{l_a \lambda s + \cosh \varphi + \cos \varphi}, \quad \alpha = \frac{P}{2D} \left(a_1 + a_2 \frac{\cosh \varphi + \cos \varphi}{\lambda s} - l_a \frac{\sinh \varphi + \sin \varphi}{2\lambda^2 s} \right),$$

$$l_a = l - a, \quad a_1 = \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6}, \quad a_2 = \frac{a(2l - a)}{2}.$$

Главным критерием достоверности решения служит сравнение с решением, полученным по точным уравнениям теории упругости, если оно, конечно, существует.



Рис. 3. Сравнение контактных напряжений, полученных по теории упругости и теории пластин с учетом обжатия

Fig. 3. Comparison of contact stresses obtained from the theory of elasticity and the theory of plates with regard for compression

Как видно из рис. 3, учет обжатия позволяет получить контактные напряжения, близкие к тем, что дает расчет по теории упругости.

Приведенные решения позволяют сделать вывод, что для контактных задач без учета касательного взаимодействия между тонкостенными объектами условие контакта можно формулировать в виде равенства перемещений, состоящих из прогибов срединных поверхностей и местного поперечного обжатия в зоне контакта. При этом сохраняются все преимущества теории тонких оболочек по сравнению с теорией упругости. Возможно также определять функцию Грина для пластин и оболочек средней толщины на основе теорий типа Тимошенко, учитывающих деформации поперечного сдвига.

2. Метод сведения интегральных уравнений контактных задач к краевой задаче

Метод сведения интегральных уравнений контактных задач к краевой задаче, разработанный в Казанском университете Ю.П. Артюхиным для одномерных задач и распространенный впоследствии автором на двумерные и динамические задачи, изложим для простоты на примере уравнения (2).

Суть метода заключается в следующем [8]. Пусть функция влияния удовлетворяет некоторому уравнению

$$LG(x, \xi) = L_1 \delta(x - \xi), \quad (3)$$

вид операторов (в общем случае дифференциальных) определяется теорией оболочек, используемой в каждом конкретном случае.

Подействуем оператором L на уравнение (2)

$$k_0 L\sigma(x) + \int_{-a}^a LG(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = L(\alpha - f(x)). \quad (4)$$

Используя фильтрующие свойства δ -функции, приведем (4) к виду

$$k_0 L\sigma(x) + L_1\sigma(x) = L(\alpha - f(x)). \quad (5)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$L_1U(x) = \alpha - f(x) - k_0\sigma(x). \quad (6)$$

Тогда $L_1\sigma(x) = LL_1U(x)$. Отсюда получим

$$\sigma(x) = LU(x). \quad (7)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (5):

$$k_0 LLU(x) + L_1LU(x) = L(\alpha - f(x))$$

и окончательно получим дифференциальное уравнение для $U(x)$:

$$(k_0L + L_1)U(x) = \alpha - f(x). \quad (8)$$

Подставив (6) и (7) в (2), найдем

$$\int_{-a}^a G(x, \xi)LU(\xi)d\xi = L_1U(x).$$

Здесь оператор L берется по переменной интегрирования ξ . Применив обобщенное интегрирование по частям, получим

$$\int_{-a}^a LG(x, \xi)U(\xi)d\xi + \Psi(G, U)|_{\xi=-a}^{\xi=a} = L_1U(x),$$

где $\Psi(G, U)$ – дифференциальное выражение, конкретный вид которого определяется оператором L .

В контактных задачах функция влияния симметрична по переменным x и ξ . Поэтому интеграл в левой части тождественно равен $L_1U(x)$, и у нас остается краевое условие для $U(x)$:

$$\Psi(G, U)|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (2) сведена к решению краевой задачи (8), (9). Если оператор $L = d^4/dx^4$ или $L = d^4/dx^4 + 4\lambda^4$, то

$$\Psi(G, U) = G(x, \xi)U'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)U''(\xi) + G''_{\xi\xi}(x, \xi)U'(\xi) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi)U(\xi).$$

В двумерных контактных задачах сведение интегрального уравнения к краевой задаче при сохранении общего подхода имеет некоторые особенности [9]. Интегральное уравнение, являющееся условием контакта тонкой оболочки, взаимодействующей с жестким телом – штампом, имеет вид

$$k_0\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\xi d\eta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь Ω – область контакта, ограниченная контуром Γ (рис. 4); $f(x, y)$ – функция формы и жесткого смещения штампа и оболочки; $G(x, y, \xi, \eta)$ – функция влияния, удовлетворяющая уравнению

$$LG(x, y, \xi, \eta) = L_1\delta(x - \xi, y - \eta)$$

(L, L_1 – дифференциальные операторы) и соответствующим краевым условиям.

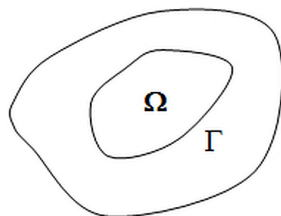


Рис. 4. Двумерная область контакта

Fig. 4. Two-dimensional contact area

Если форма штампа гладкая и область контакта заранее неизвестна, то к уравнению (10) необходимо добавить естественное условие непрерывности контактного давления на границе контакта Γ : $\sigma(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$.

Постоянные жесткого смещения определяются из условий статического равновесия штампа.

Для ряда теорий тонких оболочек, используемых в настоящее время, оператор L представим в виде $L = \nabla^4 + \alpha_1\nabla^2 + \alpha_2$, где ∇^2 – оператор Лапласа, α_1, α_2 – постоянные. Тогда краевая задача, соответствующая уравнению (10), относительно вспомогательной функции $U(x, y)$, связанной с контактным давлением зависимостью $L_1U(x, y) = f(x, y) - k_0\sigma(x, y)$, примет вид

$$(k_0L + L_1)U(x, y) = f(x, y), \quad (11)$$

$$\oint_{\Gamma} \Psi[G, U]d\Gamma = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi[G, U] \equiv & (\nabla^2 + \alpha_1)G(x, y, \xi, \eta)\frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} + G(x, y, \xi, \eta)\frac{\partial \nabla^2 U(\xi, \eta)}{\partial n} - \\ & - U(\xi, \eta)\frac{\partial \nabla^2 G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n} - (\nabla^2 + \alpha_1)U(\xi, \eta)\frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n}, \end{aligned}$$

n – внешняя нормаль к контуру Γ .

Соотношение (12) представляет собой краевое условие для функции $U(x, y)$. Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (10) сведена к решению краевой задачи (11), (12). Основное отличие от одномерных контактных задач заключается в том, что краевое условие записано в виде контурного интеграла по границе области контакта.

Многосвязные контактные задачи также сводятся к решению (11), (12) [10].

При решении контактных задач для оболочек средней толщины с учетом деформаций поперечного сдвига отличие от рассмотренной постановки заключается только в операторе L_1 в правой части уравнения для функции Грина.

3. Методика численного решения интегральных уравнений контактных задач [11]

Геометрия взаимодействующих тел зачастую такова, что искать функцию влияния удобнее в системе координат (α_2, β_2) , связанной с оболочкой, а условие контакта записывать в системе координат штампа (α_1, β_1) (рис. 5):

$$L\tilde{G}(\alpha_2, \beta_2, \xi_2, \eta_2) = L_1\delta(\alpha_2 - \xi_2, \beta_2 - \eta_2),$$

$$k_0\sigma(\alpha_1, \beta_1) + \iint_{\Omega} G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1)\sigma(\xi_1, \eta_1)d\Omega = f(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_1, \beta_1) \in \Omega.$$

При этом надо знать формулы перехода от одной системы координат к другой:

$$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2, \beta_2), \quad \beta_1 = \beta_1(\alpha_2, \beta_2).$$

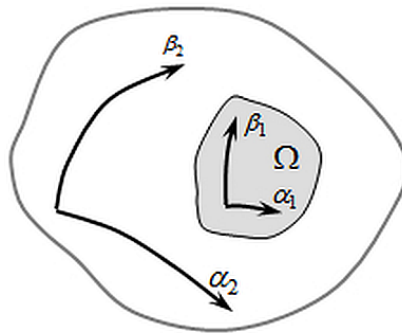


Рис. 5. Системы координат

Fig. 5. Coordinate systems

Область контакта покроем сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проведем интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса. Потребовав выполнения условия контакта пластины и штампа в каждой квадратурной точке, сведем проблему определения значений контактного давления в узлах интегрирования к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$k_0\sigma(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_{\alpha_1}} \sum_{l=1}^{n_{\beta_1}} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}, \xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) \sigma(\xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) A_i A_j =$$

$$= f(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}),$$

где A_i и N – весовые множители и число узлов в квадратурной формуле Гаусса; $n_{\alpha_1}, n_{\beta_1}$ – количество фрагментов разбиения сетки по осям; $s, t = 1, 2, \dots, N$; $p = 1, 2, \dots, n_{\alpha_1}$; $q = 1, 2, \dots, n_{\beta_1}$.

4. Результаты решения контактных задач

4.1. Взаимодействие с жестким телом пластины средней толщины, лежащей на упругом основании [12]. Как известно, решение задач теории пластин и оболочек на основе классической теории Кирхгофа–Лява позволяет получать приемлемые по точности решения только для тонких объектов. Для пластин и оболочек средней толщины необходимо использовать теории, в которых учитываются деформации поперечного сдвига (искривление нормали к срединной поверхности). В работе [6] С.Н. Карасев, Ю.П. Артюхин исследовали влияние учета деформаций поперечного сдвига на распределение контактных напряжений, но ограничились тонкими пластинами. Рассмотрим контактную задачу о взаимодействии штампа с пластиной средней толщины, лежащей на упругом винклеровом основании.

Используем теорию Тимошенко, учитывающую деформации поперечного сдвига. Согласно этой теории операторы L и L_1 в уравнении (3) имеют вид

$$L = \frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4, \quad L_1 = \frac{1}{D} - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2},$$

где $K = 5Eh/12(1 + \nu)$ – жесткость на сдвиг, $4\lambda^4 = k/D$, k – коэффициент постели упругого основания.

Решение контактной задачи получим при трех различных вариантах закрепления пластины:

- 1) оба края жестко защемлены: $G(\pm l, \xi) = G'_x(\pm l, \xi) = 0$;
- 2) оба края шарнирно оперты: $G(\pm l, \xi) = G''_{xx}(\pm l, \xi) = 0$;
- 3) оба края свободны: $G'''_{xx}(\pm l, \xi) = G''''_{xxx}(\pm l, \xi) = 0$.

Общее решение уравнения (3) достаточно просто получить методом вариации произвольных постоянных. Удовлетворив граничным условиям, получим функцию влияния в виде

$$G(x, \xi) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ji} Y_i(\lambda \xi) Y_j(\lambda x) / D_0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ji} Y_i(\lambda \xi) Y_j(\lambda x) H(x - \xi) / (4\lambda^3 D K),$$

где $H(x - \xi)$ – единичная функция Хевисайда, $Y_i(x)$ – балочные функции Крылова:

$$Y_1(x) = \cosh x \cos x, \quad Y_2(x) = \sinh x \sin x, \quad Y_3(x) = \sinh x \cos x, \quad Y_4(x) = \cosh x \sin x,$$

$$(B_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_{dp} & -K_{dm} \\ 0 & 0 & -K_{dm} & -K_{dp} \\ -K_{dp} & K_{dm} & 0 & 0 \\ K_{dm} & K_{dp} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конкретный вид C_{ji} определяется граничными условиями.

Для жестко зажатых краев

$$C_{11} = (C_s K_{dm} + C_h K_{dp} - 2K) S_{sm}, \quad C_{12} = (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sm},$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sm}, & C_{22} &= -(C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, \\
C_{33} &= (C_s K_{dm} - C_h K_{dp} - 2K) S_{sp}, & C_{34} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sp}, \\
C_{43} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sp}, & C_{44} &= (-C_s K_{dm} + C_h K_{dp} - 2K) S_{sp}, \\
C_{13} &= -K_{dp} S_{sm} S_{sp}, & C_{31} &= -C_{13}, & C_{24} &= -C_{13}, & C_{42} &= C_{13}, \\
C_{14} &= K_{dm} S_{sm} S_{sp}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, \\
D_0 &= \cos l_4 + \cosh l_4 - 2.
\end{aligned}$$

Для шарнирно опертых краев

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (C_s - C_h)(K_{dp} S_h - K_{dm} S_n), & C_{12} &= (C_h - C_s)(K_{dm} S_h + K_{dp} S_n), \\
C_{13} &= (C_h^2 - C_s^2) K_{dp}, & C_{14} &= (C_s^2 - C_h^2) K_{dm}, \\
C_{33} &= (C_h + C_s)(K_{dp} S_h + K_{dm} S_n), & C_{34} &= (C_h + C_s)(K_{dp} S_n - K_{dm} S_h), \\
C_{21} &= C_{12}, & C_{22} &= -C_{11}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{24} &= C_{31} = -C_{13}, \\
C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, & C_{42} &= C_{13}, \\
D_0 &= \cos l_4 - \cosh l_4.
\end{aligned}$$

Для свободных краев

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, & C_{12} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sm}, \\
C_{21} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sm}, & C_{22} &= (-C_s K_{dm} - C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, \\
C_{33} &= (C_s K_{dm} - C_h K_{dp} + 2K) S_{sp}, & C_{34} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sp}, \\
C_{43} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sp}, & C_{44} &= (-C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sp}, \\
C_{13} &= -K_{dp} S_{sm} S_{sp}, & C_{24} &= -C_{13}, & C_{31} &= -C_{13}, & C_{42} &= C_{13}, \\
C_{14} &= K_{dm} S_{sm} S_{sp}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, \\
D_0 &= \cos l_4 + \cosh l_4 - 2.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
S_{sm} &= S_h - S_n, & S_{sp} &= S_h + S_n, \\
S_h &= \sinh l_2, & S_n &= \sin l_2, & C_h &= \cosh l_2, & C_s &= \cos l_2, \\
K_{dp} &= K + 2\lambda^2 D, & K_{dm} &= K - 2\lambda^2 D, & l_2 &= 2\lambda l, & l_4 &= 4\lambda l.
\end{aligned}$$

В случае плоского штампа $f(x) = 0$, и уравнение (8) примет вид

$$U^{IV}(x) - pU^{II}(x) + qU(x) = \alpha_0, \quad (13)$$

где $p = 1/(k_0 K)$, $q = (1 + k_0 k)/(k_0 D)$, $\alpha_0 = \alpha/k_0$.

Общее решение уравнения (13) представимо в виде

$$U(x) = \alpha_0 \left(\sum_{i=1}^4 A_i V_i(x) + 1/q \right), \quad (14)$$

$$V_1(x) = \cosh(a_1 x) \cos(a_2 x), \quad V_2(x) = \sinh(a_1 x) \sin(a_2 x),$$

$$V_3(x) = \sinh(a_1 x) \cos(a_2 x), \quad V_4(x) = \cosh(a_1 x) \sin(a_2 x),$$

$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{q} + p}$, $a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{q} - p}$ – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (13).

Подставив $U(\xi)$ и $G(x, \xi)$ в условие (9), приведем его к виду

$$\sum_{i=1}^4 F_i(A_1, A_2, A_3, A_4, a) Y_i(x) = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при любом $x \in [-a, a]$, то коэффициенты при $Y_i(x)$ должны равняться нулю. Таким образом, произвольные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 суть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$F_i(A_1, A_2, A_3, A_4, a) = 0, \quad i = \overline{1, 4},$$

которое может быть записано в замкнутом виде. Конкретные выражения здесь не приведены ввиду их громоздкости.

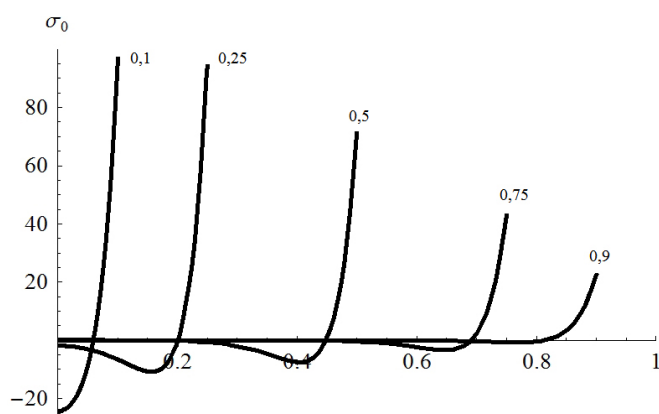
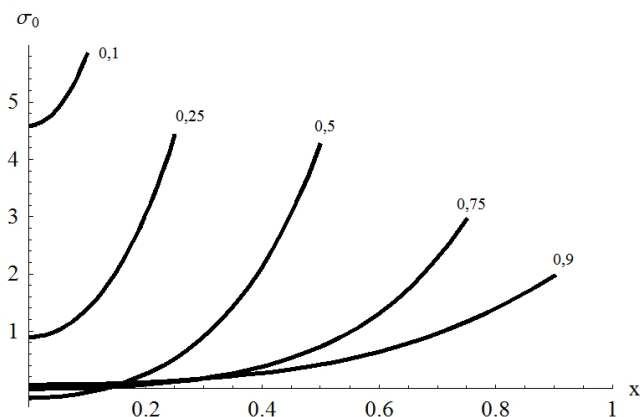
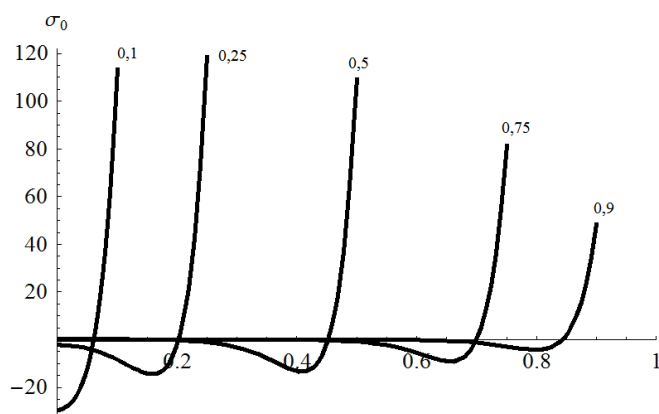
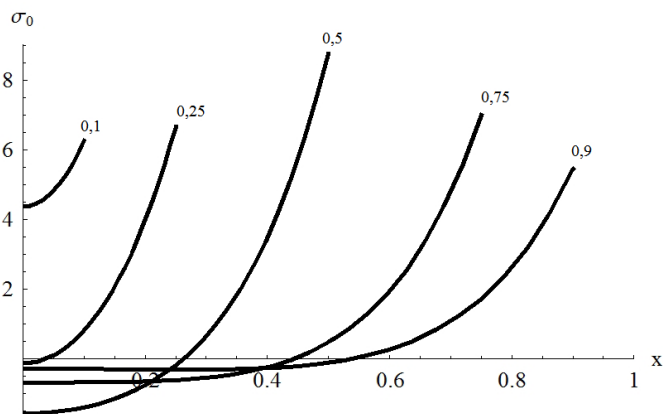
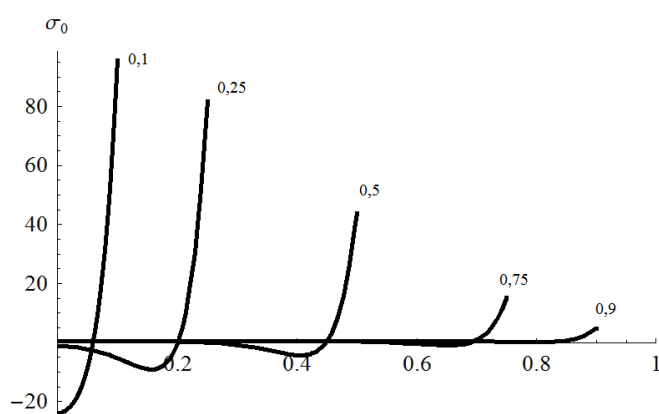
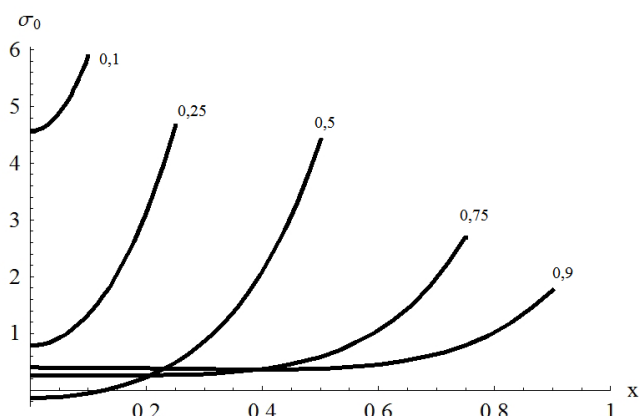
Далее представлены некоторые результаты расчетов относительного контактного давления $\sigma_0(x) = \sigma(x)/P$, $P = \int_{-a}^a \sigma(x) dx$ в зависимости от x/l для пластины $l = 1$ различ-

ной толщины h при различных размерах симметрично расположенного штампа. В силу симметрии задачи графики построены только для правой половины штампа $0 \leq x \leq a$. Числами отмечены результаты, соответствующие различным относительным размерам штампа: $a/l = 0, 1; 0, 25; 0, 5; 0, 75; 0, 9$. На рис. 6, 7 показаны результаты для жесткого защемления, на рис. 8, 9 – для шарнирного опирания, на рис. 10, 11 – для свободного края. Рис. 6, 8, 10 иллюстрируют распределение относительного контактного давления для тонких пластин $h = 0, 1l$, рис. 7, 9, 11 – для пластин средней толщины $h = 0, 5l$.

Хорошо виден различный характер распределения контактных напряжений при разной толщине пластин. Для тонких пластин результаты совпадают с полученными ранее решениями на основе теории Кирхгофа–Лява. Для пластин средней толщины при малых областях контакта напряжения только положительные, в отличие от тонких пластин. При увеличении размера штампа в центральной зоне области контакта появляются отрицательные напряжения, т. е. в случае одностороннего взаимодействия в этой зоне будет происходить отрыв поверхности пластины от штампа. Размер этих зон зависит от условий закрепления краев пластины.

Анализ численных результатов также показал существенную зависимость распределения контактных напряжений от условий закрепления пластины не только для больших относительных размеров штампа, но и для малых, при значительном удалении границ области контакта от краев пластины.

Результаты исследования могут быть использованы при верификации алгоритмов и программ численного решения задач контактного взаимодействия.

Рис. 6. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 1$ Fig. 6. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 1$ Рис. 7. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 5$ Fig. 7. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 5$ Рис. 8. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 1$ Fig. 8. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 1$ Рис. 9. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 5$ Fig. 9. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 5$ Рис. 10. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 1$ Fig. 10. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 1$ Рис. 11. $\sigma_0(x)$ при $h = 0, 5$ Fig. 11. $\sigma_0(x)$ for $h = 0, 5$

4.2. Вынужденные гармонические колебания пластины с жесткой накладкой [13]. Рассмотрим установившийся процесс вынужденных колебаний прямоугольной пластины шириной $2l$, взаимодействующей с жесткой накладкой шириной $2a$ (рис. 12). Будем считать, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба, контакт безотрывный. Запишем уравнение движения пластины с учетом поперечного сдвига и инерции вращения [14] и уравнение движения накладки в виде

$$LW(x, t) = L_1\sigma(x, t), \quad (15)$$

$$M \frac{d^2 V}{dt^2} = P(t) - R(t). \quad (16)$$

Здесь

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{V_1^2 \cdot V_2^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_1 = \frac{1}{D} + \frac{1}{K} \left(\frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad R(t) = \int_{-b}^{2a-b} \sigma(x, t) dx,$$

$$V_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad V_2^2 = \frac{5\mu}{6\rho}, \quad c^2 = \frac{D}{\rho h}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

W – прогиб пластины; σ – контактное давление; M и V – масса и смещение накладки; P – сила, действующая на накладку; μ – модуль сдвига; ρ – плотность материала пластины.

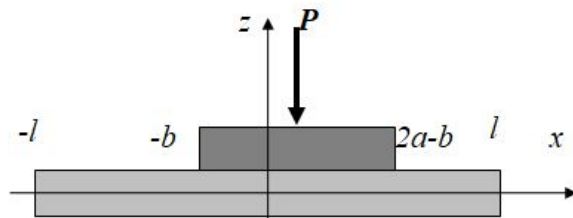


Рис. 12. Пластина с накладкой

Fig. 12. Plate with an overlay

Как известно, в установившемся процессе вынужденных колебаний под действием силы $P(t) = Pe^{i\omega t}$ можно считать, что прогиб $W(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$, контактное давление $\sigma(x, t) = \sigma(x)e^{i\omega t}$, смещение накладки $V(t) = Ve^{i\omega t}$. Тогда уравнение (15) примет вид

$$LW(x) = L_1\sigma(x),$$

где

$$L = \frac{d^4}{dx^4} + B \frac{d^2}{dx^2} + B_1, \quad L_1 = A - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2},$$

$$B = \omega^2 \left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right), \quad B_1 = \frac{\omega^4}{V_1^2 V_2^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad A = \frac{1}{D} - \frac{1}{K} \frac{\omega^2}{V_1^2}.$$

Остальные обозначения те же.

Согласно математически корректной постановке контактной задачи амплитуда контактных напряжений является решением интегрального уравнения

$$k_0\sigma(x) + \int_{-b}^{2a-b} G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = V, \quad -b < x < 2a - b. \quad (17)$$

Для пластинки, защемленной по краям $x = \pm l$, функция влияния определяется как решение краевой задачи

$$LG(x, \xi) = L_1\delta(x - \xi), \quad G(\pm l, \xi) = G'_x(\pm l, \xi) = 0,$$

которое может быть представлено в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{C} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i(\xi)G_i(x) + 2 \left[\frac{\alpha_1}{k_1} \sinh[k_1(x - \xi)] - \frac{\alpha_2}{k_2} \sin[k_2(x - \xi)] \right] H(x - \xi) \right\}, \quad (18)$$

где

$$G_1(x) = \cosh(k_1x), \quad G_2(x) = \sinh(k_1x), \quad G_3(x) = \cos(k_2x), \quad G_4(x) = \sin(k_2x),$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 - 4B_1} - B}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 - 4B_1} + B}{2}},$$

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ C_3(\xi) \\ C_4(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{k_1} \frac{f_3}{f_1} & \frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_2}{f_1} & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_1}{k_1} \frac{f_4}{f_2} & 0 & \frac{\alpha_2}{f_2} \\ \frac{\alpha_1}{f_1} & 0 & \frac{\alpha_2}{k_2} \frac{f_4}{f_1} & -\frac{\alpha_2}{k_2} \\ 0 & \frac{\alpha_1}{f_2} & \frac{\alpha_2}{k_2} & -\frac{\alpha_2}{k_2} \frac{f_3}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k_1 \xi \\ \operatorname{sh} k_1 \xi \\ \cos k_2 \xi \\ \sin k_2 \xi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 \sinh l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \cosh l_1, & f_2 &= k_1 \cosh l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \sinh l_1, \\ f_3 &= k_1 \cosh l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \sinh l_1, & f_4 &= k_1 \sinh l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \cosh l_1, \end{aligned}$$

$$C = 2\sqrt{B^2 - 4B_1}, \quad \alpha_1 = A + \frac{k_1^2}{K}, \quad \alpha_2 = A + \frac{k_2^2}{K}, \quad l_i = lk_i \quad (i = 1, 2).$$

Отметим, что

$$B^2 - 4B_1 = \omega^4 \left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right)^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} \geq 0$$

при любых ω , а $\sqrt{B^2 - 4B_1} - B \geq 0$ при

$$\omega \leq \frac{V_1 V_2}{c} = \sqrt{\frac{5E}{\rho h^2(1 + \nu)}} = \omega_k. \quad (19)$$

Таким образом, представление (18) для функции влияния справедливо при условии (19). При больших частотах корень характеристического уравнения k_1 станет чисто

мнимым, и гиперболические функции в (18) нужно будет заменить на тригонометрические. Дальнейшее решение проведем для $\omega \leq \omega_k$, так как случай $\omega \geq \omega_k$ рассматривается аналогично.

Для решения интегрального уравнения (17) применим метод, изложенный в разделе 2. Тогда для вспомогательной функции $U(x)$, связанной с искомой амплитудой контактных напряжений дифференциальным соотношением $L_1 U(x) = V - k_0 \sigma(x)$, получим краевую задачу

$$k_0 L U(x) + L_1 U(x) = V, \quad (20)$$

$$\left\{ [G_\xi''(x, \xi) + B G(x, \xi)] U'(\xi) + G(x, \xi) U'''(\xi) - \right. \\ \left. - U(\xi) G_\xi'''(x, \xi) - [U''(\xi) + B U(\xi)] G'(x, \xi) \right\} \Big|_{-b}^{2a-b} = 0. \quad (21)$$

При условиях $B_1 + \frac{A}{k_0} \geq 0$ и $4 \left(B_1 + \frac{A}{k_0} \right) > \left(\frac{1}{k_0 k \mu h} - B \right)^2$, т. е. $\omega \leq \omega_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho h k_0}} < \omega_k$, корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (20),

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{B_1 + \frac{A}{k_0}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_0 K} - B \right) \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{B_1 + \frac{A}{k_0}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k_0 K} - B \right) \right]^{1/2},$$

и функция $U(x)$ имеет вид

$$U(x) = \frac{V}{A + k_0 B_1} \left(1 + \sum_{i=1}^4 A_i u_i(x) \right),$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cosh(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x), & u_3(x) &= \sinh(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x), \\ u_2(x) &= \sinh(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x), & u_4(x) &= \cosh(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Краевое условие (21) с учетом линейной независимости функций $G_i(x)$ преобразуем в систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i . Эта система и ее решение в полном виде приведены в статье [15].

Зная $U(x)$, найдем амплитуды контактного давления и жесткого смещения накладки

$$\sigma(x) = \frac{V}{A + k_0 B_1} \left(B_1 - \sum_{i=1}^4 A_i^* u_i(x) \right),$$

$$V = \frac{P(A + k_0 B_1)}{2a B_1 - M \omega^2 (A + k_0 B_1) - \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} [Y_1 + Y_2]},$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= (\lambda_1 A_{12} - \lambda_2 A_{21}) (s c_1 + s c_2) + (\lambda_1 A_{21} + \lambda_2 A_{12}) (c s_1 + c s_2), \\ Y_2 &= (\lambda_1 A_{34} - \lambda_2 A_{43}) (-c c_1 + c c_2) + (\lambda_1 A_{43} + \lambda_2 A_{34}) (-s s_1 + s s_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{1}{k_0} \left[\left(A - \frac{n_3}{K} \right) A_1 - \frac{n_4}{K} A_2 \right], & A_3^* &= \frac{1}{k_0} \left[\left(A - \frac{n_3}{K} \right) A_3 - \frac{n_4}{K} A_4 \right], \\ A_2^* &= \frac{1}{k_0} \left[\left(A - \frac{n_3}{K} \right) A_2 + \frac{n_4}{K} A_1 \right], & A_4^* &= \frac{1}{k_0} \left[\left(A - \frac{n_3}{K} \right) A_4 + \frac{n_4}{K} A_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cc_i &= \cosh(b_i \lambda_1) \cos(b_i \lambda_2), & ss_i &= \sinh(b_i \lambda_1) \sin(b_i \lambda_2), \\
sc_i &= \sinh(b_i \lambda_1) \cos(b_i \lambda_2), & cs_i &= \cosh(b_i \lambda_1) \sin(b_i \lambda_2), \\
i &= 1, 2, & b_1 &= b, & b_2 &= 2a - b.
\end{aligned}$$

Анализ численных результатов позволил сделать следующие выводы.

1. Качественная картина распределения давления вдоль области контакта совпадает с распределением контактного давления при статическом нагружении.
2. Увеличение относительной массы накладки $M_0 = M/M_{\text{plate}}$ понижает частоту основного тона колебаний пластинки с накладкой. Понижаются и все остальные собственные частоты, т. е. весь спектр собственных частот смещается влево.
3. Уменьшение относительной толщины пластинки уплотняет спектр собственных частот.
4. Пренебрежение деформациями сдвига завышает значение собственных частот. Это завышение незначительно для низших частот и существенно для высших.
5. При определении частоты основного тона колебаний инерцию вращения можно не учитывать; неучет инерции вращения при определении второй и последующих собственных частот колебаний пластинки с накладкой приводит к погрешностям порядка 200–300 Гц.
6. Погрешности, связанные с пренебрежением деформациями сдвига и инерции вращения, малы для тонких пластин и увеличиваются при увеличении толщины пластины.
7. Задачу определения контактных напряжений при частотах, достаточно далеких от резонансных, можно решать с учетом одного лишь поперечного обжатия пластины, пренебрегая как сдвигом, так и инерцией вращения.
8. При увеличении частоты колебаний от нуля до ω_1 – частоты основного тона – уровень напряжений также повышается. Существуют такие $\omega > \omega_1$, при которых уровень напряжений значительно ниже статического.
9. Несимметрия расположения накладки повышает частоту основного тона и уплотняет спектр собственных частот.

Пп. 2, 3, 8, 9 указывают пути снижения уровня контактных напряжений в реальных конструкциях. Так, например, при заданной частоте колебаний пластинки с жесткой накладкой мы можем, изменив массу накладки, уменьшить частоту основного тона колебаний и избежать резонанса, не затрагивая геометрии пластины. Варьируя толщину пластины, массу и расположение накладки, можно добиться того, чтобы частота вынуждающей силы оказалась лежащей между частотами собственных колебаний пластины с накладкой, и получить напряжения контакта меньшие, чем при статическом нагружении.

4.3. Осесимметричный контакт цилиндрической оболочки с жесткой втулкой при наличии износа [16]. Жесткая втулка длиной $2a$ посажена с натягом d на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. Поверхность оболочки изнашивается в результате вращения втулки с угловой скоростью ω , износ абразивный [17].

Из решения статической задачи о посадке банджа на цилиндрическую оболочку [7] известно, что безотрывный контакт в неприклеенной оболочке невозможен – середина оболочки отходит от втулки. Поэтому естественно предположить, что при односторонней связи оболочки и втулки область контакта Ω будет состоять из двух зон: $b \leq |x| \leq a$, причем точка отрыва b нам заранее неизвестна, и $\sigma(\pm b, t) = 0$.

Моделируя условие контакта внутренней поверхности втулки с наружной поверхностью оболочки в виде равенства перемещений с учетом обжатия оболочки по толщине и удалением части материала в результате изнашивания, приходим к интегральному уравнению смешанного типа

$$k_0 D \sigma(x, t) + \int_{\Omega} G(x, \xi) \sigma(\xi, t) d\xi + \aleph R_0 \int_0^t \sigma(x, t) dt = -Dd, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

где t – время, $\aleph = K_* K_f \omega$, K_* – коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала, K_f – коэффициент трения, $R_0 = (R + 0,5h - d)D$, R – радиус срединной поверхности оболочки. Функция влияния $G(x, \xi)$ является решением соответствующей краевой задачи и имеет вид [18]

$$G(x, \xi) = \frac{1}{8\lambda^3} e^{-\lambda|x-\xi|} (\sin \lambda |x - \xi| + \cos \lambda(x - \xi)), \quad 4\lambda^4 = \frac{Eh}{R^2 D}.$$

Применив к уравнению (22) преобразование Лапласа по времени и метод сведения к краевой задаче, получим изображение контактного давления $\bar{\sigma}(x, p)$. Обращение преобразования Лапласа проводилось по приближенному методу Тер-Хаара [19]: $\sigma(x, t) \approx p\bar{\sigma}(x, p)$ при $p = 1/t$.

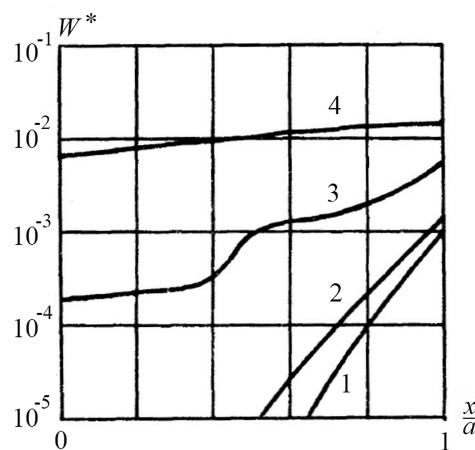
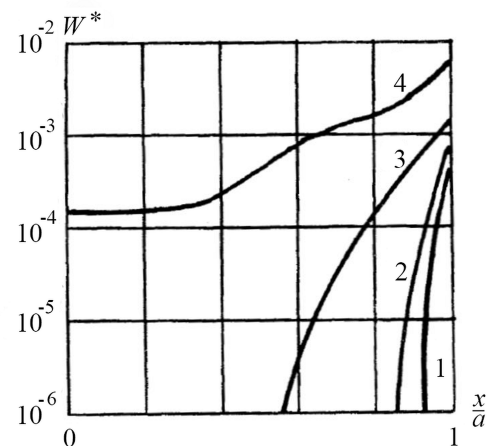
В табл. 2 представлена зависимость фактической длины области контакта $a_0 = (a-b)/a$ от относительных размеров втулки a/h и радиуса оболочки R/h . На рис. 13, 14 показано распределение износа $W^*(x, t) = \aleph R_0 \int_0^t \sigma(x, t) dt$ вдоль области контакта в различные моменты времени: кривая 1 соответствует $t = 50$ с, 2 – 100 с, 3 – 1000 с, 4 – 10000 с.

Полученные результаты показывают, что со временем уровень контактных напряжений уменьшается, скорость изменения напряжений и скорость износа максимальны в начальный момент времени, затем они быстро падают и в дальнейшем остаются почти постоянными. Износ максимален на краю области контакта и минимален в центре. Различия в износе отдельных зон области контакта постепенно уменьшаются. Таким образом, в начальный период времени происходит приработка трущихся поверхностей, приводящая к более равномерному распределению контактного давления вдоль области контакта. Скорость приработки существенно зависит от постоянной изнашивания $\aleph$, радиуса оболочки и длины втулки.

Табл. 2. Фактическая длина области контакта a_0

Table 2. Actual length of the contact area a_0

a/h	R/h			
	20	50	100	200
2	0,143	0,085	0,063	0,048
5	-	0,049	0,026	0,017
10	-	-	0,040	0,012

Рис. 13. $W^*(x, t)$ при $a_0 = 0,143$ Fig. 13. $W^*(x, t)$ for $a_0 = 0,143$ Рис. 14. $W^*(x, t)$ при $a_0 = 0,012$ Fig. 14. $W^*(x, t)$ for $a_0 = 0,012$

4.4. Взаимодействие плоских штампов с круглой пластиной, лежащей на упругом основании [20]. Численно-аналитическая методика, представленная в разделе 3, была успешно применена Д.Л. Егоровым при решении контактных задач для круглых пластин, лежащих на упругом основании и находящихся под действием плоских штампов различных форм в плане. Для функции влияния было найдено аналитическое представление путем разложения в ряд Фурье по окружной координате

$$G(r, \varphi, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}'G_n(r, \xi) \cos[n(\varphi - \eta)],$$

$$G_n(r, \xi) = C_{1n}(\xi)u_n(\lambda r) + C_{2n}(\xi)v_n(\lambda r) + \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r)f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r)g_n(\lambda \xi), & 0 \leq r \leq \xi; \\ v_n(\lambda \xi)f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi)g_n(\lambda r), & \xi \leq r, \end{cases}$$

$$u_n(z) = \text{ber}_n(z), \quad v_n(z) = -\text{bei}_n(z), \quad f_n(z) = -\text{hei}_n(z), \quad g_n(z) = \text{her}_n(z),$$

$C_{1n}(\xi)$ и $C_{2n}(\xi)$ определяются условиями на контуре пластины и здесь не приведены ввиду их громоздкости, символ $\sum'$ означает, что при $n = 0$ вводится коэффициент $1/2$.

На рис. 15, 16 показаны системы координат, связанные с пластиной и штампами в случае различных форм штампов.

Формулы перехода от системы координат пластины к системе координат штампа имеют вид

$$r \cos \varphi = e + \rho \cos \chi, \quad r \sin \varphi = \rho \sin \chi$$

для круговых областей и

$$r \cos \varphi = e + x \cos \theta - x \sin \theta, \quad r \sin \varphi = x \sin \theta + y \cos \theta$$

для прямоугольных областей.

Сходимость рядов исследовалась численно, при этом было определено минимальное число членов ряда, которое необходимо для достижения заданной точности при определении напряжений.

На рис. 17–22 показаны изолинии безразмерного параметра напряжений $\sigma^*(\rho, \chi)$ для круглых или $\sigma^*(x, y)$ для прямоугольных штампов, равного отношению контактных напряжений к среднему напряжению, определяемому делением прижимающей силы на площадь штампа.

На рис. 17, 19, 21 край пластины жестко зашцеилен; на рис. 18, 20, 22 – свободен. Эксцентриситет положения центра штампа $e = 0.7R$ всюду.

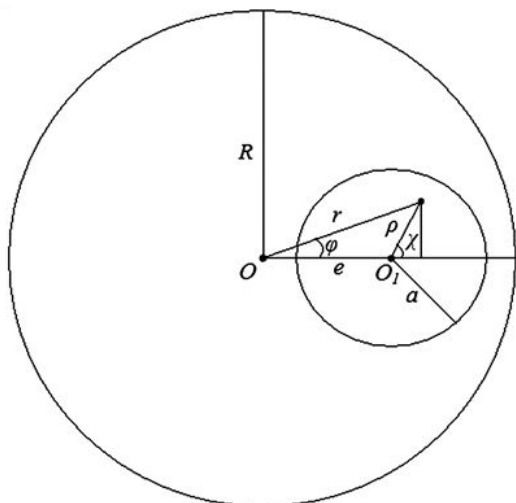


Рис. 15. Системы координат для круглых штампов

Fig. 15. Coordinate systems for round stamps

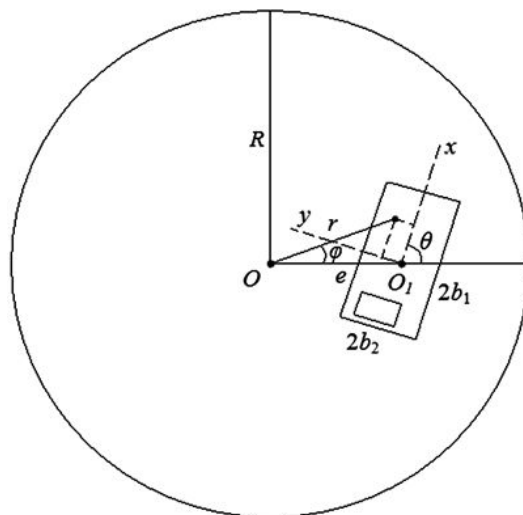


Рис. 16. Системы координат для прямоугольных штампов

Fig. 16. Coordinate systems for rectangular stamps

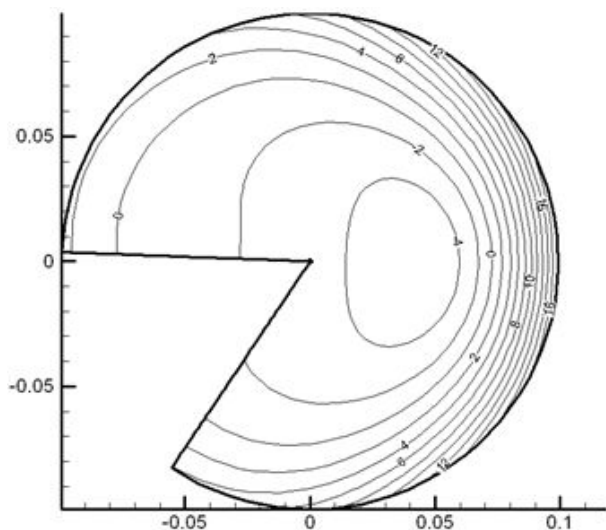


Рис. 17. Изолинии $\sigma^*(\rho, \chi)$

Fig. 17. Isolines $\sigma^*(\rho, \chi)$

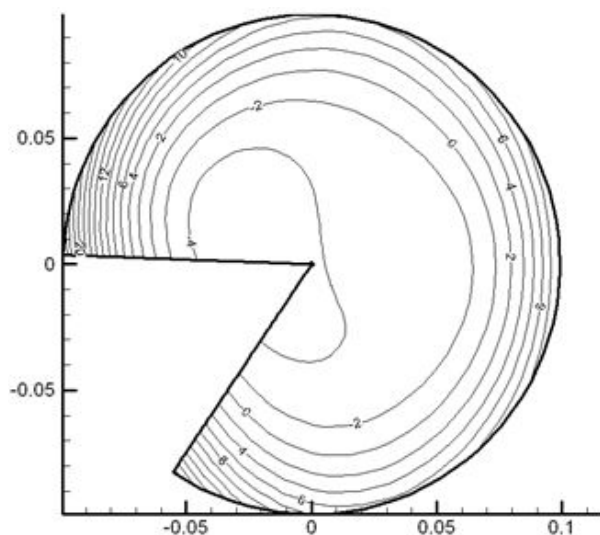
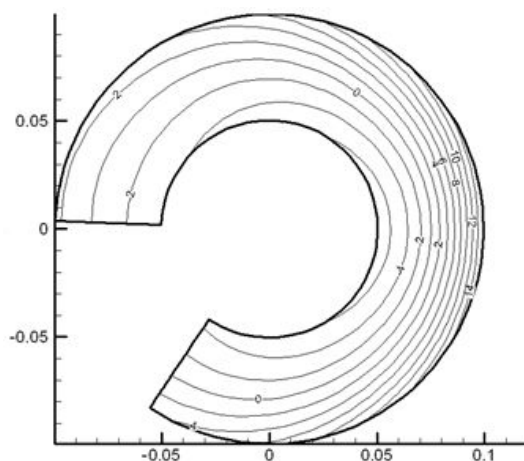
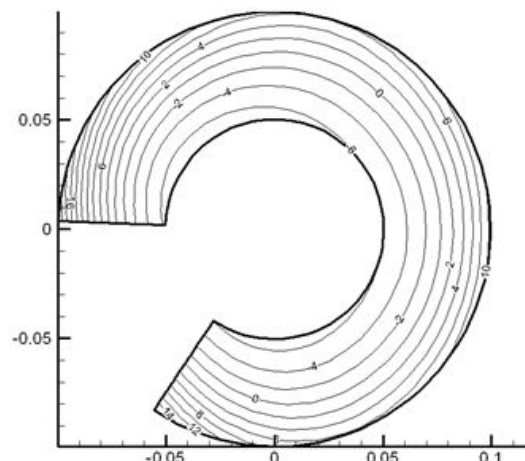
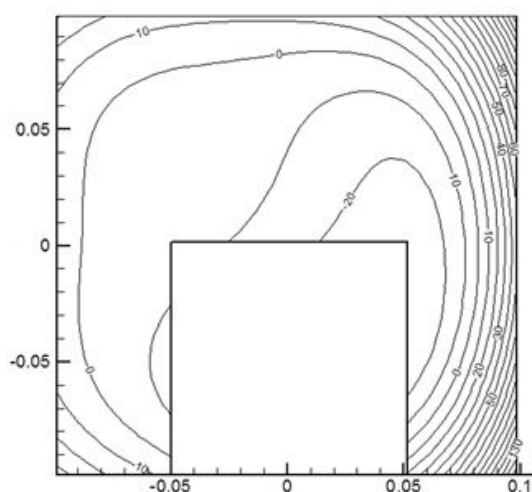
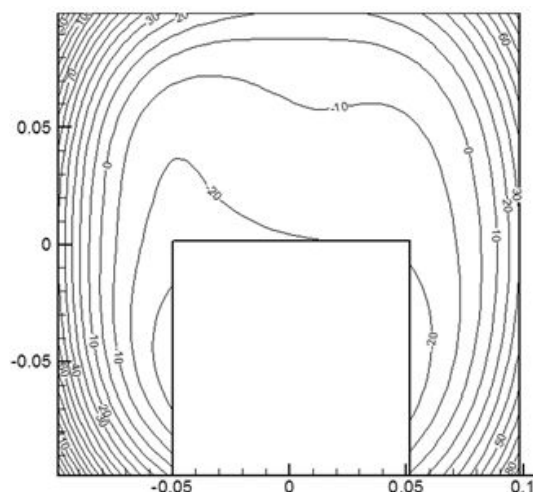


Рис. 18. Изолинии $\sigma^*(\rho, \chi)$

Fig. 18. Isolines $\sigma^*(\rho, \chi)$

Рис. 19. Изолинии $\sigma^*(\rho, \chi)$ Fig. 19. Isolines $\sigma^*(\rho, \chi)$ Рис. 20. Изолинии $\sigma^*(\rho, \chi)$ Fig. 20. Isolines $\sigma^*(\rho, \chi)$ Рис. 21. Изолинии $\sigma^*(x, y)$ Fig. 21. Isolines $\sigma^*(x, y)$ Рис. 22. Изолинии $\sigma^*(x, y)$ Fig. 22. Isolines $\sigma^*(x, y)$

Заключение

Представленные результаты подтверждают эффективность математически корректной постановки и метода решения интегральных уравнений контактных задач в статических и динамических случаях, для односвязных и многосвязных областей контакта, для штампов сложных форм.

Значительная часть исследовательской работы, начиная с получения аналитических и численных решений задач и заканчивая анализом результатов, была выполнена учениками автора – студентами и аспирантами А.А. Гордеевой, Е.А. Гордеевой, Д.Л. Егоровым, Г.Г. Зиганшиной, С.В. Красновым, О.Е. Кузнецовой, Э.Р. Лотфуллиной, Я.В. Моренко, А.Н. Нимаковым, А.С. Печениным, Д.М. Салаховой, Е.В. Сметаниной, М.А. Точкасовой, Д.Р. Хайрулиным, Р.Р. Хакимзяновым, А.Н. Шишовой при выполнении курсовых, дипломных и диссертационных работ. Автор благодарит их всех за энтузиазм и добросовестность!

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 228 с.
3. Попов Г.Я. О контактных задачах для оболочек и пластин // Тр. X Всесоюзн. конф. по теор. оболочек и пластин. Кутаиси, 22–29 сент. 1975 г. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 1. С. 244–250.
4. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 5. С. 876–883.
5. Блох М.В., Цукров С.Я. О влиянии изменения толщины стенки на осесимметричный контакт тонких цилиндрических оболочек // Прикл. механ. 1974. Т. 10, вып. 4. С. 31–37.
6. Карасев С.Н., Артюхин Ю.П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Вып. 12. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. С. 68–76.
7. Артюхин Ю.П. Одномерные контактные задачи теории оболочек // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 3. С. 55–65.
8. Артюхин Ю.П. Одномерные контактные задачи для тонкостенных трансверсально-изотропных элементов // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Вып. 13. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. С. 62–82.
9. Кузнецов С.А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при внецентренном положении штампа // Механ. сплошн. сред: тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. Набережные Челны, 1982. С. 105.
10. Кузнецов С.А. Решение интегральных уравнений многосвязных контактных задач сведением к краевой задаче // XI Всероссийск. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. механ.: сб. докл. Сост.: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. 2015. С. 2145–2147.
11. Егоров Д.Л., Кузнецов С.А. Методика численного решения задач контактного взаимодействия пластин со штампами // Актуализация социально-экономического и естественнонаучного образования в науке и предпринимательстве: Матер. II Международн. студ.-асп. форума. Казань: Отечество, 2009. С. 42–46.
12. Кузнецов С.А., Краснов С.В., Моренко Я.В., Сметанина Е.В., Старожилова О.В. Контактная задача о взаимодействии с жестким телом пластины средней толщины, лежащей на упругом основании // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XVII Международн. конф. / Под ред. Р.М. Шагалиева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2019. С. 324–329.
13. Точкасова М.А., Кузнецов С.А. Контактная задача взаимодействия пластины и жесткой накладки при гармонических колебаниях // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского: Матер. VII молод. науч. шк.-конф. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2008. Т. 37. С. 111–113.
14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

15. Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Саченков А.А., Точкасова М.А. Исследование контактного взаимодействия прямоугольной пластины с жесткой накладкой при гармонических колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т. 153, кн. 4. С. 98–111.
16. Кузнецов С.А. Осесимметричный контакт цилиндрической оболочки с жесткой втулкой при наличии износа // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. Вып. 20. С. 191–197.
17. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа: сб. статей. М.: Наука, 1971. С. 130–140.
18. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
19. Cost T.L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis // AIAA J. 1964. V. 2, No 12. <https://doi.org/10.2514/3.2757>. P. 2157–2166.
20. Егоров Д.Л., Кузнецов С.А. Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 127–134.

References

1. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact Problems in the Theory of Plates and Shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 411 p. (In Russian)
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of Ill-Posed Problems Solving]. Moscow, Nauka, 1979. 228 p. (In Russian)
3. Popov G.Ya. On contact problems for shells and plates. *Tr. X Vsesoyuzn. konf. po teorii obolochek i plastin. Kutaisi, 22–29 sent. 1975 g.* [Proc. X All-Union Conf. on Shell and Plate Theory. Kutaisi, September 22–29, 1975]. Vol. 1. Tbilisi, Metsniereba, 1975, pp. 244–250. (In Russian)
4. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. Cylindrical bending of a plate by rigid stamps. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, pp. 841–848. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(75\)90124-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90124-0).
5. Blokh M.V., Tsukrov S.Ya. Effect of changing the wall thickness on the axisymmetric contact between thin cylindrical shells. *Prikl. Mekh.*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 31–37. (In Russian)
6. Karasev S.N., Artyukhin Yu.P. Influence of transverse shear and compression on the distribution of contact stresses. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 12. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1976, pp. 68–76. (In Russian)
7. Artyukhin Yu.P. One-dimensional contact problems in the theory of shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1981, no. 3, pp. 55–65. (In Russian)
8. Artyukhin Yu.P. One-dimensional contact problems for thin-walled transversely isotropic structural elements. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 13. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1978, pp. 62–82. (In Russian)
9. Kuznetsov S.A. Non-axisymmetric contact problem for a thin plate on an elastic foundation in case of an eccentrically positioned stamp. *Mekhan. sploshn. sred: tez. dokl. Resp. nauch.-tekhn. konf.* [Mechanics of Continuous Media: Proc. Repub. Sci.-Techn. Conf.]. Naberezhnye Chelny, 1982, p. 105. (In Russian)

10. Kuznetsov S.A. Solving integral equations of multiply connected contact problems by reducing them to a boundary value problem. *XI Vserossiisk. s'ezd po fundament. probl. teor. i prikl. mekhan.: sb. dokl.* [Proc. XI All-Russ. Congr. on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Akhmetov D.Yu., Gerasimov A.N., Khaidarov Sh.M. (Compil.). 2015, pp. 2145–2147. (In Russian)
11. Egorov D.L., Kuznetsov S.A. A numerical method of solving contact problems for plates and stamps. *Aktualizatsiya sotsial'no-ekonomicheskogo i estestvennonauchnogo obrazovaniya v nauke i predprinimatel'stve: Mater. II Mezhdunarodn. stud.-asp. foruma* [Actualization of Socio-Economic and Natural Science Education in Science and Entrepreneurship: Proc. II Int. Forum for Students and Postgraduate Students]. Kazan, Otechestvo, 2009, pp. 42–46. (In Russian)
12. Kuznetsov S.A., Krasnov S.V., Morenko Ya.V., Smetanina E.V., Starozholova O.V. A contact problem on the interaction of a moderately thick plate on an elastic foundation with a rigid body. *Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XVII Mezhdunarodn. konf.* [Supercomputing and Mathematical Modeling. Proc. XVII Int. Conf.]. Shagaliev R.M. (Ed.). Sarov, RFYaTs-VNIIEF, 2019, pp. 324–329. (In Russian)
13. Tochkasova M.A., Kuznetsov S.A. A contact problem on the interaction of a plate with a rigid overlay under harmonic vibrations. *Tr. matem. tsentra im. N.I. Lobachevskogo: Mater. VII molod. nauch. shk.-konf.* [Proceedings of the Lobachevskii Mathematical Center: Mater. VII Sch.-Conf. for Young Scientists]. Vol. 37. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2008, pp. 111–113. (In Russian)
14. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (In Russian)
15. Konoplev Yu.G., Kuznetsov S.A., Sachenkov A.A., Tochkasova M.A. Investigation of contact interaction of a rectangular plate with a hard cover plate under harmonic vibrations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2011, vol. 153, no. 4, pp. 98–111. (In Russian)
16. Kuznetsov S.A. Axisymmetric contact between a cylindrical shell with a rigid insert in the presence of wear. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 20. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1990, pp. 191–197. (In Russian)
17. Korovchinskii M.V. Local contact of elastic bodies during surface wear. In: *Kontaktnoe vzaimodeistvie tverdykh tel i raschet sil treniya i iznosa: sb. statei* [Contact Interaction of Solids and Calculation of Friction and Wear: A Collection of Articles]. Moscow, Nauka, 1971, pp. 130–140. (In Russian)
18. Timoshenko S.P. *Plastinki i obolochki* [Plates and Shells]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 460 p. (In Russian)
19. Cost T.L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis. *AIAA J.*, 1964, vol. 2, no. 12, pp. 2157–2166. <https://doi.org/10.2514/3.2757>.
20. Egorov D.L., Kuznetsov S.A. Investigation of contact interaction of round plates with stamps based on numerical-analytical technique. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 4, pp. 127–134. (In Russian)

Информация об авторах

Сергей Аркадьевич Кузнецов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: skuznets@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7201-6664>

Author Information

Sergej A. Kuznetsov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: skuznets@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7201-6664>

Поступила в редакцию 17.06.2025

Принята к публикации 25.08.2025

Received June 17, 2025

Accepted August 25, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.4

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758>

Упругопластический изгиб пластинок с центральным отверстием в трехмерной постановке

А.Е. Максеев¹✉, К.С. Бодягина¹, М.В. Жигалов², В.А. Крысько²¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Россия✉ makseev.anton@mail.ru

Аннотация

Представлены математическая модель и алгоритм анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) упругопластических пластин с центральным круглым отверстием в трехмерной постановке. Разработанный алгоритм позволяет рассматривать любые краевые условия, зависимости и материалы, для которых существуют экспериментальные зависимости диаграмм деформирования. Модель основана на деформационной теории пластичности и реализована с помощью комбинации метода конечных элементов (МКЭ) и метода переменных параметров упругости И.А. Биргера. Для получения достоверных результатов исследованы тип конечных элементов (КЭ) и их количество в 3D-постановке, а также сходимость решений на сетке из тетраэдральных и гексаэдральных конечных элементов для пластинки с отверстием в центре и без отверстия. Выявлено, что оптимальным является конечный элемент в форме гексаэдра. Приведены примеры расчета прямоугольной в плане пластинки, защемленной по контуру, при действии постоянной нагрузки. Материал пластинки – чистый алюминий, описываемый известной диаграммой деформирования Ю. Охаси и С. Мураками.

Ключевые слова: деформационная теория пластичности, метод переменных параметров упругости, метод конечных элементов, трехмерная постановка задачи

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00160-П.

Для цитирования: Максеев А.Е., Бодягина К.С., Жигалов М.В., Крысько В.А. Упругопластический изгиб пластинок с центральным отверстием в трехмерной постановке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 744–758.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758>

Elastic-plastic bending of plates with a central hole in a three-dimensional setting

A.E. Makseev¹✉, K.S. Bodyagina¹, M.V. Zhigalov², V.A. Krysko²

¹*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

²*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia*

✉ makseevv.anton@mail.ru

Abstract

This article presents a mathematical model and algorithm for analyzing the stress–strain state (SSS) of elastic-plastic plates with a central circular hole in a three-dimensional setting. The developed algorithm can be applied to any boundary conditions, dependencies, and materials for which experimental stress–strain diagrams are available. The model is based on the deformation theory of plasticity and was implemented using a combination of the finite element method (FEM) and the method of I.A. Birger’s variable elasticity parameters. To obtain reliable results, the type finite elements (FE) and their number in a three-dimensional setting were investigated, along with the convergence of the solutions on a mesh of tetrahedral and hexahedral FE for a plate with and without a hole in the center. The hexahedral FE was found to be the most optimal. Computational examples for a rectangular plate clamped along the contour and subjected to a constant load were provided. The plate material considered is pure aluminum described by the stress–strain diagram developed by Y. Ohashi and S. Murakami.

Keywords: deformation theory of plasticity, method of variable elasticity parameters, finite element method, three-dimensional problem setting

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00160-P).

For citation: Makseev A.E., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic bending of plates with a central hole in a three-dimensional setting. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 744–758. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758>. (In Russian)

Введение

Круговое отверстие является типовым концентратором напряжений, часто встречающимся в роторных дисках паровых турбин, лонжеронах клепаных рам грузовых автомобилей, звукопоглощающих конструкциях авиационных двигателей, шпангоутах и др. В процессе эксплуатации эти элементы подвержены нагружению, которое может приводить к деформациям пластичности и разгрузке. Остаточные напряжения [1, 2], возникающие при разгрузке, являются одной из основных причин формирования дефектов в материалах при снятии нагрузки. Анализу явления остаточных напряжений и его последствиям посвящен целый ряд исследований, некоторые из которых упомянуты ниже.

Очень важным является сопоставление результатов, полученных экспериментально и численными методами. Так, в работе [3] численные результаты, полученные методом конечных элементов (МКЭ) для пластинок Кирхгофа, были сравнены с экспериментальными данными для трех видов материала – низкоуглеродистой стали, алюминиевого и магниевых сплавов. Исследован вопрос влияния разгрузки при циклическом нагружении для трех указанных выше материалов [4, 5]. Использована модель нелинейного кинематического упрочнения Chaboche для моделирования эффекта Баушингера, что позволило воссоздать последовательность упругопластических нагружений и разгрузок с использованием метода конечных элементов.

В работе [6] по модели Кирхгофа был проведен эксперимент для некоторых типов геометрии центрального отверстия в пластинке при одноосном растяжении, что позволило этим же авторам в [7] экспериментально для пластинок из никеля обнаружить эффект Портевена – Ле Шателье (ПЛШ) – пространственно-временной неустойчивости пластического течения. В названных экспериментальных работах отсутствует сравнительный анализ влияния диаметра отверстия на пластические деформации при нагрузке – разгрузке. Также для пластинок Кирхгофа результаты численных исследований концентрации напряжений вокруг отверстий, полученные с помощью МКЭ, аналитических подходов на основе асимптотических разложений и метода наименьших квадратов (МНК), представлены в работах [8–10].

В [11] построена математическая модель контактного взаимодействия двух пластин (кинематическая модель Кирхгофа) с учетом разномодульности материалов, физической и конструктивной нелинейностей. Для исследования напряженно-деформированного состояния применен метод вариационных итераций, позволяющий свести уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Использован метод переменных параметров упругости Биргера [12].

Работа [13] посвящена построению и исследованию математических моделей физически нелинейных пластин и балок из бимодульных материалов. Для численного исследования использованы критерий пластичности Мизеса и метод переменных параметров теории упругости Биргера [12], МКЭ, для которого проанализирована его сходимость и достоверность результатов. Задача с разгрузкой была исследована в работе [14]. В [15] разработана математическая модель гибких (по теориям фон Кармана и Грина – Лагранжа) физически нелинейных пористых размерно-зависимых балок Эйлера – Бернулли под действием поперечной знакопеременной нагрузки. Использованы итерационные алгоритмы (конечно-разностный метод в сочетании с методом переменных параметров упругости при учете физической нелинейности) расчета хаотических и гиперхаотических колебаний как механической системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы.

В работе [16] предложен подход неразрушающего контроля механических конструкций, состоящий из двух этапов. На первом этапе проводилась идентификация полостей/включений с разными физическими свойствами и произвольной геометрией в 3D-конструкциях на основе температурного поля, методов скользящих асимптот и конечных элементов. Приведены результаты, демонстрирующие обнаружение включений различной геометрической формы (куб, сфера, эллипсоид, тор и включения сложной формы) из стали, меди и алюминия.

В исследовании [17] показана принципиальная важность использования трехмерных моделей для анализа перфорированных конструкций. Авторы установили, что применение объемных конечных элементов позволяет выявить концентрации напряжений на внутренней поверхности оболочки, которые не учитываются в двумерных оболочечных моделях. Полученный коэффициент концентрации напряжений достигает значения 2, что подтверждает необходимость трехмерного анализа.

Важный аспект исследования нагрузки – разгрузки рассмотрен в работе [18]. Авторы используют модифицированную модель Леонова – Панасюка – Дугдейла с учетом зоны пластичности, что позволяет анализировать процессы деформирования при циклическом нагружении. Численное моделирование МКЭ подтверждает адекватность этих аналитических решений.

Особого внимания заслуживает исследование [19], где проанализировано влияние зазоров между болтом и отверстием на коэффициент концентрации напряжений (ККН). Показано, что изменение зазора в диапазоне 0–1 % диаметра приводит к изменению ККН до 10 %, что необходимо учитывать при расчетах нагружения – разгрузки.

В работе [20] экспериментально исследовано влияние на прочностные характеристики соотношения ширины образца к диаметру отверстия. Полученные данные имеют важное значение для прогнозирования поведения пластин при циклическом нагружении.

Исследование [21], основанное на методе интегральных уравнений, показало, что характер распределения напряжений (сжатие или растяжение) на границе отверстия существенно зависит от соотношения его радиуса и зоны пластичности. В частности, для отверстий малого радиуса возникают высокие растягивающие напряжения, которые снижаются с увеличением размера отверстия. Этот вывод коррелирует с результатами решения упругопластической задачи для стрингерной пластины с круглым отверстием [9], где использованы условие пластичности Треска – Сен-Венана и комбинированный метод (теория возмущений, аналитические функции и МНК). Этот подход позволяет определить границу раздела упругой и пластической зон и исследовать НДС конструкции.

Исследование концентрации напряжений в псевдоупругих пластинах из сплавов с памятью формы (SMA) [22] подчеркивает важность учета фазовых превращений и пластичности. Использование метода цифровой корреляции изображений (DIC) для калибровки конечно-элементной модели позволило авторам продемонстрировать, что ККН не является постоянным и изменяется в зависимости от стадии фазового превращения и развития пластических деформаций. Это указывает на необходимость нелинейного анализа для современных материалов.

Ряд работ посвящен управлению пластическими деформациями в строительных конструкциях с целью повышения их сейсмической стойкости. Так, метод ослабления плит в приграничных зонах путем сверления отверстий [23] доказал свою эффективность для направления пластических шарниров в желаемые зоны (балки). Аналогично в стальных конструкциях [24] рассеивание энергии достигается за счет проектирования соединений,

где пластические деформации концентрируются в опорных пластинах с отверстиями, обеспечивая предсказуемое пластическое поведение. Эти исследования показали, что отверстия являются не просто ослаблением, а инструментом для управления пластичностью всей конструкции.

Исследование усталостной прочности стопорных пластин [25] продемонстрировало, что наличие винтовых заглушек, создающих локальные пластические деформации в отверстиях, может значительно повысить усталостную прочность пластин из нержавеющей стали. Однако для титановых сплавов этот эффект не наблюдается, что подчеркивает зависимость упруго-пластического отклика от материала.

Следует отметить, что основные исследования по анализу НДС пластин проводились для кинематических моделей Кирхгофа, причем в трехмерной постановке при действии поперечной равномерно-распределенной нагрузки по деформационной теории пластичности такие исследования отсутствуют.

В настоящей работе построены математическая модель и алгоритм расчета НДС прямоугольных пластин с центральным круглым отверстием, с учетом разгрузки, в трехмерной постановке. Методом конечных элементов (тип конечного элемента, его сходимость) с помощью метода переменных параметров Биргера [12] для чистого алюминия исследовано НДС пластин в зависимости от диаметра центрального круглого отверстия.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сплошное твердое тело в форме прямоугольной пластины, занимающей в декартовой системе координат трехмерную область (рис. 1). В этой системе координат пластинка, как трехмерная область Ω , определена следующим образом:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, h]\}.$$

В центральной области пластины расположено сквозное цилиндрическое отверстие диаметром d . Граничные поверхности

$$\begin{aligned} S_1 &= \{x = a, y \in [0, b], z \in [0, h]\}, \\ S_2 &= \left\{x \in \left[0, \frac{a-d}{2}\right] \cup \left[\frac{a+d}{2}, a\right], y \in \left[0, \frac{b-d}{2}\right] \cup \left[\frac{b+d}{2}, b\right], z = h\right\}, \\ S_3 &= \{x = 0, y \in [0, b], z \in [0, h]\}, \\ S_4 &= \{x \in [0, a], y = 0, z \in [0, h]\}, \\ S_5 &= \left\{x \in \left[0, \frac{a-d}{2}\right] \cup \left[\frac{a+d}{2}, a\right], y \in \left[0, \frac{b-d}{2}\right] \cup \left[\frac{b+d}{2}, b\right], z = 0\right\}, \\ S_6 &= \{x \in [0, a], y = b, z \in [0, h]\}, \\ S_7 &= \left\{x \in \left[\frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2}\right], y \in \left[\frac{b-d}{2}, \frac{b+d}{2}\right], z \in [0, h]\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

На поверхность S_2 действует поперечная нагрузка интенсивности q . Поверхности S_5 и S_7 свободны от нагрузок. На поверхностях S_1 , S_3 , S_4 и S_6 заданы следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

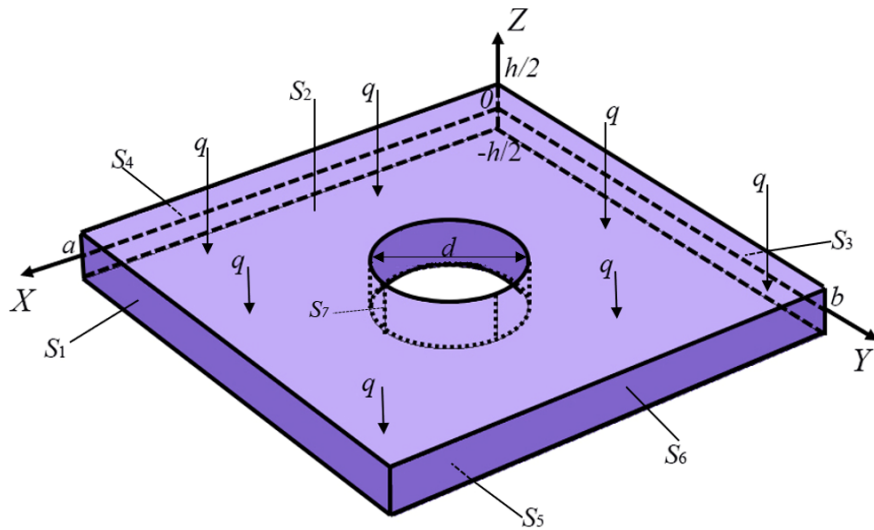


Рис. 1. Расчетная схема трехмерной пластины с центральным отверстием

Fig. 1. Schematic diagram of a three-dimensional plate with a central hole

Материал пластины упругий, пространственно неоднородный и физически нелинейный. Уругопластический отклик моделируем в рамках деформационной теории пластичности. Уравнения равновесия Коши в перемещениях имеют вид

$$(\lambda + \mu) \theta_x + \mu \Delta u + F = 0, \quad \overrightarrow{(\theta_x, \theta_y, \theta_z)}, \quad \overrightarrow{(u, v, w)}, \quad \overrightarrow{(F, G, H)}, \quad (2)$$

где $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – частные производные θ по координатам x, y, z соответственно,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \lambda = \frac{E(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0) \nu(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0)}{(1 + \nu(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0))(1 - 2\nu(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0))}, \quad \mu = \frac{E(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0)}{2(1 + \nu(x, y, z, \varepsilon_i, \varepsilon_0))},$$

E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, зависящие от координат и напряженно-деформированного состояния в пластинке.

Уравнения (2) приведем к безразмерному виду с помощью выражений

$$\tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{b}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_c}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_c}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{w_c}.$$

Интенсивность деформаций примет вид

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}.$$

При определении появления пластических деформаций используем критерий пластичности Мизеса. Для моделирования уругопластического изгиба трехмерной пластинки рассмотрим диаграмму для чистого алюминия [26]:

$$\sigma_i = \sigma_s [1 - e^{-\varepsilon_i/\varepsilon_s}] \quad \text{при} \quad d\varepsilon_i > 0, \\ \sigma_i = 3G_0 (\varepsilon_i - \varepsilon_p^1) \quad \text{при} \quad d\varepsilon_i < 0.$$

где ε_s – предел текучести материала, ε_p^1 – остаточные пластические деформации.

2. Вычисленный эксперимент

Численное исследование уравнения (2) с краевыми условиями (1) было проведено с помощью комбинации МКЭ и метода переменных параметров упругости Биргера [12]. Результаты получены с помощью программного пакета COMSOL Multiphysics. Использована пластина из чистого алюминия со следующими характеристиками: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $h = 0.05$ м, модуль сдвига $G_0 = 25 \cdot 10^9$ Па и модуль Юнга $E_0 = 66.6 \cdot 10^9$ Па, объемный модуль $K = 1.94G_0$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$. Исследована сходимость МКЭ для пластины с центральным отверстием при варьировании параметров сетки. Результаты получены для двух типов конечных элементов: гексаэдры и тетраэдры. Рассмотрены два случая: пластина с отверстием $d = 0.3$ и сплошная пластина без отверстия $d = 0$. В табл. 1 представлены максимальные перемещения W_1 и W_2 пластины с отверстием, дискретизированной гексаэдральными (W_1) и тетраэдральными (W_2) элементами; W_3 и W_4 – максимальные перемещения сплошной пластины (без отверстия), дискретизированной гексаэдральными (W_3) и тетраэдральными (W_4) элементами; N_1 – количество конечных элементов в форме гексаэдра, N_2 – количество элементов в форме тетраэдра.

Табл. 1. Зависимость максимальных перемещений пластины от геометрических параметров ($a/h, d$) и плотности сетки тетраэдральных N_2 и гексаэдральных N_1 КЭ

Table 1. Dependency of the maximum plate displacements on the geometric parameters ($a/h, d$) and the density of the tetrahedral N_2 and hexahedral N_1 FE mesh

$d = 0.3, q = 40$				$d = 0, q = 40$			
N_1	W_1	N_2	W_2	N_1	W_3	N_2	W_4
109	$7.3486 \cdot 10^{-5}$	939	$7.3486 \cdot 10^{-5}$	100	$9.7769 \cdot 10^{-5}$	774	$9.9286 \cdot 10^{-5}$
156	$7.4814 \cdot 10^{-5}$	1316	$7.5492 \cdot 10^{-5}$	169	$9.9459 \cdot 10^{-5}$	1236	$1.0114 \cdot 10^{-4}$
341	$7.5939 \cdot 10^{-5}$	3895	$7.6712 \cdot 10^{-5}$	342	$1.008 \cdot 10^{-4}$	3281	$1.0293 \cdot 10^{-4}$
1442	$7.9228 \cdot 10^{-5}$	13769	$7.9454 \cdot 10^{-5}$	1682	$1.059 \cdot 10^{-4}$	13654	$1.0654 \cdot 10^{-4}$
6810	$8.05 \cdot 10^{-5}$	90168	$8.1031 \cdot 10^{-5}$	7500	$1.0842 \cdot 10^{-4}$	96163	$1.0936 \cdot 10^{-4}$
$\delta = 1.58$		$\delta = 1.94$		$\delta = 2.27$		$\delta = 2.57$	

Максимальное значение перемещения W по объему пластины V определено по формуле

$$W = \int_V w \, dV,$$

а относительная погрешность решения вычислена следующим образом:

$$\delta = \frac{|w_{n-1} - w_n|}{|w_{n-1}|} \cdot 100 \, \%.$$

В обоих случаях монотонная сходимость наблюдается для гексаэдральных элементов при увеличении N_1 . Наличие отверстия снижает W на 20–25 % из-за перераспределения напряжений. Гексаэдры демонстрируют более быструю сходимость, например, при $N_1 \approx 150$ решение сходится к результатам для $N_2 \approx 1300$ при $d = 0.3$. Погрешность для грубых сеток N_1 достигает 8–10%. При $N_1 > 3000$ погрешность не превышает 2.5%.

Выводы: для моделирования перфорированных пластин рекомендованы гексаэдральных сетки с $N_1 > 3000$ ($\delta < 2.5\%$). Тетраэдральные КЭ сетки требуют на порядок больше элементов для достижения сопоставимой точности. Наибольшая погрешность (до 10 %) характерна для зон концентрации напряжений у контура отверстия. Здесь и в дальнейшем цветовая шкала от синего до красного означает, что материал в данной области находится в упругом состоянии, т.е. $\varepsilon_i < \varepsilon_s$. Красным обозначены области пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$.

2.1. Пластина без отверстия. Исследуем задачу упругопластического изгиба пластины без отверстия $d = 0$ с геометрическими параметрами $a = 1$, $b = 1$, $h = 0.05$ в процессе циклического нагружения и последующей разгрузки (рис. 2). Цветовая шкала отношения $\varepsilon_i/\varepsilon_s$, которая показывает зоны пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$ – упругопластическая зона, $\varepsilon_i < \varepsilon_s$ – упругая зона.

В процессе нагружения при малой нагрузке $q = 5$ (рис. 2, точка А) зоны пластических деформаций первоначально возникают в центре длинных сторон пластины. С увеличением нагрузки $q = 20$ (рис. 2, точка В) пластические зоны расширяются, и появляется новая пластическая область в центре пластины. При максимальной нагрузке $q = 30$ (рис. 2, точка С) зоны пластичности формируют четкий контур по периметру пластины (исключая углы) в центре и по диагоналям, соединяющим центр с углами. В процессе разгрузки поведение материала является упругим, что проявляется в гистерезисе на графике рис. 2. После полной разгрузки $q = 0$ (рис. 2, точка G) в пластине сохраняются остаточные пластические деформации $\varepsilon_{\text{опл}}$, локализованные преимущественно вдоль сторон пластины. Угловые области остаются упругими. Поведение сплошной пластины характеризуется последовательным развитием пластичности от краев к центру. После снятия нагрузки пластина не возвращается в исходное состояние, что свидетельствует о необратимом характере деформирования.

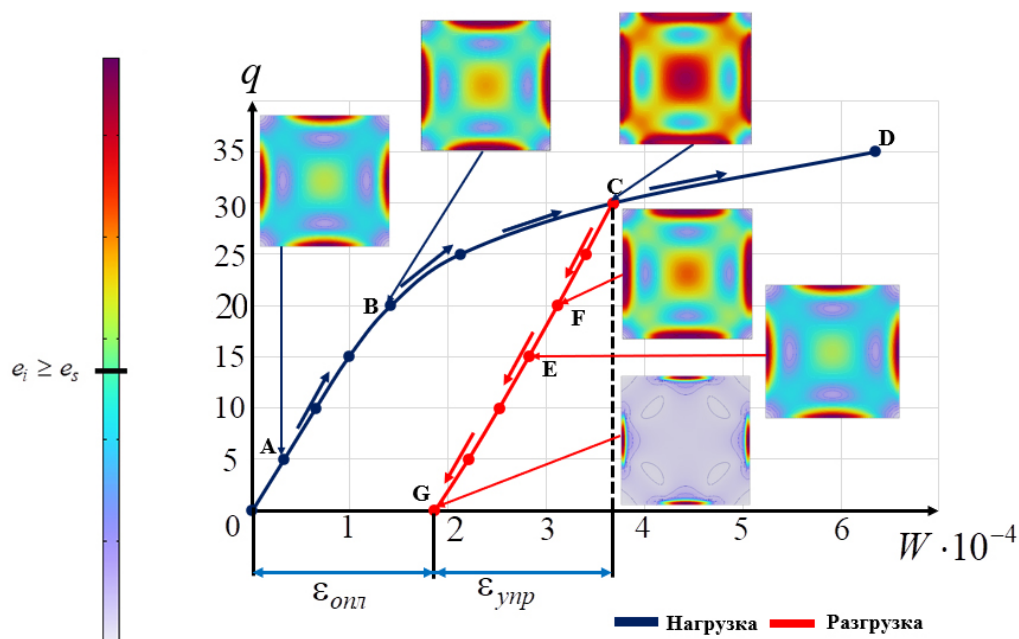


Рис. 2. Нагрузка и разгрузка пластины без отверстия

Fig. 2. Loading and unloading of the plate without a hole

2.2. Пластина с отверстием. Была решена задача упругопластического деформирования пластины с центральным круглым отверстием диаметра $d = 0.3$. Пластина имела следующие геометрические параметры: $a = 1$, $b = 1$ и толщину $h = 0.05$. Исследование включало в себя анализ поведения пластины как в процессе нагружения, так и в процессе последующей разгрузки (рис. 3). Цветовая шкала отношения $\varepsilon_i/\varepsilon_s$ показывает зоны пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$ – упругопластическая зона, $\varepsilon_i < \varepsilon_s$ – упругая зона.

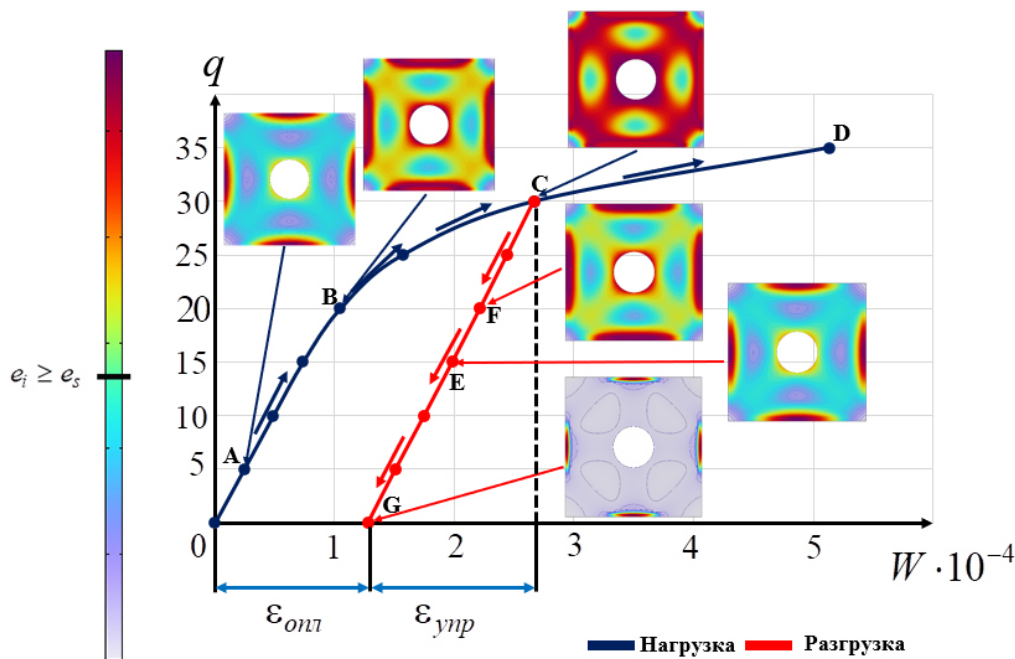


Рис. 3. Нагрузка и разгрузка пластины с отверстия

Fig. 3. Loading and unloading of the plate with a hole

На рис. 3 представлена зависимость в процессе нагружения пластины, иллюстрирующая ее реакцию на приложенную нагрузку q . При относительно низкой нагрузке $q = 10$ (рис. 3, точка А) зоны пластических деформаций в этот момент только начинают формироваться. Их возникновение наблюдается в областях с максимальной концентрацией напряжений, прежде всего по контуру отверстия (где геометрия приводит к концентрации напряжений) и в центре длинных сторон пластины или на защемленных краях. С увеличением нагрузки $q = 20$ (рис. 3, точка В) наблюдается значительное развитие пластических деформаций. Пластические зоны расширяются от контура отверстия и краев пластины, начинают сливаться, охватывая значительную часть объема материала. Интенсивность пластических деформаций возрастает. При максимальной исследуемой нагрузке $q = 30$ (рис. 3, точка С) пластические деформации носят масштабный характер. Значительная часть пластины, за исключением, возможно, некоторых угловых зон с низким уровнем напряжений, переходит в пластическое состояние. Материал подвергается интенсивной пластической деформации.

На графике рис. 3 разгрузка представляет собой нисходящую ветвь кривой. В процессе снижения нагрузки с максимального значения (рис. 3, точка F) поведение материала является упругим. Однако из-за накопленных пластических деформаций состояние пластины

не возвращается в исходную точку В. Различие в перемещении при одной и той же нагрузке $q = 20$ на пути нагружения и разгрузки демонстрирует наличие остаточных деформаций $\varepsilon_{\text{опл}}$. При продолжении разгрузки $q = 15$ (рис. 3, точка Е) остаточные деформации и смещенные пластические зоны сохраняются, хотя их интенсивность может несколько снижаться из-за упругого восстановления. После полной разгрузки $q = 0$ (рис. 3, точка G) пластина не возвращается в исходное нулевое состояние. Наблюдается значительное остаточное перемещение, и в материале фиксируются остаточные пластические деформации. Их распределение для точки G представляет собой состояние конструкции после снятия нагрузки.

Проведенное исследование наглядно демонстрирует, что наличие отверстия является мощным концентратором напряжений, что изменяет поведение пластины по сравнению со сплошной пластиной (без отверстия, $d = 0$). При одних и тех же уровнях внешней нагрузки q размеры зон пластических деформаций в пластине с отверстием больше. Критические нагрузки, при которых начинается интенсивное пластическое деформирование, для пластины с отверстием ниже, чем для сплошной пластины. Процесс разгрузки приводит к формированию остаточных напряжений и деформаций, карта распределения которых напрямую связана с историей нагружения и геометрией отверстия. Таким образом, полученные результаты подчеркивают критическую важность учета концентраторов напряжений, таких как отверстия, при проектировании и оценке прочности конструкций, работающих в упругопластической области, так как их наличие значительно снижает ресурс и несущую способность элемента.

Заключение

1. Построена математическая модель нагрузки – разгрузки пластинки в трехмерной постановке с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности. В качестве метода решения использованы метод конечных элементов (в пакете Comsol Multiphysics) и итерационная процедура метода переменных параметров упругости Биргера. В качестве критерия пластичности принят критерий Мизеса.

2. Создан авторский алгоритм метода переменных параметров упругости Биргера, который запрограммирован и внедрен в программный пакет Comsol Multiphysics. Достоверность полученных результатов обеспечена исследованием сходимости МКЭ для тетраэдральных и гексаэдральных элементов.

3. Исследованы зоны пластической деформации при равномерно-распределенной нагрузке и граничных условиях типа защемления по всем сторонам в трехмерной пластинке без отверстия и с отверстием. Рассмотрены задачи с разгрузкой.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G. Advanced issues in springback // Int. J. Plast. 2013. V. 45. P. 3–20. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.006>.
2. Geka T., Asakura M., Kiso T., Sugiyama T., Takamura M., Asakawa M. Reduction of springback in hat channel with high-strength steel sheet by stroke returning deep drawing // Key Eng. Mater. 2013. Nos 554–557. P. 1320–1330. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.1320>.

3. Hama T., Matsudai R., Kuchinomachi Y., Fujimoto H., Takuda H. Nonlinear deformation behavior during unloading of various metal sheets // *ISI Int.* 2015. V. 55, No 5. P. 1067–1075. <https://doi.org/10.2355/isijinternational.55.1067>.
4. Федотова Д.В., Хамидуллин Р.М. Анализ развития трещин смешанных форм разрушения по моделям циклической пластичности // XIII Всероссийский съезд по теор. и прикл. механ.: сб. тез. докл. в 4 т. Санкт-Петербург, 21–25 авг. 2023 г. Т. 3. С. 724–726.
5. Shlyannikov V., Fedotova D., Khamidullin R. Mixed-mode crack growth analysis using a cyclic plasticity model // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2023. V. 128, Art. 104136. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104136>.
6. Надежкин М.В., Баранникова С.А. Локализация пластической деформации при растяжении полос с концентратором напряжений // *Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии: тез. докл. Международн. конф. Томск, 11–14 сент. 2023 г.* С. 166.
7. Barannikova S.A., Nadezhkin M.V. Kinetics of localization of plastic deformation zones in polycrystalline nickel // *Metals.* 2021. V. 11, No 9. Art. 1440. <https://doi.org/10.3390/met11091440>.
8. Шляnnиков В.Н., Ильченко Б.В., Бойченко Н.В., Тартыгашева А.М. Пластина с отверстием в состоянии упругости, пластичности и ползучести // *Изв. вузов. Пробл. энерг.* 2004. № 1–2. С. 107–116.
9. Mir-Salim-zade M.V. Elastic-plastic problem for a stringer plate with a circular hole // *J. Mech. Eng.* 2021. V. 24, No 3. P. 61–69. <https://doi.org/10.15407/pmach2021.03.061>.
10. Mamatova N. Quasistatic elastic-plastic loading and unloading of rods with Coulomb dry friction // *E3S Web Conf.* 2021. V. 264. Art. 01040. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401040>.
11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity // *Nonlinear Dyn.* 2018. V. 91, No 2. P. 1191–1211. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>.
12. Бургер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // *ПММ.* 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765–770.
13. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Mathematical modeling of physically nonlinear 3D beams and plates made of multimodulus materials // *Acta Mech.* 2021. V. 232, No 9. P. 3441–3469. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03010-8>.
14. Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of contact interaction porous size-dependent Euler-Bernoulli beams resonators with clearance: Numerical analysis of the stability problem // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Model.* 2024. V. 135. Art. 108038. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108038>.
15. Крысько В.А., Папкова И.В., Яковлева Т.В., Крысько А.В. Хаотические, гиперхаотические колебания и устойчивость пористых балок Эйлера–Бернулли с учетом физической и геометрической нелинейностей // *Докл. РАН. Физ., техн. науки.* 2025. Т. 521, № 1. С. 50–58. <https://doi.org/10.31857/S2686740025020059>.
16. Makseev A., Yakovleva T.V., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Identification of inclusions of arbitrary geometry with different physical properties of materials in 3D structures. // *Int. J. Mech. Mater. Des.* 2025. V. 21, No 1. P. 53–79. <https://doi.org/10.1007/s10999-024-09727-3>.

17. *Петрик В., Трубачев С., Колодежский В.* Determination of stresses in a cylindrical shell taking into account holes // Молод. учен. 2022. № 5 (105). С. 13–16.
<https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-5-105-3>.
18. *Астапов Н.С., Кургузов В.Д.* Моделирование упругопластического разрушения пластины с центральной трещиной // Вестн. ПНИПУ. Механ. 2023. № 1. С. 12–25.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.1.02>.
19. *Рудаков К.М., Дифучин Ю., Бахтоваршоев Т.* Концентрація напружень біля отвору, що контактує з жорстким циліндром, в композитній пластині, з урахуванням бічних зазорів // Mech. Adv. Technol. 2021. Т. 5, № 2. С. 183–192.
<https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.2243744>.
20. *Khosravani M.R., Reinicke T.* Mechanical strength of 3D-printed open hole polymer plates // Procedia Struct. Integr. 2022. V. 41. P. 664–669. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.05.075>.
21. *Mirsalimov V.M.* Elastoplastic tension problem for a plate with a circular hole with account for crack nucleation in an elastic deformation region // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2020. V. 61, No 4. P. 641–651. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040185>.
22. *Silva B.F., de Souza L.F.G., de Aguiar R.A.A., Pacheco P.M.C.L.* Analysis of stress concentration in pseudoelastic plates using digital image correlation (DIC) and finite element method // Lat. Am. J. Solids Struct. 2025. V. 22, No 10. Art. e870. <https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8703>.
23. *Sococol I., Mihai P., Petrescu T.-C., Nedeff F., Nedeff V., Agop M., Luca B.-I.* Numerical study regarding the seismic response of a moment-resisting (MR) reinforced concrete (RC) frame structure with reduced cross-sections of the RC slabs // Buildings. 2022. V. 12, No 10. Art. 1525. <https://doi.org/10.3390/buildings12101525>.
24. *Wang Ch., González Ureña A., Afifi M., Rudman A., Tremblay R., Rogers C.A.* Conventional construction steel braces with bearing plate energy dissipation // Proc. 17th World Conf. on Earthquake Engineering (17WCEE). Sendai, 2020, art. 2i-0070.
25. *Hung L.-W., Chao C.-K., Huang J.-R., Lin J.* Screw head plugs increase the fatigue strength of stainless steel, but not of titanium, locking plates // Bone Jt. Res. 2019. V. 7, No 12. P. 629–635. <https://doi.org/10.1302/2046-3758.712.BJR-2018-0083.R1>.
26. *Ohashi Y., Murakami S.* The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate // Görtler H. (Ed.) Applied Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25.

References

1. Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G. Advanced issues in springback. *Int. J. Plast.*, 2013, vol. 45. pp. 3–20. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.006>.
2. Geka T., Asakura M., Kiso T., Sugiyama T., Takamura M., Asakawa M. Reduction of springback in hat channel with high-strength steel sheet by stroke returning deep drawing. *Key Eng. Mater.*, 2013, nos. 554–557, pp. 1320–1330.
<https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.1320>.
3. Hama T., Matsudai R., Kuchinomachi Y., Fujimoto H., Takuda H. Non-linear deformation behavior during unloading of various metal sheets. *ISIJ Int.*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 1067–1075. <https://doi.org/10.2355/isijinternational.55.1067>.

4. Fedotova D.V., Khamidullin R.M. Mixed-mode crack growth analysis using models of cyclic plasticity. *XIII Vserossiysk. s'ezd po teor. i prikl. mekhan. Sankt-Peterburg, 21–25 avg. 2023 g.* [Proc. XIII All-Russian Congr. on Theoretical and Applied Mechanics. St. Petersburg, August 21–15, 2023]. Vol. 3. St. Petersburg, 2023, pp. 724–726. (In Russian)
5. Shlyannikov V., Fedotova D., Khamidullin R. Mixed-mode crack growth analysis using a cyclic plasticity model. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2023, vol. 128, art. 104136. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104136>.
6. Nadezhkin M.V., Barannikova S.A. The localization of plastic deformation during stretching of strips by a stress concentrator. *Fizicheskaya mezomekhanika. Materialy s mnogourovnevnoy ierararkhicheski organizovannoi strukturoi i intellektual'nye proizvodstvennye tekhnologii: tez. dokl. Mezhdunarodn. konf., Tomsk, 11–14 sent. 2023 g.* [Physical Mesomechanics. Materials with a Multilevel Hierarchical Structures and Intelligent Manufacturing Technologies: Proc. Int. Conf., Tomsk, September 11–14, 2023]. Tomsk, 2023. p. 166. (In Russian)
7. Barannikova S.A., Nadezhkin M.V. Kinetics of localization of plastic deformation zones in polycrystalline nickel. *Metals*, 2021, vol. 11, no. 9, art. 1440. <https://doi.org/10.3390/met11091440>
8. Shlyannikov V.N., Il'chenko B.V., Boichenko N.V., Tartygasheva A.M. The plate with a hole in a state of elasticity, plasticity, and creep. *Izv. Vuzov. Probl. Energ.*, 2004, nos. 1–2, pp. 107–116. (In Russian)
9. Mir-Salim-zade M.V. Elastic-plastic problem for a stringer plate with a circular hole. *J. Mech. Eng.*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 61–69. <https://doi.org/10.15407/pmach2021.03.061>.
10. Mamatova N. Quasistatic elastic-plastic loading and unloading of rods with Coulomb dry friction. *E3S Web Conf.*, 2021, vol. 264, art. 01040. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401040>.
11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity. *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 91, no. 2, pp. 1191–1211. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6>.
12. Birger I.A. Some general methods for solving problems in the theory of plasticity. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1951, vol. 15, no. 6, pp. 765–770. (In Russian)
13. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Mathematical modeling of physically nonlinear 3D beams and plates made of multimodulus materials. *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 9, pp. 3441–3469. <https://doi.org/10.1007/s00707-021-03010-8>.
14. Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of contact interaction porous size-dependent Euler-Bernoulli beams resonators with clearance: Numerical analysis of the stability problem. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Model.*, 2024, vol. 135, art. 108038. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108038>.
15. Krysko V.A., Papkova I.V., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Chaotic, hyperchaotic vibrations and stability of porous Euler-Bernoulli beams considering physical and geometrical nonlinearities. *Dokl. Ross. Akad. Nauk. Fiz., Tekh. Nauki.*, 2025, vol. 521, no. 1, pp. 50–58. <https://doi.org/10.31857/S2686740025020059>. (In Russian)
16. Makseev A., Yakovleva T.V., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Identification of inclusions of arbitrary geometry with different physical properties of materials in 3D structures. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2025, vol. 21, no. 1, pp. 53–79. <https://doi.org/10.1007/s10999-024-09727-3>.

17. Petryk V., Trubachev S., Kolodezhnyi V. Determination of stresses in a cylindrical shell taking into account holes. *Young Sci.*, 2022, no. 5 (105), pp. 13–16.
<https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-5-105-3>.
18. Astapov N.S., Kurguzov V.D. Simulation of elastoplastic fracture of a center cracked plate. *PNRPU Mech. Bull.*, 2023, no. 1, pp. 12–25.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.1.02>. (In Russian)
19. Rudakov K., Dyfuchyn Y., Bakhtovarshoiev T. Concentration of stresses near the hole in contact with rigid cylinder in composite plate, taking into account lateral clearances. *Mech. Adv. Technol.*, 2021, vol. 5, no. 2, pp. 183–192.
<https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.2243744>. (In Ukrainian)
20. Khosravani M.R., Reinicke T. Mechanical strength of 3D-printed open hole polymer plates. *Procedia Struct. Integr.*, 2022, vol. 41, pp. 664–669. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.05.075>.
21. Mirsalimov V.M. Elastoplastic tension problem for a plate with a circular hole with account for crack nucleation in an elastic deformation region. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2020, vol. 61, no. 4, pp. 641–651. <https://doi.org/10.1134/S0021894420040185>.
22. Silva B.F., de Souza L.F.G., de Aguiar R.A.A., Pacheco P.M.C.L. Analysis of stress concentration in pseudoelastic plates using digital image correlation (DIC) and finite element method. *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 2025, vol. 22, no. 10, art. e870. <https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8703>.
23. Sococol I., Mihai P., Petrescu T.-C., Nedeff F., Nedeff V., Agop M., Luca B.-I. Numerical study regarding the seismic response of a moment-resisting (MR) reinforced concrete (RC) frame structure with reduced cross-sections of the RC slabs. *Buildings*, 2022, vol. 12, no. 10, art. 1525. <https://doi.org/10.3390/buildings12101525>.
24. Wang Ch., González Ureña A., Afifi M., Rudman A., Tremblay R., Rogers C.A. Conventional construction steel braces with bearing plate energy dissipation. *Proc. 17th World Conf. on Earthquake Engineering (17WCEE)*. Sendai, 2020, art. 2i-0070.
25. Hung L.-W., Chao C.-K., Huang J.-R., Lin J. Screw head plugs increase the fatigue strength of stainless steel, but not of titanium, locking plates. *Bone Jt. Res.*, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 629–635. <https://doi.org/10.1302/2046-3758.712.BJR-2018-0083.R1>.
26. Ohashi Y., Murakami S. The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate. In: Görtler H. (Ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer. 1966. pp. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25.

Информация об авторах

Антон Евгеньевич Максеев, аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

E-mail: makseevv.anton@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0181-3460>

Ксения Сергеевна Бодягина, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

E-mail: bodksen@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8822-410X>

Максим Викторович Жигалов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: zhigalovm@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>

Вадим Анатольевич Крысько, доктор технических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: tak@san.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Author Information

Anton E. Makseev, Postgraduate Student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: makseev.anton@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0181-3460>

Kseniya S. Bodyagina, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: bodksen@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8822-410X>

Maksim V. Zhigalov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: zhigalovm@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0642-7211>

Vadim A. Krysko, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: tak@san.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4914-764X>

Поступила в редакцию 27.08.2025

Принята к публикации 3.10.2025

Received August 27, 2025

Accepted October 3, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.517.6

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>

Асимптотическое исследование пропульсивного движения машущего цилиндрического крыла с эллиптической формой сечения

А.Н. Нуриев ✉, А.Р. Баймуратова, О.Н. Зайцева

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

✉ nuriev_an@mail.ru

Аннотация

Исследовано пропульсивное движение в вязкой несжимаемой жидкости цилиндрического машущего крыла с эллиптической формой сечения. Исследование направлено на создание аналитической модели, позволяющей предсказывать крейсерскую скорость такого крыла без применения ресурсоемких численных методов. Математическая постановка задачи основана на нестационарных уравнениях Навье–Стокса. Движение крыла описано как плоскопараллельное поступательно-вращательное колебание с заданными скоростями. Решение задачи построено в рамках асимптотического подхода в предположении о высокочастотном и малоамплитудном характере колебаний. Получена структурная формула, описывающая изменение крейсерской скорости крыла в зависимости от угла поступательных колебаний, сдвига фаз между поступательными и вращательными колебаниями, амплитуды вращательных колебаний и соотношения полуосей эллиптического сечения. Продемонстрирована согласованность результатов с известными аналитическими решениями для круглого цилиндра. Рассмотрены пределы применимости модели в зависимости от частоты колебаний.

Ключевые слова: машущее крыло, вязкая несжимаемая жидкость, уравнение Навье–Стокса, асимптотические разложения, крейсерская скорость

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-79-10033-П).

Для цитирования: Нуриев А.Н., Баймуратова А.Р., Зайцева О.Н. Асимптотическое исследование пропульсивного движения машущего цилиндрического крыла с эллиптической формой сечения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 759–776. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>

Asymptotic study of the propulsive motion of a flapping cylindrical wing with an elliptical cross-section

A.N. Nuriev ✉, A.R. Baimuratova, O.N. Zaitseva

Kazan Federal University, Kazan, Russia✉ nuriev_an@mail.ru

Abstract

The propulsive motion of a cylindrical flapping wing with an elliptical cross-section in a viscous incompressible fluid is investigated to develop an analytical model for predicting the cruising speed of such a wing without resorting to computationally expensive numerical methods. The mathematical formulation of the problem is based on the unsteady Navier–Stokes equations. The wing motion is described as a planar translational-rotational oscillation with prescribed velocities. The problem is solved using an asymptotic approach, under the assumption of high-frequency and low-amplitude oscillations. A structural formula is derived that describes the variation of the cruising speed in relation to the angle of translational oscillations, the phase shift between translational and rotational oscillations, the amplitude of rotational oscillations, and the aspect ratio of the elliptical cross-section. The consistency of the results with known analytical solutions for a circular cylinder is demonstrated. The limits of the model’s applicability with respect to the oscillation frequency are considered.

Keywords: flapping wing, viscous incompressible fluid, Navier–Stokes equation, asymptotic model, cruising speed

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-79-10033-P).

For citation: Nuriev A.N., Baimuratova A.R., Zaitseva O.N. Asymptotic study of the propulsive motion of a flapping cylindrical wing with an elliptical cross-section. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 759–776. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>. (In Russian)

Введение

В последние несколько лет появление технологий для создания небольших беспилотных воздушных и подводных аппаратов по образу птиц, летающих насекомых и гидробионтов придало новый импульс исследованиям в области колебательных движителей. Это привело к актуализации широкого класса задач аэрогидромеханики машущего полета и рыбоподобного плавания. Одной из таких задач является создание относительно

простой универсальной теории, позволяющей описывать аэрогидродинамику колебательного движителя без использования ресурсоемкого прямого численного моделирования. В настоящее время развивается несколько подходов к решению этой задачи.

Классический подход основан на теории идеальной жидкости. Он начал формироваться еще в 1920–1940-х годах в работах Л. Прандтля [1], В. Бирнбаума [2], Т. Теодорсена [3], И. Гаррика [4], Г. Вагнера [5], Г. Глауэрта [6], М.В. Келдыша и М.А. Лаврентьева [7], Л.И. Седова [8], А.И. Некрасова [9] и продолжает успешно развиваться в наши дни [10,11]. Основные ограничения классического подхода состоят в необходимости дополнительных предположений о точках отрыва потока или структуре вихревого следа, которые необходимо формулировать для нестационарного процесса движения.

Альтернативный подход основан на построении асимптотических моделей вязкого обтекания. Первые асимптотические решения задач о поступательных колебаниях тел в покоящейся (на бесконечности) жидкости были получены в работах Дж. Стокса [12] в XIX веке, Г. Шлихтинга [13], Н. Райли [14,15] в XX веке. Современные исследования [16–19] демонстрируют возможности формирования общей асимптотической теории для описания пропульсивного движения колеблющегося тела. Так, в работах [16–19] были найдены решения, описывающие крейсерские режимы движения круглого цилиндрического крыла, совершающего вращательно-поступательные колебания. В настоящей работе представлено дальнейшее развитие асимптотического подхода, рассмотрена гидродинамика машущего крыла с эллиптической формой сечения.

1. Постановка задачи

Пусть цилиндрическое крыло с эллиптической формой сечения совершает плоскопараллельное поступательно-вращательное периодическое движение в вязкой жидкости со скоростями

$$\mathbf{U} = U \cos \alpha \cos(\omega t + \phi) \mathbf{i}_X + U \sin \alpha \cos(\omega t + \phi) \mathbf{j}_Y, \quad \mathbf{\Omega} = \Omega_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}_Z, \quad (1)$$

где $\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращательного движения; $\mathbf{U}$ – скорость поступательного движения, которая совпадает по частоте со скоростью вращательного движения, но смещена по фазе на ϕ ; $\mathbf{i}_X$, $\mathbf{j}_Y$ и $\mathbf{k}_Z$ – единичные вектора, параллельные основным осям неподвижной декартовой системы координат XYZ ($\mathbf{k}_Z$ – вектор, параллельный оси цилиндра). Исследуем движение жидкости, вызванное колебаниями, и определим гидродинамическое воздействие на крыло.

Сформулируем соответствующую математическую задачу. Опишем движение жидкости около крыла с помощью уравнений Навье – Стокса и неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_X}{\partial t} + v_X \frac{\partial v_X}{\partial X} + v_Y \frac{\partial v_X}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \nu \Delta_{XY} v_X, \\ \frac{\partial v_Y}{\partial t} + v_X \frac{\partial v_Y}{\partial X} + v_Y \frac{\partial v_Y}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} + \nu \Delta_{XY} v_Y, \\ \frac{\partial v_X}{\partial X} + \frac{\partial v_Y}{\partial Y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где Δ_{XY} – оператор Лапласа в неподвижной системе координат, p – давление, v_X и v_Y – компоненты скорости, ρ и ν – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно.

Дополним систему (2) условиями прилипания на границе крыла, согласно (1), и условиями

$$v_X = v_Y = 0$$

на бесконечности.

2. Переход в криволинейную систему координат

2.1. Переход в подвижные декартовы координаты. Для решения сформулированной математической задачи удобно перейти в подвижную систему координат xyz , жестко связанную с телом. Текущее положение тела охарактеризуем перемещениями $X_0(t)$ и $Y_0(t)$ его центра масс и углом поворота $\phi(t)$, как это показано на рис. 1. Связь координат подвижной xy и неподвижной XY систем координат зададим как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_\varphi \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} = I_{-\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad I_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I_{-\varphi} = I_\varphi^{-1}. \quad (3)$$

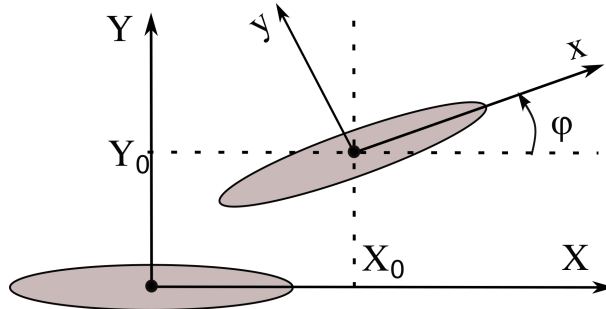


Рис. 1. Начальное и текущее положения тела и связанные с ними неподвижная и подвижная системы координат

Fig. 1. Initial and current positions of the body and the associated fixed and moving coordinate systems

Подвижная система xy перемещается поступательно относительно неподвижной системы со скоростью $\mathbf{V}$ и вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{V} = \dot{X}_0 \mathbf{i}_X + \dot{Y}_0 \mathbf{j}_Y = \overbrace{(\cos \varphi \dot{X}_0 + \sin \varphi \dot{Y}_0)}^{V_x(t)} \mathbf{i}_x + \overbrace{(-\sin \varphi \dot{X}_0 + \cos \varphi \dot{Y}_0)}^{V_y(t)} \mathbf{j}_y, \quad \mathbf{\Omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k}_Z.$$

Перейдем в уравнениях (2) в подвижную систему координат, используя соотношения (3). Учитывая

$$\begin{aligned} \nabla_{XY} &= I_{-\varphi} \nabla_{xy}, \quad \Delta_{XY} = \Delta_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \left[- \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left[I_\varphi \begin{pmatrix} -\dot{X}_0 \\ -\dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy}, \\ \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \cdot [I_{-\varphi} \nabla_{xy}] &= \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy}, \end{aligned}$$

преобразуем уравнения количества движения к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} + \left[I_\varphi \begin{pmatrix} v_X - \dot{X}_0 \\ v_Y - \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} I_{-\varphi} \nabla_{xy} p + \nu \Delta_{xy} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Связь между скоростями в подвижной и неподвижной системах координат дана соотношениями

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = I_\varphi \begin{pmatrix} v_X - \dot{X}_0 \\ v_Y - \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Поддействовав на обе части (4) матрицей I_φ , получим

$$I_\varphi \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla_{xy} p + \nu \Delta_{xy} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в левой части преобразуем как

$$\begin{aligned} I_\varphi \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] - \dot{I}_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{d}{dt} \left[I_\varphi \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} \right] - \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x - \dot{\varphi} y \\ v_y + \dot{\varphi} x \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} - \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} V_y \\ -V_x \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а второе —

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] = \\ &= \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Собрав все члены, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + 2\dot{\varphi} v_y + \dot{\varphi}^2 x + \ddot{\varphi} y - A_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y - 2\dot{\varphi} v_x + \dot{\varphi}^2 y - \ddot{\varphi} x - A_y, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix}.$$

Определив новое давление как

$$p^0 = p - p^1, \quad p^1 = \rho \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho (A_x x + A_y y),$$

приведем (6) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x} + \nu \Delta v_x + 2\dot{\varphi} v_y + \dot{\varphi}^2 x + \ddot{\varphi} y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial y} + \nu \Delta v_y - 2\dot{\varphi} v_x + \dot{\varphi}^2 y - \ddot{\varphi} x, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем функцию тока ψ :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Перепишем (7) в терминах функции тока:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + 2\ddot{\varphi} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (8)$$

В подвижной системе координат на теле должны выполняться условия прилипания. В терминах функции тока их можно записать следующим образом:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

Для определения условия на бесконечности учтем, что абсолютные скорости связаны с относительными соотношениями (5), а также то, что на бесконечности в абсолютной системе координат жидкость покоится, т. е. $v_X = v_Y = 0$. В результате получим

$$(x, y) \rightarrow \infty: \quad \psi \sim \frac{1}{2} \dot{\varphi}(x^2 + y^2) + xV_y - yV_x. \quad (10)$$

2.2. Переход в криволинейные координаты. Далее перейдем в криволинейную подвижную эллиптическую систему координат (r, θ) , жестко связанную с крылом (в которой крыло неподвижно) и заданную конформным отображением

$$z(r, \theta) = x + iy, \quad x = 2m_\infty \cosh r \cos \theta, \quad y = 2m_\infty \sinh r \sin \theta \quad (11)$$

области $r_0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ во внешность сечения цилиндра (в физической плоскости), при котором $r = r_0$ перейдет в замкнутую кривую, определяющую профиль сечения, а бесконечно удаленная точка перейдет в бесконечно удаленную. Заметим, что коэффициенты Ламе для эллиптических координат (11) равны

$$\lambda^2 = \lambda_r^2 = \lambda_\theta^2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}, \quad \lambda = 2m_\infty (\cosh^2 r - \cos^2 \theta)^{1/2}.$$

Обозначим больший и меньший радиусы эллиптического цилиндра как R_x и R_y соответственно, а их соотношение как $b = R_y/R_x \leq 1$. Обезразмерим скорость на U , пространственные координаты на R_x , время на ω^{-1} . Определим параметры отображения (11) m_∞ и r_0 как

$$m_\infty = \sqrt{\frac{1-b^2}{2}}, \quad m_\infty e^{r_0} = \frac{1+b}{2}, \quad r_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b}{1-b}.$$

Компоненты поля скорости (v_r, v_θ) в эллиптической системе координат выразим через (v_x, v_y) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left(v_\theta \frac{\partial x}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) &= v_x, \quad \frac{1}{\lambda} \left(v_\theta \frac{\partial y}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) = v_y, \\ v_r &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Перепишем систему уравнений движения (8) в новой подвижной криволинейной системе координат в терминах функции тока ψ в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + 2\chi \sin(t) - \frac{\kappa}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(r, \theta)} = \varepsilon^2 \Delta^2 \psi, \quad (12)$$

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Безразмерные параметры задачи $\varepsilon, \kappa, \chi$ теперь определим как

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu}{\omega R_x^2}}, \quad \kappa = \frac{U}{\omega R_x} = \frac{A}{R_x}, \quad \chi = \frac{\Omega_0 R_x}{U} = \frac{\Theta}{\kappa}.$$

Дополним задачу граничными условиями в соответствии с (9) и (10). На границе крыла получим

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

На бесконечности граничные условия примут следующий вид:

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \frac{1}{2} \chi \cos(t)(x^2 + y^2) + xV_y - yV_x.$$

Здесь V_x и V_y определяются как

$$V_x = (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) \cos(t + \phi) = \cos(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$V_y = (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) \cos(t + \phi) = \sin(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$\varphi = \Theta \sin(t).$$

Для рассматриваемой эллиптической системы координат получим

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim 2\chi m_\infty^2 ((\cosh r \cos \theta)^2 + (\sinh r \sin \theta)^2) \cos t +$$

$$+ 2m_\infty \cosh r \cos \theta \sin(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi) - 2m_\infty \sinh r \sin \theta \cos(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi). \quad (14)$$

3. Асимптотическое разложение

3.1. Предположение о малости амплитуд колебаний. Построим асимптотическое решение задачи в предположении $\Theta \sim \kappa \ll 1$. Представим ψ в виде разложения по степеням κ :

$$\psi = \kappa^0 \psi_0 + \kappa^1 \psi_1 + O(\kappa^2).$$

Подставив разложение в (12), запишем уравнения для определения ψ_0 и ψ_1 :

$$\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta^2 \psi_0 = -2\chi \sin(t),$$

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta^2 \psi_1 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi_0, \Delta \psi_0)}{\partial(r, \theta)}.$$

При условии $\Theta \ll 1$ граничные условия (14) на бесконечности запишем в форме

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \chi m_\infty^2 (\cosh 2r + \cos 2\theta) \cos t +$$

$$+ 2m_\infty \cos(t + \phi) (\cosh r \cos \theta \sin \alpha - \sinh r \sin \theta \cos \alpha) +$$

$$+ \Theta 2m_\infty \cos(t + \phi) \sin t (\cosh r \cos \theta \cos \alpha + \sinh r \sin \theta \sin \alpha) + O(\Theta^2),$$

или

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \chi m_\infty^2 \left[\frac{e^{2r}}{2} \right] \cos(t) - m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi) + \quad (15)$$

$$+ \kappa \chi m_\infty e^r \cos(\theta - \alpha) (-\sin \phi + \sin(2t + \phi)) / 2 + O(\kappa^2).$$

Заметим, что третье слагаемое определяет стационарную поправку к скорости на бесконечности порядка $\Theta = \chi \kappa$ при $\phi \neq 0$.

Собрав члены при соответствующих степенях κ в (13) и (15), получим следующие граничные условия для ψ_0 и ψ_1 :

$$r = r_0 : \psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \psi_0 \sim \chi m_\infty^2 \left[\frac{e^{2r}}{2} \right] \cos(t) - m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$r = r_0 : \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \psi_1 \sim \chi m_\infty e^r \cos(\theta - \alpha) \frac{(-\sin \phi + \sin(2t + \phi))}{2}.$$

3.2. Предположение о высокочастотном характере колебаний. Дополнительно предположим высокочастотный характер колебаний $\varepsilon^2 \sim \Theta \sim \kappa \ll 1$. Представим решение в членах $O(\kappa^0)$ и $O(\kappa^1)$, согласно подходу Шлихтинга [13], в виде разложений во внешней ($r \sim 1$) и внутренней погранслоиных ($r \sim \varepsilon$) областях

$$r \sim \varepsilon : \quad \psi_k^{in} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_{k,j}, \quad r \sim 1 : \quad \psi_k^{out} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Psi_{k,j}, \quad k = 0, 1,$$

где ψ_k^{out} – внешнее решение, ψ_k^{in} – погранслоиное решение.

4. Решение в главном члене $O(\kappa^0)$

Функция тока, описывающая внешнее нестационарное течение около крыла, в главном члене $O(\kappa^0, \varepsilon^0)$ определим как решение задачи

$$\frac{\partial \Delta \Psi_{0,0}}{\partial t} = -2\chi \sin(t),$$

$$r = r_0 : \quad \Psi_{0,0} = 0; \quad r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{0,0} \sim \chi m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi).$$

Найдем его в виде

$$\Psi_{0,0} = \chi m_\infty^2 (\cosh 2r - \cosh 2r_0 + \cos 2\theta - e^{-2r+2r_0} \cos 2\theta) \cos(t) -$$

$$- m_\infty 2e^r \sinh(r - r_0) \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi).$$

Заметим, что касательная составляющая скорости на границе эллиптического цилиндра не равна нулю:

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi_{0,0}}{\partial \theta} = -(V_1(\theta) \cos(t) + V_2(\theta) \sin(t)) =$$

$$= -2\chi m_\infty^2 (\sinh 2r_0 + \cos 2\theta) / \lambda(r_0) \cos(t) + 2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) / \lambda(r_0),$$

$$V = V_1 + iV_2 =$$

$$= \frac{2\chi m_\infty^2 (\sinh 2r_0 + \cos 2\theta) - 2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) \cos(\phi) + i2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) \sin(\phi)}{\lambda(r_0)}.$$

Для удовлетворения условия прилипания рассмотрим поведение в погранслое. Введем погранслоиную координату

$$r = \varepsilon\eta + r_0.$$

Получим погранслоинное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \eta^2} \right) - \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{\partial^4 \psi_{0,1}}{\partial \eta^4} = 0$$

с граничными условиями

$$\eta = 0 : \quad \psi_{0,1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta \rightarrow \infty : \quad \psi_{0,1} \sim (V_1(\theta) \cos(t) + V_2(\theta) \sin(t)) \eta \lambda(r_0).$$

Используя подстановку $\eta = \zeta/\lambda(r_0)$, решение можно записать в виде

$$\psi_{0,1} = \text{Real} \left\{ e^{it} \left(\zeta + \frac{(1-i)(E-1)}{\sqrt{2}} \right) (V_1(\theta) - iV_2(\theta)) \right\}, \quad E = \exp \left(\frac{-(1+i)}{\sqrt{2}} \zeta \right).$$

5. Решение в члене $O(\kappa^1)$

5.1. Стационарная составляющая решения. Решение во втором члене по κ состоит из суммы осцилляционных и стационарных компонент. Далее вычислим стационарную компоненту решения.

Запишем погранслоиную задачу. Она может быть описана уравнением

$$-\left\{ \frac{\partial \left(\psi_{0,1}, \frac{1}{(\lambda(r_0))^2} \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \eta^2} \right)}{\partial(\eta, \theta)} \right\}_{\text{st}} = \frac{1}{(\lambda(r_0))^2} \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \eta^4}$$

с нулевыми граничными условиями.

Используя $\eta = \zeta/\lambda(r_0)$, перепишем ее как

$$-\frac{1}{\lambda(r_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \zeta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \zeta^2} \right) - \left(\frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi_{0,1}}{\partial \zeta^3} \right) \right\}_{\text{st}} = \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \zeta^4}.$$

Подставив функции $\psi_{0,1}$ в виде

$$\psi_{0,1} = \text{Real} \left\{ e^{it} (f_1(\zeta) + if_2(\zeta)) (V_1(\theta) - iV_2(\theta)) \right\},$$

получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda(r_0)} \frac{\partial |V(\theta)|^2}{\partial \theta} \frac{1}{4} \text{Real} \left(\frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left(\frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) \right) - \\ & -\frac{1}{\lambda(r_0)} \left(\frac{\partial V_1}{\partial \theta} V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial \theta} V_1 \right) \frac{1}{4} \text{Imag} \left(\frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left(\frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) \right) = \\ & = \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \zeta^4}. \end{aligned}$$

Решение этой задачи можно записать как

$$\psi_{1,1,st1} = -\frac{1}{\lambda(r_0)} \frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \frac{1}{4} \text{Real}(G) - \frac{i}{\lambda(r_0)} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right) \frac{1}{4} \text{Imag}(G),$$

$$\bar{V} = V_1 - iV_2, \quad |V|^2 = V_1^2 + V_2^2,$$

где функция G удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 G}{\partial \zeta^4} &= \frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left(\frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) = \\ &= e^{-(-1)^{1/4}\zeta} \left(-(-1)^{3/4} + (-1)^{3/4} \left(2e^{(-1)^{3/4}\zeta} - e^{i\sqrt{2}\zeta} \right) + i\zeta \right). \end{aligned}$$

С учетом граничных условий эта функция определяется в виде

$$\begin{aligned} G &= \frac{13}{2\sqrt{2}} + \frac{3i}{2\sqrt{2}} - \left(\frac{3}{2} + \frac{3i}{2} \right) \zeta + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-(-1)^{1/4}\zeta} \zeta \left((-1)^{3/4} e^{(-1)^{3/4}\zeta} \left(1 + 2e^{(-1)^{1/4}\zeta} \right) - 2(\sqrt{8 + 15i} + i\zeta) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получим граничное условие для внешней стационарной задачи:

$$\left(\frac{\partial \Psi_{1,0,st}}{\partial r} \right)_{r_0} = \left(\lambda(r_0) \frac{\partial \psi_{1,1,st1}}{\partial \zeta} \right)_{\infty} = \left(\frac{\partial \psi_{1,1,st1}}{\partial \eta} \right)_{\infty}.$$

Внешнюю стационарную задачу запишем как

$$\Delta^2 \Psi_{1,0,st} = 0. \quad (16)$$

Она имеет следующие граничные условия:

$$r = r_0 : \quad \left(\frac{\partial \Psi_{1,0,st}}{\partial r} \right)_{r_0} = \frac{3}{8} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \right) + \frac{3i}{8} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right), \quad \Psi_{1,0,st} = 0, \quad (17)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st} \sim -m_{\infty} \chi e^r \cos(\theta - \alpha) \sin \phi + O(e^r).$$

Решение этой задачи можно представить в виде двух слагаемых:

$$\Psi_{1,0,st} = \Psi_{1,0,st1} + \Psi_{1,0,st2}.$$

Первое удовлетворяет граничным условиям на теле (17), второе – следующим граничным условиям:

$$r = r_0 : \quad \Psi_{1,0,st2} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st2} \sim -m_{\infty} \chi e^r \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Второе слагаемое может быть описано гармонической функцией

$$\Psi_{1,0,st2} = -m_{\infty} e^{r_0} \chi \sinh(r - r_0) \cos(\theta - \alpha) \sin \phi. \quad (18)$$

Определение $\Psi_{1,0,st1}$ является более сложной задачей.

5.2. Аналитическое решение стационарной задачи для кругового цилиндра.

Рассмотрим сначала частный случай колебаний круглого цилиндра. Имеем

$$V(\theta) = \chi - 2 \sin(\theta - \alpha) \cos \phi + i 2 \sin(\theta - \alpha) \sin \phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) = -4 \cos(\theta - \alpha) (\chi \cos \phi - 2 \sin(\theta - \alpha)), \quad i \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right) = -4 \chi \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Граничное условие на теле запишем как

$$\left(\frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{3}{2} \cos(\theta - \alpha) (\chi \cos \phi - 2 \sin(\theta - \alpha)) - \frac{3}{2} \chi \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Решение $\Psi_{1,0,st1}$ определяется как

$$\Psi_{1,0,st1} = -\frac{3}{4} \sin 2(\theta - \alpha) \{e^{-2r} - 1\} - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \cos \phi - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \sin \phi.$$

Добавив (18), найдем функцию тока, описывающую внешнее стационарное течение:

$$\Psi_{1,0,st} = -\frac{3}{4} \sin 2(\theta - \alpha) \{e^{-2r} - 1\} - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \cos \phi - \frac{5}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \sin \phi.$$

Такое течение имеет ненулевую среднюю скорость в направлении, перпендикулярном оси поступательного колебательного движения:

$$(u_{x,\infty}, u_{y,\infty}) = \Theta \left(\frac{3}{4} \cos \phi + \frac{5}{4} \sin \phi \right) (-\sin \alpha, \cos \alpha). \quad (19)$$

В неподвижной системе координат $(-u_{x,\infty}, -u_{y,\infty})$ – это крейсерская скорость движения крыла (стационарные составляющие силы, действующие на тело при движении с этой скоростью, равны нулю). Этот результат в точности совпадает с решением для круглого цилиндра, полученным ранее в работах [17, 18].

5.3. Численное решение стационарной задачи для эллиптического цилиндра. Полное аналитическое решение стационарной задачи для общего случая получить достаточно сложно. В настоящей работе для его определения используем численные методы.

Запишем подзадачу (16), (17) для $\Psi_{1,0,st1}$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta W_{1,0,st1} &= 0, \quad \Delta \Psi_{1,0,st1} = -W_{1,0,st1}, \\ r = r_0 : \quad \left(\frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \right)_{r_0} &= \frac{3}{8} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \right) + \frac{3i}{8} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right), \quad \Psi_{1,0,st1} = 0, \\ r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st1} &\sim O(e^r), \end{aligned} \quad (20)$$

где $W_{1,0,st1}$ – завихренность. Построим ее численное решение с помощью метода конечных разностей на основе численной схемы, описанной в работе [20]. Сформируем в ограниченной области $r_0 \leq r \leq r_\infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ равномерную (в пространстве конформного отображения) расчетную сетку с $n_r \times n_\theta$ узлами. Дискретные значения переменных определим в узлах сетки. Для аппроксимации оператора Лапласа (в двумерной области) используем

стандартный симметричный пятиточечный шаблон. На границе цилиндрического крыла проведем дискретизацию граничных условий следующим образом:

$$\widetilde{\Psi}_{1,0,st1}(r_0) = 0, \quad \widetilde{W}_{1,0,st1}(r_0) = \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{2}{h^2} \left(\Psi_{1,0,st1}(r_0 + h_r) - h \frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \right),$$

где тильда обозначает приближенную сеточную функцию, h – шаг сетки по координате r . Условие для завихренности здесь отражает широко известное условие Тома второго порядка точности.

На внешней границе, предположив, что в главном члене $W_{1,0,st1}(r_\infty) \sim e^{-2r}$, сформулируем следующее граничное условие для завихренности:

$$r = r_\infty : \quad 2\widetilde{W}_{1,0,st1}(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \widetilde{W}_{1,0,st1}}{\partial r}(r_\infty) = 0.$$

Здесь индекс $(up2)$ у символа частной производной указывает на использование направленной разности второго порядка точности для аппроксимации соответствующей производной.

Аналогично, из предположения $\Psi_{1,0,st1} \sim ce^r + de^{-r}$ (как это сделано в работе [19]) сформулируем граничное условие для функции тока

$$r = r_\infty : \quad \Psi_{1,0,st1}(r_\infty) = (e^{r_\infty} + e^{-r_\infty})\Psi_{1,0,st1}(r_\infty - h_r) - \Psi_{1,0,st1}(r_\infty - 2h_r).$$

5.4. Результаты решения стационарной задачи в общем случае. Анализ граничных условий задачи (20) показал, что общая формула для вычисления стационарной скорости на бесконечности (по модулю равной крейсерской скорости машущего крыла) может быть представлена в виде

$$(u_{x,\infty}, u_{y,\infty}) = \Theta \left((u_{\pi/2,0} \cos(\phi) + u_{\pi/2,\pi/2} \sin(\phi)) \sin(\alpha), (u_{0,0} \cos(\phi) + u_{0,\pi/2} \sin(\phi)) \cos(\alpha) \right).$$

Таким образом, для получения полной параметрической зависимости в рамках численных расчетов необходимо определить поведение четырех функций $u_{\pi/2,0}$, $u_{\pi/2,\pi/2}$, $u_{0,0}$, $u_{0,\pi/2}$ от параметра b . Сделаем это с помощью численной схемы, изложенной в разделе 5.3, выбрав соответствующие значения ϕ и α при $\Theta = 1$.

Для настройки параметров численной схемы проведем анализ сеточной сходимости, а также выполним сравнение результатов расчетов с точным решением (19), известным для случая $b = 1$. Результаты вычисления функции $u_{\pi/2,\pi/2}$ для крыльев с соотношением полуосей $b = 0.2, 1$ на разных сетках при $r_\infty = 2.8$ представлены в табл. 1.

Как можно видеть, результаты слабо зависят от сетки. Наличие небольшой ошибки (порядка 0.1 % на самой подробной сетке) численного решения в случае $b = 1$ объясняется ограниченной областью расчета и влиянием граничных условий.

Табл. 1. Значения функции $u_{\pi/2,\pi/2}$, вычисленные на разных сетках
Table 1. Values of the function $u_{\pi/2,\pi/2}$ calculated on different meshes

b	257x257	513x257	513x513	1025x512	Точное решение
0.2	0.61943	1.62456	1.62475	1.62484	—
1	-1.252717	-1.250936	-1.251266	-1.25128	-1.25

Результаты расчета $u_{\pi/2,0}$, $u_{\pi/2,\pi/2}$, $u_{0,0}$, $u_{0,\pi/2}$ для разных значений b на сетке $n_r \times n_\theta = 513 \times 257$ при $r_\infty = 2.8$ показаны на рис. 2.

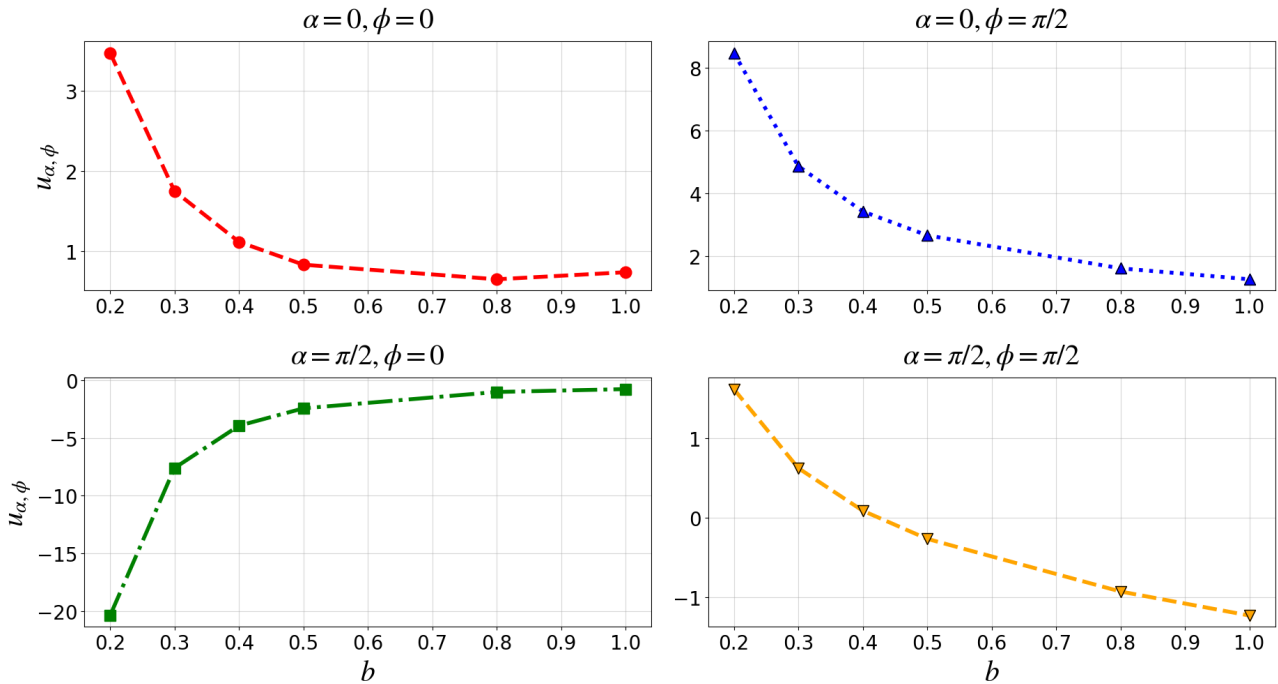


Рис. 2. Зависимости $u_{\pi/2,0}$, $u_{\pi/2,\pi/2}$, $u_{0,0}$, $u_{0,\pi/2}$ от параметра b

Fig. 2. Dependencies $u_{\pi/2,0}$, $u_{\pi/2,\pi/2}$, $u_{0,0}$, and $u_{0,\pi/2}$ on parameter b

Полученные зависимости представляют первое приближение крейсерской скорости движения крыла при высоких частотах ($\varepsilon \ll 1$) колебаний. Оценки области применимости модели по ε можно привести для случая $b = 1$ на основании результатов, полученных в работе [17]. Так, в малоамплитудном диапазоне относительные ошибки err_ϕ определения значений функций $u_{\alpha,\phi}$ для $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$ (значения функций при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi/2$ совпадают) можно вычислить как

$$b = 1 : \quad \text{err}_{\phi=0} \approx \left| \frac{3}{4} - \frac{\varepsilon^{-2} - 3.7\varepsilon^{-1}}{1.33\varepsilon^{-2} + 12.7\varepsilon^{-1} + 41.7} \right| \cdot 100\%,$$

$$\text{err}_{\phi=\pi/2} \approx \left| \frac{5}{4} - \frac{\varepsilon^{-2} + 1.4\varepsilon^{-1}}{0.8\varepsilon^{-2} + 3.5\varepsilon^{-1} + 3.6} \right| \cdot 100\%. \quad (21)$$

Графики этих функций изображены на рис. 3.

Как можно видеть, высокочастотная асимптотическая модель предсказывает скорость с ошибкой менее чем в 10% при $\varepsilon < 0.01$ для $\phi = 0$ и $\varepsilon < 0.029$ для $\phi = \pi/2$. Заметим, что для других значений b при разных α и ϕ диапазон применимости может отличаться. Об этом, в частности, говорит поведение функций $u_{\alpha,\phi}$ при малых b . Так, для случая $\alpha = \pi/2$ и $\phi = \pi/2$ модель предсказывает эффект смены направления движения крыла при переходе от круглого цилиндра к тонкой пластине [21], аналогичный эффект при $\alpha = \pi/2$ и $\phi = 0$ моделью не предсказывается (из-за недостаточного количества членов разложения).

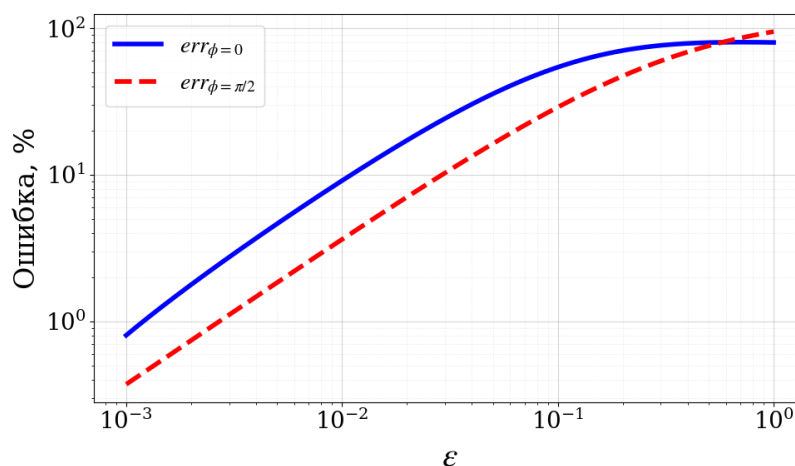


Рис. 3. График ошибки err_{ϕ} для $\phi = 0$ и $\phi = \pi/2$, построенные по формулам (21), для случая $b = 1$, $\kappa \ll 1$

Fig. 3. Plot of the error err_{ϕ} for $\phi = 0$ and $\phi = \pi/2$ based on formulas (21) for $b = 1$ and $\kappa \ll 1$

Заключение

Построена высокочастотная малоамплитудная ($\varepsilon^2 \sim \Theta \sim \kappa \ll 1$) асимптотическая модель пропульсивного движения цилиндрического машущего крыла с эллиптической формой сечения. На базе этой модели выведена структурная формула для определения крейсерской скорости движения машущего крыла в зависимости от значений параметров α , ϕ , Θ и b . Зависимости от первых трех параметров получены аналитически, зависимость от b найдена численно. Продемонстрирована согласованность полученных результатов с аналитическими формулами для круглого цилиндра при $b = 1$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // Kármán Th., Levi-Civita T. (Hrsg.) Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Berlin, Heidelberg: Springer, 1924. S. 18–33. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2.
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel // Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt. 1924. Bd. 15. S. 128–134.
3. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No NACA-TR-496. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935. P. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No NACA-TR-567. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. P. 1–10.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // Z. Angew. Math. Mech. 1925. Bd. 5, H. 1. S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>.

6. *Glauert H.* The force and moment on an oscillating aerofoil // Gilles A., Hopf L., Kármán Th. (Hrsg.) Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929). Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
7. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла // Техн. заметки ЦАГИ. 1935. Т. 45. С. 48–52.
8. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 440 с.
9. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: АН СССР, 1947. 262 с.
10. *Alaminos-Quesada J., Fernandez-Feria R.* Propulsion of a foil undergoing a flapping undulatory motion from the impulse theory in the linear potential limit // J. Fluid Mech. 2020. V. 883. Art. A19. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.870>.
11. *Fernandez-Feria R., Alaminos-Quesada J.* Analytical results for the propulsion performance of a flexible foil with prescribed pitching and heaving motions and passive small deflection // J. Fluid Mech. 2021. V. 910. Art. A43. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1015>.
12. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1851. V. 9, Pt. 2. P. 8–106.
13. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Z. 1932. Bd. 33. S. 327–335.
14. *Riley N.* Oscillatory viscous flows. Review and extension // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3, No 4. P. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
15. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. 1975. V. 68, No 4. P. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001225>.
16. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. V. 941. Art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
17. *Егоров А.Г., Нуриев А.Н.* Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2–3. С. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>.
18. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M.* Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 8. P. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
19. *Egorov A., Nuriev A., Anisimov V., Zaitseva O.* Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2024. V. 36, No 2. Art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
20. *Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R.* Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies // Fluid Dyn. 2024. V. 59, No 2. P. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
21. *Nuriev A., Baimuratova A., Zaitseva O., Zhuchkova O.* The dependence of the propulsive characteristics of a flapping wing on its cross-sectional shape // Proc. 2023 Ivannikov Ispras Open Conf. (ISPRAS). Moscow, 2023. P. 135–138. <https://doi.org/10.1109/ISPRAS60948.2023.10508181>.

References

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: Kármán Th., Levi-Civita T. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1924, S. 18–33. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2. (In German)
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, S. 128–134. (In German)
3. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No. NACA-TR-496. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935, pp. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No. NACA-TR-567. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–10.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1925, Bd. 5, H. 1, S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>. (In German)
6. Glauert H. The force and moment on an oscillating aerofoil. In: Gilles A., Hopf L., Kármán Th. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1930, S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16. (In German)
7. Keldysh M.V., Lavrentiev M.A. On the theory of the oscillating wing. *Tekh. Zametki TsAGI*, 1935, vol. 45, pp. 48–52. (In Russian)
8. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 440 p. (In Russian)
9. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Theory of Wings in Nonstationary Flow]. Moscow, Leningrad, Akad. Nauk SSSR, 1947. 262 p. (In Russian)
10. Alaminos-Quesada J., Fernandez-Feria R. Propulsion of a foil undergoing a flapping undulatory motion from the impulse theory in the linear potential limit. *J. Fluid Mech.*, 2020, vol. 883, art. A19. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.870>.
11. Fernandez-Feria R., Alaminos-Quesada J. Analytical results for the propulsion performance of a flexible foil with prescribed pitching and heaving motions and passive small deflection. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 910, art. A43. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1015>.
12. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1851, vol. 9, pt. 2, pp. 8–106.
13. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Z.*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
14. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension. *IMA J. Appl. Math.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
15. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001225>.
16. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.

17. Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 170–180.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>. (In Russian)
18. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2250–2256.
<https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
19. Egorov A., Nuriev A., Anisimov V., Zaitseva O. Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 2024, vol. 36, no. 2, art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
20. Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R. Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies. *Fluid Dyn.*, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
21. Nuriev A., Baimuratova A., Zaitseva O., Zhuchkova O. The dependence of the propulsive characteristics of a flapping wing on its cross-sectional shape. *Proc. 2023 Ivannikov Ispras Open Conf. (ISPRAS)*. Moscow, 2023, pp. 135–138.
<https://doi.org/10.1109/ISPRAS60948.2023.10508181>.

Информация об авторах

Артем Наилевич Нуриев, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: nuriev_an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

Ангелина Рафилевна Баймуратова, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5012-5377>

Ольга Николаевна Зайцева, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ZaitsevaON@corp.knrtu.ru

ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

Author Information

Artem N. Nuriev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: nuriev_an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

Angelina R. Baimuratova, Junior Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: angelina.baimuratova@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5012-5377>

Olga N. Zaitseva, Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: *olga_fdpi@mail.ru*

ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

Поступила в редакцию 9.10.2025
Принята к публикации 25.10.2025

Received October 9, 2025
Accepted October 25, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 535.211

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.777-785>

Микроструктуры на поверхности кремния для повышения эффективности солнечных элементов, сформированные мощным световым импульсом

Б.Ф. Фаррахов

Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук», г. Казань, Россия

*bulat_f@mail.ru***Аннотация**

Определено влияние режимов ионной имплантации ионами As^+ , Mn^+ , In^+ и импульсного светового отжига на механизм формирования рекристаллизованных рельефных периодических микроструктур из расплавленной фазы на поверхности кремниевой (Si) пластины для применения их в солнечной энергетике.

Ключевые слова: солнечная энергетика, кремний, импульсное световое облучение, ионная имплантация, коэффициент отражения

Благодарности. Автор выражает благодарность Р.И. Баталову за подготовку и предоставление некоторых образцов для экспериментов.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Фундаментальные основы молекулярного конструирования, физико-химического анализа строения и функциональных свойств новых интеллектуальных систем и материалов для современных наукоемких технологий в области биомедицины, катализа, энергетики, нано- и оптоэлектроники». Руководители: А.А. Карасик, С.М. Хантимеров. Номер регистрации в ЕГИСУ 122011800132-5.

Для цитирования: Фаррахов Б.Ф. Микроструктуры на поверхности кремния для повышения эффективности солнечных элементов, сформированные мощным световым импульсом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 777–785. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.777-785>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.777-785>

Microstructures on silicon surface produced by a powerful light pulse to enhance solar cell efficiency

B.F. Farrakhov

*Zavoisky Physical-Technical Institute, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

bulat_f@mail.ru

Abstract

The effects of implanting As^+ , Mn^+ , In^+ ions and pulsed light annealing on the formation of recrystallized relief periodic microstructures from the molten phase on the surface of a silicon (Si) plate for their potential application in solar energy conversion was studied.

Keywords: solar energy, silicon, pulsed light irradiation, ion implantation, reflection coefficient

Acknowledgments. R.I. Batalov is gratefully acknowledged for preparing and providing some samples used during the experiments. This study was carried out as part of the state assignment “Fundamentals of molecular design, physicochemical analysis of structure and functional properties of new intelligent systems and materials for modern high-tech technologies in biomedicine, catalysis, energy, and nano- and optoelectronics” (headed by A.A. Karasik and S.M. Khantimerov; state registration no. 122011800132-5 in the Integrated National Information System Database).

For citation: Farrakhov B.F. Microstructures on silicon surface produced by a powerful light pulse to enhance solar cell efficiency. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 777–785. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.777-785>. (In Russian)

Введение

Солнечная энергетика занимает в мире все более значительное положение в производстве электричества. Она является возобновляемым источником энергии, в том числе не оказывающим вредного воздействия на экологию [1]. По оценкам исследовательской компании BloombergNEF [2, 3], к концу 2024 года мощность глобальных солнечных электростанций достигла около 1500 ГВт, в то время как к началу 2023 года она составляла всего 200 ГВт и продолжает демонстрировать стремительный рост. Первостепенными для

текущего и будущего развития этой отрасли являются удешевление, упрощение производства и улучшение технических характеристик преобразователей световой энергии в электрическую. В статье рассмотрен вариант улучшения физических свойств и технических характеристик названного процесса.

Инженеры и ученые реализуют различные методы совершенствования параметров солнечных элементов для увеличения их коэффициента полезного действия (КПД). Как известно, общая эффективность солнечного элемента зависит от нескольких аспектов, среди которых: состав полупроводника, температура, контакты и металлизация, тип просветляющего покрытия, концентрация легирующего вещества и топология слоев элемента, а также герметизация. Кремний (Si) является основным полупроводником, который используется для производства фотоэлектрических элементов, поскольку он широко распространен в природе, технологии его обработки досконально отработаны, а энергетическая ширина полосы поглощения совместима с большей частью солнечного спектра. В настоящее время производство многих солнечных элементов основано на производстве мульти-/микро-/поликристаллического и монокристаллического кремния (с-Si), причем последний отличается наибольшей эффективностью. Одними из наиболее перспективных направлений в повышении КПД являются создание направленного рассеивания и увеличение площади поверхности, что равносильно снижению коэффициента отражения поверхности или увеличению поглощательной способности солнечных элементов. Увеличение площади поверхности достигается за счет текстурирования, т.е. формирования на поверхности фотоэлементов уникальных рельефных структур, отличающихся различными формами, размерами и плотностями [4].

Сегодня известны различные методы текстурирования поверхности полупроводников для их использования в оптоэлектронике [2–8]. Для с-Si-элементов также разработано множество технологий обработки поверхности. Среди них на сегодняшний день вызывают наибольший интерес методы создания таких наноструктур, как нанонити и нанопроволоки [7, 8], и рельефных микроструктур, образующихся при ионной имплантации (ИИ) и импульсном световом облучении (ИСО) [9, 10]. Ниже в дополнение к ранее опубликованным результатам [11] рассмотрен новый подход к выбору режимов ИИ и ИСО с целью более эффективного микроструктурирования поверхности с-Si.

1. Эксперимент

В качестве образцов для исследования были использованы пластины с-Si марки КДБ-1 с кристаллографической ориентацией поверхности (100).

ИИ проводилась на ускорителе ИЛУ-3 ионами As^+ с энергией $E = 50$ кэВ и дозой $D = 3.12 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$, а также ионами Mn^+ с энергией $E = 30$ кэВ и дозой $D = 2 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$. Также образец Si (100) был последовательно имплантирован ионами In^+ и As^+ с энергией $E = 30$ кэВ и дозами по $D = 2 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$.

ИСО образцов проводилось импульсами секундных длительностей излучением галогенных ламп накаливания на установке Импульс-6 с плотностью мощности излучения ламп $w = 20 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$ при различных длительностях импульса.

Модифицированные поверхности образцов Si анализировались на оптическом микроскопе МБС-9. Сформированные структуры регистрировались на цифровую камеру. Отражательная способность сформированных структур измерялась с использованием зондирования лучей полупроводниковых лазеров мощностью $P = 5 \text{ мВт}$, с диаметром пучка 1.1 мм , под углом 45° к нормали образца на длинах волн $\lambda_b = 405 \text{ нм}$, $\lambda_g = 532 \text{ нм}$

и $\lambda_r = 650$ нм. Плоскость поляризации была выставлена параллельно поверхности образца. Регистрация интенсивности отраженных лучей выполнялась фотодиодом ФД-24К и цифровым мультиметром.

Профили распределения ионов по толщине образца были рассчитаны с помощью программы TRIM (Transport of Ions in Matter), которая является ядром пакета программ SRIM-2013. Эта программа была разработана Ф.Ц. Джеймсом и П.Б. Йохеном в 1983 году и постоянно совершенствовалась [12]. TRIM основана на методе моделирования Монте-Карло, а именно, на приближении бинарных столкновений со случайным выбором параметра удара следующего сталкивающегося иона. Программа моделирует все процессы взаимодействия налетающей частицы и атомов мишени. В качестве входных параметров задаются тип иона и энергия (в диапазоне 10 эВ – 2 ГэВ) и материал одного или нескольких слоев мишени.

Программа SRIM позволяет с высокой точностью моделировать: ионизационные потери энергии частиц в веществе, энергетические спектры ядер отдачи, 3D-траектории частиц с учетом многократных столкновений с атомами, процессы имплантации ионных примесей в вещество. Она позволяет вычислять электронную останавливающую способность любого иона в любом материале (включая газообразные мишени) на основе усредняющей параметризации широкого спектра экспериментальных данных.

2. Результаты и обсуждение

Были сформированы слои с различными типами примеси, их концентрацией и распределением по глубине. Глубины распределения внедренной примеси, рассчитанные на программе SRIM-2013, представлены на рис. 1. Формируются слои n-типа и электрически нейтральный слой в p-типа Si путем ИИ ионами Mn^+ и As^+ с распределениями примеси на глубинах $d = 800$ Å, $d = 640$ Å. При последовательной ИИ акцепторными и донорными ионами In^+ и As^+ формируется суммарный слой с глубиной распределения $d = 540$ Å (рис. 1).

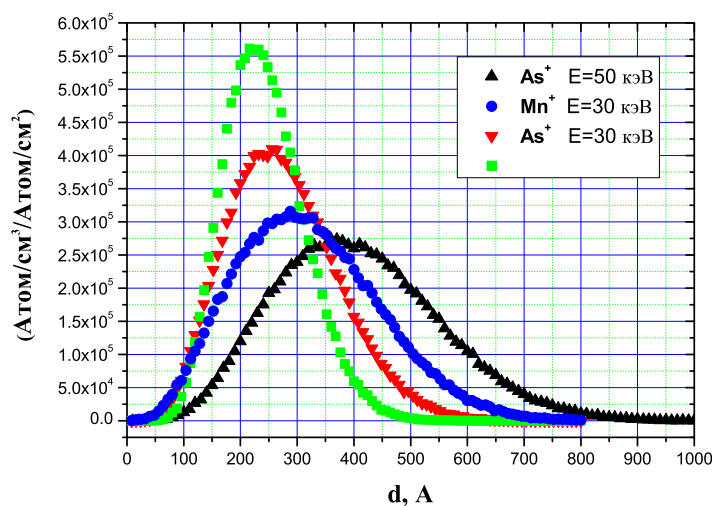


Рис. 1. Глубина распределения ионов после ИИ в Si ионов As^+ с энергией $E = 50$ кэВ, ионов Mn^+ с энергией $E = 30$ кэВ и последовательно ионами In^+ и As^+ с энергиями по $E = 30$ кэВ

Fig. 1. Ion distribution profile after Si implantation with As^+ ions with an energy $E = 50$ keV, Mn^+ ions with an energy $E = 30$ keV, as well as sequential implantation with In^+ and As^+ ions with an energy $E = 30$ keV each

На рис. 2 (а, б, в) показаны микрофотографии структур на поверхности Si-образцов, полученных после ИСО с плотностью мощности $w = 20 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$ и длительностью 6 с на установке Импульс-6. Видно, что мощные световые импульсы галогенных ламп приводят к образованию рельефных поверхностей различной формы и плотности. Ранее нами было показано, что локальные области плавления образуются на ростовых дефектах монокристаллического Si или на дефектах, введенных ИИ [9]. Если на Si, имплантированном ионами As^+ , наблюдаются фигуры правильной формы и с относительно упорядоченным расположением (рис. 2а), то в других случаях видны случайно расположенные микрофигуры совершенно неправильной формы. Вероятно, что вклад в удлиненную форму микроструктур на рис. 2в внесла именно ИИ ионами In^+ . То, что условия ИСО для всех образцов были абсолютно идентичными и энергии для ионов Mn^+ и In^+ были одинаковыми, позволяет предположить, что ключевую роль в формообразовании дает именно атомная масса имплантируемых элементов. Существенную роль играют процессы рекристаллизации Si в течение светового импульса до достижения образцом температуры локального плавления.

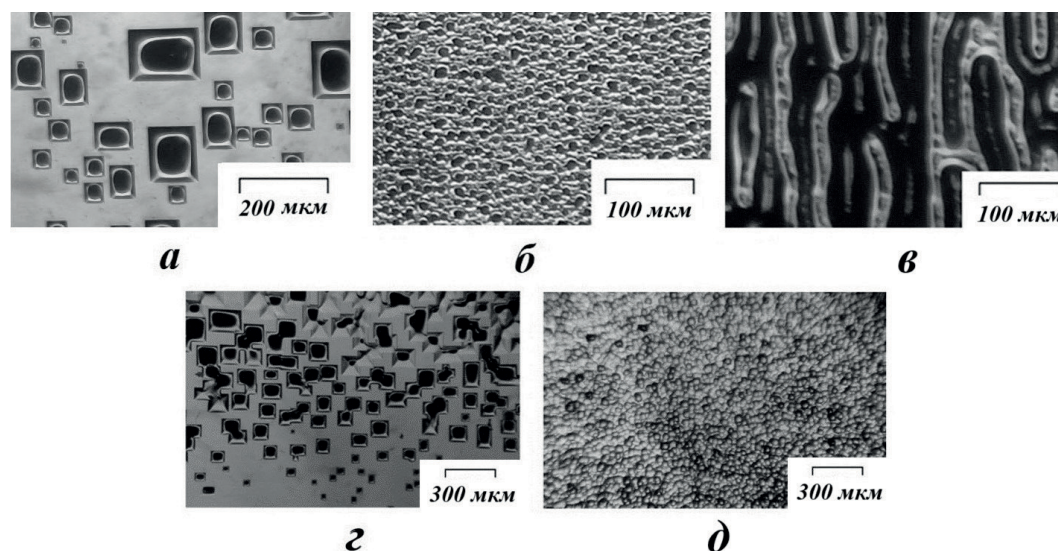


Рис. 2. Микрофотографии поверхности ионно-имплантированного Si (100) (а – ионами As^+ с энергией имплантации $E = 50 \text{ кэВ}$ и дозой $D = 3.1 \times 10^{15} \text{ см}^{-2}$, б – ионами Mn^+ с энергией имплантации $E = 30 \text{ кэВ}$ и дозой $D = 2 \times 10^{16} \text{ см}^{-2}$, в – ионами In^+ и As^+ последовательно энергиями имплантации $E = 30 \text{ кэВ}$ и дозами $D = 210^{16} \text{ см}^{-2}$ для каждого) после ИСО длительностью $t = 6 \text{ с}$. Для сравнения представлены фотографии, полученные нами ранее после обработки на установке УОЛ.П-1: неимплантированного Si КДБ-1 (100) при плотности мощности светового импульса $w = 1200 \text{ Вт} \cdot \text{см}^{-2}$ и длительностях 70 мс (г) и 90 мс (д) (поверхность перед ИСО была отшлифована) [11]

Fig. 2. Micrographs of ion-implanted Si (100) surface (a – As^+ ions with an implantation energy $E = 50 \text{ keV}$ at a dose $D = 3.1 \times 10^{15} \text{ cm}^{-2}$, b – Mn^+ ions with an implantation energy $E = 30 \text{ keV}$ at a dose $D = 2 \times 10^{16} \text{ cm}^{-2}$, c – In^+ and As^+ ions sequentially with an implantation energy $E = 30 \text{ keV}$ at a dose $D = 2 \times 10^{16} \text{ cm}^{-2}$ after the pulsed light annealing for $t = 6 \text{ s}$. For comparison, micrographs of non-implanted Si KDB-1 (100) obtained earlier after the pulsed light annealing in the UOL.P-1 setup at a power density $w = 1200 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$ and $t = 70 \text{ ms}$ (d) and 90 ms (e) (the surface was sanded before annealing) [11]

Для модифицированных Si-образцов были измерены коэффициенты отражения R_{ang} под углом к соответствующим поверхностям структур и проведено их сравнение со значениями для исходных поверхностей R_{ini} (которые были до структурирования). Результаты измерений представлены в табл. 1. Сравнение микрофотографий на рис. 2 показывает, что на изменение R_{ang} оказали существенное влияние формы рельефных структур. Это можно ясно увидеть при сопоставлении микрофотографии на рис. 2б, 2д. Данные структуры внесли заметный вклад в уменьшение коэффициента отражения.

Табл. 1. Коэффициент отражения поверхности Si до и после формирования рельефных структур
Table 1. Reflection coefficient of Si surface before and after the formation of relief structures

Рисунок	Ион / E, кэВ / D, см ⁻²	λ , нм	R_{ini}	R_{ang}	$(R_{ini}-R_{ang}) / R_{ini} \times 100, \%$
2 а	As ⁺ / 50 / 3.1×10^{15}	405	0.46	0.46	0
		532	0.36	0.35	1
		630	0.34	0.31	3
2 б	Mn ⁺ / 30 / 2×10^{16}	405	0.46	0.46	0
		532	0.36	0.34	2
		630	0.34	0.33	1
2 в	In ⁺ и As ⁺ / по 30 / по 2×10^{16}	405	0.46	0.46	0
		532	0.36	0.34	2
		630	0.34	0.30	4
2 г	без ИИ	405	0.46	0.43	3
		532	0.36	0.32	4
		630	0.34	0.27	7
2 д	без ИИ	405	0.46	0.45	1
		532	0.36	0.33	3
		630	0.34	0.28	6

Заключение

Показано, что ИИ различными ионами позволяет получать различные морфологические состояния на изначально гладких поверхностях полупроводниковых подложек, в частности, Si. Некоторые из образуемых микроструктур представляют интерес для разработки компонентов солнечной энергетики. Используемые ионы и режимы ИСО позволили снизить коэффициент отражения поверхности Si на 4 %.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. Королева Д.А., Шайдаков В.В., Целищев В.А. Солнечная энергетика: учеб. пособие. Вологда.: Инфра-Инженерия, 2023. 140 с.
2. Upadhyay R., Tripathi M., Pandey A. Surface modification of semiconductor photoelectrodes for better photoelectrochemical performance // High Energy Chem. 2013. V. 47, No 6. P. 308–314. <https://doi.org/10.1134/S0018143913060106>.
3. Guijarro N., Prevot M.S., Sivula K. Surface modification of semiconductor photoelectrodes // Phys. Chem. Chem. Phys. 2015. V. 17, No 24. P. 15655–15674. <https://doi.org/10.1039/C5CP01992C>.
4. de Lima Monteiro D.W., Honorato F.P., de Oliveira Costa R.F., Salles L.P. Surface texturing with hemispherical cavities to improve efficiency in silicon solar cells // Int. J. Photoenergy. 2012. V. 2012, No 1. Art. 743608. <http://dx.doi.org/10.1155/2012/743608>.
5. Lee H.-S., Suk J., Kim H., Kim J., Song J., Jeong D.S., Park J.-K., Kim W.M., Lee D.-K., Choi K.J., Ju B.-K., Lee T.S., Kim I. Enhanced efficiency of crystalline Si solar cells based on kerfless-thin wafers with nanohole arrays // Sci. Rep. 2018. V. 8, No 1. Art. 3504. <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-018-21381-2>.
6. Fedorenko L., Medvid A. Laser-induced nano-structuring of semiconductors and metals in near surface layers by nanosecond pulses // Adv. Mater. Res. 2018. V. 1117. P. 9–14. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1117.9>.
7. Stepanov A.L., Farrakhov B.F., Fattakhov Ya.V., Rogov A.M., Konovalov D.A., Nuzhdin V.I., Valeev V.F. Incoherent-light pulse annealing of nanoporous germanium layers formed by ion implantation // Vacuum. 2021. V. 186. Art. 110060. <http://doi.org/10.1016/j.vacuum.2021.110060>.
8. Гаврилова Т.П., Фаррахов Б.Ф., Фаттахов Я.В., Хантимеров С.М., Нуздин В.И., Рогов А.М., Валеев В.Ф., Коновалов Д.А., Степанов А.Л. Изменение состояния поверхности монокристаллического германия в результате имплантации ионами серебра и отжига световыми импульсами // ЖТФ. 2022. Т. 92, вып. 12. С. 1827–1832. <https://dx.doi.org/10.21883/JTF.2022.12.53750.159-22>.
9. Фаттахов Я.В., Баязитов Р.М., Хайбуллин И.Б., Львова Т.Н., Еремин Е.А. Плавление полупроводников при быстром однородном нагреве оптическим излучением // Изв. РАН. Сер. физ. 1995. Т. 59, № 12. С. 136–142.
10. Фаррахов Б.Ф., Фаттахов Я.В., Галляутдинов М.Ф. Оптическая дифракционная методика контроля твердофазной рекристаллизации и нагрева имплантированных полупроводников при импульсном световом отжиге // ПТЭ. 2019. № 2. С. 93–98. <https://dx.doi.org/10.1134/S0032816219020083>.
11. Фаррахов Б.Ф., Фаттахов Я.В., Степанов А.Л. Модификация поверхности кремния мощными световыми импульсами // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88, № 7. С. 1099–1103. <https://doi.org/10.31857/S0367676524070158>.
12. Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. The Stopping and Range of Ions in Solids. New York, NY: Pergamon Press, 1985. 321 p.

References

1. Koroleva D.A., Shaidakov V.V., Tselishev V.A. *Solnechnaya energetika: ucheb. posobie* [Solar Energy: A Study Guide]. Moscow, Infa-Inzh., 2023. 140 p. (In Russian)
2. Upadhy R., Tripathi M., Pandey A. Surface modification of semiconductor photoelectrodes for better photoelectrochemical performance. *High Energy Chem.*, 2013, vol. 47, no. 6, pp. 308–314. <https://doi.org/10.1134/S0018143913060106>.
3. Guijarro N., Prevot M.S., Sivula K. Surface modification of semiconductor photoelectrodes. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2015, vol. 17, no. 24, pp. 15655–15674. <https://doi.org/10.1039/C5CP01992C>.
4. de Lima Monteiro D.W., Honorato F.P., de Oliveira Costa R.F., Salles L.P. Surface texturing with hemispherical cavities to improve efficiency in silicon solar cells. *Int. J. Photoenergy*, 2012, vol. 2012, no. 1, art. 743608. <http://dx.doi.org/10.1155/2012/743608>.
5. Lee H.-S., Suk J., Kim H., Kim J., Song J., Jeong D.S., Park J.-K., Kim W.M., Lee D.-K., Choi K.J., Ju B.-K., Lee T.S., Kim I. Enhanced efficiency of crystalline Si solar cells based on kerfless-thin wafers with nanohole arrays. *Sci. Rep.*, 2018, vol. 8, no. 1, art. 3504. <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-018-21381-2>.
6. Fedorenko L., Medvid A. Laser-induced nano-structuring of semiconductors and metals in near surface layers by nanosecond pulses. *Adv. Mater. Res.*, 2018, vol. 1117, pp. 9–14. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1117.9>.
7. Stepanov A.L., Farrakhov B.F., Fattakhov Ya.V., Rogov A.M., Konovalov D.A., Nuzhdin V.I., Valeev V.F. Incoherent-light pulse annealing of nanoporous germanium layers formed by ion implantation. *Vacuum*, 2021, vol. 186, art. 110060. <http://doi.org/10.1016/j.vacuum.2021.110060>.
8. Gavrilova T.P., Farrakhov B.F., Fattakhov Ya.V., Khantimerov S.M., Nuzhdin V.I., Rogov A.M., Valeev V.F., Konovalov D.A., Stepanov A.L. Change in the surface state of the single-crystal germanium as a result of implantation with silver ions and annealing with light pulses. *Tech. Phys.*, 2022, vol. 67, no. 12, pp. 1586–1591. <http://dx.doi.org/10.21883/TP.2022.12.55194.159-22>.
9. Fattakhov Ya.V., Bayazitov R.M., Khaibullin I.B., L'vova T.N., Eremin E.A. Melting of semiconductors with rapid homogeneous heating by optical radiation. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Fiz.*, 1995, vol. 59, no. 12, pp. 136–142. (In Russian)
10. Farrakhov B.F., Fattakhov Ya.V., Galyautdinov M.F. An optical diffraction method for controlling the solid-phase recrystallization and heating of implanted semiconductors during pulse light annealing. *Instrum. Exp. Tech.*, 2019, vol. 62, no. 2, pp. 226–231. <https://doi.org/10.1134/S0020441219020076>.
11. Farrakhov B.F., Fattakhov Ya.V., Stepanov A.L. Modification of the implanted silicon surface by a powerful light pulse. *Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys.*, 2024, vol. 88, no. 7, pp. 1122–1125. <https://doi.org/10.1134/S1062873824707189>.
12. Ziegler J.F., Biersack J.P., Littmark U. *The Stopping and Range of Ions in Solids*. New York, NY, Pergamon Press, 1985. 321 p.

Информация об авторах

Булат Фасимович Фаррахов, младший научный сотрудник, Казанский физико-технический институт им. Е.К. Завойского Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: *bulat_f@mail.ru*

Author Information

Bulat F. Farrakhov, Junior Researcher, Zavoisky Physical-Technical Institute, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: *bulat_f@mail.ru*

Поступила в редакцию 30.06.2025

Принята к публикации 22.08.2025

Received June 30, 2025

Accepted August 22, 2025

ORIGINAL ARTICLE

UDC 004.9

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.786-805>

Formation control of unmanned aerial vehicle swarms for outdoor monitoring in search and rescue tasks

O.V. Frolov¹✉, R.N. Safin², T.G. Tsoy²,
E.A. Martinez-Garcia³, E.A. Magid^{2,1}

¹*HSE University, Moscow, Russia*

²*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

³*Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Zona PRONAF, Chihuahua, Ciudad Juárez, Mexico*

✉ ovfrolov@edu.hse.ru

Abstract

Advancements in robotics have expanded a use of unmanned aerial vehicle (UAV) swarms in critical tasks such as disaster response, including search and rescue operations during floods, hurricanes, landsliding, and earthquakes. Swarm formation control stands as a critical challenge in UAV swarm control. In this article, a simple and resource-efficient method for addressing collisions within swarm formations during outdoor missions is proposed, along with a set of formations designed for various task requirements. The proposed algorithm is implemented using the Robot Operating System (ROS) for a swarm of ten PX4-LIRS UAVs. Experiments conducted in the Gazebo simulator demonstrated the algorithm's effectiveness, with the quantitative results presented through mean and standard deviations of the absolute positioning error measurements.

Keywords: UAV, swarm control, leader–followers, swarm formation, ROS, Gazebo

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

For citation: Frolov O.V., Safin R.N., Tsoy T.G., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A. Formation control of unmanned aerial vehicle swarms for outdoor monitoring in search and rescue tasks. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 786–805. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.786-805>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.9

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.786-805>

Управление роем беспилотных летательных аппаратов для мониторинга открытой местности при поисково-спасательных операциях

О.В. Фролов¹ ✉, Р.Н. Сафин², Т.Г. Цой²,
Э.А. Мартинез-Гарсия³, Е.А. Магид^{2,1}

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

³Автономный университет Сьюдад-Хуарес, зона PRONAF, Чиуауа, г. Сьюдад-Хуарес, Мексика

✉ ovfrolov@edu.hse.ru

Аннотация

Современные достижения в области робототехники открывают новые возможности для применения роя беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в критических ситуациях. Например, группы БПЛА могут быть эффективно использованы для проведения поисково-спасательных операций во время наводнений, ураганов, оползней и землетрясений. В данной работе рассматривается проблема управления формациями роя БПЛА, которая, в свою очередь, определяет общую результативность управления роем БПЛА в ходе выполнения миссии. Разработан простой и малозатратный метод предотвращения столкновений внутри роя БПЛА во время полета на открытой местности. Предлагаются типы формаций роя БПЛА, адаптированные под решение различных задач. Разработанный алгоритм реализован в Робототехнической Операционной Системе (ROS) на примере роя из десяти БПЛА PX4-LIRS. Его эффективность подтверждена по результатам проведенных экспериментов в виртуальной среде Gazebo. Количественные данные экспериментов представлены в виде значений среднего и стандартного отклонений абсолютной ошибки позиционирования БПЛА.

Ключевые слова: БЛА, роевое управление, лидер–последователи, формация роя БЛА, ROS, Gazebo

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (ПРИОРИТЕТ-2030).

Для цитирования: Frolov O.V., Safin R.N., Tsoy T.G., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A. Formation control of unmanned aerial vehicle swarms for outdoor monitoring in search and rescue tasks // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 786–805. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.786-805>.

Introduction

Modern robotics offers great opportunities to automate and streamline various civilian tasks, including disaster response [1,2], agriculture management [3], and healthcare [4]. However, this mission is beyond the capabilities of a single robot, which are inherently limited, and requires multiple robots to work together as a cohesive system. The coordination of large groups of robots is the primary objective of swarm robotics [5], a field that focuses on the effective use of the collective operation of UAV swarms, ranging in size from a few to dozens or even hundreds of units [6,7].

In the civilian domain, UAV swarms have already been actively employed to monitor and tackle natural disasters [8], such as floods [9], tsunamis [10], and earthquakes [10,11], highlighting their potential in addressing critical real-world challenges. During urban search and rescue (USAR) operations, UAV swarms can collaborate to locate survivors [12]. Robots make such operations more successful and safer by working in parallel, performing several tasks autonomously without requiring direct involvement of rescuers, and covering large disaster-struck areas [13].

The performance of UAV swarms depends on many factors. Among them is the need for appropriately designed UAV swarm control algorithms and, particularly, UAV swarm formation control algorithms [14]. Extensive research efforts have been dedicated to developing, optimizing, and improving such algorithms. The ant colony optimization algorithm [15], maintaining UAV swarm coordination in environments with interference in radio communication channels, is the most famous one.

Although significant progress has been achieved in managing the architecture of UAV swarms and their trajectory, this is still quite a difficult issue, especially in what concerns collision avoidance during the formation flight and synchronization of moving UAVs within the swarm. These challenges are particularly evident in centralized control concepts, where key decisions are made by a human operator and an assigned swarm leader, with other UAVs acting as followers. Collision-avoidance strategies must be tailored to the specific operating environment. Simple and straightforward algorithms are sufficient for open areas, while confined spaces demand more advanced solutions (e.g., artificial potential fields [16]).

This article presents a swarm formation control approach based on centralized control through a swarm leader [17]. In this approach, an operator interacts directly with the leader, who is responsible for decision making, transmitting commands to followers, and synchronizing their actions. The algorithm integrates a collision avoidance mechanism by assigning a unique altitude to each UAV before the formation construction begins. Although decentralized swarm control approaches may improve collision avoidance during formation flights, a centralized approach remains the simplest and most resource-efficient, making it particularly suitable for open spaces such as flood-affected zones.

For the above purpose, we propose a set of 10 formations designed for various tasks and demonstrate their implementation using the Robot Operating System (ROS, [18]), the Gazebo simulator [19], and the PX4-LIRS UAV package [20].

The article is organized as follows. Section 1 reviews related works and methods used in the development of the proposed algorithm. Section 2 provides a detailed description of the UAV swarm formation control algorithm. Section 3 outlines virtual experiments conducted in the Gazebo simulator and discusses experimental results. Section 4 presents the main conclusions and highlights perspectives for future research, development, and application of the proposed algorithm.

1. Related Works

All UAV swarm control algorithms can be classified into centralized and decentralized. Centralized algorithms [21] manage a UAV swarm through a single leader. In contrast, decentralized algorithms [22,23] rely on distributed control, with UAVs exchanging information and executing their own instructions. In some cases, hybrid algorithms combine both these approaches, as discussed in [24]. In our UAV swarm formation control algorithm, we implemented a centralized approach. While many centralized swarm control algorithms are based on multilayer UAV swarms [25], we, in order to simplify experiments, used a single-layer hierarchy with a small UAV swarm for our simulations.

Maintaining a safe distance between flying UAVs is a key issue in UAV swarm control. Many UAV swarm control algorithms leverage the Fixed Global Difference (FGD) concept, which was introduced in [26] for a single formation type with the virtual experiments carried out in the Gazebo simulator and without suggesting any performance evaluation metrics. In contrast, we applied FGD to develop a centralized UAV swarm control approach and validated it through virtual experiments in the Gazebo environment for different types of swarm formations. The results of the experiments were then evaluated. Although more accurate and flexible UAV swarm control algorithms have been proposed, such as those based on distributed consensus and convex hulls [27], pigeon-inspired optimization [28], and artificial potential field method [29], FGD remains the simplest and more resource efficient algorithm for UAVs, allowing them to maintain a fixed distance from each other.

Another pressing challenge for UAV swarm formation control algorithms is enabling collision avoidance. In [30], a modification of the Vector Field Histogram (VFH) algorithm was proposed to provide a collision avoidance mechanism (between UAVs and obstacles) with an information sharing strategy among UAVs within the same swarm. However, this approach can be unnecessarily resource-intensive for certain conditions than other simple methods (e.g., operating in open space with obstacles other than neighboring UAVs). An alternative solution involves analyzing the flight trajectories of UAVs, as suggested in [31], which may also encounter difficulties in large swarms. An effective UAV swarm control algorithm should find an equilibrium between efficiency and resource consumption. Our algorithm incorporates efficient collision handling mechanisms for UAV moving collectively in open spaces. GPS-denied conditions [32] introduce interference risks. Vision-based techniques can be utilized to facilitate this problem [33].

In [17], various methods for UAV swarm formation control are described. The main idea is that artificial intelligence (AI) algorithms can enhance traditional swarm control methods. Therefore, the algorithm proposed in our work could be further improved with AI-based solutions, such as preventing interference in the UAV localization process or detecting and avoiding nearby obstacles, including neighboring UAVs.

2. Formation Control Algorithm

In this section, we describe the proposed UAV swarm formation control algorithm and a set of predefined swarm formations. The algorithm comprises several stages:

- (a) Setting algorithm parameters: the distance between UAVs, the circle radius (for circular formations only), the rotation angle of the formation (orientation), and the sector angle.
- (b) Assigning a unique altitude to each UAV in the swarm (as described in Equation (12)).

- (c) Generating the UAV positions in the formation based on the selected formation type and parameters (as shown in Equations (1)–(11)) in the coordinate system relative to the leader.
- (d) Flying each UAV to its designated position in the formation while maintaining its unique altitude.
- (e) Adjusting the altitude of each UAV so that it is equal to the altitude of the leader.

To construct a formation, a coordinate grid is generated relative to the global position of the leader, obtained using GPS. The grid defines potential positions of the followers in the formation, which are transmitted to them. It is discretized into square cells of equal size (each with the side length P), which is set by an operator and represents a distance between the UAVs in the formation. In the case of circular and sector formations, P is the radius, and the coordinate grid is a reference to define the orientations of the leader and the followers during the formation flight. When the coordinate grid is generated, the leader calculates the positions of the followers for the selected formation type and sends the coordinates to them so that they can adjust their positions appropriately. The leader broadcasts a signal to the followers to fly in the fixed altitudes according to Equation (12). Upon reaching their assigned altitudes, the followers notify the leader. The latter sends the formation coordinates. The followers navigate to the received coordinates (to their goal or target points) and confirm upon arrival. Finally, the leader sends a command to equalize the altitudes.

In our previous work [34], we described the following formations: wedge, circle, echelon, and flanks. Here, we introduce a new set of formations: modified wedge (the UAV swarm leader is positioned as the first UAV and moves slightly ahead of the wedge, see Fig. 1, a); sector (Fig. 1, b); column (Fig. 2, a); snake (Fig. 2, b); front (Fig. 3, a); chess (Fig. 3, b), with up to 6 UAVs per row; boundary rectangle (Fig. 4, a) and filled rectangle (Fig. 4, b), each with up to 6 UAVs per row; boundary rhombus (Fig. 5, a); filled rhombus (Fig. 5, b). It is important to note that all these formations, except for the circular and sector formations, use a coordinate grid generated relative to the leader's position. In the circular and sector formations, the leader's position is the center of the circle, and the followers are evenly distributed along the boundary of the circle or sector in accordance with a user-defined radius.

The leader's workflow (Fig. 6) includes the following steps:

- 1) An operator sets the formation parameters: P (the edge length of each grid cell or the circle and sector radius), formation type, and orientation.
- 2) Upon receiving the parameters, the leader generates a coordinate grid and calculates the relative positions of the followers.
- 3) The leader signals the followers to set their individual altitudes as defined in Equation (12).
- 4) Once the followers reach their altitudes, they confirm to leader.
- 5) The leader sends the formation coordinates to the followers, and they navigate to these goal points.
- 6) Upon reaching their goal points, the followers notify the leader, and when all confirmations are received, the leader sends the command to equalize the altitudes.

The followers' workflow is depicted in Fig. 7:

- 1) The follower receives the command from the leader to set its individual altitude and adjusts to the assigned altitude.

- 2) Once the assigned altitude is reached, the follower notifies the leader.
- 3) The follower receives the coordinates of its goal point and starts moving towards it.
- 4) Upon reaching the goal point, the follower notifies the leader.
- 5) The follower waits for the command from the leader to equalize the altitude.

The communication between an operator and the UAV leader and between the UAV leader and the UAV followers is shown as an interaction diagram in Fig. 8.

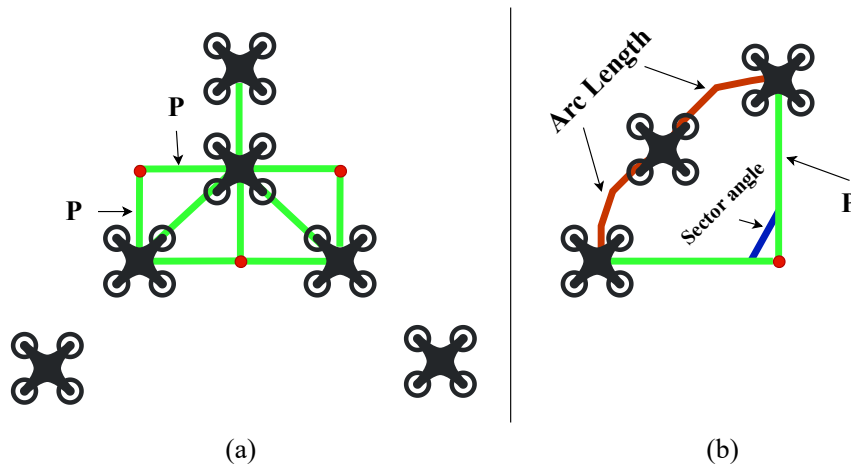


Fig. 1. Schemes of the modified wedge (a) and sector (b) formations for 6 and 3 UAVs, respectively. The red dots represent 3 unoccupied vertices in the grid to demonstrate the formation structure. In the sector formation (b), the red dot indicates the circle center. P specifies either the edge length between adjacent UAVs along the X- and Y-axes for the grid formations or the radius for the circular and sector formations

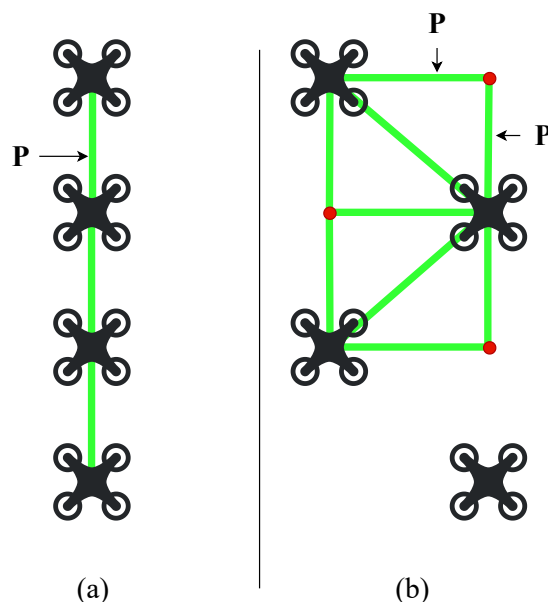


Fig. 2. Schemes of the column (a) and snake (b) formations for 4 UAVs. The red dots represent unoccupied vertices in the grid. P specifies the edge length between adjacent UAVs along the X- and Y-axes

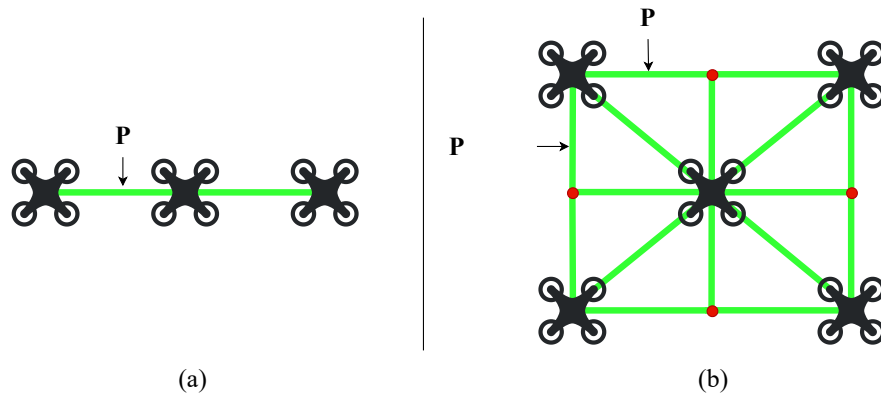


Fig. 3. Schemes of the front (a) and chess (b) formations for 3 and 5 UAVs, respectively. The red dots represent 3 unoccupied vertices in the grid to demonstrate the formation structure. P specifies the edge length between adjacent UAVs along the X and Y axes

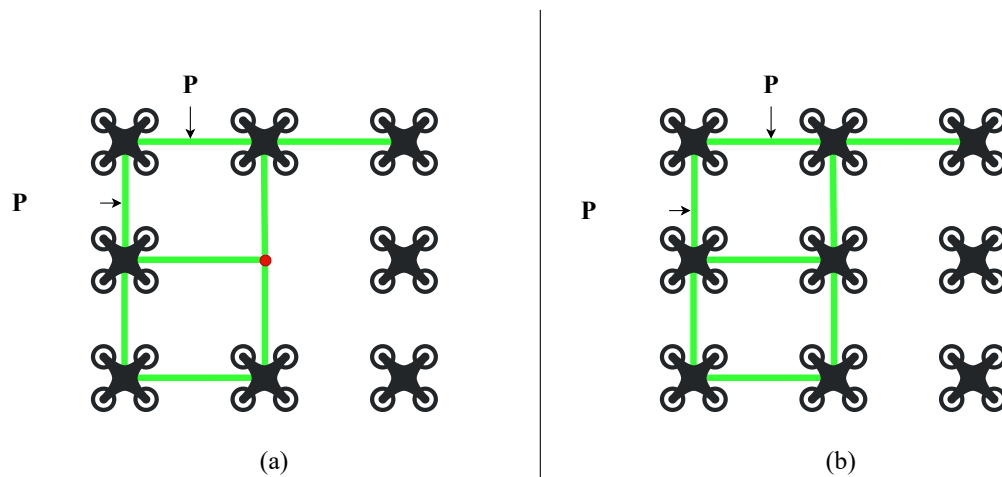


Fig. 4. Schemes of the boundary rectangle (a) and filled rectangle (b) formations for 8 and 9 UAVs. The red dot represents a single unoccupied vertex in the middle of the rectangular to demonstrate the formation structure. P specifies the edge length between adjacent UAVs along the X - and Y -axes

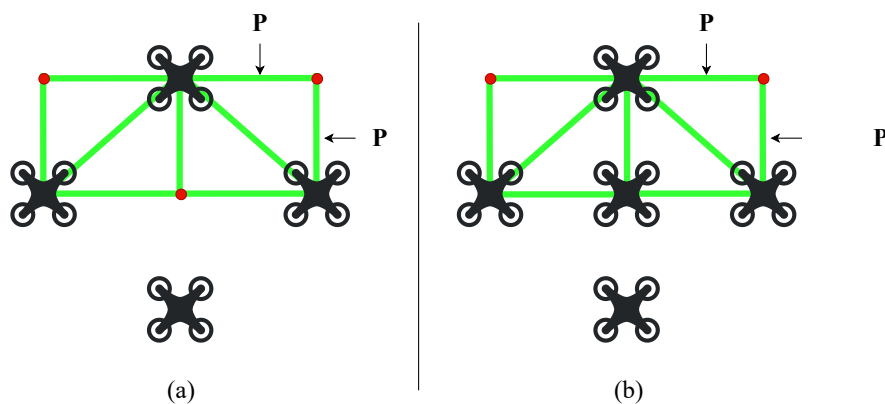


Fig. 5. Schemes of the boundary rhombus (a) and filled rhombus (b) formations for 4 and 5 UAVs. The red dots represent unoccupied vertices in the grid to demonstrate the formation structure. P specifies the edge length between adjacent UAVs along the X - and Y -axes

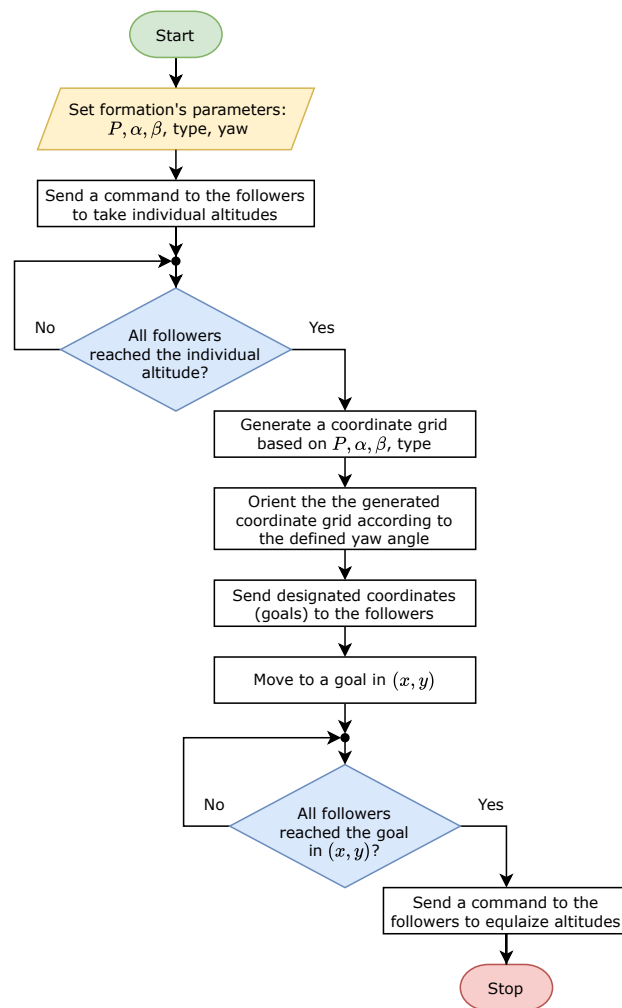


Fig. 6. Leader UAV's workflow. P is the formation parameter, α is the sector angle in radians, β is the rotation angle of the formation (orientation) in radians

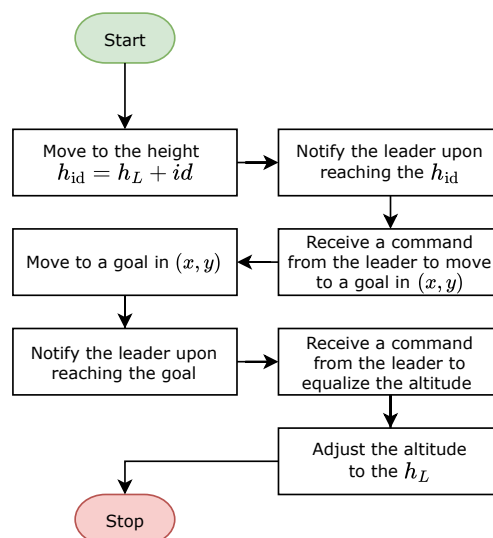


Fig. 7. Follower UAV's workflow

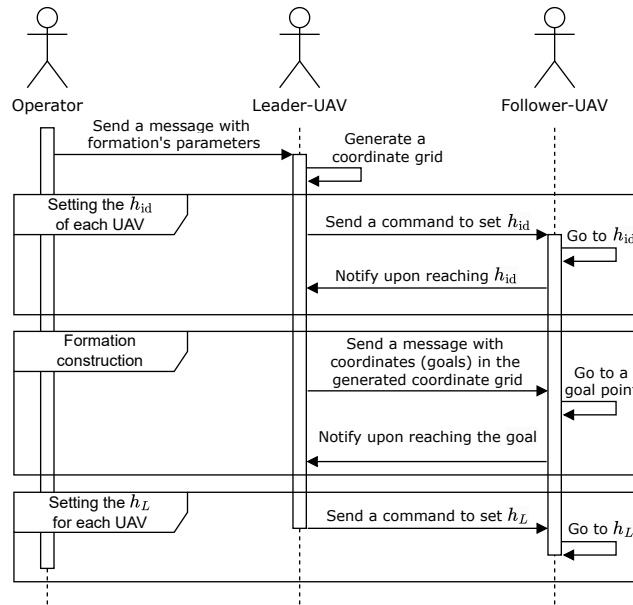


Fig. 8. Interaction diagram of the swarm's communication processes

In the equations below, $i = 0$ is the leader's identifier, and the positions of other UAVs are calculated relative to the leader's position. The followers' identifiers are in the range of $[1, n - 1]$ for a swarm of n UAVs.

The coordinates of the *modified wedge* formation are defined as follows:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_{i-1}, y_{i-1} - P), & \text{if } i = 1, \\ (x_{i-1} - P, y_{i-1} - P), & \text{if } 1 < i < \frac{n}{2}, \\ (x_1 + P, y_1 - P), & \text{if } i = \frac{n}{2}, \\ (x_{i-1} + P, y_{i-1} - P), & \text{if } \frac{n}{2} < i < n. \end{cases} \quad (1)$$

The coordinates of the *column* formation are determined from:

$$(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1} - P). \quad (2)$$

The coordinates of the *snake* formation are expressed as:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_{i-1} + P, y_{i-1} - P), & \text{if } i \bmod 2 = 0, \quad i < n, \\ (x_{i-1} - P, y_{i-1} - P), & \text{if } i \bmod 2 > 0, \quad i < n. \end{cases} \quad (3)$$

The coordinates of the *front* formation are calculated as:

$$(x_i, y_i) = (x_{i-1} + P, y_{i-1}), \text{ if } i < n - 1. \quad (4)$$

To obtain the coordinates of the *chess* formation, we have

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_{i-1} + 2 \cdot P, y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \\ (x_0 + P, y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \quad l \bmod 2 \neq 0, \\ & \text{switching to the next line,} \\ (x_0, y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \quad l \bmod 2 = 0, \\ & \text{switching to the next line,} \end{cases} \quad (5)$$

where l is the index of the current line.

The coordinates of the *boundary rectangle* formation are defined as follows:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_{i-1} + P, y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if first or last in line,} \\ (x_{i-1} - 5 \cdot P, y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if switching to the next line,} \\ (x_{i-1} + 5 \cdot P, y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if not first or last in line.} \end{cases} \quad (6)$$

The coordinates of the *filled rectangle* formation are found from:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_{i-1} + P, y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \\ (x_{i-1} - 5 \cdot P, y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if switching to the next line.} \end{cases} \quad (7)$$

The coordinates of the *boundary rhombus* formation are specified as:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_0 + P \cdot (l - 1), y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if UAV}_i \text{ first in line,} \\ (x_0 - P \cdot (l - 1), y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \text{ if UAV}_i \text{ not first in line,} \end{cases} \quad (8)$$

where l represents the number of UAVs in the current line of the rhombus. The value of l increases as it approaches the center of the rhombus and decreases after passing the center.

The coordinates of the *filled rhombus* formation are defined as follows:

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_0 + P \cdot (\text{sum} - 1), y_{i-1} - P), & \text{if } 0 < i < n, \text{ UAV}_i \text{ is first in line,} \\ (x_{i-1} - 2 \cdot P, y_{i-1}), & \text{if } 0 < i < n, \\ & \text{UAV}_i \text{ is not first in line,} \end{cases} \quad (9)$$

where sum is a number of UAVs in the current line.

The coordinates of the *sector* formation are calculated using the following expression:

$$\theta_i = i \cdot \frac{\alpha}{n-1}, \quad d(x, y) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \quad (10)$$

for UAV index $i \in [0, \dots, n-1]$, swarm size n , sector angle α (rad), and arc length $d(x, y)$.

$$(x_i, y_i) = \left(x_{\text{start}} + \frac{\alpha \cdot P^2 \cdot \cos \theta_i}{d(x, y)}, y_{\text{start}} + \frac{\alpha \cdot P^2 \cdot \sin \theta_i}{d(x, y)} \right), \quad (11)$$

where $(x_{\text{start}}, y_{\text{start}})$ is an initial position of the leader before the formation construction process.

An operator can rotate the formation to the desired orientation using the equation:

$$(x_i, y_i) = (x_i \cdot \cos \beta - y_i \cdot \sin \beta, x_i \cdot \sin \beta + y_i \cdot \cos \beta),$$

where $i \in [0, 1, \dots, n-1]$ and β is the orientation (in radians).

The individual altitude of each follower UAV is determined as described in our previous research [34]:

$$h_{id} = h_L + id, \quad (12)$$

where h_{id} is the follower's altitude, h_L is the leader's altitude, and id is the follower's identifier.

When each follower receives h_{id} , the leader assigns the formation coordinates to the followers. Then each UAV moves to its goal point (target). Once all followers confirm reaching their targets, the leader commands them to equalize their altitudes: $h_{id} = h_L$, where h_{id} denotes the follower's altitude and h_L represents the altitude of the leader.

Since this algorithm is feasible in simulation, the global coordinates of the leader can be easily determined using a plugin that simulates the GPS module of the swarm leader. However, in real-world scenarios, the leader would require additional sensors for localization, such as front- and downward-facing cameras, alongside GPS.

3. Virtual Experiments

This section presents the results of simulations performed to validate the proposed algorithm's performance. The screenshots of the simulated formation flights are provided. For our experiments, we used a Pixhawk 4 based UAV model developed by the Intelligent Robotic Systems Laboratory [20].

The hardware setup for the virtual experiments included the Intel Core i5-12450H processor, 16 GB of RAM, and 30 GB of storage. The software environment consisted of Ubuntu Focal Fossa, ROS Noetic Ninjemys, Gazebo 11, and PX4-LIRS UAV plugin.

In our previous research [34], the virtual experiments were conducted for the wedge, echelon, flank, and circular formations using a tiny swarm of 5 UAVs. The current study expands previous experiments by using a swarm of 10 UAVs and a broader range of formation types.

3.1. Gazebo simulations. The virtual experiments were conducted in the ROS/Gazebo environment to evaluate the performance of the proposed formation control algorithm. For all formations, the parameters were set to $P = 5$, $\beta = 0$, and $\alpha = 90$. To assess the accuracy of the algorithm, an absolute error between the UVA actual position and its actual position assigned by the leader was calculated.

The simulation starts with all UAVs initially located on the ground. The operator commands the swarm leader to take off (Fig. 9, a), establish a connection to the followers, and instruct them to take off as well (Fig. 9, b). When the entire swarm lifts in the air, the operator sets the formation parameters and sends the command to the leader. The leader assigns individual altitudes to the followers and broadcasts their positions within the formation. This initiates the formation construction process.

The altitude adjustment for the followers of the modified wedge formation is shown in Fig. 10, a. Once this process is completed, the formation construction begins. When the formation is successfully achieved (i.e., all UAVs reach their goal positions), the leader sends a signal to equalize the altitudes (Fig. 10, b).

For a swarm of 10 UAVs, the operator specifies the parameters P (in meters), α , and β . In the chess formation, the UAVs are organized in a checkerboard-like asymmetric grid, with a distance $\sqrt{P}$ between the adjacent UAVs and $2P$ between the neighbors (in the XY-plane) aligned horizontally (X-axis) or vertically (Y-axis). Fig. 11 shows the completed chess formation. In the filled rhombus formation, the parameter P defines the spacing between the UAVs. The leader determines the number of lines, constituting one half of the rhombus, and assigns positions to the followers accordingly. The UAVs within the same line are spaced by $2P$, while those aligned along a diagonal line are separated by $\sqrt{P}$. Fig. 12 illustrates the filled rhombus formation, which fits all 10 UAVs but remains incomplete, as the nearest properly filled rhombus of comparable size would require either 9 or 16 UAVs. The sector formation construction process starts when the leader calculates the length of an arc according to P as a radius and α as an angle of the circle sector and distributes the followers evenly along this arc. The completed sector formation is illustrated in Fig. 13.

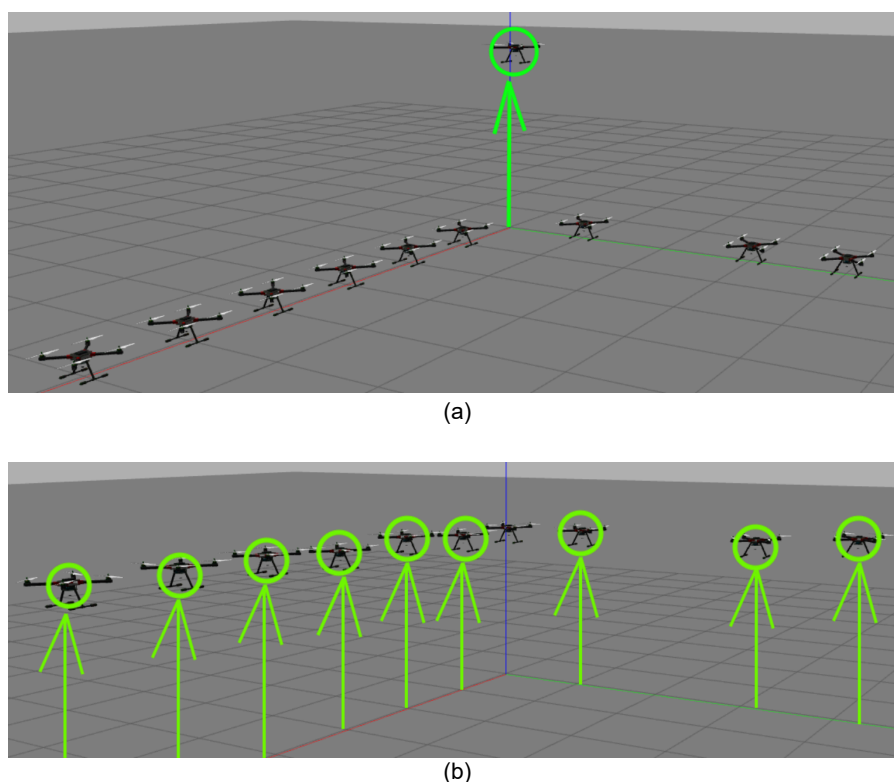


Fig. 9. Takeoff process of the UAV leader (a) and the UAV followers (b). The UAVs are highlighted with the green ellipses, and the green arrows indicate the takeoff direction

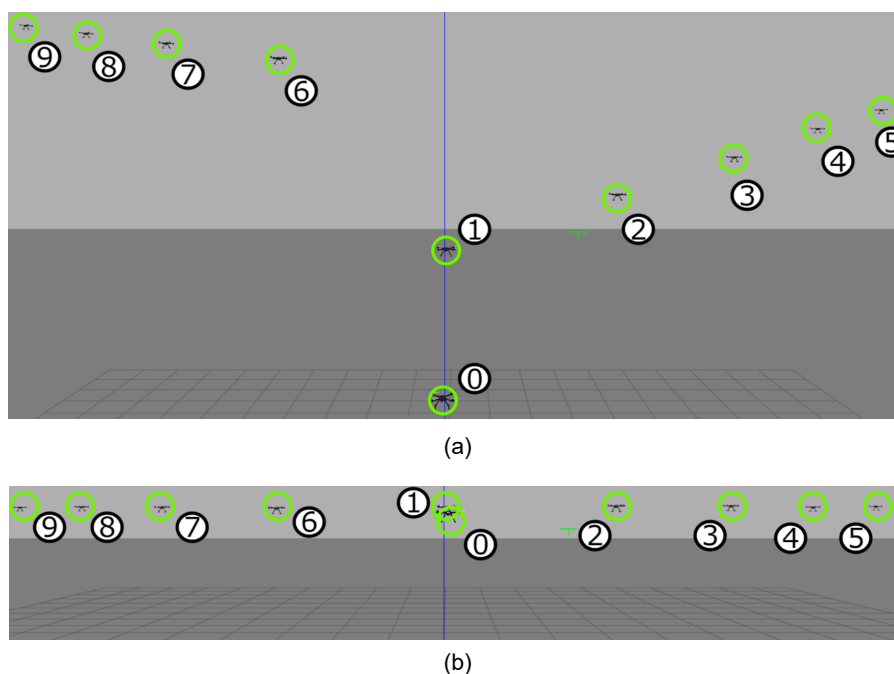


Fig. 10. Altitude adjustment (a) and altitude equalization (b) for the modified wedge formation. The individual altitude of each UAV is set to the sum of its own identifier and the leader's altitude. During the altitude equalization process, the altitude of each UAV is adjusted to match the leader's altitude. Each UAV is highlighted with the green ellipse, and the identifiers are displayed within the white circles

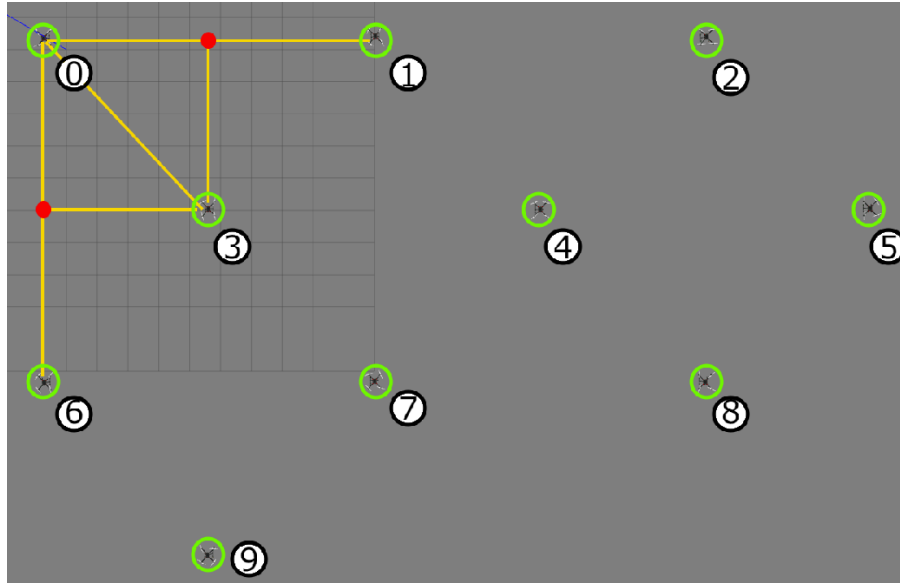


Fig. 11. 10 UAVs checkerboard formation with $P = 5$ m. Each UAV is highlighted with the green ellipse, and the identifiers are displayed within the white circles. The red ellipses visualize two unoccupied vertices

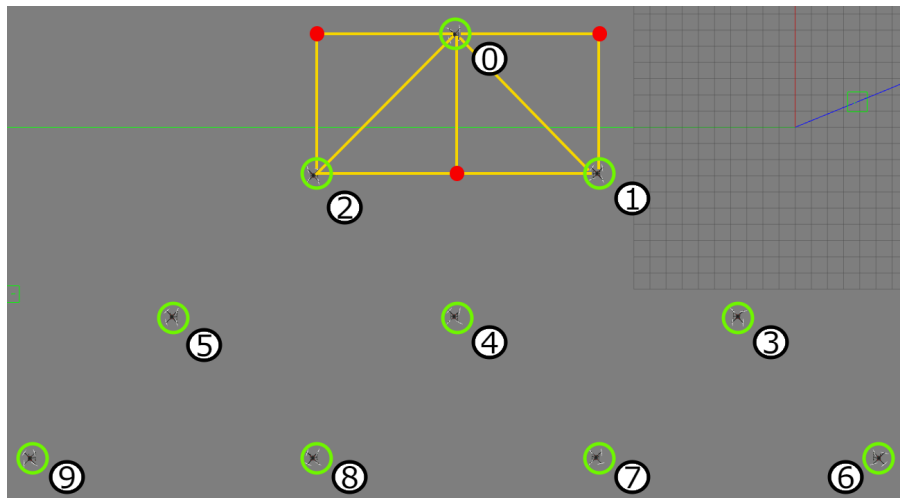


Fig. 12. Completed 10 UAVs filled rhombus formation with $P = 5$ m. Each UAV is highlighted with the green ellipse, and the identifiers are displayed within the white circles. The red ellipses indicate three of the unoccupied vertices

3.2. Results. To evaluate effectiveness of the proposed solution, an absolute error for each UAV was calculated using the following equation:

$$\Delta = (|x_{\text{exp}} - x_{\text{real}}|, |y_{\text{exp}} - y_{\text{real}}|),$$

where x_{exp} and y_{exp} are the expected coordinates determined by the leader during the formation construction, x_{real} and y_{real} are the actual coordinates of the UAV. The absolute error quantifies the magnitude of the deviation between the predicted and real positions of the UAVs, providing

a measure of the formation accuracy. Lower values of Δ indicate better adherence to the desired formation, whereas higher values of Δ suggest positioning or coordination inaccuracies.

For each formation, the mean absolute error and the standard deviation were calculated as follows:

$$M = (M_x, M_y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \right),$$

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y) = \left(\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_{x_i} - M_x)^2}, \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_{y_i} - M_y)^2} \right),$$

where σ is the standard deviation, M_x and M_y represent the mean values for x and y coordinates, respectively, and Δ_{x_i} and Δ_{y_i} are the absolute errors in the x and y directions.

Table 1 presents the experimental results, with the formation types in the first column, the mean absolute errors (M_x, M_y) in the second column, and the standard deviations (σ_x, σ_y) in the third column.

The mean absolute error (M_x) ranged from 0.019 to 0.255 m (X-axis) and (M_y) from 0.013 to 0.255 m (Y-axis). The sector and boundary rectangle formations exhibited the smallest errors, while the column, filled rhombus, and modified wedge formations showed the highest error values. The snake, chess, filled rectangle, and boundary rhombus formations had comparable error levels, which were lower than those of the column, filled rhombus, and modified wedge formations, but higher than those of the sector and boundary rectangle formations.

The Gazebo simulator provides plugins for wind [36] and noise generation [37] to simulate more realistic UAV movements. It is important to emphasize that the values presented in Table 1 were obtained in a controlled simulation environment, which does not account for real-world factors that can impact the performance of UAVs. In practical scenarios, UAVs may face a range of challenges, such as adverse weather conditions, fluctuating wind speeds, or turbulent air currents, all leading to deviations from expected trajectories. Additionally, other environmental factors, such as obstacles, GPS inaccuracies, and interference from nearby electronic devices, can affect the ability of UAVs to maintain precise positioning.

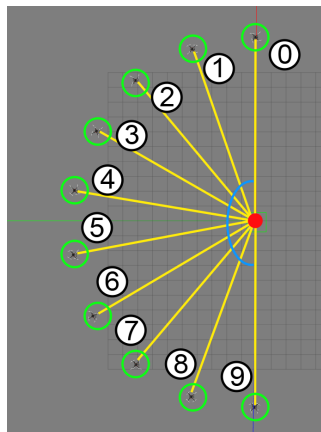


Fig. 13. Completed 10 UAVs sector formation with $P = 5$ m and $\alpha = 180^\circ$. Each UAV is highlighted with the green ellipse, and the identifiers are displayed within the white circles. The red ellipse indicates the circle center. The blue line shows the sector angle

Table 1. Mean values and standard deviations of the absolute errors for each formation

Formation type	(M_x, M_y) , m	(σ_x, σ_y) , m
Modified wedge	(0.136; 0.255)	(0.034; 0.274)
Snake	(0.073; 0.013)	(0.052; 0.02)
Front	(0.045; 0.088)	(0.015; 0.045)
Column	(0.255; 0.073)	(0.289; 0.023)
Chess	(0.084; 0.173)	(0.022; 0.264)
Filled rhombus	(0.169; 0.031)	(0.034; 0.015)
Boundary rhombus	(0.101; 0.043)	(0.036; 0.038)
Filled rectangle	(0.076; 0.107)	(0.002; 0.091)
Boundary rectangle	(0.019; 0.06)	(0.014; 0.026)
Sector	(0.02; 0.037)	(0.065; 0.032)

In contrast, the virtual experiments conducted in this study were carried out under ideal conditions, where wind, noise, and external interference were not simulated. Furthermore, the allowed deviation from the goal point was set at a maximum of 10 cm to maintain a standardized benchmark for evaluation. Therefore, while the results from these virtual experiments provide useful insights, real-world performance might vary due to the presence of additional variables.

Future research should focus on larger swarms with 50 or 100 UAVs and unlock the potential of using supercomputing resources such as cCHARISMa [35]. In addition to interference control, during formation flights, UAV swarms need secure communication protocols, particularly in environments where the entire swarm can be misled as a result of an intervention from unauthorized third parties intercepting and manipulating communication channels to compromise the data exchange between UAVs and an operator.

Conclusions

A leader–follower swarm formation control algorithm was developed and tested through simulations in the ROS and Gazebo environments. Virtual experiments were carried out with the PX4-LIRS UAV 1.0 ROS plugin. Overall, 10 UAV formations were introduced: modified wedge, column, snake, front, chess, boundary rectangle, filled rectangle, boundary rhombus, filled rhombus, and sector. The mean values and standard deviations of the absolute positioning errors due to minor noise sources were calculated. The obtained quantitative results indicate the lowest absolute positioning error in the boundary rectangle formation ($M_x = 1.9$ cm, $M_y = 6$ cm and $\sigma_x = 1.4$ cm, $\sigma_y = 2.6$ cm), which reveals that the UAVs in this formation were the closest to their assigned positions and formed a stable tight cluster. The sector formation demonstrated similar results ($M_x = 2$ cm, $M_y = 3.7$ cm and $\sigma_x = 6.5$ cm, $\sigma_y = 3.2$ cm) and thus was relatively accurate and stable. The worst-performing UAVs were in the column formation ($M_x = 25.5$ cm, $M_y = 7.3$ cm and $\sigma_x = 28.9$ cm, $\sigma_y = 2.3$ cm). The front

($M_x = 4.5$ cm, $M_y = 8.8$ cm and $\sigma_x = 1.5$ cm, $\sigma_y = 4.5$ cm) and snake ($M_x = 7.3$ cm, $M_y = 1.3$ cm and $\sigma_x = 5.2$ cm, $\sigma_y = 2$ cm) formations had moderate accuracy, thus suggesting that more compact swarms tend to drift less.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Papyan N., Kulhandjian M., Kulhandjian H., Aslanyan L. AI-based drone assisted human rescue in disaster environments: Challenges and opportunities. *Pattern Recognit. Image Anal.*, 2024, vol. 34, no. 1, pp. 169–186. <https://doi.org/10.1134/S1054661824010152>.
2. Haddad M.N., Santos A.C., Duhamel C., Coco A.A. Intelligent drone swarms to search for victims in post-disaster areas. *Sensors*, 2023, vol. 23, no. 23, art. 9540. <https://doi.org/10.3390/s23239540>.
3. Catala-Roman P., Segura-Garcia J., Dura E., Navarro-Camba E.A., Alcaraz-Calero J.M., Garcia-Pineda M. AI-based autonomous UAV swarm system for weed detection and treatment: Enhancing organic orange orchard efficiency with agriculture 5.0. *Internet Things*, 2024, vol. 28, art. 101418. <https://doi.org/10.1016/j.iot.2024.101418>.
4. Munawar H.S., Inam H., Ullah F., Qayyum S., Kouzani A.Z., Mahmud M.P. Towards smart healthcare: UAV-based optimized path planning for delivering COVID-19 self-testing kits using cutting edge technologies. *Sustainability*, 2021, vol. 13, no. 18, art. 10426. <https://doi.org/10.3390/su131810426>.
5. Zakiev A., Tsoy T., Magid E. Swarm robotics: Remarks on terminology and classification. In: Ronzhin A., Rigoll G., Meshcheryakov R. (Eds.) *Interactive Collaborative Robotics (ICR 2018)*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 11097. Cham, Springer, 2018, pp. 291–300. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99582-3_30.
6. Rubenstein M., Cornejo A., Nagpal R. Programmable self-assembly in a thousand-robot swarm. *Science*, 2014, vol. 345, no. 6198, pp. 795–799. <https://doi.org/10.1126/science.1254295>.
7. Chen W., Zhu J., Liu J., Guo H. A fast coordination approach for large-scale drone swarm. *J. Network Comput. Appl.*, 2024, vol. 221, art. 103769. <https://doi.org/10.1016/j.jnca.2023.103769>.
8. Glantz E.J., Ritter F.E., Gilbreath D., Stager S.J., Anton A., Emani R. UAV use in disaster management. *ISCRAM 2020: Proc. 17th Int. Conf. on Information Systems for Crisis Response and Management*. Vol. 2020-May. Hughes A.L., McNeill F., Zobel C.W. (Eds.). Blacksburg, VA, ISCRAM, 2020, pp. 914–921.
9. Ma J., Guo D., Bai Y., Svinin M., Magid E. A vision-based robust adaptive control for caging a flood area via multiple UAVs. *Proc. 2021 18th Int. Conf. on Ubiquitous Robots (UR)*. Gangneung, IEEE, 2021, pp. 386–391. <https://doi.org/10.1109/UR52253.2021.9494698>.
10. Bushnaq O.M., Mishra D., Natalizio E., Akyildiz I.F. Chapter 9 – Unmanned aerial vehicles (UAVs) for disaster management. In: Denizli A., Alencar M.S., Nguyen T.A., Motaung D.E. (Eds.) *Nanotechnology-Based Smart Remote Sensing Networks for Disaster Prevention*. Elsevier, 2022, pp. 159–188. <https://doi.org/10.1016/B978-0-323-91166-5.00013-6>.

11. Zhu F., Lu Y.Y., Yang J. Collaborative control technology and prospects of drone swarms in earthquake emergency rescue scenarios. *Proc. 2024 Asia Pac. Conf. on Computing Technologies, Communications and Networking (CTCNet'24)*. New York, NY, Assoc. Comput. Mach., 2024, pp. 83–91. <https://doi.org/10.1145/3685767.3685782>.
12. Arnold R.D., Yamaguchi H., Tanaka T. Search and rescue with autonomous flying robots through behavior-based cooperative intelligence. *J. Int. Humanitarian Action*, 2018, vol. 3, no. 1, art. 18. <https://doi.org/10.1186/s41018-018-0045-4>.
13. Horyna J., Baca T., Walter V., Albani D., Hert D., Ferrante E., Saska M. Decentralized swarms of unmanned aerial vehicles for search and rescue operations without explicit communication. *Auton. Robots*, 2023, vol. 47, no. 1, pp. 77–93. <https://doi.org/10.1007/s10514-022-10066-5>.
14. Ouyang Q., Wu Z., Cong Y., Wang Z. Formation control of unmanned aerial vehicle swarms: A comprehensive review. *Asian J. Control*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 570–593. <https://doi.org/10.1002/asjc.2806>.
15. Perez-Carabaza S., Besada-Portas E., Lopez-Orozco J.A., de la Cruz J.M. Ant colony optimization for multi-UAV minimum time search in uncertain domains. *Appl. Soft Comput.*, 2018, vol. 62, pp. 789–806. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.09.009>.
16. Lv Y., Yang X., Yang Y., Pan S., Xin C. Formation control of UAVs based on artificial potential field. *Proc. 2018 2nd Int. Conf. on Material Engineering and Advanced Manufacturing Technology (MEAMT 2018)*. Ser.: MATEC Web of Conferences. Vol. 189. EDP Sci., 2018, art. 10018. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201818910018>.
17. Bu Y., Yan Y., Yang Y. Advancement challenges in UAV swarm formation control: A comprehensive review. *Drones*, 2024, vol. 8, no. 7, art. 320. <https://doi.org/10.3390/drones8070320>.
18. Quigley M., Gerkey B., Conley K., Faust J., Foote T., Leibs J., Berger E., Wheeler R., Ng A. ROS: An open-source Robot Operating System. *Workshops at the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Vol 3. Kobe, 2009. 6 p.
19. Koenig N., Howard A. Design and use paradigms for Gazebo, an open-source multi-robot simulator. *Proc. 2004 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. Vol. 3. Sendai, 2004, pp. 2149–2154. <https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389727>.
20. Khazetdinov A., Zakiev A., Tsoy T., Svinin M., Magid E. Embedded ArUco: A novel approach for high precision UAV landing. *Proc. 2021 Int. Sib. Conf. on Control and Communications (SIBCON)*. Kazan, IEEE, 2021, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438855>.
21. Li X., Zhou H. UAV formation centralized control method under cooperative flight missions. *Proc. 2023 5th Int. Conf. on Robotics, Intelligent Control and Artificial Intelligence (RICAI)*. Hangzhou, IEEE, 2023, pp. 366–369. <https://doi.org/10.1109/RICAI60863.2023.10489720>.
22. Xia B., Mantegh I., Xie W. Decentralized UAV swarm control: A multi-layered architecture for integrated flight mode management and dynamic target interception. *Drones*, 2024, vol. 8, no. 8, art. 350. <https://doi.org/10.3390/drones8080350>.
23. Anderson B.D., Fidan B., Yu C., Walle D. UAV formation control: Theory and application. In: Blondel V.D., Boyd S.P., Kimura H. (Eds.) *Recent Advances in Learning and Control*. Ser.: Lecture Notes in Control and Information Sciences. Vol. 371. London, Springer, 2008, pp. 15–33. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-155-8_2.

24. Sanju Kumar N.T., Padmapriya M., Reddy J.P., Rajalakshmi P. Centralized and decentralized based swarm of leader and follower formation of autonomous. *Proc. 2023 IEEE 20th India Council Int. Conf. (INDICON)*. Hyderabad, IEEE, 2023, pp. 1433–1439. <https://doi.org/10.1109/INDICON59947.2023.10440924>.
25. Chen H., Wang X., Shen L., Cong Y. Formation flight of fixed-wing UAV swarms: A group-based hierarchical approach. *Chin. J. Aeronaut.*, 2021, vol. 34, no. 2, pp. 504–515. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2020.03.006>.
26. de Souza Neto A.M., Romero R.A.F. A decentralized approach to drone formation based on leader-follower technique. *Proc. 2019 Lat. Am. Robotics Symp. (LARS), 2019 Braz. Symp. on Robotics (SBR), and 2019 Workshop on Robotics in Education (WRE)*. Rio Grande, IEEE, 2019, pp. 358–362. <https://doi.org/10.1109/LARS-SBR-WRE48964.2019.00069>.
27. Alonso-Mora J., Montijano E., Schwager M., Rus D. Distributed multi-robot formation control among obstacles: A geometric and optimization approach with consensus. *Proc. 2016 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*. Stockholm, IEEE, 2016, pp. 5356–5363. <https://doi.org/10.1109/ICRA.2016.7487747>.
28. Tong B., Wei C., Shi Y. Fractional order Darwinian pigeon-inspired optimization for multi-UAV swarm controller. *Guid., Navig. Control*, 2022, vol. 2, no. 2, art. 2250010. <https://doi.org/10.1142/S2737480722500108>.
29. Pan Z., Zhang C., Xia Y., Xiong H., Shao X. An improved artificial potential field method for path planning and formation control of the multi-UAV systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. II: Express Briefs*, 2022, vol. 69, no. 3, pp. 1129–1133. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3112787>.
30. Fu X., Zhi C., Wu D. Obstacle avoidance and collision avoidance of UAV swarm based on improved VFH algorithm and information sharing strategy. *Comput. Ind. Eng.*, 2023, vol. 186, art. 109761. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109761>.
31. Sastre C., Wubben J., Calafate C.T., Cano J.C., Manzoni P. Collision-free swarm take-off based on trajectory analysis and UAV grouping. *Proc. 2022 IEEE 23rd Int. Symp. on a World of Wireless, Mobile and Multimedia Networks (WoWMoM)*. Belfast, IEEE, 2022, pp. 477–482. <https://doi.org/10.1109/WoWMoM54355.2022.00074>.
32. Michieletto G., Formaggio F., Cenedese A., Tomasin S. Robust localization for secure navigation of UAV formations under GNSS spoofing attack. *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.*, 2023, vol. 20, no. 4, pp. 2383–2396. <https://doi.org/10.1109/TASE.2022.3208662>.
33. Ma L., Meng D., Huang X., Zhao S. Vision-based formation control for an outdoor UAV swarm with hierarchical architecture. *IEEE Access*, 2023, vol. 11, pp. 75134–75151. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3296603>.
34. Frolov O., Safin R., Tsoy T., Martinez-Garcia E.A., Magid E. UAV swarm formation control for outdoor surveillance tasks. In: Shmaliy Y.S. (Ed.) *Proc. 8th Int. Conf. on Computing, Control and Industrial Engineering (CCIE2024)*. Ser.: Lecture Notes in Electrical Engineering. Vol. 1252. Singapore, Springer, 2024, pp. 364–372. https://doi.org/10.1007/978-981-97-6934-6_42.
35. Kostenetskiy P.S., Chulkevich R.A., Kozyrev V.I. HPC resources of the higher school of economics. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1740, no. 1, art. 012050. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1740/1/012050>.

36. Imamov N., Abbyasov B., Tsoy T., Martínez-García, E.A., Magid E. (2024). Evaluation of a weather plugin in Gazebo: A case-study of a wind influence on PX4-based UAV performance. In: Ronzhin A., Savage J., Meshcheryakov R. (Eds) *Interactive Collaborative Robotics. ICR 2024*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 14898. Cham, Springer, 2024, pp. 344–356. https://doi.org/10.1007/978-3-031-71360-6_26.
37. Magid E., Abbyasov B., Lavrenov R., Tsoy T., Martinez-Garcia E. A., Svinin M. LIRS-USim: A Gazebo-based tool for modeling urban environments and sensory data uncertainties. *Lobachevskii J. Math.*, 2025, vol. 46, no. 5, pp. 2382–2395. <https://doi.org/10.1134/S1995080225607167>.

Author Information

Oleg V. Frolov, Undergraduate Student, HSE University

E-mail: ovfrolov@edu.hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-6851-3178>

Ramil N. Safin, Senior Lecturer, Kazan Federal University

E-mail: safin.ramil@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1429-1876>

Tatyana G. Tsoy, PhD, Senior Lecturer, Kazan Federal University

E-mail: tt@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5715-7768>

Edgar A. Martinez-Garcia, PhD, Professor, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

E-mail: edmartin@uacj.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-8285>

Evgeni A. Magid, PhD, Professor, Head of Intelligent Robotics Department, Kazan Federal University; Professor, HSE University

E-mail: magid@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7316-5664>

Информация об авторах

Олег Витальевич Фролов, студент специалитета, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: ovfrolov@edu.hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-6851-3178>

Рамиль Набиуллович Сафин, старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: safin.ramil@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1429-1876>

Татьяна Григорьевна Цой, кандидат технических наук, старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: tt@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5715-7768>

Эдгар Алонсо Мартинез-Гарсия, PhD, профессор, Автономный университет Сьюдад-Хуарес

E-mail: edmartin@uacj.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-8285>

Евгений Аркадьевич Магид, PhD, профессор, заведующий кафедрой интеллектуальной робототехники, Казанский (Приволжский) федеральный университет; профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: *magid@it.kfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7316-5664>

Received July 1, 2025

Accepted September 1, 2025

Поступила в редакцию 1.07.2025

Принята к публикации 1.09.2025

