



ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Казанского университета

серия

ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Uchenye Zapiski
Kazanskogo Universiteta

Seriya Fiziko-Matematicheskie
Nauki

2025

Том 167

Книга 3

Volume 167

Issue 3

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Тагорский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

С.Р. Насыров – д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.Х. Салахов – д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстоков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шожин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»:
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 01.10.2025. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 22,55.
Уч.-изд. л. 17,13. Тираж 300 экз. Заказ 109/9

Отпечатано в типографии Издательства Казанского университета
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан,
г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.
Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki
Proceedings of Kazan University.
Physics and Mathematics Series
Peer-Reviewed Scientific Journal

2025
Vol. 167, No. 3

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “Kazan (Volga Region) Federal University”
The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technologies and Mass Media
Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich’s Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia
Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; website: <http://kpfu.ru/uz-eng/pfm>

Date of publication: October 01, 2025. Page size: 60×84/8.
Offset printing. Conventional printing sheet: 22,55.
Publisher’s signature: 17,13. Circulation: 300 copies. Order: 109/9

Printed in KFU Publishing House
ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan,
Republic of Tatarstan, 420008 Russia

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Вершинин И.С., Гибадуллин Р.Ф., Райхлин В.А.</i> Состояние исследований в области ассоциативной защиты данных	413
<i>Давлетшин А.И., Аганин А.А.</i> Взаимодействие пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки.....	437
<i>Денисов Е.С., Евдокимов Ю.К.</i> Системная модель твердополимерного топливного элемента и ее приложение к задачам диагностики и управления рабочими режимами	455
<i>Елизаров А.М., Ольгина И.Г.</i> Метод ранжирования научных публикаций по степени их важности.....	468
<i>Еремин Н.В.</i> Многоуровневое компьютерное моделирование механических свойств полимерных композиционных материалов	491
<i>Захаров В.М., Шалагин С.В.</i> Реализация генератора дискретной случайной величины на основе d -арного дерева	507
<i>Киясов С.Н.</i> Об одном способе выделения класса задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме	519
<i>Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю.</i> Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТЕ-волны на дифракционной решетке с двухслойными штрихами на периоде	531
<i>Халхужаев А.М., Хайитова Х.Г., Хужамиеров И.А.</i> О спектре оператора Шрёдингера системы трех частиц на решетке.....	547
<i>Шабардин Е.Е., Карчевский Е.М.</i> Об эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов.....	566

ЛЮДИ НАУКИ

<i>Плецинский Н.Б.</i> Чибрикова Любовь Ивановна. 100 лет со дня рождения.....	588
--	-----

CONTENTS

<i>Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Raikhlina V.A.</i> State of research in the field of associative data protection	413
<i>Davletshin A.I., Aganin A.A.</i> Interaction of air bubbles in liquid near a flat rigid wall ..	437
<i>Denisov E.S., Evdokimov Yu.K.</i> System model of proton-exchange membrane fuel cell and its application in solving the tasks of diagnostics and control of operating modes	455
<i>Elizarov A.M., Olgina I.G.</i> A method of ranking scientific publications according to their degree of importance	468
<i>Eremin N.V.</i> Multiscale computational modeling of mechanical properties of polymer composite materials	491
<i>Zakharov V.M., Shalagin S.V.</i> Implementing a random variable generator based on a d -ary tree	507
<i>Kiyasov S.N.</i> A method of defining a class of linear conjugation problems for two-dimensional vector with closed-form solutions	519
<i>Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu.</i> A modified method of variable separation for the problem of TE wave diffraction on a diffraction grating with two-layer lines in the period	531
<i>Khalkhuzhaev A.M., Khayitova Kh.G., Khujamiyev I.A.</i> On the spectrum of the Schrödinger operator for a three-particle system on a lattice	547
<i>Shabardin E.E., Karchevskii E.M.</i> On the equivalence of differential and integral formulations of the problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides	566

PERSONALIA

<i>Pleshchinskii N.B.</i> Lubov' Ivanovna Chibrikova. In honor of the 100th anniversary of birth	588
--	-----

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.056.5

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.413-436>**Состояние исследований в области ассоциативной
защиты данных****И.С. Вершинин, Р.Ф. Гибадуллин , В.А. Райхлин***Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия* *RuslanGibadullin@vk.com***Аннотация**

Ассоциативная защита данных не имеет и никогда не имела аналогов в мировой практике, поэтому до сих пор с осторожностью воспринимается специалистами. Настала пора дать о ней целостное представление, показав ее несомненные достоинства. Наша единственная цель – убедить специалистов в этих достоинствах путем систематизации основных результатов оригинальных исследований. Без полной детализации, но с нужными ссылками рассмотрены особенности ассоциативной защиты, установленные авторами: вопросы морфологии, стегостойкость, криптостойкость, помехоустойчивость, объемы передаваемой и хранимой информации. Потенциально перспективный симбиоз стеганографии и криптографии – главный научный результат проведенного исследования. Среди частных результатов наиболее значимы разработки алгоритма маскирования и стратегий ассоциативной защиты картографических сцен и текстов; достижение т. н. полноты покрытия; открытие базовой теоремы однозначности распознавания; оценки числа ключей, стегостойкости, криптостойкости и помехоустойчивости ассоциативной защиты. Приведены ссылки на выполненные разработки систем управления базами данных (СУБД) с такой защитой. Авторы видят значительные перспективы дальнейшего развития теории и практики ассоциативной защиты данных.

Ключевые слова: ассоциативная защита картографических и текстовых данных, вопросы морфологии, симбиоз стеганографии и криптографии, повышение помехоустойчивости, снижение объемов передач, практическая ценность

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность академику В.К. Левину за поддержку работ по ассоциативной защите данных.

Для цитирования: Вершинин И.С., Гибадуллин Р.Ф., Райхлин В.А. Состояние исследований в области ассоциативной защиты данных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 413–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.413-436>.

REVIEW ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.413-436>

State of research in the field of associative data protection

I.S. Vershinin, R.F. Gibadullin ✉, V.A. Raikhlin

*Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia*

✉ RuslanGibadullin@vk.com

Abstract

With no established analogues in the current or past global practice, associative data protection remains cautiously perceived by specialists. The time has come to provide an integrated perspective of this method and summarize its numerous and undoubted benefits over competing approaches. In order to demonstrate such benefits, this article overviews the main results of published original research on various aspects of associative data protection. Avoiding exhaustive detail, it focuses, with appropriate references to existing literature, on the principal features of associative data protection: morphology, steganographic strength, cryptographic strength, noise immunity, and volumes of transmitted and stored information. Our central finding is a promising symbiosis of steganography and cryptography. The most notable specific results include the development of a masking algorithm and strategies for associative protection of cartographic scenes and texts, the achievement of a so-called coverage completeness, the discovery of the basic theorem of unambiguous recognition, as well as the estimation of the number of keys, steganographic strength, cryptographic strength, and noise immunity of associative data protection. References are given to the database management systems (DBMSs) already employing associative data protection. The review highlights considerable opportunities for further elaboration of the theory and practice of associative data protection.

Keywords: associative protection of cartographic and text data, issues of morphology, symbiosis of steganography and cryptography, enhancement of noise immunity, reduction of data transmission volumes, practical value

Acknowledgments. Special thanks to Academician V.K. Levin for his valuable support of studies on associative data protection.

For citation: Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Raikhlin V.A. State of research in the field of associative data protection. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 413–436. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.413-436>. (In Russian)

Введение

В свое время академик П.К. Анохин заметил [1]: «А. Эйнштейн, говоря об истории науки, часто подчеркивал, что “только идеи имеют непреходящую ценность”, и очень часто сетовал, что ученые мало заботятся о написании “истории идей” ... Трудности творческого

процесса не видны обычно в конечных результатах, и поэтому для науки навсегда исчезает их познавательный и воспитательный смысл ...». Следуя этому замечанию, сначала поясним рождение у нас идеи ассоциативной защиты данных.

Ранее Казанский авиационный институт проводил серьезные исследования в области ассоциативной обработки информации [2–4], в частности, по применению ассоциативного подхода к анализу бинарных сцен [5, 6], т. е. к укрупненному описанию изображений в терминах «объекты – координаты» [7]. В связи с этим у нас появились такие вопросы:

- 1) Маскирование – неперенный атрибут ассоциативной обработки. Но в каких приложениях оно полезно при распознавании бинарных изображений?
- 2) Как преодолеть критичность ассоциативного подхода к размерам и угловому положению объектов сцены?

Ответы на оба вопроса дала идея ассоциативной защиты данных, к восприятию которой мы были уже готовы. Эта идея родилась у нас в конце прошлого века, когда возникла необходимость заняться защитой информации.

Мы различаем два вида приложений: защита картографических и текстовых данных. К конфиденциальным картографическим сценам в указанных терминах относятся карты разведывательного характера, полезных ископаемых, морские карты глубин и др. Текстовыми сценами в терминах «символы – координаты» являются характеристики таких объектов, как ракетные шахты, нефтяные скважины, залежи полезных ископаемых, содержимое береговых шельфов, различные персональные данные и др. Все это требует надежной защиты.

В основу проведенных исследований была положена методология конструктивного моделирования систем [8]. Главное в этой методологии состоит в том, что по мере накопления информации в процессе исследований формируется модель синтеза предметной системы, или S-модель (S – от Synthesis). Эта модель рассматривается как конструктивный метод. Процесс синтеза проводится с системных позиций в предположении, что синтезируемый объект моделирует поведение некоторой *гипотетической системы* – единого целого, бесконечно познаваемого и объясняемого, заданного своим оператором назначения [9]. Конструктивное моделирование позволяет выявить некоторые свойства множества эффективных реализаций системы. В силу аксиомы знания модальной логики («что известно, то верно») [10] они постулируются как закономерности и задают основу теории. *Система постулатов полагается открытой*, ибо она вводится в меру знаний и опыта, существующих в данный момент.

Для стеганографии характерно стремление обеспечить безусловную стегостойкость, т. е. невозможность установления факта передачи сообщений. Стеганографические подходы, широко применяемые в настоящее время, предполагают внедрение информации в изображение, видео- или аудиофайлы [11–15]. Имеется ряд теоретических рассмотрений т. н. совершенных стегосистем [16, 17], но их практическая реализуемость находится под сомнением. Стеганографии свойственен чрезвычайный объем сообщений. Использование для целей защиты криптографических шифров [18–21] существенно уменьшает этот объем. Но известные криптошифры обладают низкой помехоустойчивостью при хранении и передаче скрытых данных по открытым каналам связи, а развитые методы стеганографии не обеспечивают безусловную стегостойкость [22–24]. Предпринятая нами попытка симбиоза криптографии и стеганографии была призвана ликвидировать эти пробелы.

Ассоциативную защиту можно рассматривать как частный случай трафаретного способа исторической стеганографии [11], когда скрываемое сообщение записывается по трафарету на чистый лист, после чего формируется осмысленный текст с такой вставкой. Различие состоит в том, что в данном случае сообщение внедряется в шумовую картину. Но это не принципиально. Главные вопросы в обоих случаях – алгоритмизация случайного формирования трафарета (ключа) и заполнение участков, не занятых сообщением. Детали проведенных вычислительных экспериментов и все доказательства мы опускаем, что отвечает цели нашего обзора, указанной в аннотации. Эти детали содержатся в работах [25–29]. Ниже прослежена только логика исследований и приведены полученные результаты.

1. Вопросы морфологии

В данном случае использовано k -разрядное десятичное кодирование имен объектов и их координат почтовыми символами (рис. 1). Каждая десятичная цифра представлена своей двоичной матрицей-эталонем размерами $m \times n$, $m = 2n - 1$. Размеры всех эталонов одинаковы. Множества их единичных элементов (показаны точками на рис. 2 (a) – для $n = 3$, рис. 2 (b) – для $n = 7$) принадлежат внешнему контуру и внутреннему «зигзагу» соответствующих матриц. Множество таких матриц мощностью $\gamma = 10$ подвергается маскированию.



Рис. 1. Множество почтовых символов

Fig. 1. Set of postal symbols

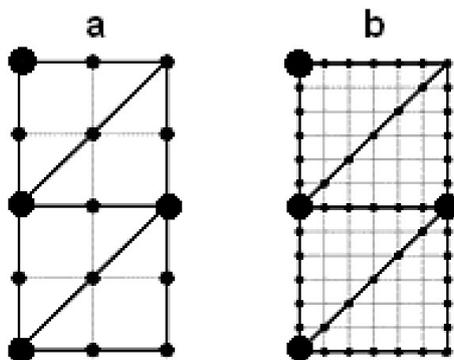


Рис. 2. Положения бинарных единиц в матрицах-эталонах при $n = 3$ (a) и $n = 7$ (b)

Fig. 2. Positions of binary ones in the etalon matrices at $n = 3$ (a) and $n = 7$ (b)

Процесс генерации масок случаен. Для каждой матрицы создается своя матрица масок тех же размеров, которая сохраняет в эталоне биты, существенные для его дальнейшей идентификации. Набор масок – это ключ распознавания. Замаскированные биты подвергаются рандомизации. В итоге исходные бинарные матрицы-эталон трансформируются в троичные матрицы, элементы которых $\in \{0, 1, -\}$. Распознавание десятичных цифр каждого кода выполняется сравнением на множестве троичных эталонов по позициям сохраненных бит.

В результате матричной бинаризации десятичных цифр с последующим маскированием и рандомизацией каждый код трансформируется в k -секционный стегоконтейнер, который формируется следующим образом. Сначала создается т. н. пустой контейнер длиной $L = k(9n - 12)$ по числу бит бинарных эталонов десятичных цифр, выделенных на рис. 2. Он заполняется отрезком ПСП–ГАММОЙ. Затем в него внедряются по позициям биты кода, случайно сохраненные маскированием. Независимо от n среднее число таких бит $\ll L$, что характерно для стеганографии.

Сгенерированное множество масок является ключом распознавания. Он известен только санкционированному пользователю. Но алгоритм маскирования полагается известным широкому кругу. В данном случае S-модель определена на множестве наборов композиционных элементов <ЭТАЛОН><МАСКА>, компоненты которых суть бинарные матрицы размерами $m \times n$. Мощность любого набора равна мощности $\gamma = 10$ используемого алфавита символов.

Достаточное условие взаимной непокрываемости любой пары замаскированных троичных эталонов $\{X^t\}$, $t \in \{0, 9\}$, – различие хотя бы в одном значащем элементе x_{pq}^t троичных матриц X^{t_1} и X^{t_2} , $t_1 \neq t_2$. Элементы эталона X^t , не подлежащие маскированию, определены единичными компонентами инверсией матрицы масок $\bar{M}^t = |\bar{\mu}_{pq}^t|$ для этого эталона.

Структуризации данных картографических и текстовых сцен для их ассоциативной защиты имеют свои особенности. В обоих случаях исходное описание сцены задано в виде некоторой таблицы. Структуризация подразумевает представление этой таблицы в виде структуры данных, которые будут подвергаться в дальнейшем кодированию, бинаризации кодосимволов и их маскированию.

Случай картографических сцен. Кластеризуем исходное отношение в виде набора подтаблиц (кластеров). Для этого:

1. Случайным образом выберем некоторую строку исходной таблицы. Отметим эту строку. Позиционируем выделяемый кластер (определим его *глобальные координаты*). Саму же запись преобразуем к виду <Имя объекта><Локальные координаты объекта в данном кластере>.
2. Повторим шаг 1 на множестве неотмеченных строк. При этом всякий раз установим принадлежность вновь выделенной строки к одному из ранее введенных кластеров и преобразуем координаты (из исходных глобальных в локальные по кластеру). Если такового кластера не окажется, иницируем новый кластер. И так далее, пока не будут исчерпаны все записи исходной таблицы. *При этом мощности (числа записей) различных кластеров будут неодинаковы, а порядок следования кластеров случаен (не удовлетворяет критерию территориальной близости).*

Стратегию кластеризации поясним на конкретном примере (рис. 3). На этом рисунке Y и X – максимальные значения координат картографируемого массива (метры); ε – погрешность определения координат объектов (метры). Соответственно, шаг локальной координатной сетки равен 2ε .

Значение k должно удовлетворять условию равенства числа градаций в локальной и глобальной областях. Положив $X = Y = A$, получим линейный размер кластера (длину стороны квадрата) $C = 2\varepsilon\Gamma_{x,y}$. Необходимым условием представления координаты

объекта как $\text{КООРДИНАТА}(x, y) = \text{ГЛОБ. КООРД.} + \text{ЛОК. КООРД.}$ является неравенство $A/\Gamma_{x,y} \leq C$. Соответственно, $\Gamma_{x,y} \geq \sqrt{A/(2\varepsilon)}$. Пусть, например, $X = Y = 0.5 \cdot 10^6$ м, $\varepsilon = 1$ м. Тогда $\Gamma_{x,y} \geq 500$. Ближайшим будет выбор $\Gamma_{x,y} = 1000$ с $k = 3$. При этом глобальная координатная единица составит $A/\Gamma_{x,y} = 500$ м, а размер кластера $C = 2000$ м.

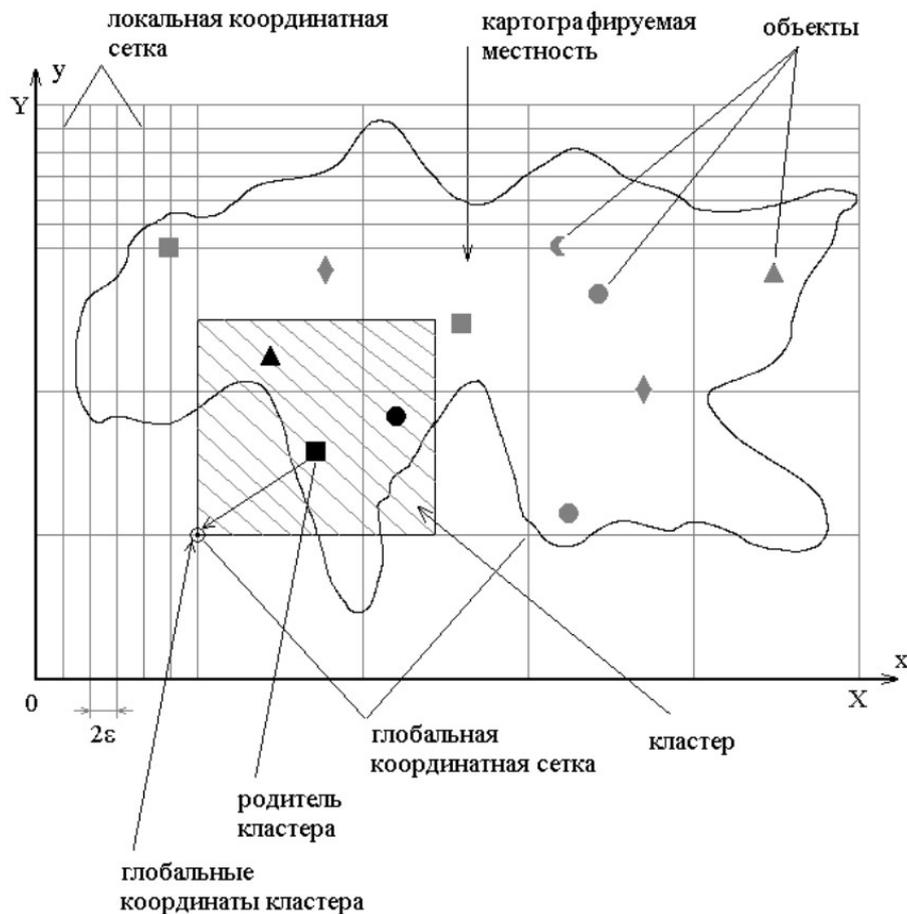


Рис. 3. Пример карты местности

Fig. 3. Sample terrain map

Отнесение некоторого объекта к тому или иному случайно формируемому кластеру определяет своеобразие реализации принципа *рассеивания* – первого основополагающего принципа защиты [30]. Реализация принципа *перемешивания* (второго основополагающего принципа защиты) достигается тем, что во избежание детерминированности расположения в кластере его «родителя» содержимое каждого кластера перемешивается.

Для заданной разрядности k кодового представления имен/координат и мощности полных множеств кодов объектов и градаций их координат имеем $\Gamma = 10^k$. Но обычно реальное число типов объектов и количество объектов (задействованных координат) на сцене $\Gamma_{obj-koord} < \Gamma$. Поэтому для выравнивания числа записей во всех кластерах, что необходимо для повышения стойкости защиты, целесообразно вводить «пустые» объекты и «пустые» координаты. Число типов тех и других $\delta_{obj-koord} = 10^k - \Gamma_{obj-koord}$. Коды конкретного «пустого» объекта и их координат должны выбираться случайно на множестве из $\delta_{obj-koord}$ вариантов.

Случай текстовых сцен. По условию любая текстовая характеристика объекта занимает одну машинописную страницу (один кластер). Формат записи в кластере:

[Код номера строки ($Local_x$)],
[Код символа ($Symbol_num$)],
[Код позиции в строке ($Local_y$)].

При этом:

- Символы в поле $Symbol_num$ [русский алфавит, английский алфавит, цифры, знаки препинания, специальные символы] кодируются трехзначными десятичными кодами согласно таблице символов ASCII (American Standard Code for Information Interchange) на множестве 000 ... 255 [31].
- Коды номеров строк и позиций в строке формируются случайным образом на множестве 000 ... 999 и хранятся после маскирования в специальной таблице базы данных.
- Нумерация строк в кластере – сверху вниз.
- Нумерация позиции символа в строке – слева направо.
- Число записей на всех страницах (фрагментах) выравнивается введением «пустых» записей, коды символов, номеров строк и позиций символов в которых выбираются случайным образом на множествах недействующих кодов.
- Порядок следования записей в кластере *случаен*, чем достигается реализация эффектов «перемешивания» и «рассеивания».

2. Симбиоз стеганографии и криптографии

Система постулатов декларирует свойства S-модели. Она положена в основу развития теории и разработки конструктивного метода ассоциативной защиты объектов и координат при анализе сцен.

Постулат 1. *Генерируемый набор масок случаен. Число единиц инверсной матрицы масок для любого t -эталона, близкое к минимально возможному, определяется условием дихотомизации любой пары трючных эталонов в сгенерированном наборе по одному незамаскированному биту.*

Этому постулату удовлетворяет

Базовый алгоритм маскирования. Обозначим через D_ℓ множество бинарных эталонов символов \mathcal{E}_t , рассматриваемых на каждом этапе (уровне) работы алгоритма. По условию множество D_0 включает полный перечень типов эталонов.

1. $\ell := 0$.
2. Занумеровать случайную перестановку эталонов множества D_ℓ в натуральном порядке $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_\gamma$, образовав тем самым список $C_\ell = (\mathcal{E}_j)$, $j = 1, 2, \dots, \gamma$. Дополнить этот список пустым элементом $\mathcal{E}_{\gamma+1}$. Ни один элемент списка C_ℓ изначально не отмечен.

3. $i := 1$.
4. $j := i$, $k := 1$. Считать \mathcal{E}_i первым элементом множества $D_{\ell+1}$.
5. Пока не встретится неотмеченный элемент списка C_ℓ :
 $j := j + 1$. Если \mathcal{E}_j не пуст, перейти к шагу 6. Иначе – к шагу 16.
6. $\mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}_j$ (побитно) $\rightarrow A_1$ (булева матрица).
7. Пока не встретится неотмеченный элемент списка C_ℓ :
 $j := j + 1$. Если \mathcal{E}_j не пуст, перейти к шагу 8. Иначе – к шагу 13.
8. $\mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}_j$ (побитно) $\rightarrow A_2$ (булева матрица).
9. $A_3 := A_1$.
10. $A_1 \& A_2$ (побитно) $\rightarrow A_1$. Если $A_1 \neq |0|$, перейти к шагу 7. Иначе – к шагу 11.
11. $k := k + 1$. Считать \mathcal{E}_j k -м элементом множества $D_{\ell+1}$.
12. $A_1 := A_3$. Перейти к шагу 7.
13. Случайным образом выбрать один из единичных элементов матрицы A_1 . Его координаты (p, q) определяют новый единичный элемент $\bar{\mu}_{pq}$ инверсной матрицы масок \bar{M} для всех неотмеченных эталонов списка C_ℓ .
14. Отметить элементы списка C_ℓ , включенные во множество $D_{\ell+1}$.
15. $\ell := \ell + 1$, $D_\ell := D_{\ell+1}$, $\gamma := k$. Перейти к шагу 2.
16. Формирование инверсной маски для последнего неотмеченного элемента списка C_ℓ считать законченным. Отметить этот элемент, аннулировав тем самым список C_ℓ и множество $D_{\ell+1}$ (сделав их пустыми).
17. $\ell := \ell - 1$. Если $\ell \geq 0$, перейти к шагу 18. Иначе – к шагу 19.
18. Пока не встретится неотмеченный элемент списка C_ℓ :
 $i := i + 1$. Перейти к шагу 4.
19. КОНЕЦ.

На рис. 4 (а, б) представлены случайные варианты маскирования для двух различных исходных перестановок десятичных цифр, полученные программным путем по этому алгоритму. Здесь $m = 5$, $n = 3$.

Под каждой цифрой приведена соответствующая инверсная матрица маски. Для полноты картины в табл. 1 даны примеры заполнения стегоконтейнеров в случае $n = k = 3$ для различных кодов. Битовая длина L стегоконтейнера $L = k \times (9 \times n - 12)$. Местоположения значимых бит при использовании масок на рис. 4 (а) показаны точками.

Утверждение 1. Границы для максимального числа единиц $(q_1)_{\max}$ инверсных матриц масок \bar{M}^t , генерируемых алгоритмом, определены выражением

$$\lceil \log_2 \gamma \rceil \leq (q_1)_{\max} \leq \gamma - 1.$$

a									
0	1	9	6	7	8	2	5	4	3
100	100	100	100	100	100	000	000	100	100
000	000	001	000	000	000	000	000	000	001
010	000	000	000	001	010	000	000	001	000
100	000	010	100	010	100	110	110	010	010
010	010	010	010	010	010	010	010	010	010
b									
3	2	6	9	8	0	7	4	1	5
000	000	010	000	000	000	000	000	000	010
100	000	001	100	001	001	000	001	001	001
001	000	000	001	010	010	001	010	010	000
000	010	010	000	010	010	000	010	010	010
001	001	001	001	011	101	001	011	101	001

Рис. 4. Варианты маскирования для двух различных исходных перестановок десятичных цифр при $m = 5$, $n = 3$

Fig. 4. Masking options for two different initial permutations of decimal digits at $m = 5$, $n = 3$

Табл. 1. Примеры заполнения стегоконтейнеров в случае $n = k = 3$

Table 1. Examples of stego container filling in the case of $n = k = 3$

Код	№ бита в контейнере									
	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	
153	
472	
708	
521		

Как показали многочисленные эксперименты, реально $1 \leq q_1 \leq 8$ при математическом ожидании $M_{q_1} = 5$. Средний объем вкраплений в контейнер равен kM_{q_1} . С ростом n при сохранении числа контейнеров суммарный объем вкраплений остается неизменным, а значение L увеличивается, что должно способствовать росту стегостойкости [32].

Теорема. Для произвольной бинарной матрицы размером $m \times n$ проведение процедуры распознавания на множестве эталонов тех же размеров по маскам, сгенерированным с использованием построенного алгоритма, приведет к распознаванию в этой матрице одного и только одного эталона из указанного множества.

Следствие. Если при генерации наборов масок использован алгоритм, указанный выше, то для любой реализации множества рандомизированных объектов и любого вновь сгенерированного множества троичных образов X^t этих объектов каждый рандомизированный объект покрывается одним и только одним X^t .

Это следствие легло в основу всех проведенных исследований.

Постулат 2. При соответствующем выборе размеров матриц и генератора псевдослучайных последовательностей (ПСП) возможна реализация полноты покрытия, т. е. распознавания в каждом стегоконтейнере сообщения в целом полного множества

кодов имен объектов и их координат, возможных для данной сцены, с первой случайной попытки формирования ГАММЫ при ограниченном переборе ключей.

Размеры $m \times n$ бинарных матриц представления десятичных кодовых цифр были определены условием, позволяющим надеяться на хорошую стегостойкость: объем битовых вкраплений не должен превышать 1% объема носителя стегосообщения: $q = 5k < 0.01L = 0.01k(9n - 12)$. Отсюда имеем $n > \lceil 512/9 \rceil = 57$. Было принято $n = 60$. Соответственно, $m \times n = 119 \times 60$.

Утверждение 2. При ограниченном переборе ключей и $n = 60$ полное покрытие с одной попытки на множествах стегоконтейнеров с вероятностью 0.999 обеспечивает выбор генератора ПСП «Вихрь Мерсенна» [33] для формирования «несущей» ГАММЫ стегоконтейнеров.

Стегостойкость. Исследование стегостойкости проводилось с применением набора статистических тестов случайностей NIST [34–37]. Пакет NIST STS включает пятнадцать статистических тестов, которые разработаны для проверки гипотезы о случайности двоичных последовательностей произвольной длины, порождаемых генератором случайных чисел или генератором псевдослучайных чисел. Все тесты направлены на выявление различных дефектов случайности. Если ПСП успешно проходит проверку по всем тестам NIST, то она признается случайной («белой»). Если же имеется неуспех хотя бы на одном тесте, то она считается «черной».

В ходе эксперимента [28] был применен модифицированный алгоритм маскирования (см. раздел 3). За несущую ГАММУ был принят отрезок ПСП длиной 1 МБ, сформированный криптографической версией генератора ПСП «Вихрь Мерсенна» [38]. Было осуществлено $K = 100$ итераций по случайной генерации ГАММА-отрезка, проведению с этим отрезком $N = 1000$ опытов по стегоставкам на разных наборах масок и подсчету для каждой итерации вероятности $P = M/N$, где M – число стегоотрезков, прошедших тест NIST. Для полученной генеральной совокупности из значений этих вероятностей были подсчитаны математическое ожидание $\bar{P} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K P_i$ и среднеквадратичное отклонение

$$\sigma^P = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (P_i - \bar{P})^2}. \text{ Полученные результаты приведены в табл. 2.}$$

Табл. 2. Агрегированные результаты опытов

Table 2. Aggregated results of experiments

Генеральная совокупность	Статистическая оценка	
	Математическое ожидание	Среднеквадратичное отклонение
Вероятность получения «белого» стего при случайной генерации ГАММЫ с использованием модифицированного алгоритма	0.497	0.266

Была разработана 12-поточная программа генерации стегосообщения со случайным выбором ГАММЫ. С помощью этой программы на 12-ядерном сервере было проведено 1000 опытов для разных сообщений длиной 1800 символов с разными масками. Установлено, что при одновременном запуске двенадцати потоков вероятность того, что один из потоков генерирует стегосообщение, успешно проходящее тест NIST, равна 0.999.

Установив случайный характер принятой последовательности, аналитик может усомниться: а не замаскировано ли под случайность шифрованное сообщение? Тогда он прибегнет к криптоанализу.

Криптостойкость. В табл. 3 приведена найденная вычислительным экспериментом верхняя оценка числа различных ключей, генерируемых базовым алгоритмом при различных размерах эталонов. Если время получения и анализа результата применения одного ключа равно 1 мкс, то полный перебор ключей при $n = 60$ займет 10^{23} секунд, т. е. 3×10^{15} лет.

Табл. 3. Оценка числа ключей

Table 3. Key estimates

n	18	30	40	60
Число ключей	10^{23}	10^{25}	10^{27}	10^{29}

Постулат 2 отдает дань криптографическому аспекту ассоциативной защиты. Если число всевозможных кодов объектов/координат анализируемой сцены равно T/Γ и на ней сосредоточено N объектов, то в результате ограниченного перебора код каждого из N объектов может быть любым из T возможных, а коды координат – любыми из Γ возможных. В данном случае $T = \Gamma = 10^k$.

В плане криптоанализа были рассмотрены следующие виды криптоатак [39]: путем полного перебора ключей, на ГАММУ, со знанием открытого текста, отсутствия объекта, ассоциации с картой местности. Итогом явилось:

Утверждение 3. Ассоциативная защита данных доказуемо стойкая ко всем видам рассмотренных криптоатак.

Под доказуемой криптостойкостью понимается чрезмерная вычислительная сложность (а потому и неприемлемое время) нахождения истинного ключа.

В отношении атаки перебором ключей был принят

Постулат 3. Велика вероятность того, что проявление последовательностей сущностей, кодируемых элементами распознаваемой сцены при ограниченном по времени случайном переборе ключей, выделит среди них сообщение, правдоподобное по критерию соответствия характеру сцены, но ошибочное.

На рис. 5 (а) показано изображение тематического слоя тестовой карты, полученное средствами ГИС MapInfo [40] после ассоциативного сокрытия его данных и последующего дешифрования на истинном ключе. Это участок местности 300×300 км² республики Чувашия, который содержит 1035 точечных объектов четырех разных типов. Их условные обозначения показаны на рис. 6. На рис. 5 (б, в) представлены изображения того же слоя, полученные на двух ложных ключах.

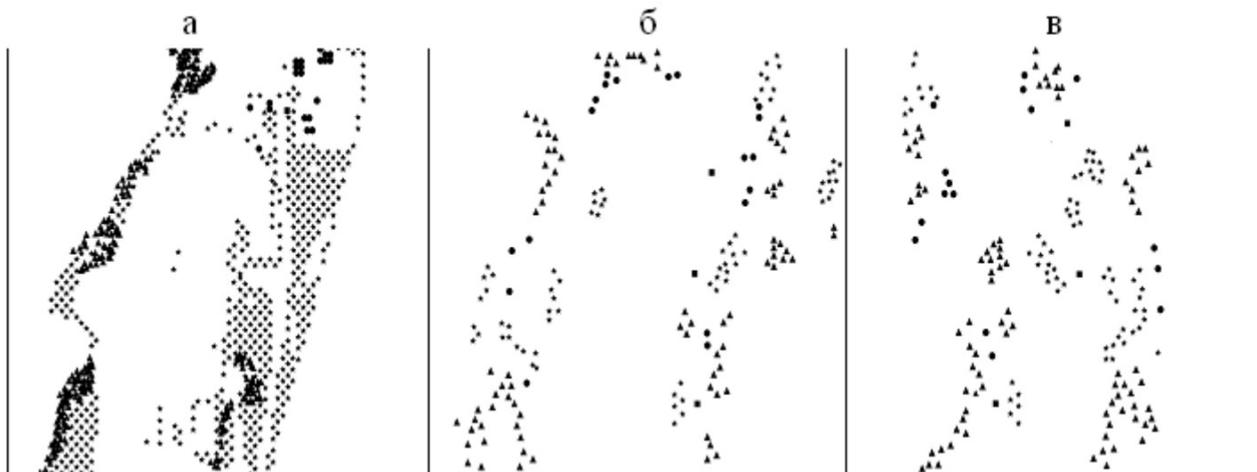


Рис. 5. Изображения тематического слоя карты, полученные после дешифрования на правильном (а) и двух ложных ключах (б, в)

Fig. 5. Images of the thematic map layer obtained after the decryption with the correct key (a) and two false keys (b, c)

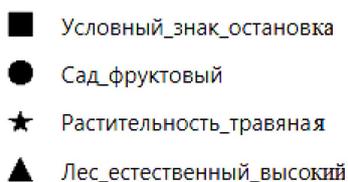


Рис. 6. Используемые условные обозначения объектов

Fig. 6. Symbols of mapped objects

При наличии некоторых знаний о характере местности одно из них может быть ошибочно принято за истинное. Если в процессе перебора, допустимого по времени, мы случайно «наткнемся» на правильный ключ, то он даст наиболее правдоподобную картину и без сомнения будет взят за искомое решение. Но вероятность такого события исчезающе мала. Зато велика вероятность получения правдоподобной, но неверной картины, которая может ввести в заблуждение.

3. Повышение помехоустойчивости

Независимо от n , наиболее часто используемыми в качестве существенных при формировании набора масок оказались укрупненные узловые точки совокупного контура всех эталонов, показанные на рис. 2. Статистическим моделированием установлено, что примерно для 61% ключей из их полного множества биты по выделенным четырем позициям используются в качестве существенных. Поэтому велика вероятность искажения хотя бы одного из них под влиянием сетевых помех. Более равномерная функция распределения получится, если при формировании набора инверсных матриц масок запретить использование выявленных узловых битов в качестве существенных. В этом и состоит суть проведенной модификации алгоритма.

Введение избыточного маскирования. Предложено генерировать $Q \in \{3, 5, 7, \dots\}$ наборов масок, дизъюнктивно объединяемых при погружении в стегоконтейнеры [41].

Распознавание принимаемого стегосообщения проводим по всем наборам масок. Для i -стегосимвола за результат распознавания берем эталон, число распознаваний которого $r_i \geq (Q + 1)/2$. Если это условие не выполняется, то фиксируем факт возможного искажения символа (отказ от распознавания).

Действие случайных помех. Вычислительный эксперимент при $Q = 5$ показал допустимость искажения до шести бит в любом из шестнадцати байт каждого контейнера: ряд 1 на рис. 7 отвечает числу правильных распознаваний, ряд 2 – неправильных, ряд 3 – отказ от распознавания.



Рис. 7. Результаты эксперимента при $Q = 5$

Fig. 7. Experimental results at $Q = 5$

При $k = 3$, $n = 60$ допускается искажение до 6 % бит в каждом контейнере длиной 1584 бит. Для сравнения: шифры ГОСТ и AES допускают искажение лишь одного бита в 128-битном блоке ($< 1\%$ данных) с возможностью установления факта (без исправления) такой ошибки. Поэтому при их использовании требуется дополнительное помехоустойчивое кодирование.

Преднамеренная помеха внедряется путем сложения по mod 2 одной из \bar{M}^t с каждой секцией контейнера. При действии такой помехи избыточность на уровне ключей дает 100 % правильных распознаваний уже при $Q = 3$. Но противник может использовать аналогичную избыточность для генерации помех. Установлена принципиальная возможность успешного противодействия влиянию такой помехи при выборе избыточности в процессе шифрования $Q \in \{5, 7\}$.

Влияние избыточного маскирования на стего- и криптостойкость. В случае избыточного маскирования при $Q = 5$ результат тестирования, аналогичного описанному в разделе 2, почти всегда оказывался «черным» [42]. Поэтому программа была модифицирована на случай использования вычислительного кластера из шести 12-ядерных рабочих узлов и одного управляющего узла. При одновременном запуске семидесяти двух потоков вероятность генерации «белого» стегосообщения с $Q = 5$ одним из потоков оказалась равной 1. В случае избыточного маскирования с таким Q сохранялось и свойство доказуемой криптостойкости.

4. Снижение объемов передач

Размеры носителя были определены ранее с позиций стегозащиты условием, что объем битовых вкраплений не должен превышать 1% объема носителя, что характерно для стеганографии. Соответственно, описанные исследования были проведены при размерах бинарных матриц-эталонов кодовых символов $m \times n = 119 \times 60$. При числе объектов сцены N объем сообщения с ассоциативной защитой V_{stego} (в битах) равен $V_{stego} = 3NL = 3Nk(9n - 12)$. Если не предъявлять жестких требований к помехоустойчивости при передаче зашифрованных сообщений по открытым каналам связи, то вполне приемлемыми для анализа сцен можно считать криптошифры ГОСТ и AES.

При использовании ГОСТ 34.12-2018 и AES-256 в 128-битном блоке размещают двенадцать кодов (десять битов отводят для хранения одного трехразрядного десятичного кода, остальные восемь бит блока заполняют псевдослучайными значениями). Соответственно, $V_{crypto} = 3N128/12 = 32N$, $V_{stego} = (3k(9n - 12)/32)V_{crypto}$. В случае $k = 3$, $n = 60$ получили $V_{stego} = 148.5 \cdot V_{crypto}$. Выбор $n = 30$ снижает объем передач примерно в два раза. Теперь для $k = 3$ имеем $V_{stego} = 72.56 \cdot V_{crypto}$. Значение $n = 30$ обеспечивает удовлетворение критерия полноты покрытия при небольшом переборе, высокую помехоустойчивость и доказуемую криптостойкость в случае избыточного маскирования [29].

Для оценки вероятности $P(T) = 10^{-3} \sum_{i=1}^{10^3} B_i$ генерации одним из T параллельно запущенных потоков «белого» стегосообщения при $n = 30$ ($B_i = 1$, если тест NIST успешно пройден в i -м опыте, иначе $B_i = 0$) была использована многопоточная программа генерации стегосообщения на кластерной платформе, упомянутая в разделе 3. Было получено $P(48) = 1$ для безызбыточного маскирования и $P(84) = 1$ (дополнительно были использованы двенадцать ядер управляющего узла) в случае избыточного при $Q = 5$.

5. Перспектива продолжения исследований

Эту перспективу мы связываем с изменением конфигураций цифровых эталонов при некотором расширении множества возможных единичных элементов матриц, как показано на рис. 8. Их целесообразно разместить не только по внешнему контуру и внутреннему «зигзагу» бинарных матриц, но и по двум дополнительным обратным диагоналям.

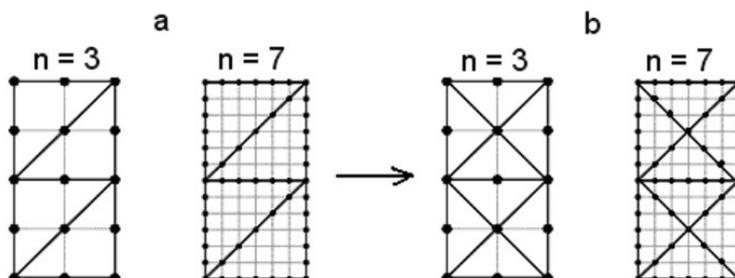


Рис. 8. Возможное размещение единиц на множестве $\{\overline{0,9}\}$ матриц-эталонов мощностью $\gamma = 10$: а) ранее использованное, б) вновь предлагаемое

Fig. 8. Possible placement of ones on the set $\{\overline{0,9}\}$ of the etalon matrices with power $\gamma = 10$: а) previously used, б) newly proposed

При использовании десятичного кодирования минимизация числа вкраплений в ГАММА-контейнер достигается, если удастся провести последовательность разбиений множества эталонов на группы: $10 \rightarrow 4 + 6$; $4 \rightarrow 2 + 2$; $6 \rightarrow 2 + 4$; $4 \rightarrow 2 + 2$. В итоге получаем шесть эталонов с тремя вкраплениями и четыре эталона с четырьмя вкраплениями, в среднем – три или четыре вкрапления на один эталон. При $n = 3$ имеем всего пять возможностей первого разбиения $10 \rightarrow 4 + 6$ (последующие разбиения вариативны) для ранее использованного представления десятичных цифр. Они показаны на рис. 9. Позиции битов, сохраняемых при маскировании, отмечены символом \otimes . В общем случае число возможностей возрастает до $5(n - 2)$. Как следует из рис. 10, на множестве вновь введенных эталонов имеем шесть возможных первых разбиений $10 \rightarrow 4 + 6$ против пяти в предыдущем варианте.

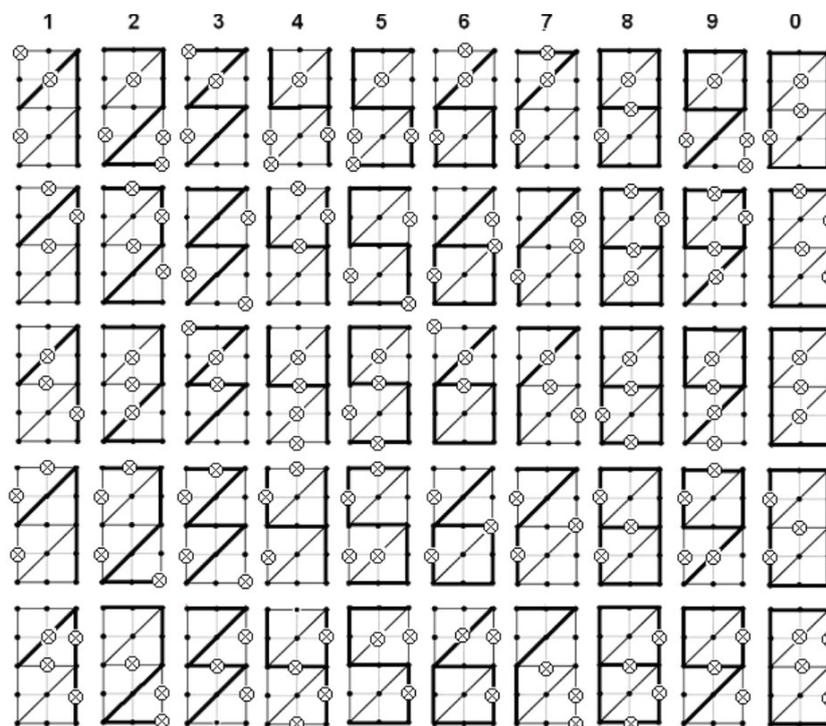


Рис. 9. По одному варианту маскирования при $n = 3$ для каждого из пяти возможных первых разбиений $10 \rightarrow 4 + 6$ для почтового множества $\{0, 9\}$

Fig. 9. One masking variant at $n = 3$ for each of the five possible first partitions $10 \rightarrow 4 + 6$ for the set of postal symbols $\{0, 9\}$

Выдвигаем следующую гипотезу:

Гипотеза. Математическое ожидание M_{q_1} числа вкраплений в любой эталон на множестве объектов сцены снижается, если изменение конфигураций десятичных эталонов влечет рост числа возможностей первого разбиения $10 \rightarrow 4 + 6$.

Длина контейнера при использовании предлагаемого расширения увеличится до $L = k(11n - 18)$, что при $k = 3$ и $n = 30$ дает рост на 20%. Поэтому, если новые исследования подтвердят справедливость нашей гипотезы, то значение $L/(kM_{q_1})$ при таком переходе должно значимо вырасти. То же самое – с числом ключей. Соответственно, стойкость должна существенно повыситься. Вопросы помехоустойчивости, связанные с из-

менением конфигураций эталонов, требуют дополнительного исследования. Полезно будет расширить и число рассматриваемых атак.

Особый интерес вызывает переход к шестнадцатой системе с вариациями конфигураций цифровых эталонов согласно рис. 8 (b). Если мощность γ множества эталонов – степень двойки, то минимизация числа вкраплений в ГАММА-контейнер будет достигнута последовательным делением этого множества и образуемых подмножеств пополам. Тогда число вкраплений в любой эталон окажется равным $\log_2 \gamma$. Случай $\gamma = 16$ иллюстрирует рис. 11.

Максимальное число имен при $k = 3$ равно теперь $16^3 = 4096$ против $10^3 = 1000$ для десятичного кодирования. Это должно способствовать существенному росту стойкости защиты при анализе картографических сцен, если требование полноты покрытия выполнено. Тот факт, что минимальное среднее число вкраплений в эталон на множестве $\{0, 15\}$ равно 4 против 3.4 для десятичного кодирования, не должен играть существенной роли.

В случае текстовых сцен переход к этому множеству при допустимом снижении разрядности до $k = 2$ будет способствовать повышению компактности текстовых сообщений с ассоциативной защитой. Но здесь могут возникнуть сомнения в получении приемлемой стойкости, т. к. число возможных представлений любого символа в процессе перебора ключей при полноте покрытия снизится до 256. Потребуется дополнительное исследование, чтобы преодолеть это сомнение.

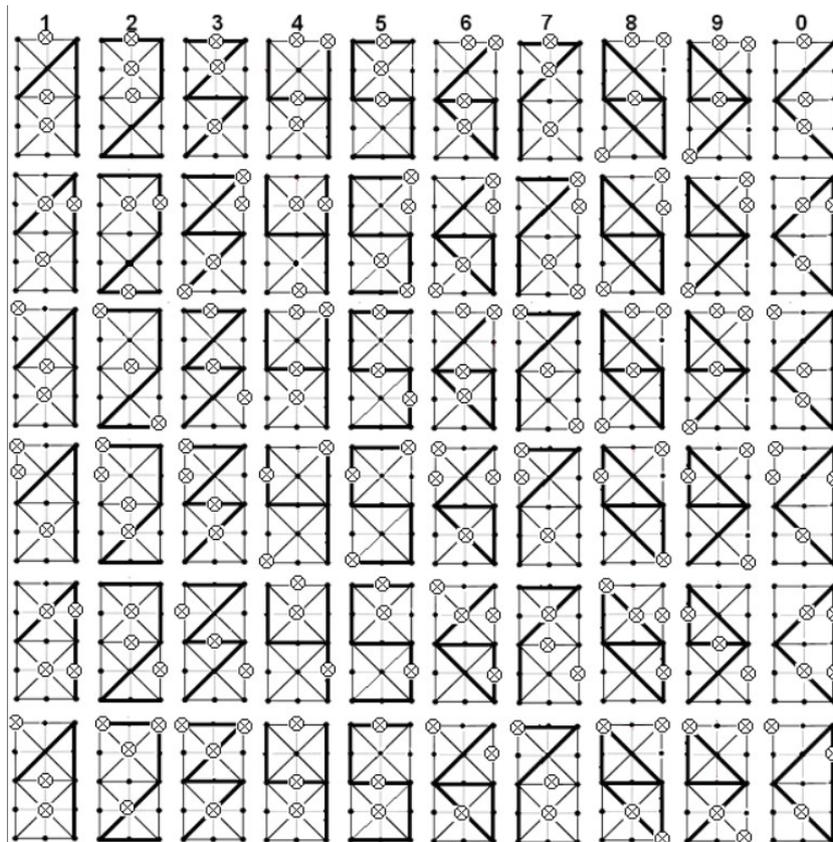


Рис. 10. По одному варианту маскирования при $n = 3$ для каждого из шести возможных первых разбиений $10 \rightarrow 4 + 6$ на множестве вновь введенных эталонов

Fig. 10. One masking variant at $n = 3$ for each of the six possible first partitions $10 \rightarrow 4 + 6$ on the set of newly introduced etalons

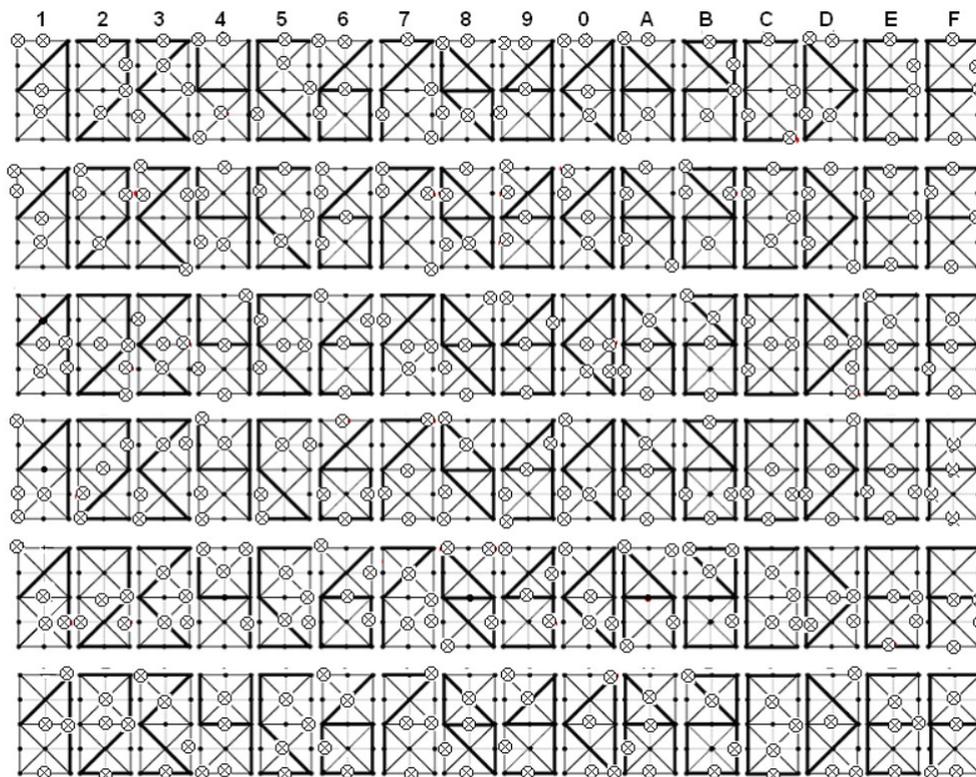


Рис. 11. По одному варианту экономного маскирования при $n = 3$ для каждого из шести возможных первых разбиений $16 \rightarrow 8 + 8$ на множестве $\{0, \overline{15}\}$ вновь введенных эталонов

Fig. 11. One variant of effective masking at $n = 3$ for each of the six possible first partitions $16 \rightarrow 8 + 8$ on the set $\{0, \overline{15}\}$ of newly introduced etalons

Заключение

Систематизированы главные особенности теории ассоциативной защиты информации. Рассмотрены возможности ее применения к защите данных картографических сцен и текстов. Взаимодополняющий симбиоз стеганографии и криптографии – главный научный результат проведенного исследования. С использованием развитых элементов названной теории были разработаны картографическая и текстовая СУБД с такой защитой [43–45]. Авторы видят значительные перспективы дальнейшего развития теории и практики ассоциативной защиты.

Есть один серьезный момент, который ставит под сомнение практическую достижимость в нашем случае безусловной стегостойкости. Противник едва ли поверит передаче по внешней сети адресованной случайной последовательности. Но выход имеется. Можно скрыть моменты начала передач между сервером и множеством клиентов, организовав непрерывное следование по внешней сети потока ПСП со вставкой в него стегосообщений в случайные моменты времени. Проблема представляется разрешимой в случае использования специализированной локальной сети между сотрудниками одной организации.

При этом формировать «белое» стего не нужно. Вероятности получения «белой» ГАМ-МБ и «белого» стего без предварительной выборки различаются всего на 10 % [43]. И если передачи «пустых» и стего контейнеров считать равновероятными, то с малой погрешностью получим равенство априорных и апостериорных вероятностей передач «черных»

и «белых» ГАММ и таких же стего. Иными словами, в этом случае критерий совершенной секретности по К. Шеннону [46] удовлетворяется в достаточной мере.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Анохин П.К.* Идеи и факты в разработке теории функциональных систем // Психол. журн. 1984. Т. 5, № 2. С. 107–118.
URL: <https://spkurdyumov.ru/evolutionism/idei-i-fakty-v-razrabotke-teorii-funkcionalnyx-sistem>.
2. *Райхлин В.А., Медведев А.С., Мотягин В.Г.* Вопросы разработки матричных компиляторов // Вычисл. сист. 1981. № 89. С. 69–83.
3. *Райхлин В.А.* Операционные логико-запоминающие среды. Вопросы применения и синтеза // Автомат. и телемех. 1983. № 11. С. 161–171.
4. *Райхлин В.А., Медведев А.С., Мотягин В.Г., Ильин А.В., Шварцман М.И.* К исследованию эффективности комплектования универсальных ЭВМ средней производительности матричными процессорами ассоциативного типа // Управляющ. сист. и машины. 1985. № 3. С. 23–28.
5. *Райхлин В.А.* Об использовании аппарата двумерного ассоциативного поиска в процессе распознавания. Казань: КАИ, 1991. С. 38–54.
6. *Райхлин В.А.* Анализ производительности процессорных матриц при распознавании двоичных образов // Автометрия. 1996. № 5. С. 97–103.
7. *Duda R.O., Hart P.E.* Pattern Classification and Scene Analysis. New York, NY: Wiley-Intersci. Publ., 1973. xvii, 482 p.
8. *Райхлин В.А.* Конструктивное моделирование систем. Казань: Фэн, 2005. 303 с.
9. *Дружинин В.В., Конторов Д.С.* Проблемы системологии (проблемы теории сложных систем). М.: Сов. радио, 1976. 296 с.
10. *Тейз А., Грибомон П., Юлен Г. и др.* Логический подход к искусственному интеллекту: от модальной логики к логике баз данных. М.: Мир, 1998. 494 с.
11. *Абазина Е.С., Ерунов А.А.* Цифровая стеганография: состояние и перспективы // Сист. упр., связи и безопасн. 2016. № 2. С. 182–201.
12. *Дрюченко М.А., Сирота А.А.* Блочный алгоритм стеганографического скрывания информации в видео на основе универсальных сжимающих преобразований // DSPA: Вопр. примен. цифр. обраб. сигн. 2017. Т. 7, № 3. С. 78–82.
13. *Коржик В.И., Федянин И.А., Копылова О.Д.* Синтез высокоскоростных стегоалгоритмов, устойчивых к «слепому» стегоанализу // ВЗИ. 2014. № 2. С. 51–56.
14. *Сирота А.А., Дрюченко М.А., Митрофанова Е.Ю.* Нейросетевые алгоритмы создания цифровых водяных знаков на основе гетероассоциативных сжимающих преобразований // Киберн. и высок. технол. XXI в. 2014. С. 68–78.

15. Шелухин О.И., Олейникова Т.В. Оценка эффективности стеганографического скрывания цифровых водяных знаков в видеопоследовательностях за счет дифференциальной разности энергий областей изображения // Научное техн. в космич. исслед. земли. 2016. № 2. С. 70–76.
16. Wang Z., Zhang X. Secure cover selection for steganography // IEEE Access. 2019. V. 7. P. 57857–57867. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2914226>.
17. Cachin C. An information-theoretic model for steganography // Inf. Comput. 2004. V. 192, No 1. P. 41–56. <https://doi.org/10.1016/j.ic.2004.02.003>.
18. ГОСТ 28147-89. Системы обработки информации. Защита криптографическая. Алгоритм криптографического преобразования. М.: Госстандарт СССР, 1989.
19. ГОСТ 34.12-2018. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Блочные шифры. М.: Стандартинформ, 2018.
20. *Advanced Encryption Standard (AES)*. Ser.: Federal Information Processing Standards Publication. FIPS 197. Upd. 1. Gaithersburg, MD: Natl. Inst. Stand. Technol., 2023. vii, 38 p. <https://doi.org/10.6028/NIST.FIPS.197-upd1>.
21. Coutinho S.C. The Mathematics of Ciphers: Number Theory and RSA Cryptography. New York, NY: AK Peters/CRC Press, 1999. 198 p. <https://doi.org/10.1201/9781439863893>.
22. Иванов М.А., Матвейчиков И.В., Скитев А.А., Стрельченко П.А. Способ сокрытия информации в последовательности псевдослучайных чисел // REDS: Телекоммун. устр. и сист. 2016. Т. 6, № 3. С. 355–359.
23. Вильховский Д.Э. Обзор методов стеганографического анализа изображений в работах зарубежных авторов // Матем. структ. и моделир. 2020. № 4 (56). С. 75–102.
24. Сирота Д.А., Дрюченко М.А., Иванков А.Ю. Стегоанализ цифровых изображений с использованием методов поверхностного и глубокого машинного обучения: известные подходы и новые решения // Вестн. ВГУ. Сер.: Сист. анализ и информ. технол. 2021. № 1. С. 33–52.
25. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. Reliable recognition of masked binary matrices. Connection to information security in map systems // Lobachevskii J. Math. 2013. V. 34, No 4. P. 319–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080213040112>.
26. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F. The elements of associative steganography theory // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2019. V. 43, No 1. P. 40–46. <https://doi.org/10.3103/S0278641919010072>.
27. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A. Associative steganography. Durability of associative protection of information // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 3. P. 440–450. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030191>.
28. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A. Associative steganography of text messages // Moscow Univ. Comput. Math. Cybern. 2021. V. 45, No 1. P. 1–11. <https://doi.org/10.3103/S0278641921010076>.
29. Raikhlin V.A., Gibadullin R.F., Vershinin I.S. Is it possible to reduce the sizes of stegomessages in associative steganography? // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 2. P. 455–462. <https://doi.org/10.1134/S1995080222050201>.

30. *Schneier B.* Cryptographic design vulnerabilities // *IEEE Comput.* 1998. V. 31, No 9. P. 29–33.
31. *Shinge S.R., Patil R.* An encryption algorithm based on ASCII value of data // *Int. J. Comput. Sci. Inf. Technol.* 2014. V. 5, No 6. P. 7232–7234.
32. *Ker D.A.* A capacity result for batch steganography // *IEEE Signal Process. Lett.* 2007. V. 14, No 8. P. 525–528. <https://doi.org/10.1109/LSP.2006.891319>.
33. *Matsumoto M., Nishimura T.* Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator // *ACM Trans. Model. Computer Simul. (TOMACS)*. 1998. V. 8, No 1. P. 3–30. <https://doi.org/10.1145/272991.272995>.
34. *Hegadi R., Patil A.P.* A statistical analysis on in-built pseudo random number generators using NIST test suite // *Proc. 2020 5th Int. Conf. on Computing, Communication and Security (ICCCS)*. Patna: IEEE, 2020. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICCCS49678.2020.9276849>.
35. *Maurer U.M.* A universal statistical test for random bit generators // *J. Cryptol.* 1992. V. 5, No 2. P. 89–105. <https://doi.org/10.1007/BF00193563>.
36. *Sadique Uz Zaman J.K.M., Ghosh R.* Review on fifteen statistical tests proposed by NIST // *J. Theor. Phys. Cryptogr.* 2012. V. 1. P. 18–31.
37. *Gyarmati K.* On a pseudorandom property of binary sequences // *Ramanujan J.* 2004. V. 8, No 3. P. 289–302. <https://doi.org/10.1007/s11139-004-0139-z>.
38. *Matsumoto M., Saito M., Nishimura T., Hagita M.* CryptMT stream cipher version 3 // eSTREAM, ECRYPT Stream Cipher Project, Report. V. 28. 2007.
39. *Вершинин И.С.* Стойкость ассоциативной защиты распределенных объектов картографии // *Нелин. мир.* 2011. Т. 9, № 12. С. 822–825.
40. *Probert T.* MapInfo Professional v10. 5 // *GeoInformatics.* 2010. V. 13, No 6. P. 62.
41. *Вершинин И.С.* Уточнение критерия избыточности помехоустойчивого сокрытия информации в рамках ассоциативной стеганографии // *Информ. и безопасн.* 2016. Т. 19, № 4. С. 511–514.
42. *Габдуллин Р.Ф., Вершинин И.С., Райхлин В.А.* Стегостойкость и вычислительная стойкость ассоциативной стеганографии // *Мет. моделир.-VII.* 2019. С. 23–38.
43. *Райхлин В.А., Вершинин И.С., Классен Р.К., Габдуллин Р.Ф., Пыстогов С.В.* Конструктивное моделирование процессов синтеза. Казань: ФЭн, 2020. 248 с.
44. *Вершинин И.С., Габдуллин Р.Ф., Пыстогов С.В.* Программа управления ассоциативно защищенными картографическими базами данных «Security Map Cluster». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611421. Россия, 2016.
45. *Вершинин И.С., Габдуллин Р.Ф.* Программа ассоциативной защиты файлов «Stego». Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021613638. Россия, 2021.
46. *Shannon C.E.* Communication theory of secrecy systems // *Bell Syst. Tech. J.* 1949. V. 28, No 4. P. 656–715. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x>.

References

1. Anokhin P.K. Ideas and facts in the development of the theory of functional systems. *Psikhol. Zh.*, 1984, vol. 5, no. 2, pp. 107–118.
URL: <https://spkurdyumov.ru/evolutionism/idei-i-fakty-v-razrabotke-teorii-funktionalnyx-sistem>.
2. Raikhlin V.A., Medvedev A.S., Motyagin V.G. Problems in the development of matrix compilers. *Vychisl. Sist.*, 1981, no. 89, pp. 69–83. (In Russian)
3. Raikhlin V.A. Operating logical and storing arrays. Application and design. *Avtom. Telemekh.*, 1983, no. 11, pp. 161–171. (In Russian)
4. Raikhlin V.A., Medvedev A.S., Motyagin V.G., Il'in A.V., Schwartzman M.I. On the study of the efficiency of equipping midrange universal computers with associative matrix processors. *Upr. Sist. Mash.*, 1985, no. 3, pp. 23–28. (In Russian)
5. Raikhlin V.A. *Ob ispol'zovanii apparata dvumernogo assotsiativnogo poiska v protsesse raspoznavaniya* [On the Use of a Two-Dimensional Associative Search Apparatus in the Recognition Process]. Kazan, KAI, 1991, pp. 38–54. (In Russian)
6. Raikhlin V.A. Analysis of the performance of processor matrices in binary pattern recognition. *Avtometriya*, 1996, no. 5, pp. 97–103. (In Russian)
7. Duda R.O., Hart P.E. *Pattern Classification and Scene Analysis*. New York, NY, Wiley-Intersci. Publ., 1973. xvii, 482 p.
8. Raikhlin V.A. *Konstruktivnoe modelirovanie sistem* [Constructive Modeling of Systems]. Kazan, Fen, 2005. 303 p. (In Russian)
9. Druzhinin V.V., Kontorov D.S. *Problemy sistemologii (problemy teorii slozhnykh sistem)* [Problems of Systems Science (Problems of the Theory of Complex Systems)]. Moscow, Sov. Radio, 1976. 296 p. (In Russian)
10. Thayse A., Gribomont P., Hulin G., et al. *Logicheskii podkhod k iskusstvennomu intellektu: ot modal'noi logiki k logike baz dannykh* [A Logic Based Approach to Artificial Intelligence: From Modal Logic to Deductive Databases]. Moscow, Mir, 1998. 494 p. (In Russian)
11. Abazina E.S., Yerunov A.A. Digital steganography: Status and development outlook. *Sist. Upr., Svyazi Bezop.*, 2016, no. 2, pp. 182–201. (In Russian)
12. Dryuchenko M.A., Sirota A.A. Block video steganography algorithm based on universal compressing transformations. *DSPA: Vopr. Primen. Tsifrovoi Obrab. Signalov*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 78–82. (In Russian)
13. Korzhik V.I., Fedyanin I.A., Kopylova O.D. Synthesis of high-speed steganographic algorithms resistant to blind steganalysis. *VZI*, 2014, no. 2, pp. 51–56. (In Russian)
14. Sirota A.A., Dryuchenko M.A., Mitrofanova E.Yu. Neural network algorithms for creating digital watermarks based on heteroassociative compressive transformations. In: *Kibernetika i vysokie tekhnologii XXI veka* [Cybernetics and High Technology of the 21st Century], 2014, pp. 68–78. (In Russian)
15. Sheluhin O.I., Oleynikova T.V. Evaluating the effectiveness of hiding digital watermark in video sequences due to the energy difference between the discrete cosine transform coefficients. *HEES Res.*, 2016, no. 2, pp. 70–76. (In Russian)

16. Wang Z., Zhang X. Secure cover selection for steganography. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 57857–57867. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2914226>.
17. Cachin C. An information-theoretic model for steganography. *Inf. Comput.*, 2004, vol. 192, no. 1, pp. 41–56. <https://doi.org/10.1016/j.ic.2004.02.003>.
18. State Standard 28147-89. Information processing systems. Cryptographic protection. Cryptographic transformation algorithm. Moscow, Gosstandart SSSR, 1989. (In Russian)
19. State Standard 34.12-2018. Information technology. Cryptographic data security. Block ciphers. Moscow, Standartinform, 2018. (In Russian)
20. Advanced Encryption Standard (AES). Ser.: Federal Information Processing Standards Publication. FIPS 197. Upd. 1. Gaithersburg, MD, Natl. Inst. Stand. Technol., 2023. vii, 38 p. <https://doi.org/10.6028/NIST.FIPS.197-upd1>.
21. Coutinho S.C. *The Mathematics of Ciphers: Number Theory and RSA Cryptography*. New York, NY, AK Peters/CRC Press, 1999. 198 p. <https://doi.org/10.1201/9781439863893>.
22. Ivanov M.A., Matveichikov I.V., Skitev A.A., Strel'chenko P.A. Hiding information in pseudorandom number sequences. *REDS: Telekommun. Ustroistva Sist.*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 355–359. (In Russian)
23. Vil'khovskii D.E. A review of image steganalysis methods in foreign publications. *Mat. Strukt. Model.*, 2020, no. 4 (56), pp. 75–102. (In Russian)
24. Sirota A.A., Dryuchenko M.A., Ivankov A. Steganalysis of digital images by means of shallow and deep machine learning: Existing approaches and new solutions. *Proc. Voronezh State Univ. Ser.: Syst. Anal. Inf. Technol.*, 2021, no. 1, pp. 33–52. (In Russian)
25. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. Reliable recognition of masked binary matrices. Connection to information security in map systems. *Lobachevskii J. Math.*, 2013, vol. 34, no. 4, pp. 319–325. <https://doi.org/10.1134/S1995080213040112>.
26. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Gibadullin R.F. The elements of associative steganography theory. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2019, vol. 43, no. 1, pp. 40–46. <https://doi.org/10.3103/S0278641919010072>.
27. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A. Associative steganography. Durability of associative protection of information. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 3, pp. 440–450. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030191>.
28. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V., Raikhlin V.A. Associative steganography of text messages. *Moscow Univ. Comput. Math. Cybern.*, 2021, vol. 45, no. 1, pp. 1–11. <https://doi.org/10.3103/S0278641921010076>.
29. Raikhlin V.A., Gibadullin R.F., Vershinin I.S. Is it possible to reduce the sizes of stegomessages in associative steganography? *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 2, pp. 455–462. <https://doi.org/10.1134/S1995080222050201>.
30. Schneier B. Cryptographic design vulnerabilities. *IEEE Comput.*, 1998, vol. 31, no. 9, pp. 29–33.
31. Shinge S.R., Patil R. An encryption algorithm based on ASCII value of data. *Int. J. Comput. Sci. Inf. Technol.*, 2014, vol. 5, no. 6, pp. 7232–7234.

32. Ker D.A. A capacity result for batch steganography. *IEEE Signal Process. Lett.*, 2007, vol. 14, no. 8, pp. 525–528. <https://doi.org/10.1109/LSP.2006.891319>.
33. Matsumoto M., Nishimura T. Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Trans. Model. Computer Simul. (TOMACS)*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 3–30. <https://doi.org/10.1145/272991.272995>.
34. Hegadi R., Patil A.P. A statistical analysis on in-built pseudo random number generators using NIST test suite. *Proc. 2020 5th Int. Conf. on Computing, Communication and Security (ICCCS)*. Patna, IEEE, 2020, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICCCS49678.2020.9276849>.
35. Maurer U.M. A universal statistical test for random bit generators. *J. Cryptol.*, 1992, vol. 5, no. 2, pp. 89–105. <https://doi.org/10.1007/BF00193563>.
36. Sadique Uz Zaman J.K.M., Ghosh R. Review on fifteen statistical tests proposed by NIST. *J. Theor. Phys. Cryptogr.*, 2012, vol. 1, pp. 18–31.
37. Gyarmati K. On a pseudorandom property of binary sequences. *Ramanujan J.*, 2004, vol. 8, no. 3, pp. 289–302. <https://doi.org/10.1007/s11139-004-0139-z>.
38. Matsumoto M., Saito M., Nishimura T., Hagita M. CryptMT stream cipher version 3. eSTREAM, ECRYPT Stream Cipher Project, Report. Vol. 28. 2007.
39. Vershinin I.S. Durability of the associative protection of distributed cartographic objects. *Nelineinyi Mir*, 2011, vol. 9, no. 12, pp. 822–825. (In Russian)
40. Probert T. MapInfo Professional v10.5. *GeoInformatics*, 2010, vol. 13, no. 6, p. 62.
41. Vershinin I.S. Refinement of the redundancy criterion for noise-resistant hiding of information in associative steganography. *Inf. Bezop.*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 511–514. (In Russian)
42. Gibadullin R.F., Vershinin I.S., Raikhlin V.A. Steganographic and computational strength of associative steganography. In: *Metody modelirovaniya-VII* [Methods of Modeling-VII], 2019, pp. 23–38. (In Russian)
43. Raikhlin V.A., Vershinin I.S., Klassen R.K., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. *Konstruktivnoe modelirovanie protsessov sinteza* [Constructive Modeling of Synthesis Processes]. Kazan, Fen, 2020. 248 p. (In Russian)
44. Vershinin I.S., Gibadullin R.F., Pystogov S.V. State Registration Certificate for Software No. 2016611421. “Security Map Cluster” program for managing associative protected cartographic databases. Russia, 2016. (In Russian)
45. Vershinin I.S., Gibadullin R.F. State Registration Certificate for Software No. 2021613638. “Stego” program for associative protection of files. Russia, 2021.
46. Shannon C.E. Communication theory of secrecy systems. *Bell Syst. Tech. J.*, 1949, vol. 28, no. 4, pp. 656–715. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1949.tb00928.x>.

Информация об авторах

Игорь Сергеевич Вершинин, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Компьютерные системы», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: ISVershinin@kai.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5166-2862>

Руслан Фаршатович Гибадуллин, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Компьютерные системы», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: RuslanGibadullin@vk.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9359-911X>

Вадим Абрамович Райхлин, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Компьютерные системы», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: rajhlin.cs@kstu-kai.ru

Author Information

Igor S. Vershinin, Dr. Sci. (Engineering), Associate Professor, Head of Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: ISVershinin@kai.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5166-2862>

Ruslan F. Gibadullin, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: RuslanGibadullin@vk.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9359-911X>

Vadim A. Raikhlin, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: rajhlin.cs@kstu-kai.ru

Поступила в редакцию 2.08.2025
Принята к публикации 14.09.2025

Received August 2, 2025
Accepted September 14, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.529.6: 534.14

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>**Взаимодействие пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки**

А.И. Давлетшин ✉, А.А. Аганин

Институт механики и машиностроения ФИЦ «Казанский научный центр РАН», г. Казань, Россия✉ anas.davletshin@gmail.com**Аннотация**

Исследованы динамика регулярного и стохастических кластеров, состоящих из шестнадцати воздушных пузырьков, в воде около плоской жесткой стенки и силовое воздействие на эту стенку в комнатных условиях. Изначально в регулярном кластере центры одинаковых сферических пузырьков расположены в узлах плоской квадратной сетки, параллельной стенке. Стохастические кластеры образуются из регулярного внесением случайных начальных отклонений в положения пузырьков либо в их размеры. Давление воды изменяется по гармоническому закону. Использована дискретная модель совместной динамики пузырьков, в которой наряду с радиальными пульсациями пузырьков допускаются их перемещения и деформации, но не допускается их разрушение. Поэтому исследования проводятся лишь до тех пор, пока какой-либо пузырек кластера не разрушится. Изучены динамика пузырьков и их воздействие на стенку в зависимости от амплитуды колебаний давления воды, удаленности пузырьков от стенки, расстояния между пузырьками, диапазона случайной неоднородности начальных размеров пузырьков и случайной нерегулярности их начальных положений. Показано, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется несинхронной динамикой пузырьков. По мере уменьшения амплитуды колебаний окружающего давления, увеличения удаленности пузырьков от стенки и расстояния между пузырьками максимум давления на стенке монотонно понижается.

Ключевые слова: динамика пузырьков, взаимодействие пузырьков, динамика пузырьковых кластеров, динамика пузырьков около твердого тела, воздействие пузырьков на тело, кавитация

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан» (соглашение № 61/2024-ПД).

Для цитирования: Давлетшин А.И., Аганин А.А. Взаимодействие пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 437–454. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>

Interaction of air bubbles in liquid near a flat rigid wall

A.I. Davletshin ✉, A.A. Aganin

*Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

✉ anas.davletshin@gmail.com

Abstract

The dynamics of regular and stochastic clusters consisting of 16 air bubbles in water near a flat rigid wall under room conditions, as well as with the action they exert on it, was investigated. In the regular cluster, the centers of the equal spherical bubbles were initially located at the nodes of a flat quadratic mesh parallel to the wall. The stochastic clusters were produced from the regular one by the random change in the position or size of the bubbles. The water pressure varied harmonically. The study used a discrete model of the joint bubble dynamics, in which the bubbles are allowed to undergo radial oscillations, translation, and deformations, but not destruction, and proceeded until the destruction began. The dynamics of the bubbles and their action on the wall were analyzed with respect to the amplitude of water pressure oscillations, the distance between the bubbles and the wall, the spacing of the bubbles, the random non-uniformity of the initial size of the bubbles, and the random non-regularity of the initial positions of the bubbles. The pressure on the wall was found to be largely determined by the asynchronous dynamics of the bubbles. Its maximum value was reduced monotonically with a decrease in the amplitude of water pressure oscillations and an increase in the distance between the bubbles and the wall and the spacing of the bubbles.

Keywords: dynamics of bubbles, interaction of bubbles, dynamics of bubble clusters, dynamics of bubbles near rigid body, action of bubbles on body, cavitation

Acknowledgments. This study was supported by the grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan “Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan” (agreement no. 61/2024-PD).

For citation: Davletshin A.I., Aganin A.A. Interaction of air bubbles in liquid near a flat rigid wall. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 437–454. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>. (In Russian)

Введение

К настоящему времени большинство исследований динамики пузырьков около твердых тел и силового воздействия на них посвящено одиночным пузырькам. В частности,

в случае одиночных пузырьков изучалось влияние таких факторов, как начальная форма коллапсирующего пузырька [1, 2], форма пузырька в ходе коллапса [3], расстояние до поверхности тела [4, 5], присутствие других пузырьков [6, 7], наличие акустического воздействия на пузырек [8, 9], искривленность поверхности тела в виде выпуклого сферического сектора [10, 11], неровности поверхности тела в виде локальной выпуклости или вогнутости [12, 13].

Анализ литературы показывает, что исследование динамики кластеров около твердых тел преимущественно проводится с применением прямого численного моделирования (DNS). В частности, в работе [14] для метода DNS представлены результаты расчета однократного коллапса крайне большого (пятнадцать тысяч) числа пузырьков вблизи плоской стенки и воздействия на нее. В работе [15] исследована динамика роста и коллапса кластера, состоящего из относительно небольшого (пятьдесят) числа пузырьков.

В работе [16] изучен коллапс около твердой стенки кластера из двадцати семи кавитационных пузырьков, равномерно распределенных в кубической области. Межфазная граница построена методом объемов VOF (Volume Of Fluid). Следует отметить, что в методе VOF предполагается, что контактирующие среды остаются несмешанными, а граница их раздела является непрерывной. Жидкость считалась сжимаемой, а плотность и давление в пузырьках – постоянными. Варьировались расстояние между пузырьками и удаленность от стенки. Основное внимание было уделено определению импульсного давления на стенке и деформации пузырьков.

В работе [17] представлены результаты исследования коллапса кластера, состоящего из ста пятидесяти сферических паровых пузырьков, с особым вниманием на ударные нагрузки стенки, потенциально вызывающие эрозию. Давление жидкости 10 МПа. Учитывалась сжимаемость жидкости, применялся консервативный конечно-объемный метод. Исследуемые кластеры различались начальным объемным содержанием пара, расстоянием до стенки и начальным радиусом пузырьков.

Работа [18] посвящена численному исследованию коллапса изначально сферических одиночных пузырьков и кластера, состоящего из восьми пузырьков. Пузырьки заполнены паром. Основное внимание направлено на превращение различных форм энергии. Парожидкостные границы определены методом VOF.

В работе [19] изучен процесс коллапса кластера паровых пузырьков в окрестности стенки. Для описания поверхностей пузырьков также применялся метод VOF. Учитывалось влияние вязкости и сжимаемости жидкости, а также поверхностного натяжения. Рассмотрены колоноподобные кластеры и кубический кластер, состоящий из шестидесяти четырех пузырьков.

Наряду с DNS иногда применяют модели механики сплошной среды (МСС), метод граничных элементов (МГЭ) и дискретные модели (particle-модели). Так, в работе [20] приведены результаты численного исследования динамики сферического кластера пузырьков около стенки при акустическом возбуждении с применением эйлерово-лагранжевой модели двухфазной сплошной среды. Изначально кластер имеет сферическую форму. Изучено влияние амплитуды и частоты возбуждения, размеров кластера и его пузырьков, газосодержания кластера, начальной удаленности кластера от стенки.

В работе [6] экспериментально и численно с помощью МГЭ изучена динамика двух кавитационных пузырьков возле плоской твердой границы. Пузырьки образуются лазерными импульсами в осесимметричной конфигурации, когда центры пузырьков расположены

на нормали к этой границе. Варьируется расстояние между пузырьками и их удаленность от стенки.

В работе [7] с применением МГЭ изучена динамика двух пузырьков, образующихся в результате расщепления паровой полости, возникающей в жидком диэлектрике между электродом и образцом при электроискровой обработке образца. Проанализированы изменение давления в пузырьках, их деформации и перемещения, изменение их объема в зависимости от места образования полости между поверхностями электрода и образца, которые считаются плоскими.

В работе [21] предложен один из вариантов дискретных (particle) моделей, в котором пузырьки считаются сферическими, учтены их пространственное перемещение и временная задержка в их взаимодействии. Приведены примеры применения этой модели для описания динамики одиночных пузырьков и пузырьковых кластеров в неограниченном объеме жидкости, в окрестности свободной поверхности жидкости и около твердой стенки.

В работе [22] с применением particle-модели работы [21] изучена динамика одиночных пузырьков и пузырьковых кластеров в разнообразных конфигурациях, включая наличие жестких стенок. Рассмотрены комплексные жесткие границы, в том числе параллельные стенки и стенки, находящиеся под углом друг к другу. Для оценки правильности результатов численного моделирования проведены соответствующие эксперименты с пузырьками, образованными искровым разрядом.

В настоящей работе изучены динамика шестнадцати воздушных пузырьков в воде около плоской жесткой стенки и силовое воздействие на эту стенку в комнатных условиях при гармоническом изменении давления воды. Пузырьки образуют либо регулярные, либо стохастические кластеры. В регулярном кластере пузырьки изначально одинаковые, сферические, их центры расположены в узлах квадратной сетки, плоскость которой параллельна стенке. Стохастические кластеры образуются из регулярного внесением случайных возмущений либо в начальное положение пузырьков, либо в их начальные размеры. Использована недавно предложенная авторами дискретная модель совместной динамики пузырьков [23]. Наряду с рядом преимуществ по сравнению с другими моделями (возможность перемещений и деформаций пузырьков, четкое выделение их поверхности, учет сжимаемости жидкости, высокая вычислительная эффективность и т. д.), данная модель, как и многие другие, не допускает разрушения пузырьков. Поэтому исследования проводятся лишь до тех пор, пока какой-либо пузырек кластера не разрушится. Эффективность применения указанной модели к изучению рассматриваемой задачи продемонстрирована в работе [24].

1. Постановка задачи

Изучим совместную динамику газовых пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки (рис. 1) и их силовое воздействие на эту стенку. Газом в пузырьках является воздух, окруженный жидкостью – водой. Давление воды на большом удалении от пузырьков изменяется по гармоническому закону

$$p_{\infty} = p_0 - p_a \sin \omega t, \quad (1)$$

где p_0 – статическое давление, p_a и ω – амплитуда и частота колебаний, t – время.

При таком возбуждении пузырьки радиально пульсируют, перемещаются по жидкости, их поверхности деформируются. Такое поведение пузырьков может иметь место, например, при акустическом воздействии.

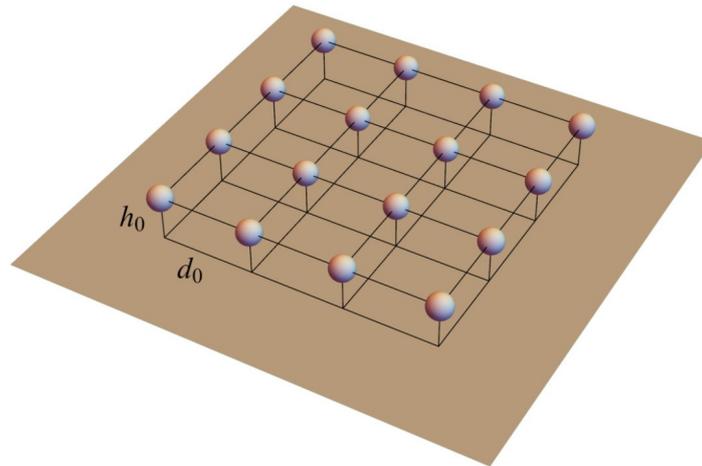


Рис. 1. Регулярный плоский кластер газовых пузырьков около плоской жесткой стенки
Fig. 1. Regular plane cluster of gas bubbles near a flat rigid wall

Рассмотрим регулярный и стохастические кластеры, состоящие из $K^* = 16$ пузырьков. В регулярном кластере центры пузырьков расположены в узлах равномерной квадратной сетки с размером ячеек (расстоянием между центрами ближайших пузырьков) d_0 . Считаем, что стенка ориентирована горизонтально, а плоскость центров пузырьков (плоскость кластера) расположена над ней параллельно ее поверхности. Расстояние между центрами пузырьков (плоскостью кластера) и стенкой равно h_0 . В начальный момент времени $t = 0$ жидкость и пузырьки покоятся (находятся в динамическом равновесии), все пузырьки являются сферическими с одинаковым радиусом R_0 .

Стохастические кластеры характеризуются случайным распределением либо начальных размеров, либо положений пузырьков. Кластеры со случайным распределением начальных размеров пузырьков образуются из регулярного кластера путем случайного отклонения начальных радиусов пузырьков согласно выражению $R_{k0}^{st} = R_0(1 + \delta_k^{st})$, где $k = 1, 2, \dots, K^*$, R_{k0}^{st} – начальный радиус k -го пузырька в стохастическом кластере, δ_k^{st} – параметр, определяющий случайное отклонение. Значение δ_k^{st} выбирается из интервала $[-\delta_R, \delta_R]$, δ_R – некоторое положительное число.

Кластеры со случайным распределением положений пузырьков получаются из регулярного кластера путем случайного отклонения начальных положений центров пузырьков согласно выражению $\mathbf{r}_{k0}^{st} = \mathbf{r}_{k0} + R_0 \boldsymbol{\delta}_k^{st}$, где $\mathbf{r}_{k0} = x_{k0} \mathbf{i} + y_{k0} \mathbf{j} + z_{k0} \mathbf{k}$, $\boldsymbol{\delta}_k^{st} = \delta_{xk}^{st} \mathbf{i} + \delta_{yk}^{st} \mathbf{j} + \delta_{zk}^{st} \mathbf{k}$; x_{k0}, y_{k0}, z_{k0} – начальные координаты k -го пузырька в регулярном кластере, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы декартовой системы координат. Значения параметров $\delta_{xk}^{st}, \delta_{yk}^{st}, \delta_{zk}^{st}$, определяющих случайное отклонение положения пузырьков, берутся из интервала $[-\delta_r, \delta_r]$, где δ_r – некоторое положительное число.

Изучим влияние амплитуды возбуждения p_a , удаленности пузырьков от стенки h_0 , расстояния между пузырьками d_0 и случайных отклонений в начальных радиусах пузырьков δ_R и в их начальном положении δ_r . Исследования выполним в комнатных условиях при статическом давлении $p_0 = 1$ бар, плотности жидкости $\rho_L = 998$ кг/м³, скорости звука в жидкости $c_L = 1500$ м/с, динамической вязкости жидкости $\mu_L = 10^{-3}$ кг/(м · с), начальных радиусах пузырьков в регулярном кластере $R_0 = 3$ мкм, частоте колебаний давления жидкости $\omega/2\pi = 20$ кГц, начальном давлении в пузырьках $p_{b0} = p_0 + 2\sigma/R_0$,

где σ – поверхностное натяжение ($\sigma = 0.0725$ Н/м). В силу ограниченности используемой модели исследования проводим лишь до момента разрушения каких-либо пузырьков кластера (критерий разрушения приведен ниже).

2. Математическая модель

Для описания коллективной динамики пузырьков вблизи плоской жесткой стенки (рис. 1) используем разработанную недавно математическую модель взаимодействующих газовых пузырьков в неограниченном объеме жидкости [23]. При этом задача коллективной динамики K^* пузырьков вблизи плоской жесткой стенки рассматривается как задача взаимодействия $K = 2K^*$ пузырьков, K^* из которых являются исследуемыми пузырьками, а остальные K^* – их зеркальными отображениями относительно стенки [24], так что на поверхности плоской жесткой стенки выполняется условие непротекания.

В используемой модели совместной динамики пузырьков [23] газ в пузырьках предполагаем идеальным совершенным, с равномерным распределением давления, изменяющимся по адиабатическому закону, жидкость – слабосжимаемой, а пузырьки – слабонесферическими. Учитываем поверхностное натяжение и влияние вязкости жидкости.

Уравнение поверхности k -го пузырька ($k = 1, 2, \dots, K$) имеет вид

$$F(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) = r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N a_{nk}(t) Y_n(\theta_k, \varphi_k) = 0,$$

где r_k, θ_k, φ_k – сферические координаты с началом в центре k -го пузырька, $R_k(t)$ – его радиус, $a_{nk}(t) = (a_{nk}^{-n}, a_{nk}^{-n+1}, \dots, a_{nk}^0, \dots, a_{nk}^n)$ – вектор-строка из $2n + 1$ элементов, $Y_n(\theta_k, \varphi_k) = (Y_{nk}^{-n}, Y_{nk}^{-n+1}, \dots, Y_{nk}^0, \dots, Y_{nk}^n)^T$ – вектор-столбец из $2n + 1$ элементов, $Y_{nk}^m = Y_n^m(\theta_k, \varphi_k) = P_n^{|m|}(\cos \theta_k) e^{im\varphi_k}$ – сферическая функция (гармоника) с номером n и порядком m , $P_n^{|m|}(\cos \theta_k)$ – соответствующий многочлен Лежандра степени n и порядка $|m|$, i – мнимая единица, $a_{nk}^m = a_{nk}^m(t)$ – амплитуда отклонения поверхности пузырька от сферической поверхности $r_k = R_k(t)$ в виде сферических функций Y_{nk}^m , N – максимальное число сферических гармоник, представляющих поверхность пузырька.

Отклонения поверхности пузырьков от сферической считаем не слишком большими, так что для всех $n = 2, 3, \dots, N$ и $k = 1, \dots, K$ выполнены следующие соотношения:

$$|\varepsilon_{nk}| \sim \delta^{n+1}, \quad |\dot{\varepsilon}_{nk}| \sim \delta^{n+1} |\dot{R}_k|/R_k, \quad |\ddot{\varepsilon}_{nk}| \sim \delta^{n+1} |\ddot{R}_k|/R_k,$$

где δ – малый параметр, который определяется ниже, точки сверху означают дифференцирование по времени,

$$\varepsilon_{nk} = \begin{cases} \varepsilon_{nk \max}, & \varepsilon_{nk \max} + \varepsilon_{nk \min} \geq 0; \\ \varepsilon_{nk \min}, & \varepsilon_{nk \max} + \varepsilon_{nk \min} < 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{nk \max} = \max_{\theta_k, \varphi_k} e_{nk} Y_n(\theta_k, \varphi_k), \quad \varepsilon_{nk \min} = \min_{\theta_k, \varphi_k} e_{nk} Y_n(\theta_k, \varphi_k),$$

$e_{nk} = a_{nk}/R_k$ – вектор-строка относительных амплитуд отклонения поверхности k -го пузырька от сферической в виде гармоник Y_{nk}^m ; $\varepsilon_{nk \max}$, $\varepsilon_{nk \min}$ – соответственно максимальное положительное и минимальное отрицательное относительные отклонения от сферической поверхности в виде Y_{nk} ; $e_{nk} Y_{nk}$ – значение относительного отклонения поверхности пузырька от сферической в виде Y_{nk} в точке θ_k, φ_k . Отметим, что $e_{nk} Y_{nk} > 0$ соответствует выпуклости поверхности пузырька наружу, а $e_{nk} Y_{nk} < 0$ – вогнутости внутрь.

Пузырьки считаем расположенными не очень близко друг к другу, так что слагаемые порядка δ^7 и выше не учитываем, т.е. $\delta^7 \ll 1$. Здесь $\delta = \max_{k,j} [(R_k + R_j) / d_{kj}]$ – максимальное по всем парам взаимодействующих пузырьков отношение суммы их радиусов R_k и R_j к расстоянию между их центрами $d_{kj} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|$ ($k, j = 1, 2, \dots, K; k \neq j$), $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$; x_k, y_k и z_k – координаты центра k -го пузырька в неподвижной декартовой системе. Скорости и ускорения смещения центров пузырьков также предполагаем малыми:

$$|\dot{\mathbf{r}}_k| \sim \delta^2 |\dot{R}_k|, \quad |\ddot{\mathbf{r}}_k| \sim \delta^2 |\ddot{R}_k|.$$

Совместная динамика пузырьков может быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков R_k , радиус-векторов их центров \mathbf{r}_k и амплитуд отклонения их формы от сферической a_{nk} [23]:

$$\begin{aligned} R_k \ddot{R}_k + \frac{3}{2} \dot{R}_k^2 - \frac{3}{4} \dot{\mathbf{p}}_k \dot{\mathbf{p}}_k \circ Y_{110} - \frac{p_{b,k} - p_\infty}{\rho_L} + \frac{2\sigma}{\rho_L R_k} + \Delta_{0k}^{(6)} + \Delta_{0k}^\mu + \Delta_k^c = \\ = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{\dot{b}_{0j}}{d_{kj}} - \frac{b_{0j} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2} - \left((R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j)' - \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_j^3 b_{0s})' C_{01js}}{d_{js}^2} \right) \frac{C_{10kj}}{2d_{kj}^2} - \right. \\ \left. - \left(\dot{\mathbf{p}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{b_{0s} C_{01ks}}{2d_{ks}^2} \right) \frac{9b_{0j} C_{01kj} \circ Y_{110}}{2d_{kj}^2} + \Delta_{0kj}^{(6)} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{\mathbf{p}}_k + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k - \left(\frac{6\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k a_{2k}}{R_k} + \frac{9}{2} \dot{\mathbf{p}}_k \dot{a}_{2k} + \frac{7}{2} \ddot{\mathbf{p}}_k a_{2k} \right) \circ Y_{211} + \Delta_{1k}^\mu = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{3(R_k b_{0j})' C_{01kj}}{d_{kj}^2} + \right. \\ \left. + \frac{3R_k b_{0j} \dot{C}_{01kj}}{d_{kj}^2} - \frac{6R_k b_{0j} C_{01kj} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3} - \left((R_k R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j)' - \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_k R_j^3 b_{0s})' C_{01js}}{d_{js}^2} \right) \frac{3C_{11kj}}{2d_{kj}^3} - \right. \\ \left. - \left(\dot{\mathbf{p}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{C_{01ks}}{b_{0s}^{-1} d_{ks}^2} \right) \frac{15C_{02kj} \circ Y_{211}}{R_k^{-1} b_{0j}^{-1} d_{kj}^3} - \frac{(R_k b_{0j})' a_{2k} + 3(R_k a_{2k})' b_{0j}}{2R_k d_{kj}^2} 3C_{01kj} \circ Y_{211} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{a}_{nk} + 3\dot{R}_k \dot{a}_{nk} - (n-1) \ddot{R}_k a_{nk} + 2\delta_{3n} \left(\frac{4\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k a_{2k}}{R_k} + 5\dot{\mathbf{p}}_k \dot{a}_{2k} + \ddot{\mathbf{p}}_k a_{2k} \right) \circ Y_{123} + \\ + \delta_{2n} \frac{27}{8} \dot{\mathbf{p}}_k \dot{\mathbf{p}}_k \circ Y_{112} + \frac{\sigma(n^2-1) a_{nk}}{(n+2)^{-1} \rho_L R_k^2} + (\delta_{2n} + \delta_{4n}) \Delta_{nk}^{(6)} + \Delta_{nk}^\mu = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{(R_k^n b_{0j})' C_{0nkj}}{(2n+1)^{-1} d_{kj}^{n+1}} + \right. \\ \left. + \frac{3(\delta_{2n} + \delta_{3n})(n^2-1) R_k^{n-2} b_{0j}}{2n(2n-1)^{-1} d_{kj}^n} \left(\dot{\mathbf{p}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{b_{0s} C_{01ks}}{(\delta_{2n} + 1) d_{ks}^2} \right) C_{0n-1kj} \circ Y_{1n-1n} + \right. \\ \left. + 2\delta_{3n} \frac{4\dot{R}_k b_{0j} a_{2k} + 3R_k \dot{b}_{0j} a_{2k} + 5R_k b_{0j} \dot{a}_{2k}}{R_k d_{kj}^2} C_{01kj} \circ Y_{123} + (\delta_{2n} + \delta_{4n}) \Delta_{nk}^{(6)} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $n = 2, 3, \dots, N$, δ_{nm} – символ Кронекера, штрихи (как и точки сверху) означают дифференцирование по времени, $p_{b,k} = (p_0 + 2\sigma/R_{k0})(R_{k0}/R_k)^{3\kappa}(1 + \Delta_{b,k}^{(6)})$ – дав-

ление в k -ом пузырьке, κ – показатель адиабаты ($\kappa = 1.4$), $b_{0k} = -R_k^2 \dot{R}_k$, $p_k = 0.5(x_k + iy_k, 2z_k, x_k - iy_k)$ – вектор-строка положения центра k -го пузырька, $C_{nmkj} = C_{nm}(\theta_{kj}, \varphi_{kj})$ – матрица размерности $(2n + 1) \times (2m + 1)$ с элементами $C_{nmkj}^{n' m'}$ ($n' = -n, -n + 1, \dots, n$, $m' = -m, -m + 1, \dots, m$), которые определяются следующим образом:

$$C_{nmkj}^{n' m'} = \frac{(-1)^{n+\frac{|n'|+|m'|-|n'-m'|}{2}} (n+m-|n'-m'|)!}{(n-|n'|)! (m+|m'|)!} Y_{n+m}^{n'-m'}(\theta_{kj}, \varphi_{kj}),$$

$\theta_{kj}, \varphi_{kj}$ – угловые координаты центра j -го пузырька в локальной системе координат k -го, Y_{nml} – массив $(2n + 1) \times (2m + 1) \times (2l + 1)$ чисел $Y_{nml}^{n' m' -l'}$ ($n' = -n, -n + 1, \dots, n$, $m' = -m, -m + 1, \dots, m$, $l' = -l, -l + 1, \dots, l$), которые выражаются в виде

$$Y_{nml}^{n' m' l'} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|l'|)!}{(l+|l'|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_n^{n'}(\theta, \varphi) Y_m^{m'}(\theta, \varphi) Y_l^{l'}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

Оператор \circ , применяемый к вектору-строке $c_n = (c_n^{-n}, c_n^{-n+1}, \dots, c_n^n)$ и матрице чисел Y_{nml} , определяется как $c_n \circ Y_{nml} = M_{nml}$, где M_{nml} – матрица размерности $(2m + 1) \times (2l + 1)$, состоящая из элементов $\sum_{n'=-n}^n c_n^{n'} Y_{nml}^{n' m' -l'}$ ($m' = -m, -m + 1, \dots, m$, $l' = -l, -l + 1, \dots, l$).

При этом приоритет оператора \circ в векторно-матричных выражениях предполагаем наивысшим [23].

Слагаемые $\Delta_{0k}^\mu, \Delta_{1k}^\mu, \Delta_{nk}^\mu$ и Δ_k^c в уравнениях (2)–(4) описывают эффект влияния вязкости и сжимаемости жидкости, а $\Delta_{b,k}^{(6)}, \Delta_{0k}^{(6)}, \Delta_{0kj}^{(6)}, \Delta_{nk}^{(6)}$ и $\Delta_{nkj}^{(6)}$ являются слагаемыми шестого порядка по малому параметру δ . Все они определяются так же, как в работе [23].

Силовое воздействие пузырьков на стенку характеризуется давлением жидкости на ее поверхности, которое рассчитываем по выражениям, приведенным в [24]. При этом используем значения R_k, p_k, a_{nk} , а также их первые и вторые производные по времени.

3. Особенности динамики пузырьков и их воздействия на стенку

Учитывая структуру рассматриваемого регулярного кластера и его положение относительно стенки (рис. 1), в нем можно выделить три группы пузырьков, динамика которых является подобной относительно центра воздействия кластера на стенку. Первая группа состоит из четырех пузырьков, наиболее близких к центру кластера. Третью группу формируют четыре пузырька, наиболее удаленные от центра кластера. Восемь оставшихся пузырьков образуют вторую группу. В последующем пузырьки первой группы называем центральными, второй – боковыми, а третьей – угловыми. Для анализа пространственных перемещений пузырьков используем параметр $\tilde{d}_{kc}(t)$, представляющий собой изменение расстояния между центром k -го пузырька и центром воздействия кластера на стенке. Он определяется выражением

$$\tilde{d}_{kc}(t) = d_{kc}(0) - d_{kc}(t),$$

где $d_{kc}(t)$ – текущее расстояние между центром k -го пузырька и центром воздействия кластера на стенке. Для оценки текущих деформаций пузырьков применим параметр

$$\varepsilon_{k \max}(t) = \max_{\theta_k, \varphi_k} \left| \sum_{n=2}^N e_{nk}(t) Y_n(\theta_k, \varphi_k) \right|,$$

характеризующий максимальное отклонение формы k -го пузырька от сферической.

Как отмечено выше, в силу ограниченности используемой модели исследование проводим лишь до тех пор, пока какие-либо пузырьки кластера не разрушатся в силу больших несферических деформаций. В качестве критерия разрушения k -го пузырька примем следующее неравенство:

$$\varepsilon_{k \max}(t) \geq 1. \quad (5)$$

Рис. 2 иллюстрирует динамику пузырьков регулярного кластера (рис. 1) под воздействием возбуждения (1). Видно, что при относительно небольшой амплитуде возбуждения ($p_a = 1.17$ бар) пузырьки сначала расширяются, затем коллапсируют, после чего совершают высокочастотные колебания, которые довольно быстро затухают. В отличие от одиночных пузырьков [23, 24], затухание происходит в немонотонном режиме. В конце периода колебаний давления жидкости радиусы пузырьков принимают значения, близкие к начальному R_0 , несферические деформации практически исчезают, смещения пузырьков имеют порядок их начального радиуса. Наиболее сильное сжатие испытывают центральные пузырьки. Они также больше перемещаются и деформируются. По этим показателям далее следуют боковые пузырьки, а за ними – угловые. В результате наибольшее давление достигается в центральных пузырьках, и происходит это в конце их второго сжатия. При этом величина максимального давления в центральных пузырьках примерно в восемнадцать раз превышает их начальное значение.

По мере увеличения интенсивности возбуждения амплитуда радиальных колебаний пузырьков увеличивается. При этом возрастает и максимальная несферичность пузырьков. Начиная с некоторого значения p_a , некоторые из пузырьков разрушаются (согласно критерию (5)). После момента разрушения рассмотрение прекращается. На рис. 2 (b), (c) видно, что с ростом p_a момент разрушения наступает раньше.

Рис. 3 характеризует воздействие пузырьков кластера на стенку. Представлен вариант, приведенный на рис. 2 (c). Момент времени 7 соответствует экстремальному воздействию пузырьков на стенку, вскоре после чего центральные пузырьки кластера разрушаются. Видно, что в первый из представленных моментов времени, когда радиусы пузырьков кластера еще превышают их начальное значение, на стенке под кластером имеет место область пониженного давления, по форме и размерам близкая к форме и размерам кластера. Затем эта область уменьшается за счет повышения давления в угловых пузырьках. После этого в результате достижения в угловых пузырьках максимального давления на стенке под ними формируются небольшие локальные зоны с повышенным давлением. Далее угловые пузырьки начинают расширяться, а боковые и центральные продолжают сжиматься. В результате область повышенного давления на стенке принимает форму полого квадрата за счет более высокого давления в угловых и боковых пузырьках по сравнению с центральными. В момент экстремального сжатия боковых пузырьков (момент 5) область с повышенным давлением принимает форму полого восьмиугольника, поскольку давление в боковых пузырьках заметно превышает давление как в угловых, так и центральных пузырьках. Дальнейшая эволюция давления на стенке определяется повышением давления в центральных пузырьках и понижением в остальных. В результате область со значительно более высоким давлением локализуется в малой окрестности центра воздействия кластера.

Таким образом, можно заключить, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется неравномерной динамикой пузырьков в кластере. Давление на стенке повышается под теми пузырьками, в которых оно выше. В варианте,

приведенном на рис. 3, пузырьки последовательно и все более сильно сжимаются в направлении от периферии кластера к его центру (кумулятивный эффект). В результате область повышенного давления на стенке локализуется сначала под угловыми пузырьками, затем под боковыми и, наконец, под центральными.

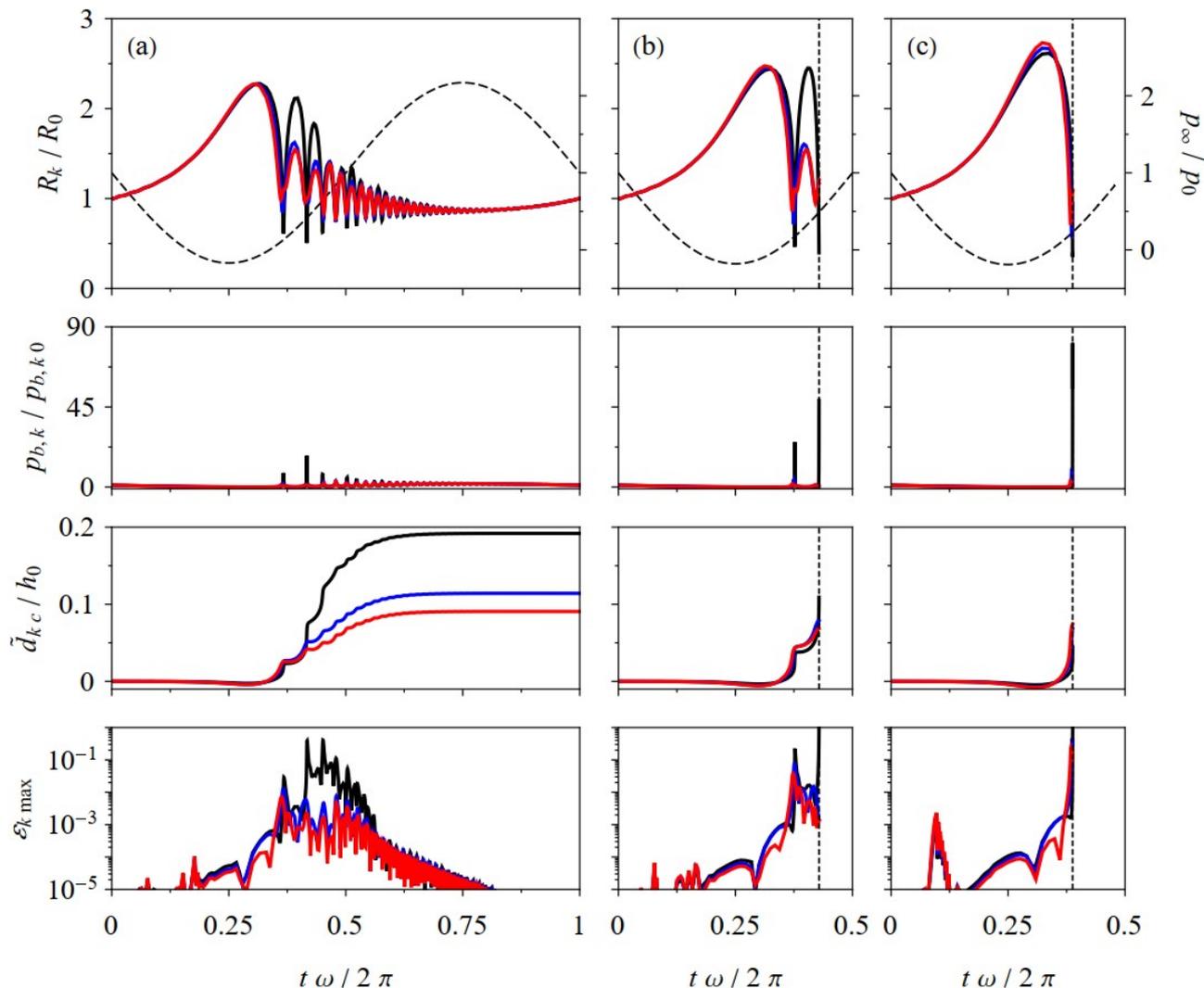


Рис. 2. Временные зависимости радиусов пузырьков и давления жидкости (штриховые линии) (первый ряд), давления в пузырьках (второй ряд), расстояния между центрами пузырьков кластера и центром их воздействия на стенку (третий ряд) и максимального отклонения формы пузырьков от сферической (четвертый ряд) для трех амплитуд возбуждения: (a) $p_a = 1.17$ бар, (b) $p_a = 1.18$ бар, (c) $p_a = 1.19$ бар при $h_0 = 30$ мкм и $d_0 = 60$ мкм. Черные линии соответствуют центральным пузырькам кластера, синие – боковым, красные – угловым. Вертикальные пунктирные линии указывают момент разрушения пузырьков

Fig. 2. Time histories of the radii of the bubbles and the liquid pressure (dashed lines) (first row), the pressure in the bubbles (second row), the distance between the centers of the bubbles and the center of their action on the wall (third row), and the maximum deflection of the shape of the bubbles from the spherical one (fourth row) for three excitation amplitudes: (a) $p_a = 1.17$ bar, (b) $p_a = 1.18$ bar, and (c) $p_a = 1.19$ bar at $h_0 = 30 \mu\text{m}$ and $d_0 = 60 \mu\text{m}$. Black lines show the central bubbles of the cluster, blue lines correspond to the lateral bubbles, and red lines indicate the corner bubbles. Vertical dotted lines mark the moment of destruction of some bubbles

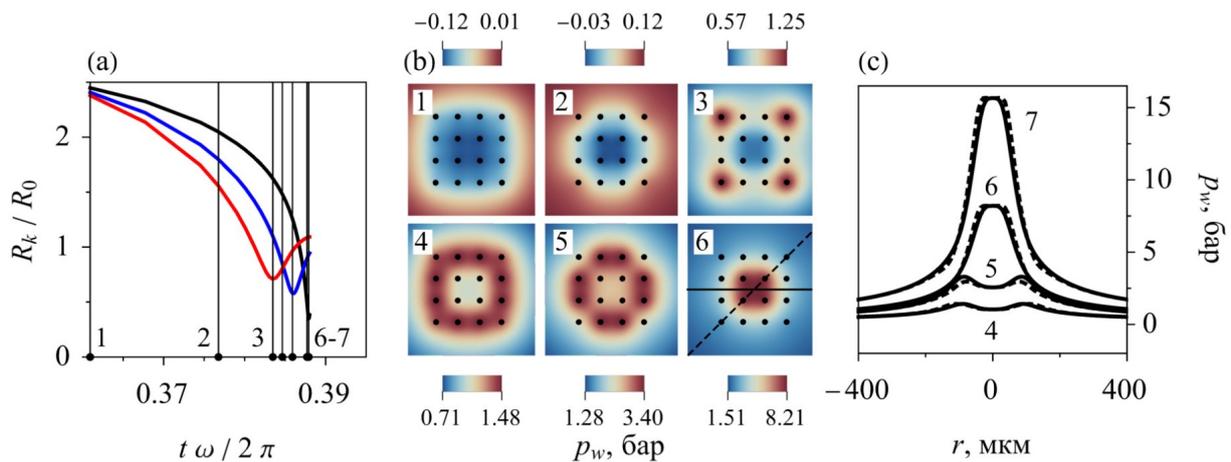


Рис. 3. (а) Изменение радиусов центрального (черная кривая), боковых (синяя кривая) и угловых (красная кривая) пузырьков кластера в окрестности моментов их экстремального сжатия (точками и вертикальными линиями указаны 7 характерных моментов времени), (b) поля давления на стенке в 6 моментов времени (точками указаны нормальные проекции центров пузырьков, сплошной и штриховой линиями показаны направления, к которым относятся кривые на (с)), (с) распределения давления на стенке вдоль линий, указанных на (b) (сплошные кривые соответствуют сплошной линии, штриховые – штриховой), в 4 момента времени

Fig. 3. (a) Change of the radii of the central (black curve), lateral (blue curve), and corner (red curve) bubbles of the cluster at the time moments of their maximum compression (dots and vertical lines mark seven characteristic time moments), (b) the pressure fields on the wall at six time moments (dots indicate the normal projections of the centers of bubbles, solid and dashed lines show the directions corresponding to the curves in (c)), and (c) the distributions of the pressure on the wall along the lines in (b) (solid and dashed curves correspond to the solid and dashed lines, respectively) at four time moments

4. Воздействие на стенку в зависимости от амплитуды возбуждения, расстояния между пузырьками и их удаленности от стенки

Воздействие кластера на стенку в зависимости от амплитуды возбуждения, расстояния между пузырьками и их удаленности от стенки демонстрирует рис. 4. Представлены зависимости максимального давления на стенке $p_{w\max}$ (в интервале до момента разрушения какого-либо из пузырьков) от амплитуды возбуждения p_a для трех значений расстояния h_0 между кластером и стенкой при фиксированном расстоянии между пузырьками d_0 и для трех значений расстояния между пузырьками d_0 при фиксированном расстоянии h_0 между кластером и стенкой.

Видно, что во всех представленных вариантах увеличение p_a приводит к монотонному росту максимального давления на стенке. При этом скорость роста не всегда повышается монотонно. Так, при $d_0 = 60$ мкм и $h_0 = 60$ мкм максимальное давление в интервале $1.17 \text{ бар} \leq p_a \leq 1.18 \text{ бар}$ растет быстрее, чем в предыдущем интервале, но медленнее, чем в последующем. Это обусловлено тем, что максимальное давление в первых двух интервалах достигается в конце второго коллапса центральных пузырьков, а при $p_a = 1.19 \text{ бар}$ уже в конце первого (вскоре после чего они разрушаются). Если бы рассмотрение было ограничено завершением первого коллапса центральных пузырьков, то скорость роста максимального давления на стенке по мере увеличения p_a была бы монотонной (серые

штриховые линии). Аналогичные закономерности имеют место с ростом максимального давления на стенке по мере увеличения h_0 при фиксированных значениях p_a , d_0 и по мере увеличения d_0 при фиксированных значениях p_a , h_0 . Более того, по той же причине при уменьшении d_0 от 120 мкм до 90 мкм при $p_a = 1.19$ бар и $h_0 = 30$ мкм максимальное давление на стенке не растет, а уменьшается.

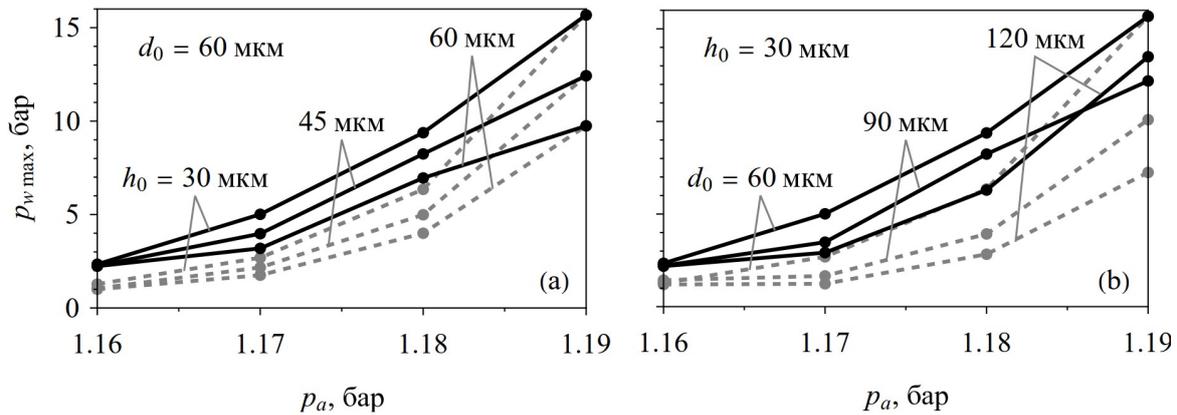


Рис. 4. Зависимости максимального давления на стенке от амплитуды возбуждения (а) для трех расстояний между кластером и стенкой при фиксированном расстоянии между пузырьками и (б) для трех расстояний между пузырьками при фиксированном расстоянии между кластером и стенкой. Сплошные линии соответствуют промежутку времени до разрушения некоторых пузырьков, а пунктирные – до первого экстремального сжатия пузырьков

Fig. 4. Dependences of the maximum pressure on the wall on the amplitude of excitation (a) for three distances between the cluster and the wall at a fixed spacing of the bubbles and (b) for three distances between the bubbles at a fixed distance between the cluster and the wall. Solid curves correspond to the time interval up to the destruction of some bubbles, dotted curves show the time interval up to the first extreme compression of the bubbles

5. Влияние стохастичности в начальных радиусах пузырьков

Рис. 5 характеризует влияние стохастичности в начальных радиусах пузырьков на воздействие кластера на стенку. Рис. 5 (а) демонстрирует зависимость максимальных давлений на стенке в десяти вариантах случайных отклонений начальных радиусов пузырьков от их величины в регулярном кластере для двух диапазонов отклонения δ_R . Видно, что случайные отклонения приводят к занижению максимальных давлений на стенке в пределах некоторого интервала и что по мере увеличения диапазона случайных отклонений ширина этого интервала возрастает.

Рис. 5 (б) демонстрирует влияние диапазона случайных отклонений на величину максимальных давлений на стенке, усредненных по числу вариантов начальных случайных отклонений, и на соответствующие поля давления на стенке в момент достижения на ней максимального давления. Видно, что по мере увеличения δ_R усредненное максимальное давление на стенке уменьшается, а поле давления на ней все более уклоняется от того, что соответствует регулярному кластеру ($\delta_R = 0$).

6. Влияние стохастичности в начальных положениях пузырьков

Рис. 6 характеризует влияние стохастичности в начальных положениях пузырьков на воздействие кластера на стенку. Рис. 6 (а) демонстрирует зависимость максимальных давлений на стенке в десяти вариантах случайных отклонений начальных радиусов пузырьков от их величины в регулярном кластере для двух диапазонов отклонения δ_r . Видно, что, как и в случае случайных отклонений начальных размеров пузырьков, случайные отклонения их начального положения приводят к занижению максимальных давлений на стенке в пределах некоторого интервала и что по мере увеличения диапазона случайных отклонений ширина этого интервала возрастает.

Рис. 6 (b) демонстрирует влияние диапазона случайных отклонений на величину максимальных давлений на стенке, усредненных по числу вариантов начальных случайных отклонений, и на соответствующие поля давления на стенке в момент достижения на ней максимального давления. Видно, что и здесь, как и в случае случайных отклонений начальных размеров пузырьков, по мере увеличения диапазона случайных отклонений δ_r усредненное максимальное давление на стенке уменьшается, а поле давления на ней все более уклоняется от того, что соответствует регулярному кластеру ($\delta_r = 0$).

Заключение

Проведено исследование динамики пузырьков в плоских кластерах квадратной структуры (пузырьки расположены в узлах квадратной сетки) около плоской твердой поверхности (плоскость кластера параллельна твердой поверхности) и силового воздействия пузырьков на эту поверхность. Рассмотрен случай, когда жидкостью является вода, а пузырьки изначально сферические, одинаковые по размеру (с равновесным радиусом $R_0 = 3$ мкм). Условия комнатные, давление жидкости изменяется по гармоническому закону с ультразвуковой частотой. Использована дискретная модель, в которой пузырьки могут деформироваться, но не могут разрушаться, поэтому исследование проводится лишь до момента разрушения одного из пузырьков. Исследовано влияние амплитуды возбуждения $p_a \leq 1.19$ бар, начального расстояния между пузырьками $d_0 \geq 60$ мкм и удаленности кластера от стенки $h_0 \geq 30$ мкм.

Показано, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется неравномерной динамикой пузырьков в кластере. Давление на стенке повышается под теми пузырьками, в которых оно выше. Наибольшее давление на стенке порядка 16 бар достигается при $p_a = 1.19$ бар, $d_0 = 60$ мкм и $h_0 = 30$ мкм. В этом случае пузырьки последовательно и все более сильно сжимаются в направлении от периферии кластера к его центру. В результате область повышенного давления на стенке локализуется сначала под угловыми пузырьками, затем под боковыми и, наконец, под центральными. При уменьшении p_a , увеличении как d_0 , так и h_0 максимум давления на стенке монотонно понижается. При этом скорость понижения может изменяться немонотонно, что обусловлено изменением числа радиальных пульсаций пузырьков до их разрушения.

Продемонстрировано влияние случайных отклонений начальных размеров и положений пузырьков по отношению к тем, которые соответствуют рассмотренному выше кластеру квадратной структуры. Показано, что случайные отклонения начальных радиусов пузырьков в пределах $0.005R_0$ и случайные отклонения начальных положений центров пузырьков в пределах $4.5R_0$ могут привести к снижению усредненного (по числу вариантов случайных отклонений) максимального давления на стенке до 1.6 раза. В обоих случаях

по мере сужения диапазона случайных отклонений снижение усредненного максимального давления на стенке монотонно уменьшается.

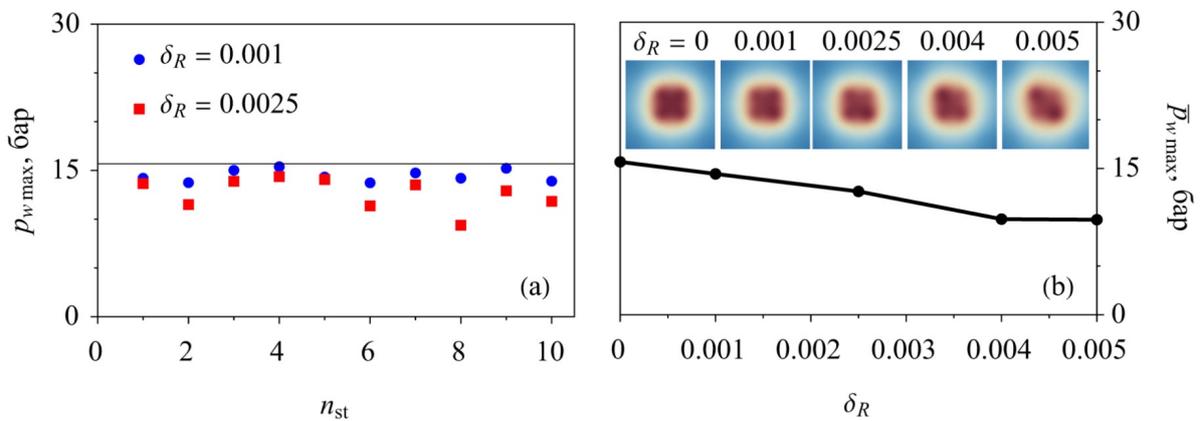


Рис. 5. (а) Зависимости максимального давления на стенке, реализующегося до разрушения некоторых из пузырьков, от номера варианта случайных отклонений их начальных радиусов от $R_0 = 3$ мкм для двух диапазонов отклонений (горизонтальная линия соответствует варианту без случайных отклонений). (б) Зависимости максимального давления на стенке, усредненного по вариантам случайных отклонений начальных радиусов, от диапазона этих случайных отклонений; сверху даны аналогичным образом усредненные поля давлений на стенке для рассчитанных диапазонов отклонения

Fig. 5. (a) Dependences of the maximum pressure on the wall realized up to the destruction of some bubbles on the number of the variant of random deflections of their initial radii from $R_0 = 3 \mu\text{m}$ for two deflection ranges (horizontal line corresponds to the variant without random deflections). (b) Dependences of the maximum pressure on the wall averaged over the variants of random deflections of the initial radii on the range of these random deflections; the upper part shows the correspondingly averaged fields of the pressure on the wall for the computed deflection ranges

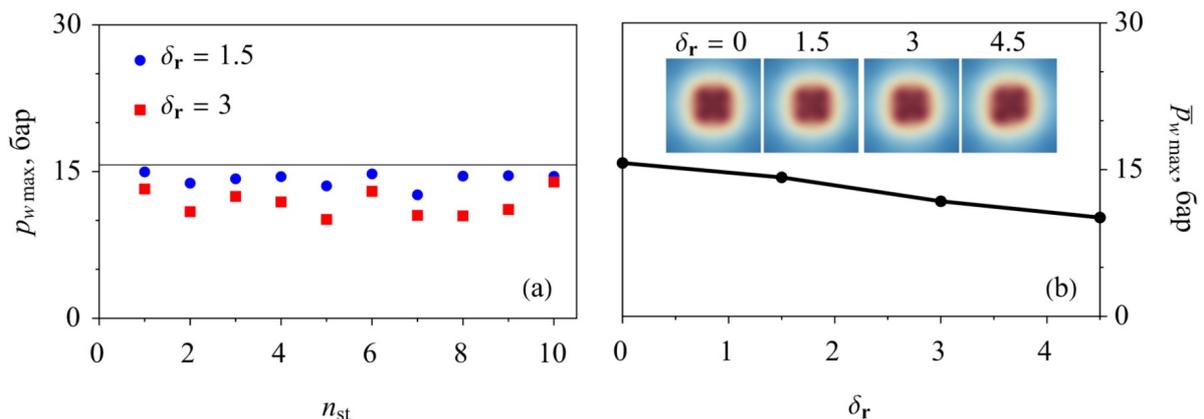


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для случайных отклонений начальных положений пузырьков

Fig. 6. Same as in Fig. 5, but for the random deflections of the initial positions of the bubbles

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 1. С. 63–66.
2. *Аганин А.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Численное моделирование эволюции пузырька газа в жидкости вблизи стенки // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 7. С. 15–28.
3. *Sarkar P., Ghigliotti G., Fivel M., Franc J.-P.* Numerical investigation of the dynamics of pressure loading on a solid boundary from a collapsing cavitation bubble // Proc. 10th Int. Symp. on Cavitation (CAV2018). Katz J. (Ed.). ASME Press, 2018. P. 765–770. https://doi.org/10.1115/1.861851_ch146.
4. *Lechner C., Lauterborn W., Koch M., Mettin R.* Jet formation from bubbles near a solid boundary in a compressible liquid: Numerical study of distance dependence // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5, No 9. Art. 093604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.093604>.
5. *Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Numerical study of the dynamics of a gas bubble near a wall under ultrasound excitation // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 1. P. 24–29. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010042>.
6. *Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.* Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1993. V. 255. P. 707–721. <https://doi.org/10.1017/S0022112093002654>.
7. *Shervani-Tabar M.T., Maghsoudi K.* Numerical study on the splitting of a vapour bubble in the process of EDM // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2008. V. 38, No 7. P. 657–673. <https://doi.org/10.1007/s00170-007-1123-8>.
8. *Aganin A.A., Guseva T.S., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Dynamics of an acoustically excited gas cavity attached to a rigid surface // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, No 11. P. 1897–1903. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110040>.
9. *Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Influence of the initial shape of a gas bubble on its dynamics near a wall under acoustic excitation // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 7. P. 1235–1241. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070227>.
10. *Ma C., Shi D., Li C., Wang M., He D.* Experimental research on the electric spark bubble load characteristics under the oblique 45 degree curved surface boundary // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9, No 1. Art. 32. <https://doi.org/10.3390/jmse9010032>.
11. *Ma C., Shi D., Li C., He D., Li G., Lu K.* Numerical study of the pulsation process of spark bubbles under three boundary conditions // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9, No 6. Art. 619. <https://doi.org/10.3390/jmse9060619>.
12. *Cui R.-N., Li S., Wang S.-P., Zhang A.-M.* Pulsating bubbles dynamics near a concave surface // Ocean Eng. 2022. V. 250. Art. 110989. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110989>.
13. *Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Bubble dynamics near a locally curved region of a plane rigid wall // Phys. Fluids. 2022. V. 34, No 9. Art. 097105. <https://doi.org/10.1063/5.0105955>.
14. *Rossinelli D., Hejazialhosseini B., Hadjidoukas P., Bekas C., Curioni A., Bertsch A., Futral S., Schmidt S.J., Adams N.A., Koumoutsakos P.* 11 PFLOP/s simulations of cloud cavitation collapse // SC'13: Proc. Int. Conf. on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. Denver, CO: IEEE, 2013. P. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2503210.2504565>.

15. *Tiwari A., Pantano C., Freund J.B.* Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters near a wall // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 775. P. 1–23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.287>.
16. *Zhang L., Zhang J., Deng J.* Numerical investigation on the collapse of a bubble cluster near a solid wall // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 99. Art. 043108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043108>.
17. *Ogloblina D., Schmidt S.J., Adams N.A.* Simulation and analysis of collapsing vapor-bubble clusters with special emphasis on potentially erosive impact loads at walls // *EPJ Web Conf.* 2018. V. 180. Art. 02079. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818002079>.
18. *Zhang J., Zhang L., Deng J.* Numerical study of the collapse of multiple bubbles and the energy conversion during bubble collapse // *Water.* 2019. V. 11, No 2. Art. 247. <https://doi.org/10.3390/w11020247>.
19. *Ye J., Zhang J., Huang T.* Direct numerical simulation of bubble cluster collapse: Shape evolution and energy transfer mechanisms // *Processes.* 2023. V. 11, No 7. Art. 2191. <https://doi.org/10.3390/pr11072191>.
20. *Ma J., Hsiao C.-T., Chahine G.L.* Numerical study of acoustically driven bubble cloud dynamics near a rigid wall // *Ultrason. Sonochem.* 2018. V. 40, Pt. A. P. 944–954. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.08.033>.
21. *Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L.* A unified theory for bubble dynamics // *Phys. Fluids.* 2023. V. 35, No 3. Art. 033323. <https://doi.org/10.1063/5.0145415>.
22. *Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L.* Theoretical study on bubble dynamics under hybrid-boundary and multi-bubble conditions using the unified equation // *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* 2023. V. 66, No 12. Art. 124711. <https://doi.org/10.1007/s11433-023-2204-x>.
23. *Aganin A.A., Davletshin A.I.* A particle model of interaction between slightly non-spherical bubbles // *Appl. Math. Model.* 2024. V. 126. P. 185–205. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.10.031>.
24. *Davletshin A.I.* Interaction of bubbles in liquid near a flat rigid wall // *Lobachevskii J. Math.* 2025. V. 46, No 5. P. 2005–2015. <https://doi.org/10.1134/S1995080225607040>.

References

1. Voinov O.V., Voinov V.V. On the process of collapse of a cavitation bubble near a wall and the formation of a cumulative jet. *Sov. Phys. Dokl.*, 1976, vol. 21, pp. 133–135.
2. Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Numerical simulation of the evolution of a gas bubble in a liquid near a wall. *Math. Models Comput. Simul.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 89–98. <https://doi.org/10.1134/S2070048218010027>.
3. Sarkar P., Ghigliotti G., Fivel M., Franc J.-P. Numerical investigation of the dynamics of pressure loading on a solid boundary from a collapsing cavitation bubble. *Proc. 10th Int. Symp. on Cavitation (CAV2018)*. Katz J. (Ed.). ASME Press, 2018, pp. 765–770. https://doi.org/10.1115/1.861851_ch146.
4. Lechner C., Lauterborn W., Koch M., Mettin R. Jet formation from bubbles near a solid boundary in a compressible liquid: Numerical study of distance dependence. *Phys. Rev. Fluids*, 2020, vol. 5, no. 9, art. 093604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.093604>.

5. Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Numerical study of the dynamics of a gas bubble near a wall under ultrasound excitation. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 1, pp. 24–29. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010042>.
6. Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y. Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 255, pp. 707–721. <https://doi.org/10.1017/S0022112093002654>.
7. Shervani-Tabar M.T., Maghsoudi K. Numerical study on the splitting of a vapour bubble in the process of EDM. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2008, vol. 38, no. 7, pp. 657–673. <https://doi.org/10.1007/s00170-007-1123-8>.
8. Aganin A.A., Guseva T.S., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Dynamics of an acoustically excited gas cavity attached to a rigid surface. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1897–1903. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110040>.
9. Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Influence of the initial shape of a gas bubble on its dynamics near a wall under acoustic excitation. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1235–1241. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070227>.
10. Ma C., Shi D., Li C., Wang M., He D. Experimental research on the electric spark bubble load characteristics under the oblique 45 degree curved surface boundary. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2021, vol. 9, no. 1, art. 32. <https://doi.org/10.3390/jmse9010032>.
11. Ma C., Shi D., Li C., He D., Li G., Lu K. Numerical study of the pulsation process of spark bubbles under three boundary conditions. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2021, vol. 9, no. 6, art. 619. <https://doi.org/10.3390/jmse9060619>.
12. Cui R.-N., Li S., Wang S.-P., Zhang A.-M. Pulsating bubbles dynamics near a concave surface. *Ocean Eng.*, 2022, vol. 250, art. 110989. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110989>.
13. Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Bubble dynamics near a locally curved region of a plane rigid wall. *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, no. 9, art. 097105. <https://doi.org/10.1063/5.0105955>.
14. Rossinelli D., Hejazialhosseini B., Hadjidoukas P., Bekas C., Curioni A., Bertsch A., Futral S., Schmidt S.J., Adams N.A., Koumoutsakos P. 11 PFLOP/s simulations of cloud cavitation collapse. *SC'13: Proc. Int. Conf. on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. Denver, CO, IEEE, 2013, pp. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2503210.2504565>.
15. Tiwari A., Pantano C., Freund J.B. Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters near a wall. *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 775, pp. 1–23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.287>.
16. Zhang L., Zhang J., Deng J. Numerical investigation on the collapse of a bubble cluster near a solid wall. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, art. 043108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043108>.
17. Ogloblina D., Schmidt S.J., Adams N.A. Simulation and analysis of collapsing vapor-bubble clusters with special emphasis on potentially erosive impact loads at walls. *EPJ Web Conf.*, 2018, vol. 180, art. 02079. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818002079>.
18. Zhang J., Zhang L., Deng J. Numerical study of the collapse of multiple bubbles and the energy conversion during bubble collapse. *Water*, 2019, vol. 11, no. 2, art. 247. <https://doi.org/10.3390/w11020247>.

19. Ye J., Zhang J., Huang T. Direct numerical simulation of bubble cluster collapse: Shape evolution and energy transfer mechanisms. *Processes*, 2023, vol. 11, no. 7, art. 2191. <https://doi.org/10.3390/pr11072191>.
20. Ma J., Hsiao C.-T., Chahine G.L. Numerical study of acoustically driven bubble cloud dynamics near a rigid wall. *Ultrason. Sonochem.*, 2018, vol. 40, pt. A, pp. 944–954. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.08.033>.
21. Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L. A unified theory for bubble dynamics. *Phys. Fluids*, 2023, vol. 35, no. 3, art. 033323. <https://doi.org/10.1063/5.0145415>.
22. Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L. Theoretical study on bubble dynamics under hybrid-boundary and multi-bubble conditions using the unified equation. *Sci. China: Phys., Mech. Astron.*, 2023, vol. 66, no. 12, art. 124711. <https://doi.org/10.1007/s11433-023-2204-x>.
23. Aganin A.A., Davletshin A.I. A particle model of interaction between slightly non-spherical bubbles. *Appl. Math. Model.*, 2024, vol. 126, pp. 185–205. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.10.031>.
24. Davletshin A.I. Interaction of bubbles in liquid near a flat rigid wall. *Lobachevskii J. Math.*, 2025, vol. 46, no. 5, pp. 2005–2015. <https://doi.org/10.1134/S1995080225607040>.

Информация об авторах

Анас Ильгизович Давлетшин, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5974-881X>

Александр Алексеевич Аганин, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: aganin54@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7714-713X>

Author Information

Anas I. Davletshin, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5974-881X>

Alexander A. Aganin, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: aganin54@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7714-713X>

Поступила в редакцию 19.08.2025

Принята к публикации 28.08.2025

Received August 19, 2025

Accepted August 28, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 681.518

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.455-467>**Системная модель твердополимерного топливного элемента и ее приложение к задачам диагностики и управления рабочими режимами****Е.С. Денисов , Ю.К. Евдокимов***Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия* *genia-denisov@yandex.ru***Аннотация**

Рассмотрены особенности построения систем мониторинга технического состояния водородных топливных элементов по наблюдениям их электрических флуктуаций в режиме функционирования. Описана системная модель твердополимерных топливных элементов, позволяющая выявлять диагностические признаки на основе анализа функциональных зависимостей между воздействующими и выходными сигналами твердополимерных топливных элементов. Показано, что реализация оперативной диагностики возможна только на основе адаптированной малосигнальной системной модели. Рассмотрены вопросы применения электрических флуктуаций топливного элемента для раннего выявления критических режимов работы и формирования управляющих воздействий для их корректировки на примере соблюдения водного баланса в мембранно-электродном блоке. Установлена возможность обнаружения режимов с избыточной и недостаточной увлажненностью на основе анализа спектральных характеристик электрических флуктуаций. Приведены результаты анализа критических режимов и неисправностей твердополимерных топливных элементов, которые могут быть обнаружены с использованием электрических флуктуаций.

Ключевые слова: водородная энергетика, твердополимерный топливный элемент, оперативный контроль, диагностика, электрохимический шум, управление режимами работы, водный баланс, неисправность

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан» (Соглашение от 16.12.2024 № 139/2024-ПД).

Для цитирования: Денисов Е.С., Евдокимов Ю.К. Системная модель твердополимерного топливного элемента и ее приложение к задачам диагностики и управления рабочими режимами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 455–467.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.455-467>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.455-467>

System model of proton-exchange membrane fuel cell and its application in solving the tasks of diagnostics and control of operating modes

E.S. Denisov ✉, Yu.K. Evdokimov

*Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia*✉ genia-denisov@yandex.ru

Abstract

The construction of systems for online monitoring of the technical state of hydrogen fuel cells by analyzing their electrical fluctuations during operation was explored. A system model of proton-exchange membrane fuel cells that considers the relationships between input and output signals as a source of diagnostic information was described. The results show that only an adapted small-signal system model enables effective online diagnostics. The use of electrical fluctuations for early detection of critical operating modes and taking timely corrective control actions was illustrated by maintaining the water balance in a membrane electrode assembly as an example. The possibility of detecting modes with excessive and insufficient humidification based on the analysis of the spectral characteristics of electrical fluctuations was established. The critical modes and faults of solid polymer fuel cells detectable through electrical fluctuations were examined.

Keywords: hydrogen economy, proton-exchange membrane fuel cell, online monitoring, diagnostics, electrochemical noise, operating mode control, water balance, fault

Acknowledgments. This study was supported by the grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan “Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan” (agreement no. 139/2024-PD dated December 16, 2024).

For citation: Denisov E.S., Evdokimov Yu.K. System model of proton-exchange membrane fuel cell and its application in solving the tasks of diagnostics and control of operating modes. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 455–467. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.455-467>. (In Russian)

Введение

Твердополимерные топливные элементы (ТПТЭ) являются одними из наиболее перспективных элементов будущей водородной энергетики, поскольку они обладают уникальным набором эксплуатационных характеристик: высокая удельная мощность, внешний накопитель топлива и окислителя, твердый электролит, малые массогабаритные характеристики. При реализации источников электрической энергии на основе ТПТЭ возникают технические сложности, связанные с обеспечением необходимой надежности и долговечности. Для коммерчески успешных продуктов требуется обеспечить ресурс сорока тысяч часов для стационарных источников энергии и двадцати тысяч часов для мобильных применений [1].

Надежность ТПТЭ ограничивается двумя основными причинами: неисправностями (деградацией) основных элементов и неправильным управлением рабочих режимов. Минимизация влияния обеих причин возможна при использовании методов оперативной диагностики, позволяющих обнаруживать неисправности и критические режимы работы на начальных этапах их развития.

При решении задачи оперативной диагностики ТПТЭ требуется учитывать комплексный характер физико-химических процессов в мембранно-электродных блоках (МЭБ) и газотранспортных каналах ТПТЭ [2–5]: поддержание водного баланса, доставка реагентов, работа катализатора, холодный старт и др. Кроме того, оперативная диагностическая информация может позволить повысить эффективность управления рабочими режимами ТПТЭ в процессе функционирования.

Для оперативной диагностики ТПТЭ могут применяться методы, использующие слабое возмущение режимов работы [6, 7], например, анализ импедансных и релаксационных характеристик. В последнее десятилетие активно развивается флуктуационно-шумовой метод, показывающий высокую информативность как для отдельных ТПТЭ [8–11], так и их батарей [12]. Отличительной особенностью этого метода является отсутствие возмущения рабочего режима.

В работе рассмотрен вопрос систематизации поиска диагностических признаков и их использования для решения задачи оперативного управления режимами работы ТПТЭ.

1. Системная модель твердополимерного топливного элемента

Для анализа диагностических возможностей сигналов ТПТЭ рассмотрим системную модель ТПТЭ (рис. 1), позволяющую учесть воздействующие факторы и выходные сигналы, характеризующие рабочий режим. В предложенной модели в качестве выходных сигналов используются электрическая мощность P_E , тепловой поток Q_T и скорость образования воды \dot{m}_{H_2O} . Среди факторов, влияющих на работу ТПТЭ, выделим наиболее важные: расход топлива \dot{m}_a и окислителя \dot{m}_c , давление в газотранспортных каналах на анодной P_a и катодной P_c сторонах мембранно-электродного блока, увлажненности водорода H_a и окислителя H_c , температура ячейки T_{FC} и сопротивление нагрузки R_L .

В общем случае выходные сигналы P_E , Q_T и \dot{m}_{H_2O} имеют сложную нелинейную параметрическую зависимость от воздействующих величин:

$$\begin{cases} P_E = f_p(R_L, T_{FC}, \dot{m}_a, \dot{m}_c, P_a, P_c, H_a, H_c); \\ Q_T = f_q(R_L, T_{FC}, \dot{m}_a, \dot{m}_c, P_a, P_c, H_a, H_c); \\ \dot{m}_{H_2O} = f_m(R_L, T_{FC}, \dot{m}_a, \dot{m}_c, P_a, P_c, H_a, H_c). \end{cases} \quad (1)$$

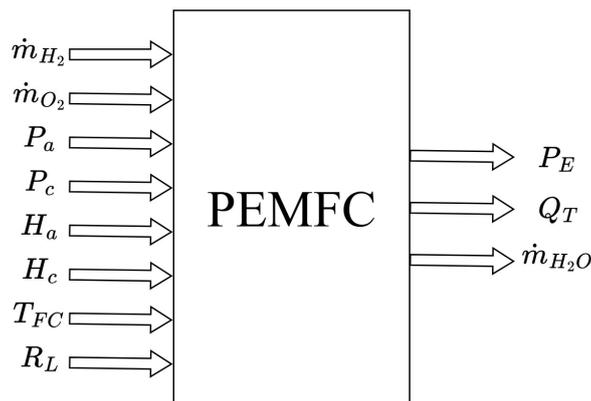


Рис. 1. Системная модель ТПТЭ

Fig. 1. PEMFC system model

Выходной сигнал P_E может выражаться через измеряемые параметры тока I_L и напряжения U_L нагрузки.

Существуют методы контроля и диагностики ТПТЭ, использующие подобные нелинейные зависимости, например, методы диагностики на основе анализа поляризационной кривой. Однако применение соответствующих подходов требует большого количества экспериментальных данных и вывода объекта из рабочего режима, что не позволяет их использовать для оперативной оценки технического состояния ТПТЭ.

С другой стороны, ТПТЭ часто функционируют в режимах работы, близких к стационарным, которые можно охарактеризовать некоторой рабочей точкой

$$\mathbf{x}_0 = (R_L, T_{FC}, \dot{m}_a, \dot{m}_c, P_a, P_c, H_a, H_c)$$

и небольшими отклонениями от нее воздействующих ΔR_L , ΔT_{FC} , $\Delta \dot{m}_a$, $\Delta \dot{m}_c$, ΔP_a , ΔP_c , ΔH_a , ΔH_c и выходных ΔP_E , ΔQ_T и $\Delta \dot{m}_{H_2O}$ параметров. При малых возмущениях нелинейные соотношения (1) могут быть линеаризованы путем использования разложения Тейлора для функции многих переменных и линейной (главной) части ее полного дифференциала в рабочей точке:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}(\mathbf{x}_0, \omega, t)\mathbf{x}, \quad (2)$$

где \mathbf{x} – вектор возмущений воздействующих факторов, \mathbf{K} – матрица малосигнальных коэффициентов передачи, \mathbf{y} – вектор возмущений выходных сигналов ТПТЭ. Малосигнальные коэффициенты передачи показывают связь между малыми изменениями влияющих параметров и вызванными ими изменениями выходных параметров (сигналов) и могут быть определены как частные производные от выходных сигналов по соответствующим влияющим параметрам.

В общем случае из-за нелинейности уравнений (1) и инерционности физико-химических процессов в ТПТЭ малосигнальные коэффициенты передачи \mathbf{K} в соотношении (2) будут зависеть от текущего режима работы \mathbf{x}_0 и частоты ω . Кроме того, эти коэффициенты будут изменяться во времени из-за изменения режимов работы или технического состояния элементов ТПТЭ. Последний факт обуславливает то, что коэффициенты \mathbf{K} потенциально содержат диагностическую информацию о различных элементах ТПТЭ и протекающих в них процессах. Основным преимуществом использования таких коэффициентов для целей диагностирования и контроля является отсутствие необходимости сильного отклонения от текущего режима работы, что обеспечивает возможность их применения в режиме

нормального функционирования ТПТЭ. Формированием слабых воздействий на объект исследования и измерениями отклика обеспечивается возможность получения необходимого объема диагностической информации. При этом каждый из рассматриваемых коэффициентов имеет различную чувствительность к разным неисправностям или некорректным режимам работы, что позволяет использовать их для обнаружения конкретного вида неисправности и оценивать уровень ее развития. В ряде случаев дополнительная селекция возможна по анализу частотных зависимостей, как это делается, например, в электрохимической импедансной спектроскопии [6].

При функционировании любого реального ТПТЭ происходят стохастические изменения (флуктуации) воздействующих параметров, обусловленные действием множества случайных внешних и внутренних факторов. Кроме того, любой электрической системе присущи шумы, имеющие тепловую, дробовую и фликкер-шумовую природу. На электрические шумы и флуктуации влияют режимы работы и техническое состояние ТПТЭ (рис. 2), поэтому они могут рассматриваться как основа новых методов контроля и диагностики. Кроме того, слабые возмущения могут возникать без внешнего вмешательства вследствие естественных флуктуаций параметров, указанных выше:

$$\delta \mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{K}} \delta \mathbf{K} + \delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

где $\delta \mathbf{x}$ – вектор флуктуаций воздействующих сигналов, $\delta \mathbf{y}$ – вектор флуктуаций выходных сигналов ТПТЭ, $\delta \mathbf{K}$ – матрица флуктуаций малосигнальных коэффициентов передачи, $\delta \mathbf{u}$ – вектор, обусловленный влиянием собственных шумов ТПТЭ. Отклонение параметров электрических флуктуаций (3) от их номинальных значений может служить признаком изменения режимов работы и/или возникновения неисправностей и использоваться для целей диагностики, позволяющей обнаруживать такие критические режимы работы, как недостаточное или избыточное увлажнение МЭБ, сложности доставки реагентов в область электрохимической реакции, изменение проводимости полимерной мембраны и другие.

2. Электрические флуктуации топливного элемента и их использование для обнаружения критических режимов увлажнения ТПТЭ

При работе любых электрохимических систем, в том числе ТПТЭ, электрические напряжение и ток случайным образом изменяются около средних значений V_0 и I_0 , определяемых текущим режимом работы:

$$V_{FC} = V_0 + u(t), \quad I_{FC} = I_0 + i(t).$$

Такие случайные отклонения $u(t)$ и $i(t)$ будем называть электрическими флуктуациями напряжения и тока соответственно.

Рассмотрим задачу использования электрических флуктуаций для обнаружения неисправностей ТПТЭ на примере критических режимов увлажнения ТПТЭ. Из-за особенностей конструкции и функционирования ТПТЭ борьба с развитием таких режимов является одной из приоритетных задач, поскольку они существенно снижают энергетическую эффективность и стабильность работы. Для выявления соответствующих диагностических признаков электрических флуктуаций будем использовать тот факт, что механизмы их формирования характеризуются различной инерционностью и, соответственно, должны иметь различия в спектральном составе наблюдаемых флуктуаций.

Для экспериментальной оценки спектральной плотности мощности электрических флуктуаций целесообразно использовать метод периодограмм Уэлча, использующий усреднение по ансамблю реализаций флуктуационного сигнала $x^{(k)}[m]$ и позволяющий уменьшить смещение и дисперсию спектральных оценок:

$$S(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1}{U n \Delta t} X^{(k)} X^{(k)'}(f),$$

где m – номер отсчета, k – номер реализации измеренного сигнала, $X^{(k)}(f)$ – дискретное или быстрое преобразование Фурье k -й взвешенной реализации сигнала, U – энергия весовой оконной функции, апостроф – операция комплексного сопряжения. Поскольку сигнал напряжения ТПТЭ содержит постоянную составляющую, для ее устранения использовалась операция детрендинга на основе полинома пятого порядка. Для проверки возможности обнаружения критических режимов увлажнения на основе анализа электрических флуктуаций были обработаны экспериментальные данные, полученные для водород-воздушного ТПТЭ с МЭБ на основе полимерной мембраны Nafion 112 и двух электродов из углеродной ткани площадью 5 см^2 и платиновым катализатором (0.5 мг/см^2). Флуктуационный сигнал напряжения измерялся с использованием модуля сбора данных NI PXI-5922 фирмы National Instruments с разрешением 24 бит при частотах дискретизации до 50 кГц.

Для выявления наличия необходимых диагностических признаков электрических флуктуаций проведены исследования зависимости флуктуаций (рис. 2) от параметров, влияющих на режим увлажнения мембранно-электродных блоков: расхода окислителя, температуры ячейки и температуры катодной системы увлажнения. Анализ полученных результатов показывает, что электрические флуктуации имеют высокую чувствительность к избыточному увлажнению мембранно-электродного блока, что подтверждается, например, возрастанием спектральной плотности мощности флуктуаций при увеличении температуры катодной системы увлажнения реагентов (рис. 2, d) и уменьшении температуры ячейки ТПТЭ (рис. 2, c). По мере приближения к точке росы значительно возрастают флуктуации во всех частотных диапазонах. При этом в эксперименте с изменением температуры ячейки с сохранением постоянной относительной влажности окислителя (рис. 2, b), наоборот, наблюдается возрастание спектральной плотности мощности флуктуаций при увеличении температуры ячейки, что обусловлено снижением увлажненности мембранно-электродного блока. При понижении расхода окислителя (рис. 2, a) до 150 мл/мин флуктуации возрастают в низко- и среднечастотной областях, что может быть связано с недостаточной эффективностью эвакуации воды из мембранно-электродного блока и, соответственно, дополнительным увеличением его увлажненности. Таким образом, можно предположить, что анализ частотных особенностей флуктуационных сигналов позволит выявить признаки для обнаружения критических режимов работы и сформировать рекомендации для систем управления ТПТЭ.

Рассмотрим примеры сигналов (рис. 3), соответствующих недостаточной и избыточной увлажненностям мембранно-электродного блока. При недостаточной увлажненности наблюдаются медленные квазипериодические колебания (рис. 3, a), механизм возникновения которых связан с комплексным взаимодействием процессов получения и эвакуации воды, изменением сопротивления полимерной мембраны и условий протекания диффузии реагентов. При работе ТПТЭ в режиме избыточного увлажнения характер электрических флуктуаций (рис. 3, b) изменяется: возникают короткие импульсы, приводящие к уве-

личению спектральной плотности мощности в высокочастотной области. Для проверки последнего факта увеличения высокочастотных компонент спектральной плотности мощности флуктуационных сигналов было проведено следующее исследование (рис. 4).

В начальный момент времени ТПТЭ функционировал в номинальном режиме, характеризующимся высокой стабильностью характеристик электрических флуктуаций во всех частотных диапазонах (рис. 4, область 1). Затем путем повышения температуры катодной системы увлажнения до 50 °С был установлен режим с избыточным увлажнением, который характеризовался увеличением среднеквадратических значений флуктуаций, соответствующих среднечастотному (1–10 Гц) и высокочастотному (10–100 Гц) диапазонам (рис. 4, область 2). Последующее увеличение температуры катодной системы увлажнения до 70 °С привело к частичному затоплению мембранно-электродного блока и нестабильной работе ТПТЭ (рис. 4, область 3). Индикатором этого процесса является увеличение флуктуаций во всех рассматриваемых частотных диапазонах. Эти выводы также подтверждаются появлением и увеличением интенсивности коротких импульсных сигналов в структуре электрических флуктуаций в области 2 измерений, характеризующейся избыточным увлажнением МЭБ (рис. 4).

Таким образом, можно утверждать, что два критических режима работы ТПТЭ, связанных с увлажнением мембранно-электродного блока, различаются по поведению спектральной плотности мощности в различных диапазонах частот: при сильном увлажнении возрастают флуктуации в высокочастотном диапазоне, а при пересыхании – в низкочастотном.

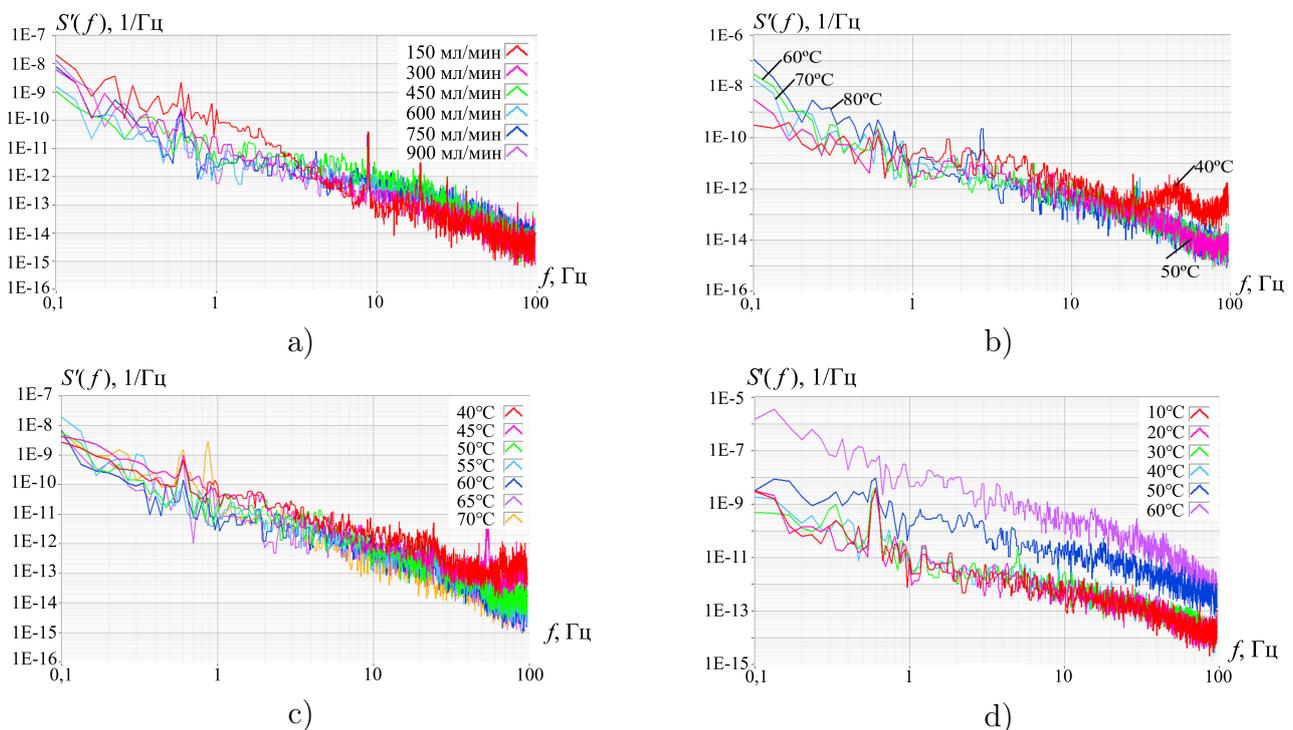


Рис. 2. Зависимость приведенного спектра электрических флуктуаций ТПТЭ от массового расхода окислителя (а), температуры ячейки при постоянной (b) и нефиксированной увлажненности (с) окислителя, температуры катодной системы увлажнения (d)

Fig. 2. Dependence of the reduced spectrum of PEMFC electrical fluctuations on mass flow rate of the oxidizer (a), cell temperature at constant (b) and non-fixed humidification (c) of the oxidizer, and temperature of the cathode humidification system (d)

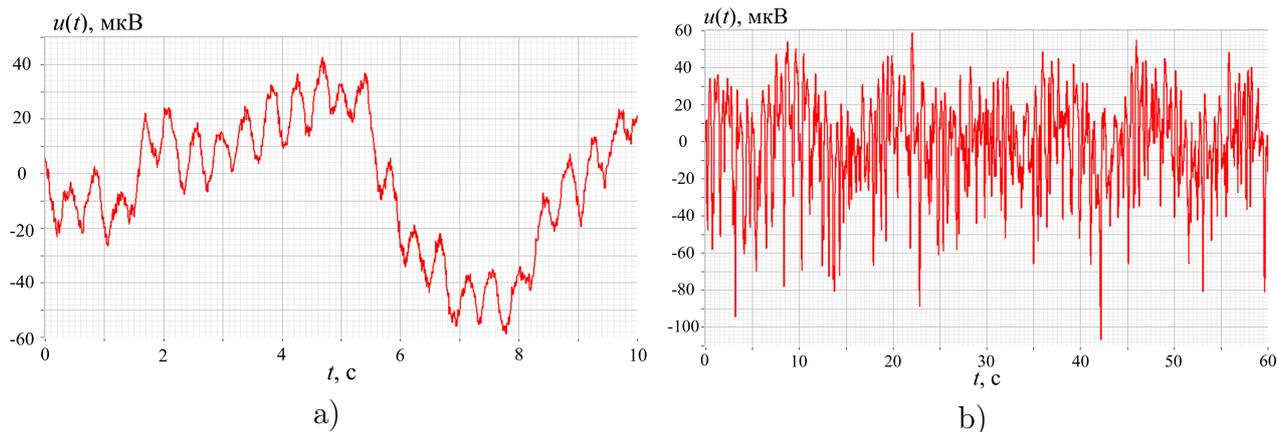


Рис. 3. Электрические флуктуации ТПТЭ при развитых критических режимах работы: недостаточном (а) и избыточном (б) увлажнении мембранно-электродного блока

Fig. 3. PEMFC electrical fluctuations in critical operating modes: insufficient (a) and excessive (b) humidification of the membrane electrode assembly

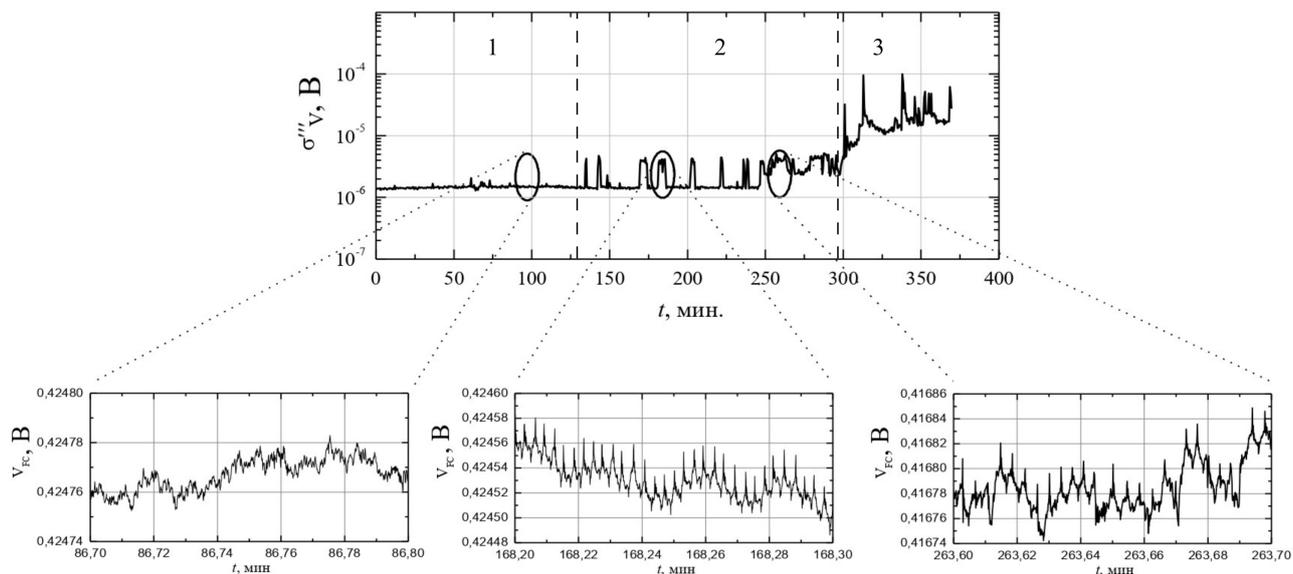


Рис. 4. Высокочастотные электрические флуктуации ТПТЭ при изменении режимов увлажнения мембранно-электродного блока: 1. Номинальный режим; 2. Избыточное увлажнение; 3. Частичное затопление

Fig. 4. PEMFC high-frequency electrical fluctuations under the changes in the humidification modes of the membrane electrode assembly: 1. Nominal mode; 2. Excessive humidification; 3. Partial flooding

3. Особенности применения электрических флуктуации топливного элемента для диагностики и управления режимами работы ТПТЭ

В процессе функционирования ТПТЭ может наблюдаться большое количество различных критических режимов работы и неисправностей, таких как некорректные режимы увлажнения мембранно-электродного блока, деградация катализатора, неравномерное распределение электрического тока по поверхности мембраны, замедление процессов диффузии. Для их обнаружения по флуктуационным сигналам требуется проводить настройку диагностических признаков для каждой конкретной конструкции ТПТЭ. Однако

можно сформировать некоторые общие рекомендации для связи критических режимов работы с возникновением избыточных флуктуаций в разных диапазонах частот (табл. 1).

Табл. 1. Распределение механизмов возникновения электрических флуктуаций по частотному диапазону

Table 1. Distribution of the mechanisms causing electrical fluctuations across the frequency range

<i>n</i>	Частотный диапазон	Механизм возникновения	Неисправности
1.	Низкие частоты, 0.1–1 Гц	Процессы диффузии	Недостаточное увлажнение [8, 9], неравномерная плотность тока [9], деградация газодиффузионного слоя [12]
2.	Средние частоты, 1–10 Гц	Перенос заряда, проводимость мембраны	Переувлажнение [8, 9], недостаточное увлажнение [8, 9], неравномерная плотность тока [9], замедление электрохимической реакции (деградация катализатора) [9]
3.	Высокие частоты, 10–100 Гц	Перенос заряда, шунтирующее действие емкости двойного электрического слоя	Переувлажнение [9], неравномерная плотность тока [9], замедление электрохимической реакции [12], изменение структуры электродов [9], снижение проводимости мембраны [8]

Табл. 1 построена на основе анализа данных [8, 9, 12], общих принципов работы ТПТЭ и опыта их экспериментальных исследований.

Рассмотрим пример использования диагностических признаков электрических флуктуаций ТПТЭ для случая обнаружения избыточного или недостаточного увлажнения мембранно-электродного блока. Типовая структура соответствующей системы управления режимами представлена на рис. 5. Измеренный сигнал напряжения поступает на вход модуля измерения электрических флуктуаций (МИЭФ), где проводятся операции аналого-цифрового преобразования, устранения тренда, вычисления спектральной плотности мощности и оценки параметров, характеризующих флуктуации. В блоке принятия решения (БПР) проводится обработка полученных параметров и с учетом параметров текущего режима принимается решение о нормальной работе или некорректном увлажнении мембранно-электродного блока. Соответствующая информация передается в блок формирования управляющих сигналов, где определяются действия, необходимые для компенсации начинающегося критического режима увлажнения путем подачи соответствующего сигнала для системы управления увлажнением. При обнаружении избыточного увлажнения БПР может использовать следующий алгоритм: если наблюдается резкое повышение среднеквадратичного отклонения флуктуаций в высокочастотной области спектра σ_v''' более величины 5 мкВ (см. рис. 4), величина σ_v''' сопротивления вычисляется по формуле

$$\sigma_v''' = \int_{10}^{100} S(f)df,$$

где верхний и нижний пределы интегрирования соответствуют границам исследуемого диапазона. Обнаружение режима с недостаточной увлажненностью может осуществляться по превышению среднеквадратичного отклонения флуктуаций в низкочастотном диапазоне при их неизменности в высокочастотном.

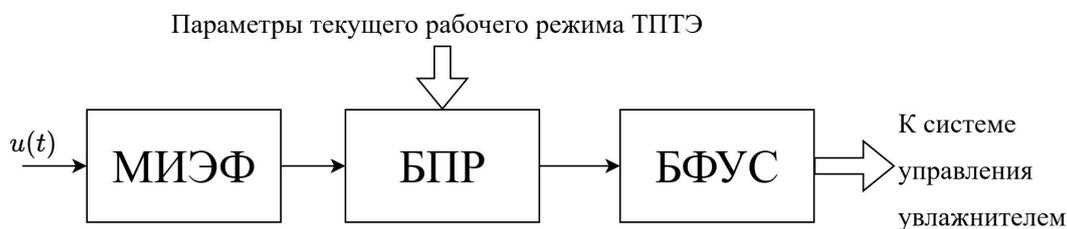


Рис. 5. Типовая структура системы управления режимами увлажнения ТПТЭ

Fig. 5. Typical structure of the control system for PEMFC humidification modes

Экспериментальные исследования показывают, что достаточно надежная оценка электрических флуктуаций в задачах диагностики получается при измерении около десяти сегментов по тридцать секунд и использовании на их основе периодограммного метода оценки спектра Уэлча. При этом во многих случаях достаточно чувствительности АЦП с разрядностью 18 бит и выше. Учитывая инерционность процессов в ТПТЭ, во многих случаях подобной организации получения оценок достаточно для эффективного управления их рабочими процессами.

Заключение

Системная модель ТПТЭ, рассматривающая связи между входными и выходными сигналами, может быть надежным источником диагностической информации. Однако ввиду сложности, взаимосвязанности и нелинейного характера зависимости этих сигналов их учет является сложной задачей, а необходимость вывода ТПТЭ из рабочего режима делает эту модель неподходящей для целей оперативной диагностики. Для решения указанной задачи предложена малосигнальная системная модель, позволяющая выявлять диагностические признаки на основе малых возмущений воздействующих переменных или при их флуктуациях в процессе естественного функционирования. Методы, основанные на учете малых возмущений, достаточно хорошо известны, например, электрохимическая импедансная спектроскопия, поэтому основное внимание было уделено использованию электрических флуктуаций для обнаружения критических режимов работы и выработки сигналов для их корректировки. Показана возможность обнаружения критических режимов поддержания водного баланса мембранно-электродного блока ТПТЭ, имеющего решающее значение для его надежности, стабильности и энергетической эффективности. Описана методика обнаружения режимов с избыточной и недостаточной увлажненностью на основе анализа спектральных характеристик электрических флуктуаций: при переувлажнении возрастает мощность в средне- и высокочастотной областях, а при недостаточном увлажнении – в низкочастотной. Приведены результаты анализа критических режимов и неисправностей ТПТЭ, которые могут быть обнаружены с использованием электрических флуктуаций с оценкой частотных диапазонов, в которых они, вероятно, будут проявляться, например, неравномерное распределение тока, изменение проводимости мембраны и деградации катализатора. Анализ полученных результатов

показал, что предложенная малосигнальная системная модель ТПТЭ является перспективным инструментом для поиска методов оперативного контроля.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Smit M.* Towards 40 000 hours of operation for Nedstack's FCS XXL PEM fuel cell stacks // *Fuel Cells Bulletin*. 2014. V. 2014, No 8. P. 12–15. [https://doi.org/10.1016/S1464-2859\(14\)70238-X](https://doi.org/10.1016/S1464-2859(14)70238-X).
2. *Daud W.R.W., Rosli R.E., Majlan E.H., Hamid S.A.A., Mohamed R., Husaini T.* PEM fuel cell system control: A review // *Renewable Energy*. 2017. V. 113. P. 620–638. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2017.06.027>.
3. *Lebreton C., Benne M., Damour C., Yousfi-Steiner N., Grondin-Perez B., Hissel D., Chabriat J.-P.* Fault tolerant control strategy applied to PEMFC water management // *Int. J. Hydrogen Energy*. 2015. V. 40, No 33. P. 10636–10646. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2015.06.115>.
4. *Luna J., Jemei S., Yousfi-Steiner N., Husar A., Serra M., Hissel D.* Nonlinear predictive control for durability enhancement and efficiency improvement in a fuel cell power system // *J. Power Sources*. 2016. V. 328. P. 250–261. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.08.019>.
5. *Grigor'ev S.A., Klimova M.A.* Strategies of the cold start of polymer electrolyte membrane fuel cells // *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2024. V. 97, No 1. P. 82–91. <https://doi.org/10.1007/s10891-024-02870-w>.
6. *Yuan X., Wang H., Sun J.C., Zhang J.* AC impedance technique in PEM fuel cell diagnosis — a review // *Int. J. Hydrogen Energy*. 2007. V. 32, No 17. P. 4365–4380. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2007.05.036>.
7. *Nasser-Eddine A., Huard B., Gabano J.-D., Poinot T., Martemianov S., Thomas A.* Fast time domain identification of electrochemical systems at low frequencies using fractional modeling // *J. Electroanal. Chem.* 2020. V. 862. Art. 113957. <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2020.113957>.
8. *Евдокимов Ю.К., Мартемьянов С.А., Денисов Е.С.* Электрический шум водородного топливного элемента и исследование его диагностических свойств // *Нелинейн. мир*. 2009. Т. 7, № 9. С. 706–712.
9. *Denisov E.S., Evdokimov Y.K., Martemianov S., Thomas A., Adiutantov N.* Electrochemical noise as a diagnostic tool for PEMFC // *Fuel Cells*. 2017. V. 17, No 2. P. 225–237. <https://doi.org/10.1002/fuce.201600077>.
10. *Астафьев Е.А.* Сравнение различных подходов в анализе электрохимических шумов на примере водородно-воздушного топливного элемента // *Электрохим.* 2020. Т. 56, № 2. С. 167–174. <https://doi.org/10.31857/S0424857020020036>.
11. *Maizia R., Dib A., Thomas A., Martemianov S.* Proton exchange membrane fuel cell diagnosis by spectral characterization of the electrochemical noise // *J. Power Sources*. 2017. V. 342. P. 553–561. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.12.053>.
12. *Thomas A., Adiutantov N., Denisov E., Evdokimov Yu., Hissel D., Martemianov S.* Generation of statistical descriptors for running PEM fuel cell stack by means of long-time electrochemical

noise measurements // Nanobiotechnology Reports. 2021. V. 16, No 2. P. 222–230.
<https://doi.org/10.1134/S2635167621020166>.

References

1. Smit M. Towards 40 000 hours of operation for Nedstack's FCS XXL PEM fuel cell stacks. *Fuel Cells Bull.*, 2014, vol. 2014, no. 8, pp. 12–15. [https://doi.org/10.1016/S1464-2859\(14\)70238-X](https://doi.org/10.1016/S1464-2859(14)70238-X).
2. Daud W.R.W., Rosli R.E., Majlan E.H., Hamid S.A.A., Mohamed R., Husaini T. PEM fuel cell system control: A review. *Renewable Energy*, 2017, vol. 113, pp. 620–638. <https://doi.org/10.1016/j.renene.2017.06.027>.
3. Lebreton C., Benne M., Damour C., Yousfi-Steiner N., Grondin-Perez B., Hissel D., Chabriat J.-P. Fault tolerant control strategy applied to PEMFC water management. *Int. J. Hydrogen Energy*, 2015, vol. 40, no. 33, pp. 10636–10646. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2015.06.115>.
4. Luna J., Jemei S., Yousfi-Steiner N., Husar A., Serra M., Hissel D. Nonlinear predictive control for durability enhancement and efficiency improvement in a fuel cell power system. *J. Power Sources*, 2016, vol. 328, pp. 250–261. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.08.019>.
5. Grigor'ev S.A., Klimova M.A. Strategies of the cold start of polymer electrolyte membrane fuel cells. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2024, vol. 97, no. 1, pp. 82–91. <https://doi.org/10.1007/s10891-024-02870-w>.
6. Yuan X., Wang H., Sun J.C., Zhang J. AC impedance technique in PEM fuel cell diagnosis — a review. *Int. J. Hydrogen Energy*, 2007, vol. 32, no. 17, pp. 4365–4380. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2007.05.036>.
7. Nasser-Eddine A., Huard B., Gabano J.-D., Poinot T., Martemianov S., Thomas A. Fast time domain identification of electrochemical systems at low frequencies using fractional modeling. *J. Electroanal. Chem.*, 2020, vol. 862, art. 113957. <https://doi.org/10.1016/j.jelechem.2020.113957>.
8. Evdokimov Yu.K., Martemianov S.A., Denisov E.S. Hydrogen fuel cell electrical noise and study of its diagnostics properties. *Nonlinear World*, 2009, vol. 7, no. 9, pp. 706–712. (In Russian)
9. Denisov E.S., Evdokimov Y.K., Martemianov S., Thomas A., Adiutantov N. Electrochemical noise as a diagnostic tool for PEMFC. *Fuel Cells*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 225–237. <https://doi.org/10.1002/fuce.201600077>.
10. Astaf'ev E.A. Comparison of approaches in electrochemical noise analysis using an air–hydrogen fuel cell. *Russ. J. Electrochem.*, 2020, vol. 56, no. 2, pp. 156–162. <https://doi.org/10.1134/S1023193520020032>.
11. Maizia R., Dib A., Thomas A., Martemianov S. Proton exchange membrane fuel cell diagnosis by spectral characterization of the electrochemical noise. *J. Power Sources*, 2017, vol. 342, pp. 553–561. <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2016.12.053>.
12. Thomas A., Adiutantov N., Denisov E., Evdokimov Yu., Hissel D., Martemianov S. Generation of statistical descriptors for running PEM fuel cell stack by means of long-time electrochemical noise measurements. *Nanobiotechnol. Rep.*, 2021, vol. 16, no. 2, pp. 222–230. <https://doi.org/10.1134/S2635167621020166>.

Информация об авторах

Евгений Сергеевич Денисов, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры радиоэлектроники и информационно-измерительной техники, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: genia-denisov@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9677-8375>

Юрий Кириллович Евдокимов, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиоэлектроники и информационно-измерительной техники, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: evdokimov1@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7285-8984>

Author Information

Evgenii S. Denisov, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Radioelectronics and Information Measuring Equipment, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: genia-denisov@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9677-8375>

Yury K. Evdokimov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Department of Radioelectronics and Information Measuring Equipment, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: evdokimov1@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7285-8984>

Поступила в редакцию 19.08.2025

Принята к публикации 28.08.2025

Received August 19, 2025

Accepted August 28, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 001.8: 519.17

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.468-490>

Метод ранжирования научных публикаций по степени их важности

А.М. Елизаров^{1,2} ✉, И.Г. Ольгина³

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

²Университет Иннополис, г. Иннополис, Россия

³Омский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Омск, Россия

✉ amelizarov@gmail.com

Аннотация

Как известно, научные публикации играют большую роль в обмене информацией между учеными. Сегодня объемы научной информации в виде публикаций и исследовательских данных увеличиваются лавинообразно, чему способствуют технологический прогресс и активная цифровизация всех сфер деятельности. Поэтому исследователям нужны инструменты и методы, которые помогают эффективно отбирать, анализировать и систематизировать научную информацию. Одновременно возникает необходимость в разработке новых подходов к оценке степени важности научных публикаций.

Представлен подход к оценке научных публикаций, базирующийся на анализе сетей цитирования и позволяющий глубже и наглядней изучить взаимосвязи между публикациями и оценить степень их важности в рамках конкретной рассматриваемой тематики. Этот подход реализован на примере публикаций сотрудников Института информационных технологий и интеллектуальных систем Казанского (Приволжского) федерального университета и позволил получить ряд результатов, свидетельствующих о перспективах его использования. Результаты проведенных экспериментов получены на основе данных о цитировании, извлеченных из открытой базы научной литературы OpenAlex (<https://openalex.org/>).

Ключевые слова: научная публикация, сеть цитирования, ориентированный граф, сетевые метрики, степень важности, сетевой анализ, метод ранжирования

Для цитирования: Елизаров А.М., Ольгина И.Г. Метод ранжирования научных публикаций по степени их важности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 468–490. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.468-490>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.468-490>

A method of ranking scientific publications according to their degree of importance

A.M. Elizarov^{1,2} ✉, I.G. Olgina³

¹*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

²*Innopolis University, Innopolis, Russia*

³*Omsk Branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Omsk, Russia*

✉ amelizarov@gmail.com

Abstract

Scientific publications play a crucial role in the exchange of information among scientists. Due to ongoing technological progress and digitalization in all fields, the already large volume of scientific information, both in the form of publications and research data, continues to grow exponentially and demands advanced tools and methods for its efficient and reliable selection, analysis, and structuring. At the same time, new approaches are needed to assess the importance of scientific publications.

In this article, in order to obtain a deeper and more objective understanding of the relationships between different publications and to assess their impact within a selected field of study, an innovative approach to ranking scientific publications based on analysis of citation networks was proposed. The approach was successfully applied to analyze the publications of researchers from the Institute of Information Technology and Intelligent Systems of Kazan Federal University, thereby confirming its feasibility and prospects for broader use. All citation metrics were retrieved from the OpenAlex database of scientific literature (<https://openalex.org/>).

Keywords: scientific publication, citation network, oriented graph, network metrics, degree of importance, network analysis, ranking method

For citation: Elizarov A.M., Olgina I.G. A method of ranking scientific publications according to their degree of importance. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 468–490. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.468-490>. (In Russian)

Введение

В настоящее время теория сетей нашла приложения во многих дисциплинах (см., например, [1–7]), и все более широкое применение начинает получать сетевой анализ, используемый в исследовании социальных сетей, в частности, сетей цитирования (см., например, [8, 9]). В 1927 году в работе [10] впервые была предложена идея определения важности научного журнала путем измерения его цитирования. Однако сети

цитирования как один из видов социальных сетей начали количественно изучать только после того, как сформировались и стали доступны базы данных цитирования.

В 1965 году Дерек Дж. де Солла Прайс (Derek J. de Solla Price) в статье [11] отметил наличие связей между публикациями как характерную особенность, присущую Индексу научного цитирования (SCI). В 1973 году Г. Смолл (H. Small) опубликовал работу [12] по анализу совместного цитирования, которая инициировала эксперименты по кластеризации документов и созданию соответствующих обзоров исследований. Г. Смолл практически реализовал метод создания фронтов научных исследований (или кластеров) на основе совместного цитирования или, как его еще называют, ко-цитирования (см., например, [13]). Эти разработки внесли большой вклад в развитие наукометрии.

С появлением и совершенствованием интернет-технологий стал возможен эффективный сбор данных о сетях цитирования публикаций, а рост вычислительных мощностей и скорости обработки данных позволил использовать методы сетевого анализа применительно к большим и очень большим сетям, таким как сам интернет. Новые подходы, появившиеся в рамках статистической теории сетей, впервые позволили аналитикам выйти за рамки простого описания сети, чтобы построить и протестировать статистические модели сетевых структур и процессов [14].

Основная цель настоящей работы заключается в апробации подхода к анализу степени важности научных публикаций, основанного на использовании таких сетевых метрик, как меры центральности, и продемонстрированного на реальных данных из открытой базы научной литературы OpenAlex с очевидной возможностью масштабирования. Представляется, что применение разработанного метода ранжирования научных публикаций дает более глубокое понимание взаимосвязей между публикациями, что, в свою очередь, обеспечивает более объективную их оценку.

1. Графы цитирования научных публикаций

Математическую модель сети цитирования научных публикаций представим в виде ориентированного графа $G = (V, E)$, где V – множество его вершин, а E – множество дуг. Пусть множество V состоит из n занумерованных вершин v_k , $k = 1, \dots, n$, а дуги $e_{ij} = (v_i, v_j) \in E$, где v_i – вершина, из которой дуга исходит, а v_j – вершина, в которую она заходит. Вершины соответствуют публикациям, а дуги отражают связи между публикациями, реализуемые путем цитирования (см. также [15]): вершина v_i соответствует публикации, которая цитирует публикацию, которой соотносится вершина v_j . Считаем, что для публикаций, находящихся в отношении цитирования, обязательно должно выполняться следующее условие: не существует публикации, которая цитирует саму себя. Следовательно, должно выполняться неравенство $v_i \neq v_j$.

Используем два способа представления графа G : в виде списка дуг и в виде матрицы смежности – стандартного способа представления графа как двумерной матрицы $A = ||a_{ij}||$, составленной по правилу: если публикация i цитирует публикацию j , то $a_{ij} = 1$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Отметим, что первый из названных способов представления удобен по следующему ряду причин: компактность, простота изменения структуры и возможность быстрого определения множества дуг, исходящих из одной вершины. Он был использован нами для построения самой сети. Второй способ был применен для вычисления мер центральности.

2. Метод ранжирования научных публикаций по степени важности

Опишем метод ранжирования публикаций на основе метрик, комбинация которых задает интересующий нас профиль исследования – набор мер центральности узлов сети, примененных к сети цитирования, с одновременным выбором коэффициентов релевантности для каждой такой меры. Центральность (см., например, [14]) – это мера степени важности узлов в сети. Характеристика «центральность» позволяет определить степень важности вершины графа, основываясь на ее расположении. Для вычисления мер центральности применяют различные подходы и интерпретации (см., например, [16]). Используемые нами меры центральности описаны ниже. Они и были применены в качестве критериев оценки степени важности узлов сети цитирования при построении обобщенного показателя степени важности соответствующих публикаций.

Суть предлагаемого метода такова.

1) Сбор данных о цитировании осуществляется следующими способами: обход всех сформированных кластеров сети цитирования; построение подсети публикаций по заданной тематике; использование данных о цитировании публикаций сотрудников конкретной организации.

2) Выбор профиля исследования из уже предложенных ранее либо формирование нового профиля: отбор показателей (мер центральности) и определение соответствующих им весовых коэффициентов релевантности, исходя из поставленных целей.

3) Определение ранга узла сети по каждому показателю и ранжирование узлов в порядке убывания значений этого показателя.

4) Расчет итогового значения степени важности узла сети как суммы его рангов по каждой из использованных мер центральности (с учетом их релевантности) и ранжирование узлов в порядке убывания этого значения.

5) Формирование ранжированного списка публикаций по степени важности, где каждая публикация соответствует узлу построенной сети.

Для сетей цитирования известны меры центральности, достаточные для анализа узлов сети цитирования, которым соответствуют научные публикации, их подробное описание приведено в работе [17–18]:

– центральность по степени связности (degree centrality, C_D) – это количество цитирований (ссылок);

– центральность по близости к другим узлам (closeness centrality, C_C) – это оценка близости в рамках рассматриваемой тематики;

– центральность по посредничеству (betweenness centrality, C_B) – это оценка степени важности статьи для управления информацией в контексте развития и взаимодействия тематических сообществ;

– центральность по информативности (hub centrality, C_{HU}) – это оценка степени важности статьи, которую цитируют многие статьи с высоким показателем степени авторитетности;

– центральность по авторитетности (authority centrality, C_{AU}) – это оценка степени важности статьи, которая цитируется во многих статьях с высоким показателем информативности C_{HU} ;

– полустепень захода C_{indeg} вершины в ориентированном графе (т. е. количество дуг, которые входят в эту вершину);

- полустепень исхода C_{outdeg} вершины в ориентированном графе (т. е. количество дуг, которые исходят из этой вершины);
- близость к другим узлам в режиме *in* ($C_c(in)$);
- близость к другим узлам в режиме *out* ($C_c(out)$).

Общая черта приведенных мер центральности в том, что они оценивают степень важности соответствующей публикации (значит, и узла сети цитирования), базируясь только на той роли, которую эта публикация играет сама по себе, без связи с другими публикациями в рассматриваемой сети. Поэтому и необходим был выбор способа комбинирования отдельных мер центральности узлов сети для более адекватного описания степени важности рассматриваемой публикации. Таким обобщенным показателем степени важности для выбранного профиля исследования h для каждого узла сети v выбрано значение

$$C^h(v) = \sum_{i=1}^n C_i(v), \quad (1)$$

где $C_i(v) = k_i^h R_i(v)$ — показатель степени важности узла сети v для выбранного профиля исследования h для i -й меры центральности, $R_i(v)$ — ранг узла v по i -й мере центральности; n — общее число выбранных мер центральности; k_i^h , $0 \leq k_i^h \leq 1$, — индекс релевантности i -й меры центральности (соответствия, уместности или актуальности ее использования). Далее приведена пошаговая процедура сбора и преобразования исходных данных и описан способ вычисления обобщенного показателя $C^h(v)$.

Шаг 1. Сбор (извлечение) исходных данных. Данные о цитировании могут быть извлечены с помощью интернет-технологий с учетом имеющихся условий доступа как из конкретной выбранной библиографической базы данных (в нашем случае — открытой базы данных OpenAlex), так и из всех доступных репозиторий, в частности, открытого доступа. Сбор информации о цитировании начинается с выбора первой публикации, которой может быть любая заранее заданная либо случайно выбранная публикация. Сборка сети цитирования осуществляется по разработанному алгоритму [19] до тех пор, пока не будут перебраны все публикации, имеющиеся на данный момент в используемой базе данных, либо если будет задано условие прекращения сбора данных. Например, таким условием может быть ограничение по количеству вершин в графе либо наличию заданных ключевых слов в публикации.

Шаг 2. Построение списка дуг и формирование библиографических данных публикаций. Пусть $e_{ij} = (v_i, v_j)$ — дуга орграфа, которая обозначает наличие связи цитирования между вершинами v_i и v_j (при обязательном условии $v_i \neq v_j$: граф не должен содержать петель). С помощью специализированных программ (см., например, [20]) формируется файл списка дуг в формате .net, который содержит списки номеров и наименований всех вершин (*Vertices) и дуг (*Arcs). Также программа осуществляет формирование файла с библиографическими данными публикаций в формате .xlsx. Связь библиографических данных осуществляется через соответствие идентификатору публикации, роль которого выполняет уникальный номер вершины, присвоенный при формировании файла списка дуг.

Шаг 3. Выбор профиля исследования h_k . В автоматизированном режиме выбор профиля исследования осуществляется с помощью разработанной программы «Генератор списка источников информации в сетях цитирования» (GLIS) [21]. Поскольку в качестве модели сети цитирования использован ориентированный граф, то было выделено

три основных профиля исследования для нахождения наиболее важных научных публикаций. Первый профиль «Тематическая значимость» (h_1) сформирован без учета направленности дуг графа и соответствует обнаружению наиболее важных публикаций в заданной предметной области. Следующие два профиля учитывают направленность дуг графа: «Информативность» (h_2) – для нахождения наиболее информативных публикаций и «Авторитетность» (h_3) – для определения наиболее авторитетных публикаций.

В случае несоответствия готовых профилей целям исследования программой предусмотрено формирование собственных новых профилей с помощью конструктора профилей (переход к шагам 4 и 5). В случае выбора готового профиля следует сразу перейти к шагу 6.

Шаг 4. Выбор параметров оценки узлов сети. При решении конкретных задач нужно выбрать те меры центральности, которые значимы для решаемой задачи и учитывают в совокупности несколько показателей степени важности узлов из перечисленных выше.

Шаг 5. Определение весовых коэффициентов k_i^h (индексов релевантности i -го показателя). Создается кортеж весовых коэффициентов $k_1^h, k_2^h, \dots, k_n^h$, который формирует профиль исследования h . Индексы релевантности k_i^h принимаются равными 1, если соответствующий показатель решено учитывать, и 0, если он не принимается во внимание. В принципе, значения k_i^h могут быть нецелыми и определены в интервале (0,1), что будет отражать различие в значимости для итоговой оценки того или иного показателя из используемых.

Шаг 6. Определение рангов R_i . Вычисляются значения выбранных релевантных мер центральности для каждого узла сети. Затем осуществляется ранжирование узлов в порядке убывания значений каждой из этих мер и определяется соответствующий ранг R_i .

Шаг 7. Вычисление обобщенного показателя степени важности $C^h(v)$ каждого узла сети по формуле (1).

Шаг 8. Ранжирование научных публикаций по степени важности: присвоение меньшего ранга публикации с меньшим значением показателя $C^h(v)$.

3. Исходные данные

Источником данных для проведения экспериментов стала открытая база научной литературы OpenAlex [22]. Эта база начала работать с января 2022 года и изначально включала информацию из известной базы данных Microsoft Academic Graph (перестала функционировать с 31 декабря 2021 года), а также бесплатный API. К марту 2024 года OpenAlex уже содержала метаданные двухсот девяти миллионов публикаций, таких как журнальные статьи, статьи в сборниках материалов конференций и книги. Данные из OpenAlex в отличие от WoS, Scopus, Google Scholar или eLIBRARY.ru доступны по самой свободной лицензии – CC0 (Public Domain), разрешающей любое использование, в том числе коммерческое [23].

Для пилотного исследования нами был выбран Институт информационных технологий и интеллектуальных систем (ИТИС) Казанского (Приволжского) федерального университета (КФУ). Институт ИТИС был основан в 2011 году по инициативе Министерства цифрового развития Республики Татарстан, КФУ и крупнейших ИТ-компаний региона [24]. Создание этого института предполагало активное и опережающее развитие современных информационных технологий и обучение им. Естественно, показатели этой деятельности должны были найти отражение в публикациях сотрудников Института ИТИС, что и стало одной из мотиваций проведенного анализа соответствующей сети цитирования.

Для анализа были отобраны научные публикации (статьи в журналах и сборниках трудов конференций) с указанием аффилиации Института ИТИС (публикации Института ИТИС). Вариант указания аффилиации был выбран таким – Institute of Information Technology and Intelligent Systems, Kazan Federal University, Kazan, Russia. В результате из базы OpenAlex за период с 2018 по 2025 год было извлечено семьдесят публикаций сотрудников Института ИТИС. Отметим, что реальное число публикаций сотрудников Института ИТИС больше указанного, потому что в своей аффилиации некоторые авторы могли указать только Казанский (Приволжский) федеральный университет (Kazan Federal University) без указания названия института. Также важным фактором является тот временной период, за который были собраны публикации.

4. Анализ публикаций с помощью метода ранжирования научных публикаций по степени важности

Шаг 1. Данные о цитировании были извлечены из базы данных OpenAlex на 24.05.2025. Для проведения эксперимента была собрана сеть цитирования публикаций сотрудников Института ИТИС.

Рассмотрим два варианта сбора одной и той же сети. Первый вариант генерации сети цитирования (S_1) включает все публикации сотрудников Института ИТИС и ближайшие публикации – таковыми названы публикации, цитирующие публикации сотрудников Института ИТИС, и те, на которые ссылаются публикации сотрудников Института ИТИС. Назовем полученные связи связями первого уровня.

Второй вариант генерации сети цитирования (S_2) включает публикации, цитирующие ближайшие публикации сотрудников Института ИТИС, и те, на которые ссылаются ближайшие публикации сотрудников Института ИТИС. Назовем полученные связи связями второго уровня.

Благодаря сравнению результатов исследования сетей S_1 и S_2 можно будет наглядно продемонстрировать зависимость значений мер центральности узлов от полноты сети и таким образом показать, насколько важно учитывать все публикации и отношения между ними при исследовании степени их важности. Иными словами, важно принимать во внимание, какая именно публикация цитирует данную или на какую публикацию автор ссылается.

Шаг 2. По результатам собранных данных построены два ориентированных графа.

На основе S_1 получен оргграф, который содержит 2185 вершин и 6166 дуг, выражающих связи первого уровня.

На основе S_2 получен оргграф, который содержит 111525 вершин и 830295 дуг, выражающих связи второго уровня.

Шаги 3–5. Поскольку в настоящем исследовании в качестве модели сети цитирования использован ориентированный граф, то для апробации разработанного метода были выбраны все три созданные ранее профиля исследования: «Тематическая значимость» (h_1), «Информативность» (h_2) и «Авторитетность» (h_3).

Задача определения наиболее важных публикаций в заданной предметной области поставлена следующим образом: для профиля исследования h_1 найти наиболее важные публикации по конкретной тематике и упорядочить их по убыванию значения

$$C_{imp}^{h_1}(v) = R^{CD} + R^{Cc} + R^{CB} + R^{CAU} + R^{CHU}, \quad (2)$$

где R^{C_D} – ранг узла по степени связности; R^{C_c} – ранг узла по близости к другим узлам; R^{C_B} – ранг узла по посредничеству; R^{CAU} – ранг узла по авторитетности; R^{CHU} – ранг узла по информативности. Индекс релевантности для профиля исследования h_1 принят равным 1 для всех выбранных мер центральной тенденции (см. формулу (1)).

Задача определения наиболее информативных публикаций (профиль исследования h_2) поставлена следующим образом: найти наиболее информативные публикации по конкретной тематике и упорядочить их по убыванию значения

$$C_{inf}^{h_1}(v) = R^{C_{outdeg}} + R^{C_c}(out) + R^{C_B} + R^{CHU}, \tag{3}$$

где $R^{C_{outdeg}}$ – ранг узла по полустепени исхода; $R^{C_c}(out)$ – ранг узла по близости к другим узлам в режиме *out*; R^{C_B} – ранг узла по посредничеству; R^{CHU} – ранг узла по информативности. Индексы релевантности для профиля исследования h_2 , как и в (2), также приняты равными 1 для всех выбранных мер центральной тенденции.

Задача определения наиболее авторитетных публикаций (профиль исследования h_3) поставлена следующим образом: найти наиболее авторитетные публикации по конкретной тематике и упорядочить их по убыванию значения

$$C_{au}^{h_3}(v) = R^{C_{indeg}} + R^{C_c}(in) + R^{C_B} + R^{CAU}, \tag{4}$$

где $R^{C_{indeg}}$ – ранг узла по полустепени захода; $R^{C_c}(in)$ – ранг узла по близости к другим узлам в режиме *in*; R^{C_B} – ранг узла по посредничеству; R^{CAU} – ранг узла по авторитетности. В (4), как и в формулах (1)–(3), индексы релевантности приняты равными 1 для всех выбранных мер центральной тенденции. Такой выбор значения индексов релевантности k^h в указанных задачах отражает одинаковую значимость выбранных мер центральности.

Шаг 6. Ранжирование узлов сетей S_1 и S_2 в порядке убывания значений $C_i(v)$ каждой из мер центральности, входящих в профили исследования, выбранные на шаге 3. Результаты такого ранжирования приведены в табл. 1–3 и 4–6 для сетей S_1 и S_2 соответственно. Для удобства описания номер i указателя вершины графа заменен обозначением a_i . Библиографические описания всех публикаций, обозначенных таким образом, приведены в приложении (табл. 13).

Отметим, что во всех представленных табл. 1–6 указаны только десять вершин из семидесяти, имеющих ранги от одного до десяти.

Табл. 1. Узлы сети S_1 , ранжированные по профилю h_1

Table 1. Nodes of the network S_1 ranked according to the profile h_1

Узел	Ранг узла	Мера C_D	Ранг узла	Мера C_c	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера CHU	Ранг узла	Мера CAU
a_2	7	28	5	0,281	3	2361,34	7	0,1054	5	0,00324
a_3	2	37	7	0,274	2	2950,15	4	0,1892	1	0,01428
a_5	9	26	10	0,253	1	3265,44	8	0,0896	2	0,01283
a_7	6	29	9	0,262	7	1172,83	10	0,0687	3	0,00518
a_9	3	36	8	0,27	4	2032,61	3	0,2041	6	0,00323
a_{11}	5	33	6	0,275	6	1355,86	5	0,1646	4	0,00351
a_{12}	10	22	2	0,31	10	573,818	2	0,8907	7	0,00241
a_{14}	8	27	1	0,311	9	802,793	1	0,922	10	0,00128
a_{18}	4	34	3	0,283	5	1477,1	9	0,0879	9	0,0019
a_{19}	1	45	4	0,282	8	884,455	6	0,163	8	0,00211

Табл. 2. Узлы сети S_1 , ранжированные по профилю h_2 **Table 2.** Nodes of the network S_1 ranked according to the profile h_2

Узел	Ранг узла	Мера C_{outdeg}	Ранг узла	Мера $C_c(out)$	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера C_{HU}
a_3	8	23	6	0,369	1	2950,15	5	243
a_6	1	80	1	0,477	2	2427,50	4	250
a_8	4	37	2	0,428	9	385,00	10	3
a_9	6	27	8	0,345	3	2032,61	6	238
a_{11}	7	26	5	0,385	5	1355,86	3	251
a_{12}	10	17	10	0,338	8	573,82	8	9
a_{13}	2	56	3	0,423	10	361,63	7	221
a_{14}	9	22	9	0,342	7	802,79	9	5
a_{18}	5	30	7	0,363	4	1477,10	1	310
a_{19}	3	41	4	0,413	6	884,45	2	253

Табл. 3. Узлы сети S_1 , ранжированные по профилю h_3 **Table 3.** Nodes of the network S_1 ranked according to the profile h_3

Узел	Ранг узла	Мера C_{indeg}	Ранг узла	Мера $C_c(in)$	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера C_{AU}
a_3	2	14	10	0,524	1	2950,15	10	73
a_6	1	25	1	1,000	2	2427,50	3	843
a_{13}	5	6	1	1,000	10	361,63	5	629
a_{16}	6	4	6	0,833	7	712,63	6	618
a_{17}	6	4	7	0,700	8	696,75	7	531
a_{19}	6	4	7	0,700	5	884,45	8	488
a_{22}	6	4	1	1,000	9	374,09	1	1027
a_{24}	6	4	1	1,000	4	1153,58	2	954
a_{27}	3	13	5	0,933	3	1295,36	4	801
a_{69}	4	7	9	0,583	6	866,95	9	342

Для наглядности сравнения рангов узлов сетей S_1 и S_2 в табл. 4–6 указаны соответственно те же узлы, что и в табл. 1–3. При сравнении рангов узлов сетей S_1 и S_2 наибольшие различия наблюдаются у вершин с наивысшими рангами, а далее различия между рангами уменьшаются (см. также рис. 1–3).

Табл. 4. Узлы сети S_2 , ранжированные по профилю h_1 **Table 4.** Nodes of the network S_2 ranked according to the profile h_1

Узел	Ранг узла	Мера C_D	Ранг узла	Мера C_c	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера C_{HU}	Ранг узла	Мера C_{AU}
a_2	7	28	5	0,286	1	25356,00	4	50031,00	5	94523,00
a_3	2	37	6	0,284	8	13806,00	7	45500,00	9	76426,00
a_5	9	26	10	0,240	7	17131,00	1	71057,00	10	58896,00
a_7	6	29	9	0,279	2	24605,00	3	52034,00	8	87276,00
a_9	3	36	7	0,282	5	21183,00	5	48012,00	7	93075,00
a_{11}	5	33	8	0,281	4	22937,00	6	46825,00	4	95155,00
a_{12}	10	22	2	0,364	9	9948,00	9	28514,00	3	98558,00
a_{14}	8	27	1	0,365	10	4830,00	10	28100,00	1	99197,00
a_{18}	4	34	3	0,289	6	18503,00	2	52184,00	2	98922,00
a_{19}	1	45	4	0,288	3	23768,00	8	37529,00	6	94515,00

Табл. 5. Узлы сети S_2 , ранжированные по профилю h_2

Table 5. Nodes of the network S_2 ranked according to the profile h_2

Узел	Ранг узла	Мера C_{outdeg}	Ранг узла	Мера $C_c(out)$	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера C_{HU}
a_3	8	23	8	0,256	5	142689,47	5	45500
a_6	7	25	10	0,244	2	513790,86	6	43227
a_8	3	37	3	0,324	3	435508,20	10	26165
a_9	5	27	7	0,258	8	71294,99	3	48012
a_{11}	6	26	9	0,255	9	60514,06	4	46825
a_{12}	10	17	2	0,329	4	228447,43	8	28514
a_{13}	1	56	6	0,259	6	80816,09	2	49172
a_{14}	9	22	1	0,331	1	547838,35	9	28100
a_{18}	4	30	4	0,272	7	80717,38	1	52184
a_{19}	2	41	5	0,265	10	52834,03	7	37529

Табл. 6. Узлы сети S_2 , ранжированные по профилю h_3

Table 6. Nodes of the network S_2 ranked according to the profile h_3

Узел	Ранг узла	Мера C_{indeg}	Ранг узла	Мера $C_c(in)$	Ранг узла	Мера C_B	Ранг узла	Мера C_{AU}
a_3	3	14	9	0,440	3	142689,47	3	0,000004833
a_6	2	25	7	0,542	1	513790,86	1	0,000045387
a_{13}	5	6	10	0,418	5	80816,09	5	0,000000187
a_{16}	6	4	2	0,833	6	60893,13	9	0,000000079
a_{17}	6	4	5	0,588	10	24444,63	10	0,000000065
a_{19}	6	4	8	0,486	7	52834,03	8	0,000000146
a_{22}	6	4	3	0,750	9	30494,90	6	0,000000185
a_{24}	6	4	1	1,000	8	37986,64	7	0,000000151
a_{27}	4	13	4	0,615	4	127016,60	2	0,000021727
a_{69}	1	28	6	0,560	2	202203,93	4	0,000001432

Шаг 7. Для каждого узла сети вычислено значение $C^h(v)$ обобщенного показателя степени важности (см. (1)) по трем профилям исследования и проведено ранжирование. Результаты представлены в табл. 7 и 8 для сетей S_1 и S_2 соответственно.

Табл. 7. Ранжирование узлов сети S_1 по трем профилям исследования

Table 7. Ranking of the nodes in the network S_1 according to three profiles under study

Узел	Ранг по h_1	Узел	Ранг по h_2	Узел	Ранг по h_3
a_2	7	a_7	6	a_3	3
a_3	1	a_6	4	a_6	1
a_5	4	a_8	1	a_{13}	2
a_7	10	a_9	9	a_{16}	8
a_9	5	a_{11}	7	a_{17}	9
a_{11}	8	a_{12}	3	a_{19}	7
a_{12}	2	a_{13}	8	a_{22}	10
a_{14}	3	a_{14}	2	a_{24}	5
a_{18}	9	a_{18}	10	a_{27}	4
a_{19}	6	a_{19}	5	a_{69}	6

Табл. 8. Ранжирование узлов сети S_2 по трем профилям исследования**Table 8.** Ranking of the nodes in the network S_2 according to three profiles under study

Узел	Ранг по h_1	Узел	Ранг по h_2	Узел	Ранг по h_3
a_2	18	a_3	8	a_3	14
a_3	7	a_5	11	a_6	5
a_5	26	a_8	1	a_{13}	15
a_7	19	a_9	13	a_{16}	19
a_9	12	a_{11}	14	a_{17}	25
a_{11}	15	a_{12}	3	a_{19}	24
a_{12}	3	a_{13}	9	a_{22}	20
a_{14}	2	a_{14}	2	a_{24}	18
a_{18}	13	a_{18}	12	a_{27}	3
a_{19}	8	a_{19}	5	a_{69}	4

Шаг 8. В табл. 9 представлены результаты ранжирования публикаций сети S_1 по степени важности в соответствии со значениями $C^h(v)$ по рассматриваемым профилям h_1 , h_2 и h_3 соответственно.

В табл. 10 представлены результаты ранжирования публикаций сети S_2 по степени важности в соответствии со значениями $C^h(v)$ по рассматриваемым профилям исследования h_1 , h_2 и h_3 соответственно.

Табл. 9. Сравнение рангов узлов сети S_1 по каждому профилю исследования**Table 9.** Comparison of the node ranks in the network S_1 for each profile under study

Ранг по h_1	Узел	Ранг по h_2	Узел	Ранг по h_3	Узел
1	a_3	1	a_8	1	a_6
2	a_{12}	2	a_{14}	2	a_{13}
3	a_{14}	3	a_{12}	3	a_3
4	a_5	4	a_6	4	a_{27}
5	a_9	5	a_{19}	5	a_{24}
6	a_{19}	6	a_3	6	a_{69}
7	a_2	7	a_{11}	7	a_{19}
8	a_{11}	8	a_{13}	8	a_{16}
9	a_{18}	9	a_9	9	a_{17}
10	a_7	10	a_{18}	10	a_{22}

Табл. 10. Сравнение рангов узлов сети S_2 по каждому профилю исследования**Table 10.** Comparison of the node ranks in the network S_2 for each profile under study

Ранг по h_1	Узел	Ранг по h_2	Узел	Ранг по h_3	Узел
2	a_{14}	1	a_8	3	a_{27}
3	a_{12}	2	a_{14}	4	a_{69}
7	a_3	3	a_{12}	5	a_6
8	a_{19}	5	a_{19}	14	a_3
12	a_9	8	a_3	15	a_{13}
13	a_{18}	9	a_{13}	18	a_{24}
15	a_{11}	11	a_6	19	a_{16}
18	a_2	12	a_{18}	20	a_{22}
19	a_7	13	a_9	24	a_{19}
26	a_5	14	a_{11}	25	a_{17}

5. Сравнительный анализ результатов эксперимента

В настоящем исследовании были собраны два варианта сети цитирования научных публикаций Института ИТИС: сеть S_1 , содержащая связи только первого уровня, и сеть S_2 со связями второго уровня. Проведенный эксперимент позволил наглядно показать зависимость значений обобщенного показателя степени важности каждой вершины графа от ее окружения. Это означает, что степень важности научной публикации будет зависеть от того, какие публикации ее цитируют и на какие публикации она ссылается. Также можно определить, насколько исследуемая публикация близка по своей тематике с публикациями, которые ее окружают.

Для расчета линейной корреляции между рангами (коэффициента ранговой корреляции Спирмена) была использована функция КОРРЕЛ в Excel. Коэффициенты ранговой корреляции (ρ) при сравнении рангов в S_1 и S_2 принимают значения, большие 0,8, по всем трем профилям исследования (табл. 11).

Табл. 11. Значения коэффициентов ранговой корреляции

Table 11. Values of the rank correlation coefficients

-	h_1	h_2	h_3
ρ	0,809137645	0,806995061	0,80164771

В табл. 12 (см. приложение) представлены значения рангов всех публикаций сотрудников Института ИТИС, полученные по результатам вычисления значений $C^h(v)$ для сетей S_1 и S_2 . В этой таблице значения рангов публикаций сети S_1 упорядочены в порядке убывания для всех профилей исследования h_1 , h_2 и h_3 . Для сопоставления приведены значения рангов этих публикаций в сети S_2 . Видно, что разности значений рангов узлов сетей S_1 и S_2 достигают больших значений: например, у публикации a_{35} разность значений по профилю исследования h_1 равна 44, по профилю исследования h_2 – 48, а по профилю исследования h_3 – 39.

На рис. 1–3 (см. приложение) представлены диаграммы корреляции по рассматриваемым профилям исследования. Они свидетельствуют о существенной взаимосвязи. Однако если обратить внимание на табл. 12, то можно обнаружить у большинства публикаций понижение рангов, причем значительное. Например, у публикации a_5 ранг в S_1 равен 4, а ранг в S_2 – 26 по профилю h_1 , аналогично снижение ранга у этой публикации по профилю h_2 с двенадцатой позиции на сорок третью. В то же время по профилю h_3 у этой публикации наблюдается повышение ранга с двенадцати до шести.

В приложении приведена также табл. 13, устанавливающая связь указателя i вершины графа с библиографическими данными публикаций a_i для сети цитирования научных публикаций сотрудников Института ИТИС.

Заключение

Предложен подход к анализу степени важности научных публикаций с использованием сетей цитирования. Такой подход позволяет осуществить более глубокий анализ названного показателя по сравнению с библиометрическим подходом, поскольку известные и широко применяемые библиометрические показатели, основанные только на количестве цитирований, дают только поверхностную оценку. Библиометрические показатели можно сопоставить с показателями сетей цитирования, имеющими связи только первого уровня.

Соответственно, с помощью них невозможно дать полную оценку степени важности публикаций в исследуемой тематической области. Подтверждением данному тезису служит наглядный пример, полученный в результате сравнения рангов узлов сетей S_1 и S_2 .

В техническом плане возможности масштабирования понятны с точки зрения наращивания количества уровней связей. Также очевидна возможность широкого применения сетевого анализа для выявления тенденций в развитии научных направлений путем изучения взаимосвязей публикаций.

По результатам проведенного эксперимента можно сделать вывод о важности исследования в сетях цитирования взаимосвязей разных уровней.

Литература

1. *Saleh M., Esa Y., Onuorah N., Mohamed A.A.* Optimal microgrids placement in electric distribution systems using complex network framework // 2017 IEEE 6th Int. Conf. on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA). San Diego, CA: IEEE, 2017. P. 1036–1040. <https://doi.org/10.1109/ICRERA.2017.8191215>.
2. *Habibi I., Emamian E.S., Abdi A.* Quantitative analysis of intracellular communication and signaling errors in signaling networks // BMC Syst. Biol. 2014. V. 8, No 1. Art. 89. <https://doi.org/10.1186/s12918-014-0089-z>.
3. *Sindbæk S.M.* Networks and nodal points: The emergence of towns in early Viking Age Scandinavia // Antiquity. 2007, V. 81, No 311. P. 119–132. <https://doi.org/10.1017/S0003598X00094886>.
4. *Paradowski M.B., Cierpich-Koziet A., Chen C.-C., Ochab J.K.* How output outweighs input and interlocutors matter for study-abroad SLA: Computational social network analysis of learner interactions // Mod. Lang. J. 2022. V. 106, No 4. P. 694–725. <https://doi.org/10.1111/modl.12811>.
5. *Sunkersing D., Martin F.C., Sullivan P., Bell D.* Care and support networks of community-dwelling frail individuals in North West London: A comparison of patient and healthcare workers' perceptions // BMC Geriatr. 2022. V. 22, No 1. Art. 953. <https://doi.org/10.1186/s12877-022-03561-y>.
6. *Paradowski M.B., Jelińska M.* The predictors of L2 grit and their complex interactions in online foreign language learning: Motivation, self-directed learning, autonomy, curiosity, and language mindsets // Comput. Assisted Lang. Learn. 2023. V. 37, No 8. P. 2320–2358. <https://doi.org/10.1080/09588221.2023.2192762>.
7. *Saberi M., Khosrowabadi R., Khatibi A., Mistic B., Jafari G.* Topological impact of negative links on the stability of resting-state brain network // Sci. Rep. 2021. V. 11, No 1. Art. 2176. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-81767-7>.
8. *Печников А.А.* Пилотная модель сети научных журналов России: анализ на основе графа пересечений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 311–328. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328>.
9. *Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г.* Структура сети цитирования научных журналов // Пробл. информ. 2017. № 2. С. 38–52.
10. *Gross P.L.K., Gross E.M.* College libraries and chemical education // Science. 1927. V. 66, No 1713. P. 385–389. <https://doi.org/10.1126/science.66.1713.385>.

11. *de Solla Price D.J.* Networks of scientific papers: The pattern of bibliographic references indicates the nature of the scientific research front // *Science*. 1965. V. 149, No 3683. P. 510–515. <https://doi.org/10.1126/science.149.3683.510>.
12. *Small H.* Co-citation in the scientific literature: A new measure of the relationship between two documents // *J. Am. Soc. Inf. Sci.* 1973. V. 24, No 4. P. 265–269. <https://doi.org/10.1002/asi.4630240406>.
13. *Маркусова В.А.* Введение. К 50-летию Science Citation Index: История и развитие наукометрии // *Руководство по наукометрии: индикаторы развития науки и технологии / М.А. Аков [и др.]. Екатеринбург: Изд-во Уральск. ун-та, 2014. С. 14–48.*
14. *Luke D.A.* A User's Guide to Network Analysis in R. Ser.: Use R! Cham: Springer, 2015. xii, 238 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-23883-8>.
15. *Ольгина И.Г.* Методы математического моделирования сетей цитирования для комплектования фонда научных библиотек // *Вестн. технолог. ун-та.* 2019. Т. 22, № 6. С. 123–127.
16. *Щербакова Н.Г.* Меры центральности в сетях // *Пробл. информ.* 2015. № 2. С. 18–30.
17. *Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г., Юргенсон А.Н.* Параметры «центральности» узлов сети цитирования научных статей // *Пробл. информ.* 2016. № 1. С. 39–57.
18. *Щербакова Н.Г.* Аксиоматика центральности в комплексных сетях // *Пробл. информ.* 2015. № 3. С. 3–14.
19. *Ольгина И.Г., Пронин И.В., Абдрахманов А.Н.* Построение графовых моделей сети цитирования научных публикаций // *Сист. упр., информ. техн. и матем. моделир.: Матер. II Всеросс. науч.-практ. конф. с междунар. участ. В 2-х т. Омск, 19–20 мая 2020 г. / Отв. редактор В.Н. Задорожный. Т. I. Омск: Омск. гос. техн. ун-т, 2020. С. 118–125.*
20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615709 Российская Федерация. Программный комплекс LinkAnalyzer 1.0 для сбора и анализа информации о цитировании научных публикаций: № 2020614572: заявл. 21.05.2020: опубл. (зарег.) 29.05.2020 / И.Г. Ольгина, А.Н. Абдрахманов; заявитель Омск. гос. техн. ун-т. 1 с.
21. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021661693 Российская Федерация. Генератор списка источников информации в сетях цитирования: № 2021660969: заявл. 14.07.2021: опубл. (зарег.) 14.07.2021 / И.Г. Ольгина, Д.С. Осипов; заявитель Омск. гос. техн. ун-т. 1 с.
22. OpenAlex. URL: <https://openalex.org/>.
23. Электронный ресурс: OpenAlex. URL: <https://library.fa.ru/resource.asp?id=931>.
24. Институт информационных технологий и интеллектуальных систем. URL: <https://kpfu.ru/itis>.

References

1. Saleh M., Esa Y., Onuorah N., Mohamed A.A. Optimal microgrids placement in electric distribution systems using complex network framework. *2017 IEEE 6th Int. Conf. on Renewable Energy Research and Applications (ICRERA)*. San Diego, CA, IEEE, 2017, pp. 1036–1040. <https://doi.org/10.1109/ICRERA.2017.8191215>.

2. Habibi I., Emamian E.S., Abdi A. Quantitative analysis of intracellular communication and signaling errors in signaling networks. *BMC Syst. Biol.*, 2014, vol. 8, no. 1, art. 89. <https://doi.org/10.1186/s12918-014-0089-z>.
3. Sindbæk S.M. Networks and nodal points: The emergence of towns in early Viking Age Scandinavia. *Antiquity*, 2007, vol. 81, no. 311, pp. 119–132. <https://doi.org/10.1017/S0003598X00094886>.
4. Paradowski M.B., Cierpich-Kozielec A., Chen C.-C., Ochab J.K. How output outweighs input and interlocutors matter for study-abroad SLA: Computational social network analysis of learner interactions. *Mod. Lang. J.*, 2022, vol. 106, no. 4, pp. 694–725. <https://doi.org/10.1111/modl.12811>.
5. Sunkersing D., Martin F.C., Sullivan P., Bell D. Care and support networks of community-dwelling frail individuals in North West London: A comparison of patient and healthcare workers' perceptions. *BMC Geriatr.*, 2022, vol. 22, no. 1, art. 953. <https://doi.org/10.1186/s12877-022-03561-y>.
6. Paradowski M.B., Jelińska M. The predictors of L2 grit and their complex interactions in online foreign language learning: Motivation, self-directed learning, autonomy, curiosity, and language mindsets. *Comput. Assisted Lang. Learn.*, 2023, vol. 37, no. 8, pp. 2320–2358. <https://doi.org/10.1080/09588221.2023.2192762>.
7. Saberi M., Khosrowabadi R., Khatibi A., Masic B., Jafari G. Topological impact of negative links on the stability of resting-state brain network. *Sci. Rep.*, 2021, vol. 11, no. 1, art. 2176. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-81767-7>.
8. Pechnikov A.A. A pilot model of the scientific journal network in Russia: An intersection graph analysis. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 311–328. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328>. (In Russian)
9. Bredikhin S.V., Lyapunov V.M., Shcherbakova N.G. Structure of the citation network of scientific journals. *Probl. Inf.*, 2017, no. 2, pp. 38–52. (In Russian)
10. Gross P.L.K., Gross E.M. College libraries and chemical education. *Science*, 1927, vol. 66, no. 1713, pp. 385–389. <https://doi.org/10.1126/science.66.1713.385>.
11. de Solla Price D.J. Networks of scientific papers: The pattern of bibliographic references indicates the nature of the scientific research front. *Science*, 1965, vol. 149, no. 3683, pp. 510–515. <https://doi.org/10.1126/science.149.3683.510>.
12. Small H. Co-citation in the scientific literature: A new measure of the relationship between two documents. *J. Am. Soc. Inf. Sci.*, 1973, vol. 24, no. 4, pp. 265–269. <https://doi.org/10.1002/asi.4630240406>.
13. Markusova V.A. Introduction. On the 50th anniversary of the Science Citation Index: The history and development of scientometrics. In: *Rukovostvo po naukometrii: indikatory razvitiya nauki i tekhniki* [Handbook for Scientometrics: Indicators of Science and Technology Development]. Akoev M.A. et al. (Eds.). Yekaterinburg, Izd. Ural. Univ., 2014, pp. 14–48. (In Russian)
14. Luke D.A. *A User's Guide to Network Analysis in R*. Ser.: Use R! Cham, Springer, 2015. xii, 238 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-23883-8>.

15. Olgina I.G. Methods of mathematical modeling the citation networks to form research holdings. *Vestn. Kazan. Tekhnol. Univ.*, 2019, vol. 22, no. 6, pp. 123–127. (In Russian)
16. Shcherbakova N.G. Measures of centrality in networks. *Probl. Inf.*, 2015, no. 2, pp. 18–30. (In Russian)
17. Bredikhin S.V., Lyapunov N.G., Shcherbakova N.G., Yurgenson A.N. Parameters of “centrality” for nodes in the citation network of scientific articles. *Probl. Inf.*, 2016, no. 1, pp. 39–57. (In Russian)
18. Shcherbakova N.G. Axiomatics of centrality in complex networks. *Probl. Inf.*, 2015, no. 3, pp. 3–14. (In Russian)
19. Olgina I.G., Pronin I.V., Abdrakhmanov A.N. Building graph models of the citation network of scientific publications. In: *Sist. upr., inf. tehnol. mat. model.: Mater. Vtoroi Vseros. nauch.-prakt. konf. mezhdunar. uchastiem* [Control Systems, Information Technology, and Mathematical Modeling: Proc. 2nd All-Russ. Sci.-Pract. Conf. with Int. Participation]. Vol. 1. Omsk, Omsk. Gos. Tekh. Univ., 2020, pp. 118–125. (In Russian)
20. Olgina I.G., Abdrakhmanov A.N. State Registration Certificate for Software No. 2020615709. LinkAnalyzer 1.0 software package for collecting and analyzing information about citations of scientific publications. Omsk State Technical University, 2020. (In Russian)
21. Olgina I.G., Osipov D.S. State Registration Certificate for Software No. 2021661693. Generator information source lists in citation networks. Omsk State Technical University, 2021. (In Russian)
22. OpenAlex. URL: <https://openalex.org/>.
23. Electronic resource: OpenAlex. URL: <https://library.fa.ru/resource.asp?id=931>. (In Russian)
24. Institute of Information Technology and Intelligent Systems. URL: <https://kpfu.ru/itis>. (In Russian)

Приложение

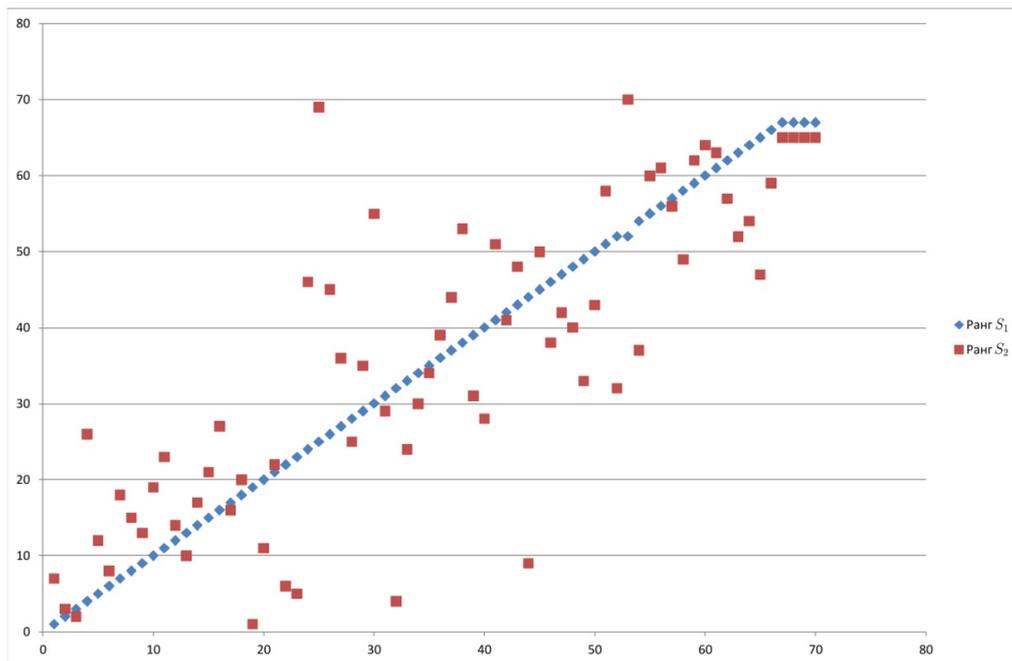


Рис. 1. Корреляционное поле зависимости между рангами публикаций сетей S_1 и S_2 по профилю h_1

Fig. 1. Correlation field of the relationship between the publication ranks of the networks S_1 and S_2 according to the profile h_1

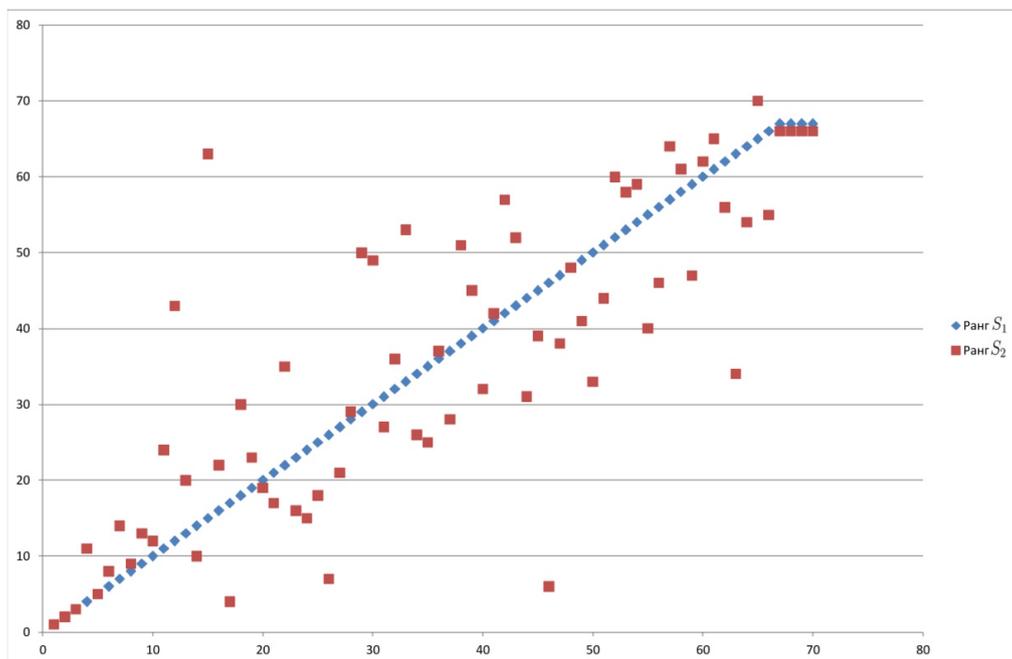


Рис. 2. Корреляционное поле зависимости между рангами публикаций сетей S_1 и S_2 по профилю h_2

Fig. 2. Correlation field of the relationship between the publication ranks of the networks S_1 and S_2 according to the profile h_2

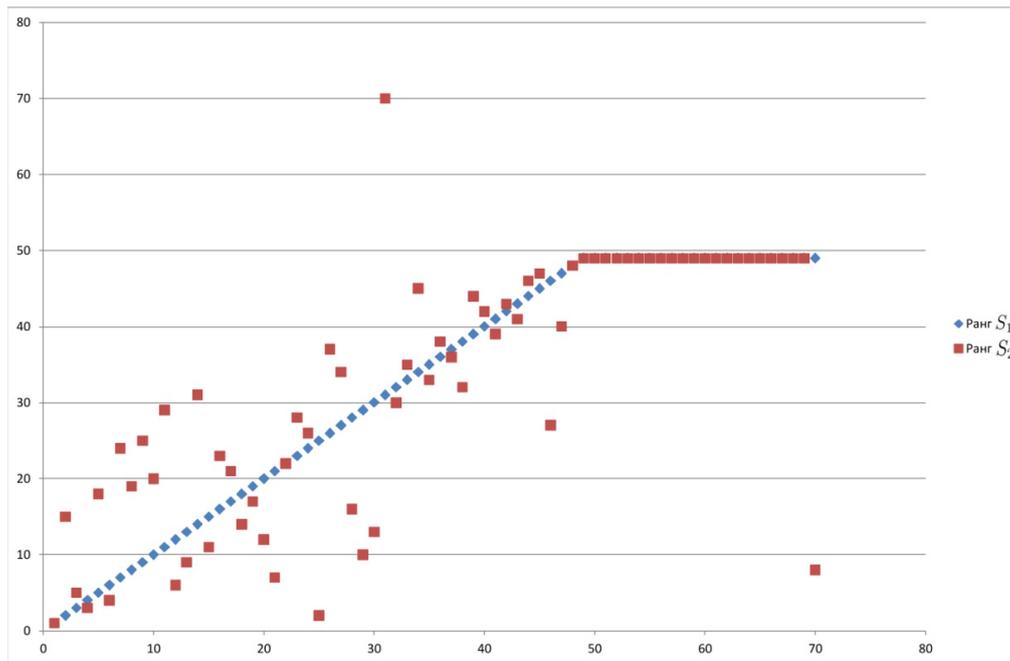


Рис. 3. Корреляционное поле зависимости между рангами публикаций сетей S_1 и S_2 по профилю h_3

Fig. 3. Correlation field of the relationship between the publication ranks of the networks S_1 and S_2 according to the profile h_3

Табл. 12. Сравнение рангов узлов сетей S_1 и S_2

Table 12. Comparison of the node ranks in the networks S_1 and S_2

Профиль h_1			Профиль h_2			Профиль h_3		
Узел	Ранг в S_1	Ранг в S_2	Узел	Ранг в S_1	Ранг в S_2	Узел	Ранг в S_1	Ранг в S_2
a_3	1	7	a_8	1	1	a_6	1	1
a_{12}	2	3	a_{14}	2	2	a_{13}	2	15
a_{14}	3	2	a_{12}	3	3	a_3	3	5
a_5	4	26	a_6	4	11	a_{27}	4	3
a_9	5	12	a_{19}	5	5	a_{24}	5	18
a_{19}	6	8	a_3	6	8	a_{69}	6	4
a_2	7	18	a_{11}	7	14	a_{19}	7	24
a_{11}	8	15	a_{13}	8	9	a_{16}	8	19
a_{18}	9	13	a_9	9	13	a_{17}	9	25
a_7	10	19	a_{18}	10	12	a_{22}	10	20
a_{23}	11	23	a_{23}	11	24	a_{23}	11	29
a_1	12	14	a_5	12	43	a_5	12	6
a_4	13	10	a_2	13	20	a_8	13	9
a_{17}	14	17	a_4	14	10	a_{20}	14	31
a_{69}	15	21	a_{35}	15	63	a_9	15	11
a_{38}	16	27	a_7	16	22	a_{18}	16	23
a_{21}	17	16	a_{10}	17	4	a_{41}	17	21
a_{16}	18	20	a_{69}	18	30	a_2	18	14
a_8	19	1	a_{38}	19	23	a_{11}	19	17
a_{13}	20	11	a_{21}	20	19	a_7	20	12

a_{24}	21	22	a_{36}	21	17	a_1	21	7
a_{27}	22	6	a_{43}	22	35	a_{38}	22	22
a_6	23	5	a_{17}	23	16	a_{43}	23	28
a_{20}	24	46	a_{16}	24	15	a_{21}	24	26
a_{35}	25	69	a_1	25	18	a_{10}	25	2
a_{41}	26	45	a_{27}	26	7	a_{42}	26	37
a_{32}	27	36	a_{24}	27	21	a_{39}	27	34
a_{22}	28	25	a_{30}	28	29	a_{12}	28	16
a_{43}	29	35	a_{41}	29	50	a_4	29	10
a_{42}	30	55	a_{20}	30	49	a_{14}	30	13
a_{30}	31	29	a_{25}	31	27	a_{35}	31	70
a_{10}	32	4	a_{32}	32	36	a_{25}	32	30
a_{36}	33	24	a_{28}	33	53	a_{26}	33	35
a_{25}	34	30	a_{31}	34	26	a_{32}	34	45
a_{31}	35	34	a_{34}	35	25	a_{15}	35	33
a_{51}	36	39	a_{37}	36	37	a_{28}	36	38
a_{37}	37	44	a_{22}	37	28	a_{44}	37	36
a_{39}	38	53	a_{39}	38	51	a_{33}	38	32
a_{26}	39	31	a_{29}	39	45	a_{36}	39	44
a_{34}	40	28	a_{44}	40	32	a_{30}	40	42
a_{52}	41	51	a_{51}	41	42	a_{31}	41	39
a_{53}	42	41	a_{42}	42	57	a_{46}	42	43
a_{49}	43	48	a_{52}	43	52	a_{34}	43	41
a_{70}	44	9	a_{26}	44	31	a_{29}	44	46
a_{29}	45	50	a_{63}	45	39	a_{47}	45	47
a_{65}	46	38	a_{70}	46	6	a_{37}	46	27
a_{44}	47	42	a_{65}	47	38	a_{45}	47	40
a_{63}	48	40	a_{49}	48	48	a_{40}	48	48
a_{68}	49	33	a_{53}	49	41	a_{48}	49	49
a_{64}	50	43	a_{66}	50	33	a_{49}	49	49
a_{54}	51	58	a_{64}	51	44	a_{50}	49	49
a_{33}	52	32	a_{45}	52	60	a_{51}	49	49
a_{40}	52	70	a_{54}	53	58	a_{52}	49	49
a_{66}	54	37	a_{47}	54	59	a_{53}	49	49
a_{45}	55	60	a_{33}	55	40	a_{54}	49	49
a_{47}	56	61	a_{50}	56	46	a_{55}	49	49
a_{58}	57	56	a_{62}	57	64	a_{56}	49	49
a_{50}	58	49	a_{61}	58	61	a_{57}	49	49
a_{62}	59	62	a_{57}	59	47	a_{58}	49	49
a_{61}	60	64	a_{15}	60	62	a_{59}	49	49
a_{59}	61	63	a_{59}	61	65	a_{60}	49	49
a_{46}	62	57	a_{46}	62	56	a_{61}	49	49
a_{28}	63	52	a_{68}	63	34	a_{62}	49	49
a_{55}	64	54	a_{58}	64	54	a_{63}	49	49
a_{57}	65	47	a_{40}	65	70	a_{64}	49	49
a_{15}	66	59	a_{55}	66	55	a_{65}	49	49
a_{48}	67	65	a_{48}	67	66	a_{66}	49	49
a_{56}	67	65	a_{56}	67	66	a_{67}	49	49
a_{60}	67	65	a_{60}	67	66	a_{68}	49	49
a_{67}	67	65	a_{67}	67	66	a_{70}	49	8

Ниже приведена табл. 13, устанавливающая связь указателя i вершины графа с библиографическими данными публикаций a_i для сети цитирования научных публикаций сотрудников Института ИТИС.

Табл. 13. Библиографические данные публикаций a_i

Table 13. Bibliographic data of the publications a_i

a_i	Библиографические данные a_i
a_1	R. Safin, E. Garipova, R. Lavrenov, H. Li, M. Svinin and E. Magid. Hardware and software video encoding comparison // 59th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE), Chiang Mai, Thailand, 2020, pp. 924-929. https://doi.org/10.23919/SICE48898.2020.9240439 .
a_2	L. Gavrilova, A. Kotik, T. Tsoy, E. A. Martínez-García, M. Svinin and E. Magid. Facilitating a preparatory stage of real-world experiments in a humanoid robot assisted English language teaching using Gazebo simulator // 13th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Liverpool, United Kingdom, 2020, pp. 222-227. https://doi.org/10.1109/DeSE51703.2020.9450749 .
a_3	Khazetdinov Artur, Aleksandrov Andrey, Zakiev Aufar, Magid Evgeni, Hsia Kuo-Hsien. RFID-Based Warehouse Management System Prototyping Using A Heterogeneous Team Of Robots // CLAWAR 2020: 23rd International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines, Moscow, Russian Federation, 24-26 August 2020. https://doi.org/10.13180/clawar.2020.24-26.08.32 .
a_4	L. Gavrilova, V. Petrov, A. Kotik, A. Sagitov, L. Khalitova and T. Tsoy. Pilot Study of Teaching English Language for Preschool Children with a Small-Size Humanoid Robot Assistant // 12th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Kazan, Russia, 2019, pp. 253-260. https://doi.org/10.1109/DeSE.2019.00055 .
a_5	N. Simakov, R. Lavrenov, A. Zakiev, R. Safin, and E. A. Martínez-García. Modeling USAR Maps for the Collection of Information on the State of the Environment // 2019 12th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Kazan, Russia, 2019, pp. 918-923. https://doi.org/10.1109/DeSE.2019.00170 .
a_6	Shumkova V., Sitdikova V., Rechapov I. et al. Effects of urethane and isoflurane on the sensory evoked response and local blood flow in the early postnatal rat somatosensory cortex. Sci Rep, 2021, vol. 11, No. 9567 (2021). https://doi.org/10.1038/s41598-021-88461-8 .
a_7	T. Tsoy, A. Zakiev, K. Shabalina, R. Safin, E. Magid, and S. K. Saha. Validation of Fiducial Marker Systems Performance with Rescue Robot Servosila Engineer Onboard Camera in Laboratory Environment // 12th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Kazan, Russia, 2019, pp. 495-499. https://doi.org/10.1109/DeSE.2019.00096 .
a_8	A. Khasianov, I. Alimova, A. Marchenko, G. Nurhambetova, E. Tutubalina, and D. Zuev. Lawyer's Intellectual Tool for Analysis of Legal Documents in Russian // International Conference on Artificial Intelligence Applications and Innovations (IC-AIAI), Nicosia, Cyprus, 2018, pp. 42-46. https://doi.org/10.1109/IC-AIAI.2018.8674441 .
a_9	R. Safin, R. Lavrenov, K.-H. Hsia, E. Maslak, N. Schiefermeier-Mach, and E. Magid. Modelling a TurtleBot3 Based Delivery System for a Smart Hospital in Gazebo // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Kazan, Russia, 2021, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438875 .
a_{10}	Suleimanova Alina, Talanov Max, van den Maagdenberg Arn M. J. M., and Giniatullin Rashid. Deciphering in silico the Role of Mutated NaV1.1 Sodium Channels in Enhancing Trigeminal Nociception in Familial Hemiplegic Migraine Type 3 // Frontiers in Cellular Neuroscience, 2021, Vol. 15. https://doi.org/10.3389/fncel.2021.644047
a_{11}	A. Dobrokvashina, R. Lavrenov, T. Tsoy, E.A. Martinez-Garcia, and Y. Bai. Navigation stack for the crawler robot Servosila Engineer // IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), Chengdu, China, 2021, pp. 1907-1912. https://doi.org/10.1109/ICIEA51954.2021.9516393 .
a_{12}	A. Khazetdinov, A. Zakiev, T. Tsoy, R. Lavrenov, and K.-H. Hsia. Standard-complaint Gazebo warehouse modelling and validation // 13th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Liverpool, United Kingdom, 2020, pp. 218-221. https://doi.org/10.1109/DeSE51703.2020.9450734 .
a_{13}	Martinez-Garcia Edgar, Lavrenov Roman, and Magid Evgeni. Robot Fish Caudal Propulsive Mechanisms: A Mini-Review // AI, Computer Science and Robotics Technology, 2022, pp. 1-17. https://doi.org/10.5772/acrt.09 .
a_{14}	Safin R. et al. Prioritizing Tasks Within a Robotic Transportation System for a Smart Hospital Environment. Interactive Collaborative Robotics. ICR 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12998. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87725-5_16
a_{15}	M. Shigapov and V. Kugurakova. Design and development of a hardware and software system for simulation of feedback tactility // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Kazan, Russia, 2021, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438902 .
a_{16}	B. Abbyasov et al. Ultrasound sensor modeling in Gazebo simulator for diagnostics of abdomen pathologies // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Kazan, Russia, 2021, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438910 .
a_{17}	Nikiforov N., Tsoy T., Safin R., Bai Y., Svinin M., and Magid E. Pilot Studies on Avrora Unior Car-Like Robot Control Using Gestures. Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies, 2022, vol. 232. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_24 .
a_{18}	Apurin A. et al. LIRS-ArtBul: Design, Modeling and Construction of an Omnidirectional Chassis for a Modular Multipurpose Robotic Platform. Interactive Collaborative Robotics. ICR 2022. Lecture Notes in Computer Science, 2022, vol. 13719. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-23609-9_7 .

a19	Myrzin V., Tsoy T., Bai Y., Svinin M., and Magid E. Visual Data Processing Framework for a Skin-Based Human Detection. <i>Interactive Collaborative Robotics. ICR 2021. Lecture Notes in Computer Science</i> , 2021, vol. 12998. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-87725-5_12 .
a20	D. Kiryanov, R. Lavrenov, R. Safin, M. Svinin, and E. Magid. Mobile application for controlling multiple robots // 2021 IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA), Chengdu, China, 2021, pp. 1913-1917. https://doi.org/10.1109/ICIEA51954.2021.9516091 .
a21	Kononov K., Lavrenov R., Gavrilo L., and Tsoy T. External RGB-D Camera Based Mobile Robot Localization in Gazebo Environment with Real-Time Filtering and Smoothing Techniques. <i>Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies</i> , 2022, vol. 232. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_20
a22	Mustafin M., Chebotareva E., Li H., and Magid E. Experimental Validation of an Interface for a Human-Robot Interaction Within a Collaborative Task. <i>Interactive Collaborative Robotics. ICR 2023. Lecture Notes in Computer Science</i> , vol. 14214. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43111-1_3 .
a23	E. Chebotareva, E. Magid, A. Carballo, and K.-H. Hsia. Basic User Interaction Features for Human-Following Cargo Robot TIAGo Base // 2020 13th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Liverpool, United Kingdom, 2020, pp. 206-211. https://doi.org/10.1109/DeSE51703.2020.9450794 .
a24	Apurin A., Abbyasov B., Martínez-García E.A., and Magid E. Comparison of ROS Local Planners for a Holonomic Robot in Gazebo Simulator. <i>Interactive Collaborative Robotics. ICR 2023. Lecture Notes in Computer Science</i> , 2023, vol. 14214. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-43111-1_11 .
a25	Torres-Martínez A.A., Martínez-García E.A., Lavrenov R., and Magid E. Four Wheeled Humanoid Second-Order Cascade Control of Holonomic Trajectories. <i>Artificial Intelligence for Robotics and Autonomous Systems Applications. Studies in Computational Intelligence</i> , 2023, vol. 1093. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-28715-2_15 .
a26	Tlitova Alina, Toshev Alexander, Talanov Max, and Kurnosov Vitaliy. Meta-Analysis of Cross-Language Plagiarism and Self-Plagiarism Detection Methods for Russian-English Language Pair // <i>Frontiers in Computer Science</i> , 2020, vol. 2. https://doi.org/10.3389/fcomp.2020.523053 .
a27	Li H, Nie X, Duan D, et al. An admittance-controlled amplified force tracking scheme for collaborative lumbar puncture surgical robot system. <i>Int. J. Med. Robot.</i> 2022, vol. 18, iss. 5, no. e2428. https://doi.org/10.1002/rcs.2428
a28	S. Shalagin and A. Nurutdinova. Stochastic identification of the "Object-attribute" table based on the modified Rabiner's method // <i>Journal of Physics: Conference Series</i> , 2021, vol. 1925 012014. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1925/1/012014 .
a29	R. R. Kirayeva, M.R. Khafizov, T.T. Turdiev, and V.V. Kugurakova. Automated Testing of Functional Requirements for Virtual Reality Applications // <i>IEEE XVI International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE)</i> , Novosibirsk, Russian Federation, 2023, pp. 1760-1764. https://doi.org/10.1109/APEIE59731.2023.10347611 .
a30	Alexeev Alexander, Tsoy Tatyana, Martinez-Garcia Edgar, and Magid Evgeni. An Overview of Kinect Based Gesture Recognition Methods // <i>Proceedings of International Conference on Artificial Life and Robotics</i> , 2024, vol. 29, pp. 295-299. https://doi.org/10.5954/icarob.2024.os11-1 .
a31	R. Sultanov, R. Lavrenov, S. Sulaiman, Y. Bai, M. Svinin, and E. Magid. Object Detection Methods for a Robot Soccer // 7th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Astrakhan, Russian Federation, 2023, pp. 1-5. https://doi.org/10.1109/ICCT58878.2023.10347064 .
a32	D. Imaeev, A. Zakiev, E. Magid, E. Martinez-Garcia, and H. Li. Modeling autonomous perpendicular parking procedure for car-like robot Avroa Unior in Gazebo simulator // 2022 International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Astrakhan, Russian Federation, 2022, pp. 1-4. https://doi.org/10.1109/ICCT56057.2022.9976618 .
a33	E. Maslak, B. Khudanov, D. Krivtsova, and T. Tsoy. Application of Information Technologies and Quantitative Light-Induced Fluorescence for the Assessment of Early Caries Treatment Outcomes // 12th International Conference on Developments in eSystems Engineering (DeSE), Kazan, Russia, 2019, pp. 912-917. https://doi.org/10.1109/DeSE.2019.00169 .
a34	S. Sulaiman, A. Sudheer, and E. Magid. Torque control of a wheeled humanoid robot with dual redundant arms // <i>Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering</i> . 2023, vol. 238, no. 2, pp. 252-271. https://doi.org/10.1177/09596518231188497 .
a35	L. Safarova, B. Abbyasov, T. Tsoy, H. Li, and E. Magid. Comparison of Monocular ROS-Based Visual SLAM Methods // <i>Interactive Collaborative Robotics. ICR 2022. Lecture Notes in Computer Science</i> , 2022, vol 13719. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-23609-9_8 .
a36	K. Potapov, A. Gordeev, L. Biktasheva, M. Rudakova, and A. Alexandrov. Effects of Natural Rhamnolipid Mixture on Dioleoylphosphatidylcholine Model Membrane Depending on Method of Preparation and Sterol Content // <i>Membranes</i> , 2023, vol. 13, no. 1: 112. https://doi.org/10.3390/membranes13010112 .
a37	Р.А. Шараева, В.В. Кугуракова, Н.Э. Селезнева. Методика упрощения таск-трекинга в проектах игровой индустрии // <i>Программные продукты и системы</i> , 2022, Т. 26, С. 374-383. https://doi.org/10.15827/0236-235X.139.374-383 .
a38	T. Tsoy, R. Safin, E. Magid, and S. Kumar Saha. Estimation of 4-DoF manipulator optimal configuration for autonomous camera calibration of a mobile robot using on-board templates // <i>International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)</i> , Kazan, Russia, 2021, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438925 .
a39	Elizarov Aleksandr, Gafurova Polina, and Lipachev Evgeny. Wikidata in Metadata Formation Methods for Documents of Digital Mathematical Library // <i>Conference: 23rd Scientific Conference "Scientific Services and Internet – 2021"</i> , 2021, pp. 23-33. https://doi.org/10.20948/abrau-2021-3-ceur .

a40	Г.Ф. Сахибгареева, В.В. Кугуракова. Прототипирование вариативности сюжета компьютерных игр // Научный сервис в сети Интернет: труды XXIII Всероссийской научной конференции. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021, С. 347-360. https://doi.org/10.20948/abrau-2021-11 .
a41	S.S.S. Katta et al. Pose Estimation of 5-DOF Manipulator using On-Body Markers // 21st International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS), Jeju, Korea, Republic of, 2021, pp. 897-902. https://doi.org/10.23919/ICCAS52745.2021.9648843 .
a42	Aidar Zagirov, Artem Apurin, and Elvira Chebotareva. Modeling of Human Actions in a Collaborative Robotic Space Using AR601M Humanoid Robot: Pilot Experiments in the Gazebo Simulator // Proceedings of the 2023 International Conference on Artificial Life and Robotics, 2023, pp. 162-165. https://doi.org/10.5954/icarob.2023.os6-5 .
a43	A.V. Kirillovich, O.A. Nevzorova, E.K. Lipachev. OntoMath 2.0 Ontology: Updates of Formal Model. Lobachevskii J. Math., 2022, vol. 43, pp. 3504–3514. https://doi.org/10.1134/S1995080222150136 .
a44	Golitsyna Irina, Eminov Farid, and Eminov Bulat. Teaching/Learning Strategies in Context of Education 4.0 // Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal, 2021, vol. 6, pp. 472-479. https://doi.org/10.25046/aj060254 .
a45	M.M. Abramskiy, A.M. Tsimmerman, A.A. Almukhametova, et al. An Ontological Approach to Education Program Design in Digital Environments // Autom. Doc. Math. Linguist, 2019, vol. 53, pp. 64–70. https://doi.org/10.3103/S000510551902002X .
a46	Kugurakova Vlada, Vasilov Timur, Khafizov Murad, and Shubin Aleksey. RETRACTED: Approaches to automating VR applications porting using common techniques // BIO Web of Conferences. Aquaculture 2023, 2024, vol. 84, 02016. https://doi.org/10.1051/bioconf/20248402016 .
a47	Л.Р. Шакирова, М.В. Фалилеева, А.В. Кириллович, Е.К. Липачев, О.А. Невзорова, В.Н. Невзоров. Образовательная математическая онтология OntoMathEdu: структура и отношения // Научный сервис в сети Интернет: труды XXI Всероссийской научной конференции. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2019, С. 653-661. https://doi.org/doi:10.20948/abrau-2019-84 .
a48	E. Chebotareva, A. Mukhamedshin, N. Imamov, and E. Magid. Object Localization Based on a Single RGB Camera for a 4-DOF Robotic Arm // 2025 11th International Conference on Automation, Robotics, and Applications (ICARA), Zagreb, Croatia, 2025, pp. 252-256. https://doi.org/10.1109/ICARA64554.2025.10977595 .
a49	Hoang-Dinh Khoi, Oguz Ozgur, Huber Gerold, Gabler Volker, and Wollherr Dirk. An approach to integrate human motion prediction into local obstacle avoidance in close human-robot collaboration // International Workshop on Advanced Robotics and its Social Impact, 2015, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/ARSO.2015.7428221 .
a50	A. Shubin, E. Zykov, and C. Nadyrshina. Evaluation and Optimization of Vehicle Cabin Ergonomics Using Virtual Reality // International Russian Smart Industry Conference (SmartIndustryCon), Sochi, Russian Federation, 2024, pp. 889-894. https://doi.org/10.1109/SmartIndustryCon61328.2024.10516194 .
a51	Baris Celiker, Shifa Sulaiman, and Tatyana Tsoy. A Design of a Modular Mobile Robot for Rescue Operations // ICAROB2024, 2024, vol. 29, pp. 267-271. https://doi.org/10.5954/icarob.2024.os10-1 .
a52	Karina Sadyikova, Valeriya Zhukova, and Roman Lavrenov. Robot-Assisted Language Learning: Scientific Data Analysis // Proceedings of International Conference on Artificial Life and Robotics, 2024. https://doi.org/10.5954/icarob.2024.os11-5 .
a53	S. Sulaiman, A. Eryomin, T. Tsoy, and E. Magid. Methodology of Designing and Modeling Projects for Robotics and Mechatronics Course of Intelligent Robotics Master Program // IEEE 7th Eurasian Conference on Educational Innovation (ECEI), Bangkok, Thailand, 2024, pp. 410-413. https://doi.org/10.1109/ECEI60433.2024.10510833 .
a54	R. Abdulganeev, R. Lavrenov, A. Dobrokvashina, Y. Bai, and E. Magid. Autonomous Door Opening with a Rescue Robot // 2024 10th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA), Athens, Greece, 2024, pp. 7-11. https://doi.org/10.1109/ICARA60736.2024.10552969 .
a55	R. Gazizov and A. Shubin. Modification of Skeletal Character Animation Using Inverse Kinematics Controllers // International Russian Smart Industry Conference (SmartIndustryCon), Sochi, Russian Federation, 2024, pp. 553-557. https://doi.org/10.1109/SmartIndustryCon61328.2024.10515984 .
a56	R. Mishenin, A. Eryomin, T. Tsoy, and E. Magid. Implementation and Validation of the CautiousBug Algorithm in ROS Noetic // 8th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Vladikavkaz, Russian Federation, 2024, pp. 1-4. https://doi.org/10.1109/ICCT62929.2024.10874959 .
a57	Martinez-Garcia Edgar, Lavrenov Roman, and Magid Evgeni. Longitudinally Variant 4W4D Robot Slipage-Based Path Tracking Control // Autonomous Vehicles, 2022, Vol. 2. https://doi.org/10.1002/9781394152636.ch7 .
a58	D. Sahibgarееva. Skeletal Animation of Three-Dimensional Models Using Nanite Technology // International Russian Smart Industry Conference (SmartIndustryCon), Sochi, Russian Federation, 2024, pp. 543-547. https://doi.org/10.1109/SmartIndustryCon61328.2024.10515919 .
a59	T.A. Khudaybergenov, T.T. Turdiev, M.R. Khafizov, and V.V. Kugurakova. The Influence of Dynamic Game Difficulty Balancing on Player Experience in Puzzle Games // IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), Altai, Russian Federation, 2024, pp. 2600-2604. https://doi.org/10.1109/EDM61683.2024.10615096 .
a60	A. Dubelschikov, T. Gamberov, T. Tsoy, K.-H. Hsia, and E. Magid. LoRa technology application within the Internet of Flying Things concept for data collection from IoT devices // 8th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Vladikavkaz, Russian Federation, 2024, pp. 1-4. https://doi.org/10.1109/ICCT62929.2024.10874971 .
a61	A.N. Frolov, S. Lempp, K.M. Ng, and G. Wu. Computable linear orders and products // The Journal of Symbolic Logic, 2020, vol. 85, no. 2, pp.605-623. https://doi.org/10.1017/jsl.2020.17 .

a62	R.R. Farahov, R.A. Burnashev, A.I. Enikeeva, and M.V. Bolsunovskaya. Development of a Method and System for Recycling Polystyrene Production Waste // IEEE 25th International Conference of Young Professionals in Electron Devices and Materials (EDM), Altai, Russian Federation, 2024, pp. 1750-1754. https://doi.org/10.1109/EDM61683.2024.10614980 .
a63	M.A. Montoya Martínez, R. Torres-Córdoba, E. Magid, and E.A. Martínez-García. Electromyography-Based Biomechanical Cybernetic Control of a Robotic Fish Avatar // Machines, 2024, vol. 12, no. 124. https://doi.org/10.20944/preprints202401.0847.v1 .
a64	S. Sulaiman, S.A.P.S. Mohan, and E. Magid. Manipulability analysis of a tree type humanoid upper-body robot with dual redundant arms // Scientia Iranica, 2025, vol. 32, no. 2, pp. 6054, https://doi.org/10.24200/sci.2024.59088.6054 .
a65	M.A. Montoya Martínez, R. Torres-Córdoba, E. Magid, and E.A. Martínez-García. Electromyography-Based Biomechanical Cybernetic Control of a Robotic Fish Avatar // Machines, 2024, vol. 12, no. 124. https://doi.org/10.3390/machines12020124 .
a66	Yuliya Mihaylova, Anna Pozdeeva, Alexey Leukhin, Alexander Toshev, Max Talanov, Jordi Vallverdú, and Alina Suleimanova. Neuro-Interfaces Review // Journal of artificial intelligence and consciousness, 2022. https://doi.org/10.1142/s270507852230002x .
a67	M. Roslavtsev, A. Eryomin, R. Safin, and E. Magid. Implementation of Rev1 and Rev2 Bug Family Algorithms in ROS Noetic // 8th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Vladikavkaz, Russian Federation, 2024, pp. 1-5. https://doi.org/10.1109/ICCT62929.2024.10874990 .
a68	E. Chebotareva, M. Mustafin, R. Safin, et al. Camera-based safety system for collaborative assembly // J. Intell. Manuf., 2024. https://doi.org/10.1007/s10845-024-02533-w .
a69	A. Khazetdinov, A. Zakiev, T. Tsoy, M. Svinin, and E. Magid. Embedded ARuco: a novel approach for high precision UAV landing // 2021 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Kazan, Russia, 2021, pp. 1-6. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438855 .
a70	A. Ivanov, A. Zakiev, T. Tsoy, and K.-H. Hsia. Online Monitoring and Visualization with ROS and ReactJS // International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Kazan, Russia, 2021, pp. 1-4. https://doi.org/10.1109/SIBCON50419.2021.9438890 .

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Информация об авторах

Александр Михайлович Елизаров, доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет; Университет Иннополис

E-mail: amelizarov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2546-6897>

Инна Геннадьевна Ольгина, кандидат технических наук, доцент, Омский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

E-mail: inna_olgina@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9932-4552>

Author Information

Alexander M. Elizarov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Honored Scientist of the Russian Federation, Full Professor, Kazan Federal University; Innopolis University

E-mail: amelizarov@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2546-6897>

Inna G. Olgina, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Omsk Branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration

E-mail: inna_olgina@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9932-4552>

Поступила в редакцию 19.08.2025

Принята к публикации 18.09.2025

Received August 19, 2025

Accepted September 18, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 620.17: 621.785.784: 691.175

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.491-506>**Многоуровневое компьютерное моделирование
механических свойств полимерных композиционных
материалов****Н.В. Еремин***Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева,
г. Красноярск, Россия**kaizoku813@gmail.com***Аннотация**

В работе представлены результаты многоуровневого моделирования полимерных композиционных материалов (ПКМ). Показано, что их механические характеристики формируются за счет совокупного вклада микроструктурных, мезоструктурных и макроскопических процессов деформирования. Предложен многомасштабный подход к построению цифровых моделей с учетом структурно-механических особенностей материала. В рамках данного подхода разработаны: микромодель углеродной нити, мезомодель ПКМ на основе триаксиальной ткани и макро-модель рефлектора, что обеспечило прогнозирование напряженно-деформированного состояния на различных масштабных уровнях. Проведена оценка напряженно-деформированного состояния материала и проанализированы процессы его разрушения. Построены диаграммы деформирования и определены эффективные механические свойства ПКМ. Полученные модели обеспечивают возможность проведения виртуальных испытаний без привлечения ресурсоемких экспериментов и могут быть использованы для разработки, адаптации и оптимизации ПКМ под конкретные инженерные задачи.

Ключевые слова: композиционный материал, цифровая модель, механическое свойство, многоуровневое моделирование, виртуальные испытания

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по теме FEFE-2024-0027.

Для цитирования: *Еремин Н.В.* Многоуровневое компьютерное моделирование механических свойств полимерных композиционных материалов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 491–506. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.491-506>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.491-506>

Multiscale computational modeling of mechanical properties of polymer composite materials

N.V. Eremin

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

kaizoku813@gmail.com

Abstract

This article reports the results of a multiscale modeling of polymer composite materials (PCMs). It was demonstrated that their mechanical characteristics are determined by the combined contribution of micro-, meso-, and macroscopic strain processes. A multiscale approach to building digital models that account for the structural and mechanical characteristics of the material was introduced and subsequently applied in order to develop a micro-model of a carbon yarn, a meso-model of a PCM based on triaxial woven fabric, and a macro-model of a reflector, enabling prediction of the stress-strain state across different scales. The stress-strain state of the material was evaluated, and the processes of its fracture were analyzed. The stress-strain diagrams were constructed, and the effective mechanical properties of the PCM were identified. The models obtained make it possible to perform virtual tests without resource-intensive experiments and can be employed in the design, adaptation, and optimization of PCMs for solving specific engineering tasks.

Keywords: composite material, digital model, mechanical property, multiscale modeling, virtual testing

Acknowledgments. This study was carried out as part of the state assignment from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project FEFE-2024-0027).

For citation: Eremin N.V. Multiscale computational modeling of mechanical properties of polymer composite materials. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 491–506. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.491-506>. (In Russian)

Введение

Полимерные композиционные материалы (ПКМ) в последние десятилетия заняли ключевое место в авиационной, космической, транспортной и других высокотехнологичных отраслях. Их востребованность обусловлена высокой удельной прочностью и жесткостью, а также возможностью целенаправленного варьирования эксплуатационных характеристик в зависимости от требований инженерных задач [1]. В аэрокосмической технике ПКМ

применяются при создании гибких трансформируемых систем – отражающих поверхностей рефлекторов, разворачиваемых композитных стрел, мачт, а также в конструкциях беспилотных летательных аппаратов. Для подобных изделий характерны повышенные требования к прочности, жесткости и сохранению эксплуатационных свойств в суровых условиях эксплуатации.

Сложная многоуровневая структура ПКМ (рис. 1) формирует целый спектр проблем, связанных с их прочностью, долговечностью и прогнозированием эксплуатационных характеристик. В ряде исследований [2–4] отмечается, что такие материалы необходимо рассматривать как многомасштабные физические системы, поведение которых определяется совокупностью процессов на микро-, мезо- и макроуровнях деформирования. Традиционные подходы, как правило, ограничиваются моделированием на одном масштабном уровне деформирования без учета взаимосвязи с последующими, что не позволяет получить целостное представление о механическом поведении материала. Проведение же комплексных натурных испытаний требует значительных финансовых и временных затрат. В связи с этим использование цифровых двойников (ЦД) и цифровых моделей (ЦМ) становится приоритетным направлением, так как они позволяют интегрировать данные и модели разных масштабных уровней, обеспечивая сокращение затрат на испытания и ускорение разработки конкурентоспособных изделий.

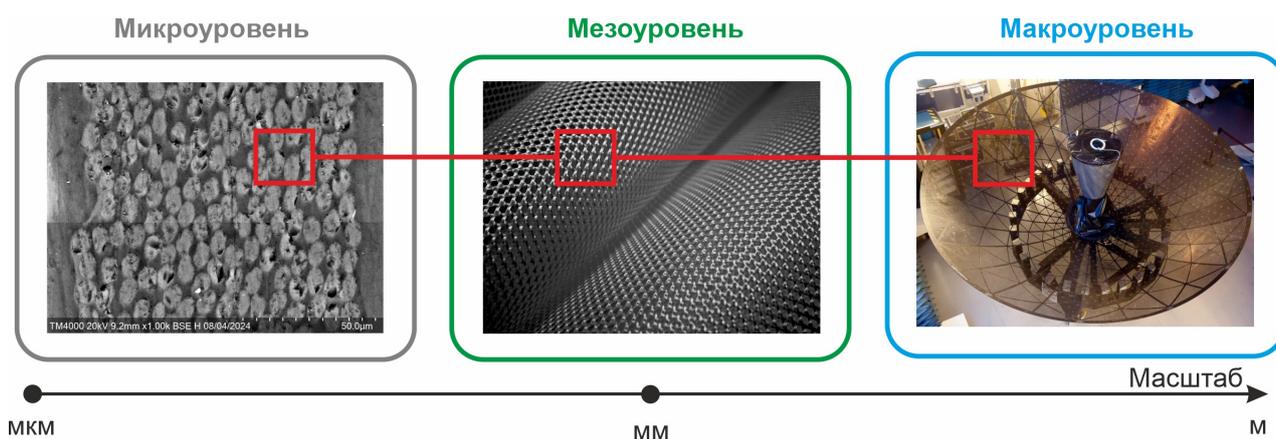


Рис. 1. Многоуровневая структура ПКМ

Fig. 1. Multiscale structure of PCMs

Современные тенденции развития материаловедения и проектирования все в большей степени опираются на цифровизацию [5]. ЦД объединяет экспериментальные данные, численные модели и алгоритмы анализа, позволяя прогнозировать механическое поведение материала под воздействием нагрузок и оптимизировать его физико-механические свойства. Принципы построения ЦД материалов рассмотрены в работе [2], где отмечается важность описания эволюции структуры, процессов и свойств ПКМ на этапах производства и эксплуатации.

Авторами работы [6, 7] предложена многомасштабная модель электромеханического поведения ПКМ на основе углеродных нанотрубок в полимерной матрице с учетом модели непрерывного прогрессирующего повреждения (англ. CDM) и межфазного отслоения. На атомном уровне методом молекулярной динамики определены механические свойства

полимеров и характеристики интерфейса, которые затем были масштабированы через репрезентативный элементарный объем (РЭО, англ. RVE). В исследовании [8] реализован метод FE² для анализа ПКМ с порами, где микро- и макромасштабы связаны через РЭО. Существенный вклад в развитие теории внес Димитриенко и соавт. [9, 10], развивая концепцию асимптотической гомогенизации для композитов с многоуровневой структурой. Показано, что данный подход позволяет описывать эволюцию от микродефектов в матрице до мезо- и макроразрушения, а также корректно рассчитывать эффективные характеристики ПКМ. Отдельное направление связано с моделированием процессов изготовления [3, 11, 12]. Так, в [11] представлен ЦД для автоматизированной выкладки слоев вязкоупругого препрега, что позволило проследить формирование структуры материала и рассчитать его эффективные свойства уже на стадии производства.

В работе [13] предложена многомасштабная модель термопластичных тканых ПКМ. На микроуровне детально смоделирована матрица, волокна и интерфейс, что позволило построить различные типы РЭО и предсказать поведение нити при растяжении, сжатии и сдвиге. Полученные данные были интегрированы на мезоуровень, где учтено нелинейное поведение материала. Хофер [14] исследовал вязкоупругое поведение плетеных ПКМ с использованием дробной модели Зенера и расширенной модели Ломница; проведенная валидация показала высокую сходимость с экспериментальными данными и позволила выявить влияние угла плетения и геометрии нити на долговечность конструкции. В исследовании [15] реализован метод прогрессирующего повреждения для композитных баков высокого давления с применением критерия Пака. Сравнение с данными акустической эмиссии показало расхождение не более 5,4 %, что согласуется с результатами работ [16].

Обзор существующих исследований указывает на то, что ключевым направлением современного материаловедения является разработка многоуровневых ЦМ и ЦД, учитывающих иерархическую структуру ПКМ и множество входных параметров материала. В связи с этим цель настоящей работы – развитие многоуровневого подхода и построение ЦМ, обеспечивающих комплексное описание НДС и прогнозирование механических свойств ПКМ.

1. Объект исследования

Объектом исследования являлся ПКМ на основе триаксиальной ткани (ТТ) и высокотемпературной эпоксидной смолы. Типовая схема плетения материала представлена на рис. 2. Для обеспечения высоких показателей прочности и жесткости используется углеродная нить: $E_1 = 260$ ГПа; $E_2 = 23$ ГПа; $\nu_{12} = 0.2$; $\nu_{23} = 0.4$; $G_{12} = 9$; $G_{23} = 9$; $X_t = 4.5$ ГПа; $X_c = 2.25$ ГПа. В качестве связующего используется высокотемпературная эпоксидная смола: $E = 3.4$ ГПа; $\nu = 0.35$; $G = 1.4$; $X_t = 0.086$ ГПа; $X_c = 0.2$.

В процессе плетения структура ткани формируется в виде регулярной гексагональной ячейки. Продольные нити (основа) располагаются под заданными углами переплетения, а поперечные нити (уток) ориентированы перпендикулярно к основе. Геометрические характеристики исследуемой элементарной ячейки ТТ: высота ячейки $H_{cell} = 4.87$ мм; ширина ячейки $B_{cell} = 4.87$ мм; угол армирования $\varphi = 45^\circ$; ширина нити $b_{yarn} = 0.9$ мм; толщина нити $t_{yarn} = 0.07$ мм.

2. Цифровое многоуровневое моделирование

2.1. Структурная схема многоуровневого подхода. Механические свойства ПКМ формируются за счет совокупного вклада микроструктурных, мезоструктурных и макроскопических процессов, возникающих в процессе деформирования материала. В связи с этим разработан многомасштабный подход к построению цифровых моделей ПКМ с учетом структурно-механических особенностей материала (рис. 3).

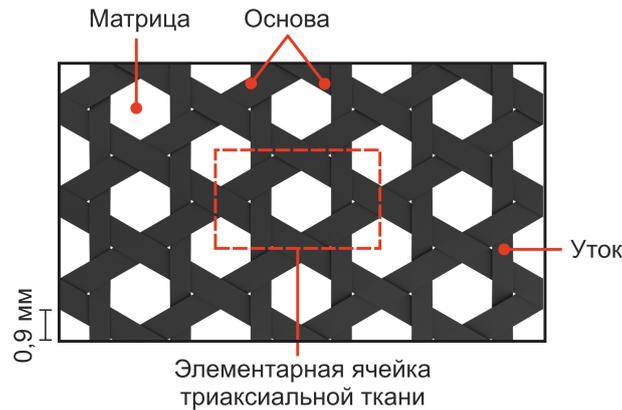


Рис. 2. ПКМ на основе ТТ
Fig. 2. PCM based on TWF

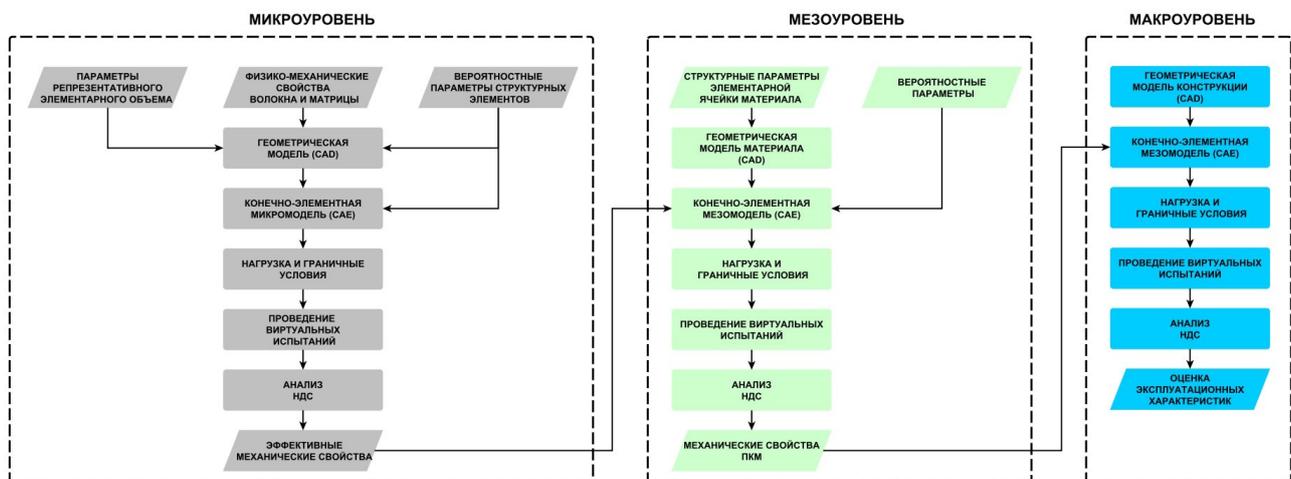


Рис. 3. Структурная схема многоуровневого подхода
Fig. 3. Structural diagram of the multiscale approach

Первоначально моделируется механическое поведение углеродной нити при растяжении и сжатии в различных направлениях. Далее проводится процесс гомогенизации [17], результаты которого переносятся на мезоуровень, где рассматривается ТТ в составе ПКМ. На этом уровне выполняются виртуальные испытания для оценки качественных и количественных характеристик материала при различных режимах нагружения. Заключительный этап связан с макро моделированием конструкции, изготовленной из ПКМ на основе ТТ. Макромасштабный анализ позволяет оценить механическое поведение рассматриваемой конструкции с учетом конструктивно-технологических особенностей ПКМ.

Многоуровневые ЦМ разработаны в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS. Механические свойства ПКМ можно представить трехмерными уравнениями состояния, матричная форма которых имеет следующий вид:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; C_{ij} – компоненты матрицы жесткости.

Для учета волнистости нити и соответствующей локальной жесткости матрица жесткости преобразуется следующим образом:

$$[\bar{C}] = [T]^{-1}[C][T]^T,$$

где $[T]$ – матрица преобразований.

Инженерные константы ПКМ определяются через компоненты матрицы податливости S_{ij} по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{S_{11}}, & E_{22} &= \frac{1}{S_{22}}, & E_{33} &= \frac{1}{S_{33}}, \\ G_{12} &= \frac{1}{S_{66}}, & G_{23} &= \frac{1}{S_{44}}, & G_{31} &= \frac{1}{S_{55}}, \\ \nu_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}}, & \nu_{23} &= -\frac{S_{23}}{S_{22}}, & \nu_{31} &= -\frac{S_{13}}{S_{33}}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что перечисленные масштабные уровни и соответствующие им ЦМ имеют возможность параметризации и обеспечивают непрерывную передачу данных о материале от одной модели (масштабного уровня деформирования) к другой.

2.2. Цифровая микромодель углеродной нити. Согласно блок-схеме на рис. 3 первоначально моделируется механическое поведение РЭО углеродной нити. Исходя из проведенного анализа микроструктуры [4], углеродная нить представляет собой совокупность большого числа волокон, распределенных в матрице случайным образом. Различие механических свойств волокон и матрицы, а также влияние объемного содержания волокон обуславливают необходимость в получении эффективных механических свойств отдельной нити.

Будем считать, что комплексная нить, пропитанная эпоксидной смолой, представляет собой трансверсально-изотропный материал с плоскостью изотропии, перпендикулярной направлению волокон (однонаправленный ПКМ). В этом случае нить может быть представлена как система из волокон и матрицы (рис. 4). В пропитанной углеродной нити объемная доля волокон равна 52% при среднем диаметре волокон 7 мкм.

Поскольку ПКМ характеризуется выраженной структурно-механической неоднородностью [18], то была разработана параметрическая модель со случайным распределением волокон и механических свойств каждой нити [4]. Для волокон, матрицы и интерфейсов

использовались линейные изотропные модели материала, а разрушение моделировалось одномоментным снижением жесткости конечного элемента (коэффициент снижения 10^{-6}) согласно критерию максимальных напряжений. Дискретизация конечно-элементной сетки выполнялась 8-узловыми конечными элементами (типа SOLID). Оптимальный размер конечных элементов был получен после анализа сходимости сетки, когда уровень напряжений при изменении сетки практически не изменялся.

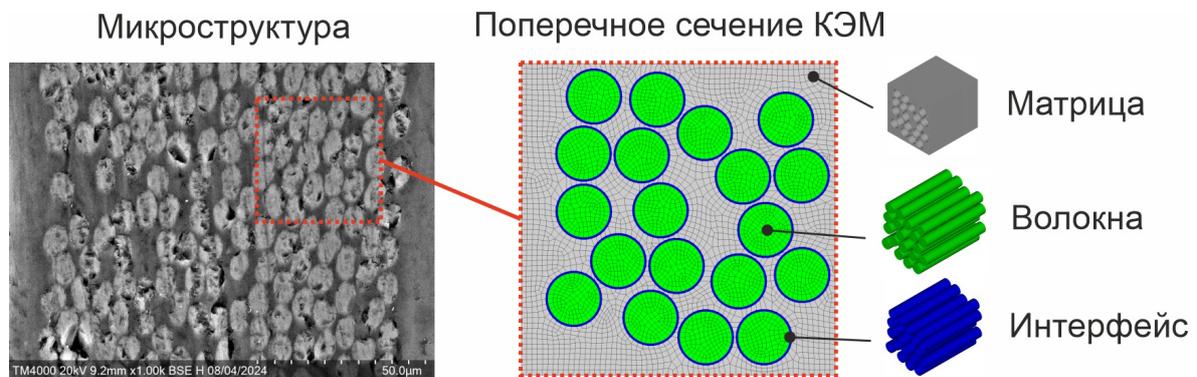


Рис. 4. Цифровая микромодель углеродной нити

Fig. 4. Digital micro-model of the carbon yarn

2.3. Цифровая мезомодель триаксиальной ткани. На мезоуровне исследовалось механическое поведение ПКМ на основе ТТ (рис. 5). В качестве базовой структуры формировалась гексагональная элементарная ячейка [19], в пределах которой задавалась схема армирования в плоскостях x и y . На основе этой геометрии строилась объемная модель ТТ. Геометрическая модель нити представлялась в виде отдельных простейших геометрических фигур, а ее волнистость описывалась кусочно-линейной функцией. Матрица имела форму параллелепипеда.

В расчетах применялась ортотропная модель материала. Разрушение моделировалось с использованием модели непрерывного прогрессирующего повреждения [20] согласно критерию прочности Хашина [21]. В такой модели поврежденность рассматривалась как процесс непрерывной деградации жесткостных свойств материала, где для каждого конечного элемента рассчитывалась соответствующая поврежденная матрица жесткости:

$$[C]_d = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} (1 - d_f)E_f & (1 - d_f)(1 - d_m)\nu_{21}E_f & 0 \\ (1 - d_f)(1 - d_m)\nu_{12}E_f & (1 - d_m)E_m & 0 \\ 0 & 0 & A(1 - d_s)G \end{bmatrix},$$

где d_f, d_m, d_s – параметры поврежденности волокна, матрицы и при сдвиге соответственно; $A = 1 - \nu_{12}\nu_{21}(1 - d_f)(1 - d_m)$; E_f, E_m, G – модули упругости для волокна, матрицы и при сдвиге соответственно.

Разброс механических свойств нитей учитывался с помощью усеченного нормального распределения. Дискретизация конечно-элементной сетки выполнялась с помощью 8-узловых твердотельных конечных элементов (типа SOLID) с шестью степенями свободы в каждом узле. Нити и матрица имели общие узлы, формируя конформную сетку, включающую около 400000 конечных элементов.

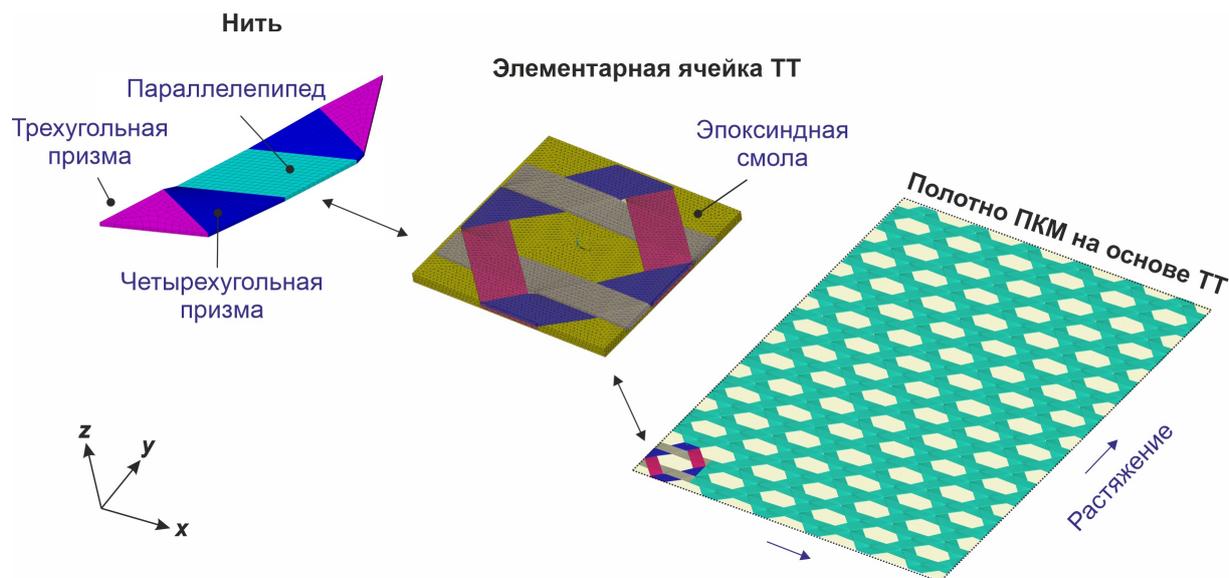


Рис. 5. Цифровая мезомодель ПКМ

Fig. 5. Digital meso-model of the PCM

2.4. Цифровая макромодель параболического рефлектора. На макроуровне исследовалось механическое поведение параболического рефлектора диаметром 1.5 м (рис. 6), используемого в высокоточных телекоммуникационных системах [22]. Отражающая поверхность была выполнена из ПКМ на основе ТТ, что обеспечило высокую удельную прочность, стабильность формы и устойчивость к внешним нагрузкам.

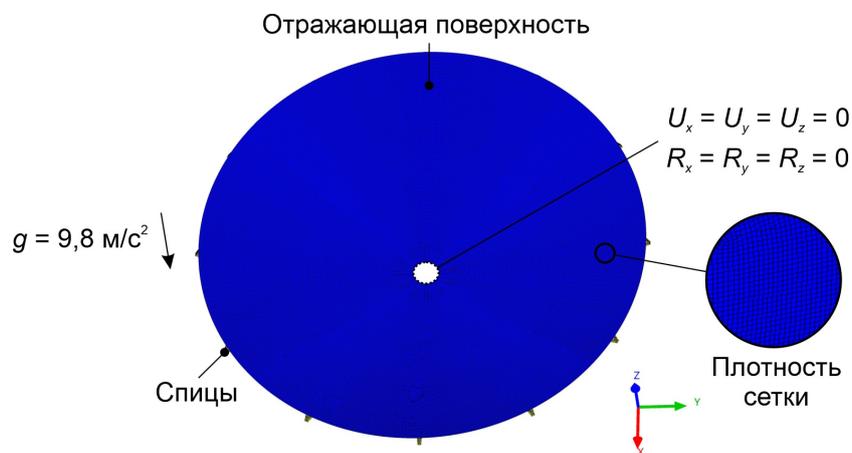


Рис. 6. Цифровая макромодель параболического рефлектора

Fig. 6. Digital macro-model of the parabolic reflector

Дискретизация модели выполнялась с использованием 8-узловых оболочечных конечных элементов (типа SHELL). Модель включала в себя 158220 конечных элементов и 169872 узлов. Для учета геометрической и физической нелинейности использовалась опция больших перемещений. В качестве нагружения учитывалось действие силы тяжести в направлении оси Z , при этом центральная область рефлектора была зафиксирована по всем степеням свободы.

3. Результаты и обсуждения

С использованием разработанной микромоделли проведены виртуальные испытания РЭО углеродной нити при различных схемах нагружения. На рис. 7 представлены диаграммы деформирования при растяжении и сжатии в двух направлениях.

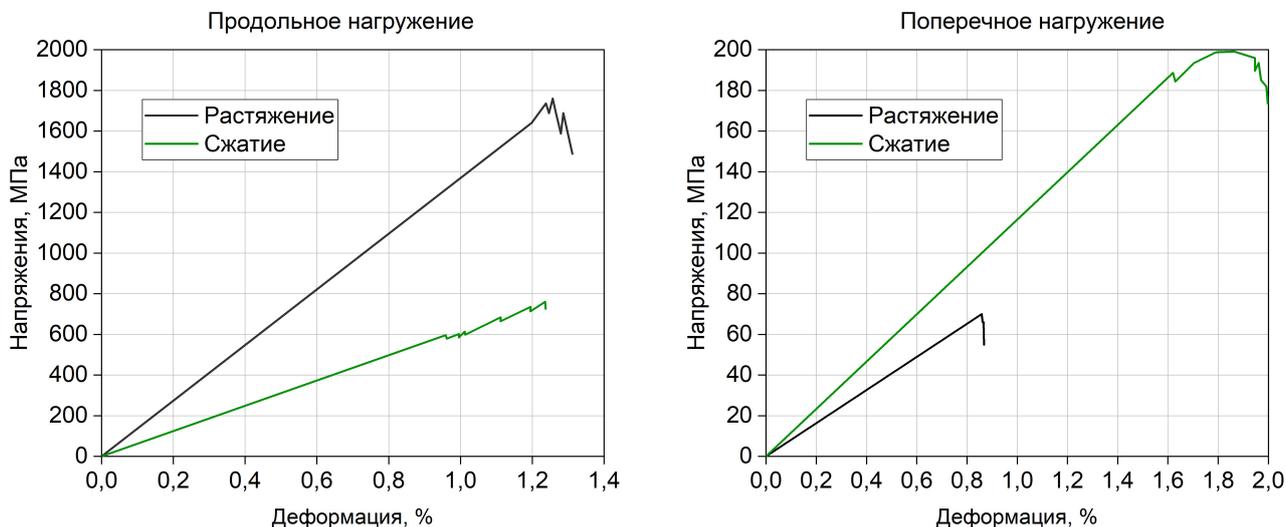


Рис. 7. Диаграммы деформирования углеродной нити

Fig. 7. Stress-strain diagrams of the carbon yarn

При продольном растяжении несущая способность ПКМ в основном определяется прочностными свойствами армирующих волокон. Разрушение возникает в волокнах, прочность которых снижена вследствие вариации механических свойств. Локальные повреждения повышают уровень напряжений в материале, формируя концентраторы, способствующие дальнейшему развитию разрушения. Предельное состояние достигается при накоплении критического количества поврежденных волокон и локальных областей разрушения матрицы, что отражается падением максимальных напряжений на диаграмме деформирования. В поперечном направлении поведение материала контролируется прочностными характеристиками связующего. Разрушение в этом случае инициируется образованием и накоплением трещин в матрице, которые, распространяясь по ее сечению, формируют концентрацию напряжений. При этом волокна, как правило, не разрушаются. С использованием полученных данных были рассчитаны эффективные механические свойства: $E_1 = 136000$ МПа; $E_2 = E_3 = 8130$ МПа; $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$; $\nu_{23} = 0.45$; $X_t = 1767$ МПа; $X_c = -752$ МПа; $Y_t = 70$ МПа; $Y_c = -200$ МПа; $S_l = 70$ МПа. Валидация цифровой модели была проведена в работе [23], при этом расхождение между экспериментальными данными и виртуальными испытаниями не превышало 15%.

Далее были проведены виртуальные испытания ПКМ на основе ТТ на мезоуровне при одноосном растяжении (рис. 8). В качестве исходных данных использовались результаты виртуальных испытаний на микроуровне, что обеспечило согласованность параметров модели и позволило учесть влияние микроструктурных процессов деформирования.

При продольном растяжении максимальные значения главных напряжений σ_1 были в нитях утка, ориентированных вдоль направления действия внешней нагрузки. Наибольшая концентрация напряжений наблюдалась в зонах пересечения утка с нитями основы,

где геометрия переплетения приводит к локальной неравномерности напряженного состояния и повышенному уровню нагружения в матрице. Распределение σ_2 указало на наличие поперечных напряжений в нитях основы; они были обусловлены изгибом волокон в местах переплетения и отражали характер поперечной связи между системами нитей. При поперечном нагружении наблюдалась концентрация напряжений в нитях основы, которые приняли большую часть приложенной нагрузки. Анализ развития поврежденности (рис. 9) указал на то, что начало разрушения возникло в области пересечения основы и утка. С увеличением нагрузки поврежденность распространилась по диагонали относительно направления нагружения, что было связано с особенностями перераспределения нагрузки в структуре ТТ. Сравнительный анализ между моделированием и экспериментальными данными продемонстрировал схожий процесс развития повреждений, что подтвердило корректность и применимость разработанной модели. После оценки НДС были определены эффективные механические свойства материала: $E_1 = 22060$ МПа; $E_2 = 6333$ МПа; $\nu_{12} = 0.6$; $\nu_{23} = 0.55$; $X_t = 290$ МПа; $Y_t = 65$ МПа.

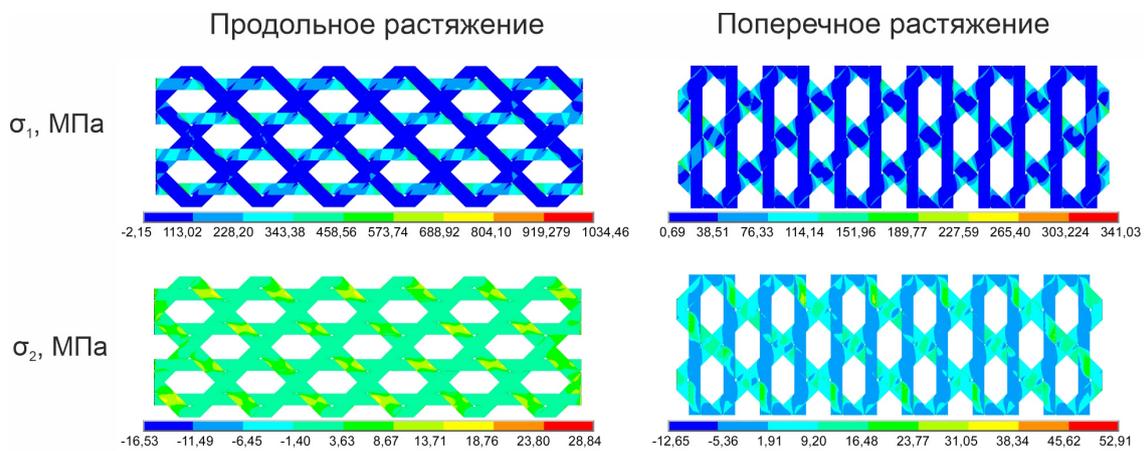


Рис. 8. Распределение главных напряжений σ_1 и σ_2 ПКМ на основе ТТ

Fig. 8. Distribution of principal stresses σ_1 and σ_2 in the PCM based on TWF

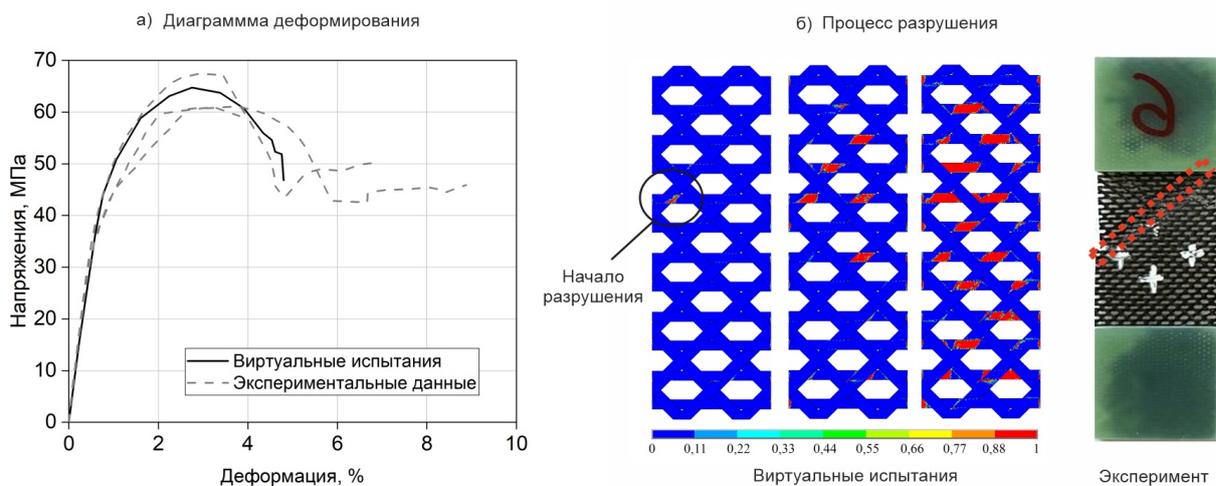


Рис. 9. Диаграмма деформирования (а) и поврежденность (б) ПКМ при поперечном растяжении

Fig. 9. Stress-strain diagram (a) and damage evolution (b) in the PCM under transverse tension

На заключительном этапе проведена оценка механического поведения рефлектора. Распределение общих перемещений отражающей оболочки (рис. 10) имеет ярко выраженный радиальный характер: в зоне центрального закрепления они близки к нулю и постепенно возрастают по мере удаления от центра, достигая максимума на периферии. Такая картина полностью соответствует ожидаемому поведению тонкой осесимметричной оболочки. На кромке наблюдаются локальные зоны повышенных перемещений, формирующиеся в пролетах между силовыми ребрами, что связано с меньшей жесткостью конструкции в этих областях. Выявленная неравномерность по окружности отражает анизотропию, обусловленную сегментной структурой и системой ребер.

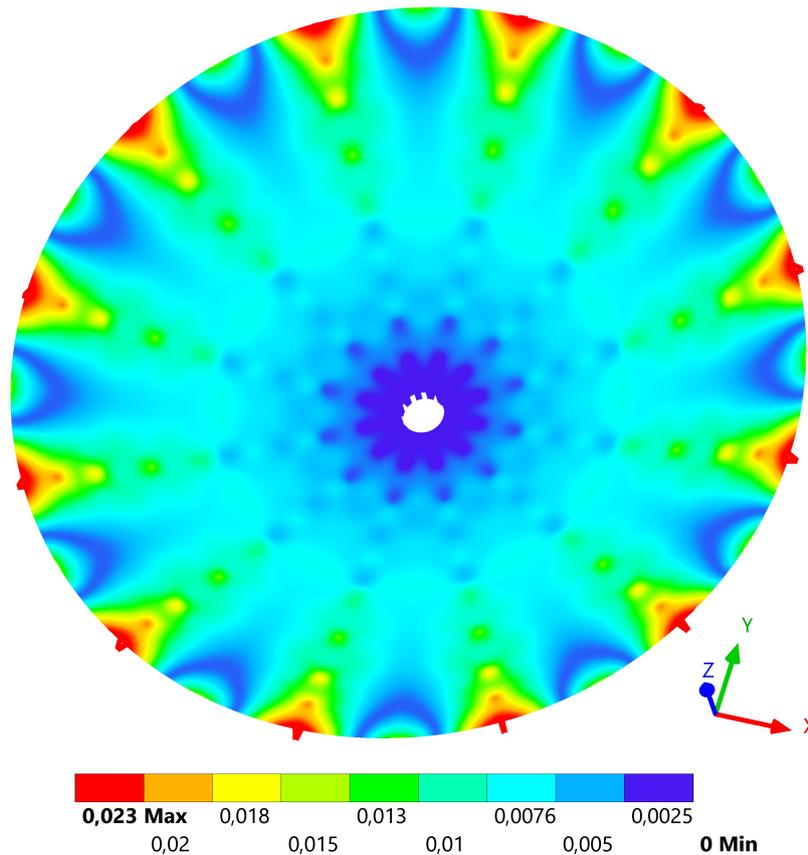


Рис. 10. Распределение общих перемещений отражающей поверхности рефлектора, мм

Fig. 10. Distribution of total displacements of the reflective surface of the reflector, mm

Основным критерием качества работы рефлектора является величина среднеквадратического отклонения (СКО) от номинальной формы, которая определяется следующим образом:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (u_i - u_a)^2} \leq 0.3 \text{ мм},$$

где u_i – перемещение i -го узла поверхности; u_a – среднее значение перемещений по поверхности; N – общее количество узлов.

По результатам расчета установлено, что СКО отражающей поверхности составляет 0.012 мм, что на порядок ниже предельно допустимого значения.

Заключение

В работе предложен и реализован многоуровневый подход к компьютерному моделированию механических свойств ПКМ. Разработанные ЦМ на микро-, мезо- и макроуровнях обеспечили комплексную оценку НДС ПКМ с учетом структурно-механических особенностей материала. На микроуровне рассчитаны эффективные характеристики углеродной нити с учетом случайного распределения волокон и разброса механических свойств. Мезоуровневый анализ позволил выявить закономерности деформирования и разрушения ТТ. Макромодель параболического рефлектора показала применимость предложенного подхода к анализу ответственных высокоточных конструкций.

Интеграция микро-, мезо- и макроуровневых моделей в рамках единой методологии позволяет не только повысить точность прогнозирования механического поведения ПКМ с учетом их сложной иерархической структуры, но и существенно снизить необходимость в ресурсоемких экспериментальных исследованиях. Полученные результаты формируют основу для разработки ЦД ПКМ и конструкций, способных достоверно прогнозировать механические свойства ПКМ.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. Холмогоров С.А., Левшонкова Н.В. Экспериментальные исследования механизмов разрушения трехслойных тест-образцов с несущими слоями из однонаправленного волокнистого композита $[0^\circ]$ при осевом сжатии // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 4. С. 357–370. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.4.357-370>.
2. Kalidindi S.R., Buzzy M., Boyce B.L., Dingreville R. Digital twins for materials // Comput. Mater. Sci. 2022. V. 9. Art. 818535. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.818535>.
3. Wang Y., Tao F., Zuo Y., Zhang M., Qi Q. Digital-twin-enhanced quality prediction for the composite materials // Engineering. 2023. V. 22. P. 22–33. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.08.019>.
4. Eremin N.V., Moskvichev E.V. Multilevel model for calculating the strength and the service life of a metal composite pressure vessel // Russ. Metall. (Metally). 2023. V. 2023, No 10. P. 1557–1564. <https://doi.org/10.1134/S0036029523100075>.
5. Плескачевский Ю.М., Шимановский А.О. Компьютерное моделирование структуры и свойств композитов в нагруженных конструкциях // Механ. машин, механизм. и матер. 2016. № 1 (34). С. 41–50.
6. Lee W., Chung I., Baek K., Im S., Cho M. Multiscale modeling to characterize electromechanical behaviors of CNT/polymer nanocomposites considering the matrix damage and interfacial debonding // Mech. Adv. Mater. Struct. 2020. V. 29, No 16. P. 2322–2341. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1861396>.
7. Vashisth A., Bakis C.E. Multiscale characterization and modeling of nanosilica-reinforced filament wound carbon/epoxy composite // Mater. Perform. Charact. 2019. V. 8, No 1. P. 1–21. <https://doi.org/10.1520/MPC20180108>.

8. *Christoff B.G., Almeida J.H.S., Jr., Ribeiro M.L., Maciel M.M., Guedes R.M., Tita V.* Multiscale modelling of composite laminates with voids through the direct FE² method // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2024. V. 131. Art. 104424. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104424>.
9. *Димитриенко Ю.И., Соколов А.П.* Многомасштабное моделирование упругих композиционных материалов // *Матем. моделир.* 2012. Т. 24, № 5. С. 3–20.
10. *Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В.* Многомасштабное моделирование упругопластических композитов с учетом повреждаемости // *Матем. моделир. и числ. методы.* 2016. № 10. С. 3–23.
11. *Chen Y.-W., Joseph R.J., Kanyuck A., Khan S., Malhan R.K., Manyar O.M., McNulty Z., Wang B., Barbič J., Gupta S.K.* A digital twin for automated layup of prepreg composite sheets // *J. Manuf. Sci. Eng.* 2022. V. 144, No 4. Art. 041010. <https://doi.org/10.1115/1.4052132>.
12. *Kibrete F., Trzepieciński T., Gebremedhen H.S., Woldemichael D.E.* Artificial intelligence in predicting mechanical properties of composite materials // *J. Compos. Sci.* 2023. V. 7, No 9. Art. 364. <https://doi.org/10.3390/jcs7090364>.
13. *Múgica J.I., Lopes C.S., Naya F., Herráez M., Martínez V., González C.* Multiscale modelling of thermoplastic woven fabric composites: From micromechanics to mesomechanics // *Compos. Struct.* 2019. V. 228. Art. 111340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111340>.
14. *Hofer U., Luger M., Traxl R., Lackner R.* Multiscale modeling of the viscoelastic response of braid-reinforced polymers: Model formulation and experimental assessment considering different rheological models // *Composites, Part B.* 2020. V. 182. Art. 107398. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107398>.
15. *Lin S., Yang L., Xu H., Jia X., Yang X., Zu L.* Progressive damage analysis for multiscale modelling of composite pressure vessels based on Puck failure criterion // *Compos. Struct.* 2021. V. 255. Art. 113046. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113046>.
16. *Spahn J., Andrae H., Kabel M., Mueller R., Linder C.* Multiscale modeling of progressive damage in elasto-plastic composite materials // *Proc. 11th World Congr. on Computational Mechanics (WCCM XI), 5th Eur. Conf. on Computational Mechanics (ECCM V), 6th Eur. Conf. on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI).* V. IV. Ónate E., Oliver J., Huerta A. (Eds.). Barcelona: CIMNE, 2014. P. 3426–3437.
17. *Соколов А.П., Першин А.Ю., Козов А.В., Кириллов Н.Д.* Гомогенизация многоуровневых многокомпонентных гетерогенных структур для определения физико-механических характеристик композиционных материалов // *Физ. мезомехан.* 2018. Т. 21, № 5. С. 90–107.
18. *Breuer K., Spickenheuer A., Stommel M.* Statistical analysis of mechanical stressing in short fiber reinforced composites by means of statistical and representative volume elements // *Fibers.* 2021. V. 9, No 5. Art. 32. <https://doi.org/10.3390/fib9050032>.
19. *Zhao Q., Hoa S.V., Ouellette P.* Triaxial woven fabric (TWF) composites with open holes (part II): Verification of the finite element models // *J. Compos. Mater.* 2003. V. 37, No 10. P. 849–873. <https://doi.org/10.1177/0021998303037010001>.
20. *Wang L., Zheng C., Luo H., Wei S., Wei Z.* Continuum damage modeling and progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite pressure vessel // *Compos. Struct.* 2015. V. 134. P. 475–482. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.107>.

21. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites // J. Appl. Mech. 1980. V. 47, No 2. P. 329–334. <https://doi.org/10.1115/1.3153664>.
22. Евдокимов А.С., Пономарев С.В., Буянов Ю.И. Совместный расчет напряженно-деформированного состояния и диаграммы направленности космических рефлекторов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. 2011. № 1 (13). С. 74–82.
23. Eremin N.V., Moskvichev V.V. A probabilistic model of fracture of the composite material of a composite overwrapped pressure vessel // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1431. Art. 012020. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1431/1/012020>.

References

1. Kholmogorov S.A., Levshonkova N.V. Experimental research of the failure mechanisms of sandwich specimens with facing layers from unidirectional fiber-reinforced plastic with $[0^\circ]$ lay-up under axial compression. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 4, pp. 357–370. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.4.357-370>. (In Russian)
2. Kalidindi S.R., Buzzy M., Boyce B.L., Dingreville R. Digital twins for materials. *Comput. Mater. Sci.*, 2022, vol. 9, art. 818535. <https://doi.org/10.3389/fmats.2022.818535>.
3. Wang Y., Tao F., Zuo Y., Zhang M., Qi Q. Digital-twin-enhanced quality prediction for the composite materials. *Engineering*, 2023, vol. 22, pp. 22–33. <https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.08.019>.
4. Eremin N.V., Moskvichev E.V. Multilevel model for calculating the strength and the service life of a metal composite pressure vessel. *Russ. Metall. (Metally)*, 2023, vol. 2023, no. 10, pp. 1557–1564. <https://doi.org/10.1134/S0036029523100075>.
5. Pleskachevskii Yu.M., Shimanovskii A.O. Computer simulation of the structure and properties of composites in loaded constructions. *Mech. Mach., Mech. Mater.*, 2016, no. 1 (34), pp. 41–50. (In Russian)
6. Lee W., Chung I., Baek K., Im S., Cho M. Multiscale modeling to characterize electromechanical behaviors of CNT/polymer nanocomposites considering the matrix damage and interfacial debonding. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2022, vol. 29, no. 16, pp. 2322–2341. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1861396>.
7. Vashisth A., Bakis C.E. Multiscale characterization and modeling of nanosilica-reinforced filament wound carbon/epoxy composite. *Mater. Perform. Charact.*, 2019, vol. 8, no. 1, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1520/MPC20180108>.
8. Christoff B.G., Almeida J.H.S., Jr., Ribeiro M.L., Maciel M.M., Guedes R.M., Tita V. Multiscale modelling of composite laminates with voids through the direct FE² method. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2024, vol. 131, art. 104424. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104424>.
9. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. Multiscale modeling of elastic composite materials. *Mat. Model.*, 2012, vol. 24, no. 5, pp. 3–20. (In Russian)
10. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Sborshchikov S.V. Multiscale modeling of elastic-plastic composites with an allowance for fault probability. *Math. Model. Comput. Methods*, 2016, no. 10, pp. 3–23. (In Russian)

11. Chen Y.-W., Joseph R.J., Kanyuck A., Khan S., Malhan R.K., Manyar O.M., McNulty Z., Wang B., Barbič J., Gupta S.K. A digital twin for automated layup of prepreg composite sheets. *J. Manuf. Sci. Eng.*, 2022, vol. 144, no. 4, art. 041010. <https://doi.org/10.1115/1.4052132>.
12. Kibrete F., Trzepieciński T., Gebremedhen H.S., Woldemichael D.E. Artificial intelligence in predicting mechanical properties of composite materials. *J. Compos. Sci.*, 2023, vol. 7, no. 9, art. 364. <https://doi.org/10.3390/jcs7090364>.
13. Múgica J.I., Lopes C.S., Naya F., Herráez M., Martínez V., González C. Multiscale modelling of thermoplastic woven fabric composites: From micromechanics to mesomechanics. *Compos. Struct.*, 2019, vol. 228, art. 111340. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111340>.
14. Hofer U., Luger M., Traxl R., Lackner R. Multiscale modeling of the viscoelastic response of braid-reinforced polymers: Model formulation and experimental assessment considering different rheological models. *Composites, Part B*, 2020, vol. 182, art. 107398. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107398>.
15. Lin S., Yang L., Xu H., Jia X., Yang X., Zu L. Progressive damage analysis for multiscale modelling of composite pressure vessels based on Puck failure criterion. *Compos. Struct.*, 2021, vol. 255, art. 113046. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113046>.
16. Spahn J., Andrae H., Kabel M., Mueller R., Linder C. Multiscale modeling of progressive damage in elasto-plastic composite materials. *Proc. 11th World Congr. on Computational Mechanics (WCCM XI), 5th Eur. Conf. on Computational Mechanics (ECCM V), 6th Eur. Conf. on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*. Vol. IV. Ōnate E., Oliver J., Huerta A. (Eds.). Barcelona, CIMNE, 2014, pp. 3426–3437.
17. Sokolov A.P., Pershin A.Yu., Kozov A.V., Kirillov N.D. Homogenization of multilevel multicomponent heterogeneous structures for determining the physical and mechanical characteristics of composites. *Fiz. Mezomekh.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 90–107. (In Russian)
18. Breuer K., Spickenheuer A., Stommel M. Statistical analysis of mechanical stressing in short fiber reinforced composites by means of statistical and representative volume elements. *Fibers*, 2021, vol. 9, no. 5, art. 32. <https://doi.org/10.3390/fib9050032>.
19. Zhao Q., Hoa S.V., Ouellette P. Triaxial woven fabric (TWF) composites with open holes (part II): Verification of the finite element models. *J. Compos. Mater.*, 2003, vol. 37, no. 10, pp. 849–873. <https://doi.org/10.1177/0021998303037010001>.
20. Wang L., Zheng C., Luo H., Wei S., Wei Z. Continuum damage modeling and progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite pressure vessel. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 134, pp. 475–482. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.107>.
21. Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *J. Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, no. 2, pp. 329–334. <https://doi.org/10.1115/1.3153664>.
22. Evdokimov A.S., Ponomarev S.V., Buyanov Yu.I. Joint calculation of the stress-strain state and antenna patterns of spacecraft reflectors. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat, Mekh.*, 2011, no. 1 (13), pp. 74–82. (In Russian)
23. Eremin N.V., Moskvichev V.V. A probabilistic model of fracture of the composite material of a composite overwrapped pressure vessel. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2020, vol. 1431, art. 012020. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1431/1/012020>.

Информация об авторах

Никита Викторович Еремин, кандидат технических наук, заведующий научной лабораторией, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева

E-mail: *kaizoku813@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8027-9483>

Author Information

Nikita V. Eremin, Cand. Sci. (Engineering), Head of Scientific Laboratory, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology

E-mail: *kaizoku813@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8027-9483>

Поступила в редакцию 16.09.2025

Принята к публикации 19.09.2025

Received September 16, 2025

Accepted September 19, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.172.1: 519.217.8

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>

Реализация генератора дискретной случайной величины на основе d -арного дерева

В.М. Захаров, С.В. Шалагин ✉

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия*

✉ sshalagin@mail.ru

Аннотация

Предложен метод расчета закона распределения дискретной случайной величины (ДСВ) при использовании d -арного дерева. Количество n листьев дерева определяется по количеству элементов закона ДСВ, а количество остальных его вершин отражает генераторы ДСВ с законом, включающим d элементов (далее – d -ГДСВ). Варьирование закона распределения ДСВ через обнуление одного из его элементов сводится к пересчету законов d -ГДСВ, количество которых растет логарифмически в зависимости от значения n .

Ключевые слова: дискретная случайная величина, модель, дерево, метод пересчета закона распределения, обнуление элемента

Для цитирования: Захаров В.М., Шалагин С.В. Реализация генератора дискретной случайной величины на основе d -арного дерева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 507–518. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>

Implementing a random variable generator based on a d -ary tree

V.M. Zakharov, S.V. Shalagin ✉

*Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia*✉ sshalagin@mail.ru

Abstract

A method was proposed for calculating the probability distribution of a discrete random variable (DRV) using a d -ary tree. The tree has n leaves, which is equivalent to the number of elements in the DRV probability distribution, and the remaining vertices represent the DRV generators with the probability distribution including d elements (d -DRV). Variation in the DRV probability distribution by zeroing one of its elements reduces to the recalculation of the d -DRV probability distributions, the number of which increases logarithmically with respect to the value of n .

Keywords: discrete random variable, model, tree, method of probability distribution recalculation, zeroing of element

For citation: Zakharov V.M., Shalagin S.V. Implementing a random variable generator based on a d -ary tree. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 507–518. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>. (In Russian)

Введение

Методы, алгоритмы, аппаратно-программные средства для реализации генераторов дискретной случайной величины (ГДСВ) представлены в большом числе публикаций, в том числе в ряде монографий [1–20], содержащих обзоры результатов по задаче синтеза ГДСВ и отражающих решения широкого круга задач на основе разнообразных вероятностных моделей статистического моделирования и теории вероятностных автоматов, в частности, на основе урновых моделей случайного выбора без возвращения [21], вероятностных автоматов с переменной структурой [22], эйлеровых стохастических матриц [23], вероятностной модели решения задачи коммивояжера [24–26] и др. (см. также [18, 19, 27]). Особенностью отмеченных моделей является необходимость изменять закон вероятностного распределения дискретной случайной величины (ДСВ) в применяемой модели ГДСВ после получения очередного значения случайной величины, т. е. производить пересчет закона с сохранением стохастичности. Для решения этой задачи получил развитие подход (применяемый и в моделях, отмеченных выше), основанный на алгоритме [5, 22] поэлементного последовательного изменения закона ДСВ. При применении названного метода

пересчет закона ДСВ в режиме реального времени с большим количеством элементов n является достаточно трудоемкой задачей [28]. В связи с этим актуальной задачей является уменьшение временной сложности алгоритма пересчета закона ДСВ.

Цель работы – представить модель ГДСВ и метод пересчета закона распределения ДСВ на основе предлагаемой модели, позволяющие уменьшить время пересчета закона с применением возможности распараллеливания процесса пересчета.

1. Постановка задачи

Закон распределения ДСВ задан в виде

$$(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n), \tag{1}$$

где ДСВ (далее обозначаемая как X) принимает значение x_i с вероятностью p_i , $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $|X| = n$.

Пусть в применяемой модели ГДСВ после получения очередного значения случайной величины x_z в (1) происходит обнуление вероятности p_z , $z \in [1, n]$, и длина l последовательности значений ДСВ, формируемых на выходе модели, может быть задана в пределах $1 \leq l \leq n$.

В соответствии с [28] введем следующие определения для d -арного дерева T , упорядоченного слева направо.

Определение 1. Для дерева T , имеющего n листьев, существует множество NL узлов, не являющихся листьями, мощности $|NL| = a = \lceil \frac{(n-1)}{(d-1)} \rceil$.

Определение 2. Для каждого узла $v_k \in NL$, $k = \overline{1, a}$, дерева T существует ровно d смежных потомков, которые обозначим w_j , $j = \overline{1, d}$.

Каждому из листьев l_i дерева T поставим в однозначное соответствие элементы x_i и p_i закона (1) для X , $i = \overline{1, n}$. Каждому из узлов $v_k \in NL$, $k = \overline{1, a}$, поставим в соответствие генератор ДСВ на d элементов каждый (d -ГДСВ), $d < n$, с заданным законом распределения. Тогда предложенную модель ГДСВ можно рассматривать как систему параллельно функционирующих d -ГДСВ, $d < n$. Определим порядок задания законов для каждого из d -ГДСВ в соответствии с (1).

Обозначим через $M_k^{(j)}$ множество листьев, которые являются потомками узлов v_k и w_j . При этом узел v_k является смежным узлом-предком для w_j . Множество листьев, являющихся потомками узла v_k , обозначим M_k . При этом мощность этого множества $|M_k| = \sum_{j=1}^d |M_k^{(j)}|$. Согласно определению дерева T множества $M_k^{(j)}$ являются непересекающимися для заданных значений $k = \overline{1, a}$ и $j = \overline{1, d}$.

Замечание 1. Корневой узел (корень) дерева T обозначим v_1 ; согласно определению 1 $|M_1| = n$.

Введем следующие определения.

Определение 3. Величина $s_k = \sum_{i:l_i \in M_k} p_i$ есть сумма вероятностей, соответствующих листьям, являющимся потомками узла v_k дерева T ; для корня дерева T значение $s_0 = 1$.

Определение 4. Величина $s_k^{(j)} = \sum_{i:l_i \in M_k^{(j)}} p_i$ есть сумма вероятностей, соответствующих листьям, являющимся потомками узлов v_k и w_j дерева T .

С использованием представленных определений может быть доказана

Теорема. Для d -ГДСВ закон распределения $\{p_{kj}\}$, $\sum_{j=1}^d p_{kj} = 1$, которому соответствует узел v_k дерева T , определен по формуле

$$p_{kj} = s_k^{(j)} / s_k. \quad (2)$$

Пусть для закона (1) распределения величины X обнуляется вероятность p_z генерирования произвольного элемента x_z . Этому элементу соответствует лист l_z дерева T . От листа l_z к корню T ведет единственный путь через множество узлов, которое обозначим B_z , $|B_z| = h$. Величина h есть длина пути от корня дерева T к листу l_z , определенному на основании вычисления значений d -ГДСВ в соответствии с (2), $\lfloor \log_d n \rfloor - 1 \leq h \leq \lfloor \log_d n \rfloor$. На основе определений 3 и 4 из теоремы вытекает следующее

Следствие. Для d -ГДСВ закон распределения $\{p'_{kj}\}$, $\sum_{j=1}^d p'_{kj} = 1$, которому соответствуют узел v_k и смежный узел-потомок w_t дерева T , $v_k, w_t \in B_z$, варьируется при обнулении значения p_z в соответствии с (2):

$$p'_{kt} = \frac{(s_k^{(t)} - p_z)}{(s_k - p_z)}; \quad \text{и если } j \neq t, \text{ то } p'_{kj} = \frac{s_k^{(j)}}{(s_k - p_z)}. \quad (3)$$

Замечание 2. Если после обнуления вероятности генерирования элемента x_z закона (1) для узла v_k величина $s_k - p_z = 0$, то d -ГДСВ, соответствующий узлу v_k , больше не требуется для вычисления закона распределения величины X с обнуленным элементом p_z , так как вероятность генерирования каждого из значений X , соответствующих листьям-потомкам узла v_k , будет равна нулю.

Определим закон ДСВ вида (1), (x_i, q_i) , $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, $l = 1$, после обнуления значения p_z , т. е. обновленный закон ДСВ при заданном $l = 1$. Обозначим через B_i , $|B_i| = h$, множество узлов, через которое ведет единственный путь от листа l_i к корню T . Тогда

$$q_i = \prod p'_{kt}, \quad (4)$$

где p'_{kt} определена согласно (3), w_t – смежный узел-потомок v_k , $w_t, v_k \in B_i$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 3. Формула (4) применима к элементам закона (1) для $q_i \neq 0$; обнуление элементов q_i , $i = \overline{1, n}$, допустимо проводить при условии, что в обновленном законе ДСВ вида (1) $Q(q_i \neq 0) \geq 3$.

Рассмотрим метод варьирования закона X вида (1) при обнулении вероятности генерирования одного из его элементов (далее – Метод).

2. Описание этапов Метода

Метод варьирования закона X вида (1) при обнулении вероятности генерирования заданного элемента x_z , который обоснован теоремой и следствием из нее, включает шесть этапов (см. ниже). Этапы 1–3 носят подготовительный характер: определяются дерево T и множества NL , $|NL| = a$ d -ГДСВ, задается величина $l = 1$. На этапах 4–6 выполняется варьирование закона для подмножества d -ГДСВ B_z , $|B_z| = h$, в соответствии с обнуляемой вероятностью p_z появления значения x_z .

Этап 1. На основе (1) задаем дерево T с множеством узлов-листьев M_1 , $|M_1| = n$, и множеством узлов NL , $a = |NL| = \left\lceil \frac{(n-1)}{d-1} \right\rceil$, не являющихся листьями.

Этап 2. Для каждого из узлов v_k , $v_k \in NL$, задаем множества M_k , а для $v_k - d$ его смежных потомков (СмП) w_j ; далее задаем множества $M_k^{(j)}$ как непересекающиеся подмножества M_k , $k = \overline{1, a}$, $j = \overline{1, d}$.

Этап 3. Для каждого из узлов $v_k \in NL$ задаем закон распределения d -ГДСВ – $\{p_{kj}\}$, $\sum_{i=1}^d p_{kj} = 1$, – в соответствии с (2).

Этап 4. Определяем элемент x_z , вероятность p_z появления которого обнуляется, и соответствующий ему лист l_z .

Этап 5. Определяем элементы множества B_z .

Этап 6. Для каждого из узлов v_k , $k = \overline{1, a}$, и $w_t \in B_z$, задаем новый закон распределения d -ГДСВ – $\{p'_{kj}\}$, $\sum_{i=1}^d p'_{kj} = 1$, $j = \overline{1, d}$, – в соответствии с (3).

Отметим, что после выполнения этапа 3 генерирование X в соответствии с законом (1) сводится к генерированию a значений d -ГДСВ в соответствии с (2), h из которых определяют, какое именно значение X будет сгенерировано.

Пример. Пусть задан закон распределения величины X в виде $(x_1, \frac{3}{48})$, $(x_2, \frac{2}{48})$, $(x_3, \frac{7}{48})$, $(x_4, \frac{2}{48})$, $(x_5, \frac{8}{48})$, $(x_6, \frac{5}{48})$, $(x_7, \frac{9}{48})$, $(x_8, \frac{1}{48})$, $(x_9, \frac{4}{48})$, $(x_{10}, \frac{3}{48})$, $(x_{11}, \frac{2}{48})$, $(x_{12}, \frac{2}{48})$, т. е. $n = 12$. Примем $d = 3$. Выполним этапы 1–3 предложенного Метода.

Этап 1. Определим дерево T , для которого $|M_1| = 12$ и $a = |NL| = 3$.

Этап 2. Определим множества листьев, являющихся потомками для каждого из узлов NL . Для корневого узла v_1 дерева T потомками являются все листья из множества $M_1 = \{x_1 \dots x_{12}\}$; потомками для СмП узла v_1 , т. е. для узлов v_2 и v_3 , являются листья из соответствующих множеств $M_1^{(2)} = \{x_1 \dots x_9\}$ и $M_1^{(3)} = \{x_{10} x_{11} x_{12}\}$. При этом $M_1^{(4)} = \{\emptyset\}$ – пустое множество. Потомками v_2 являются листья из множества $M_2 = \{x_1 \dots x_9\}$, а потомками для СмП узла v_2 , т. е. для узлов v_5 , v_6 и v_7 , – листья из соответствующих множеств $M_2^{(5)} = \{x_1 x_2 x_3\}$, $M_2^{(6)} = \{x_4 x_5 x_6\}$ и $M_2^{(7)} = \{x_7 x_8 x_9\}$. СмП узла v_3 являются листья из множества $M_3 = \{x_{10} x_{11} x_{12}\}$. СмП узлов v_5 , v_6 и v_7 являются листья из множеств $M_5 = \{x_1 x_2 x_3\}$, $M_6 = \{x_4 x_5 x_6\}$ и $M_7 = \{x_7 x_8 x_9\}$ соответственно.

Этап 3. Для корневого узла v_1 дерева T имеем

$$s_1 = 1, \quad s_1^{(2)} = \sum_{i:l_i \in M_1^{(2)}} p_i = \frac{41}{48}, \quad s_1^{(3)} = \sum_{i:l_i \in M_1^{(3)}} p_i = \frac{7}{48}, \quad s_1^{(4)} = 0,$$

т. е. закон для 3-ГДСВ определен в соответствии с (2) как $\left\{\frac{41}{48} \frac{7}{48} 0\right\}$; для узла v_2 получим

$$s_2 = \frac{41}{48}, \quad s_2^{(5)} = \frac{12}{48}, \quad s_2^{(6)} = \frac{15}{48}, \quad s_2^{(7)} = \frac{14}{48},$$

закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{12}{48} \frac{15}{48} \frac{14}{48}\right\}$; для узла v_3 имеем

$s_3 = \frac{7}{48}$, его СМП являются листьями, закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2)

как $\left\{\frac{3}{7} \frac{2}{7} \frac{2}{7}\right\}$; узел v_4 пустой; для узла v_5 имеем $s_5 = \frac{12}{41}$, его СМП являются листьями,

закон для 3-ГДСВ в соответствии с (2) определим как $\left\{\frac{3}{12} \frac{2}{12} \frac{7}{12}\right\}$; для узла v_6 найдем

$s_6 = \frac{15}{41}$, его СМП являются листьями, закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2)

как $\left\{\frac{2}{15} \frac{8}{15} \frac{5}{15}\right\}$; для узла v_7 найдем $s_6 = \frac{14}{41}$, его СМП являются листьями, закон для

3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{9}{14} \frac{1}{14} \frac{4}{14}\right\}$.

Этап 4. Пусть требуется обнулить вероятность $p_3 = \frac{7}{48}$ появления элемента x_3 , т. е. $z = 3$; ему соответствует лист l_3 T .

Этап 5. Множеству B_z принадлежат узлы v_1 , v_2 и v_5 .

Этап 6. Согласно (3) новый закон распределения для 3-ГДСВ, соответствующего v_1 , имеет вид $\left\{\frac{34}{41} \frac{7}{41} 0\right\}$, т. к. новые значения

$$s_1 = 1 - p_3 = \frac{41}{48}, \quad s_1^{(2)} = \sum_{i:l_i \in M_1^{(2)}} p_i = \frac{34}{41}, \quad s_1^{(3)} = \sum_{i:l_i \in M_1^{(3)}} p_i = \frac{7}{41};$$

новый закон для 3-ГДСВ, соответствующего v_2 для новых значений $s_2 = \frac{41}{48} - p_3 = \frac{34}{48}$,

$s_2^{(5)} = \frac{5}{34}$, $s_2^{(6)} = \frac{15}{34}$, $s_2^{(7)} = \frac{14}{34}$, определен в соответствии с (2) как $\left\{\frac{5}{34} \frac{15}{34} \frac{14}{34}\right\}$; новый

закон для 3-ГДСВ, соответствующего v_5 для новых значений $s_5 = \frac{12}{48} - p_3 = \frac{5}{48}$, определим

в соответствии с (2) как $\left\{\frac{3}{5} \frac{2}{5} 0\right\}$.

Определим обновленный закон для ДСВ вида (1). По определению $q_3 = 0$. Согласно (4) вычислим значения

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{3}{41}, & q_2 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{2}{41}, & q_4 &= \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{2}{41}, \\ q_5 &= \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{8}{41}, & q_6 &= \frac{5}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{5}{41}, & q_7 &= \frac{9}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{9}{41}, \\ q_8 &= \frac{1}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{1}{41}, & q_9 &= \frac{4}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{4}{41}, & q_{10} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}, \\ q_{11} &= \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}, & q_{12} &= \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}. \end{aligned}$$

3. Анализ сложности Метода

Оценим сложность генерирования ДСВ вида (1) после выполнения этапов 1–3 предложенного Метода. Альтернативный способ реализации генератора ДСВ, имеющего n различных значений, состоит в выполнении $(n - 1)$ операций сравнения. Они реализуются

при использовании C компараторов, $1 \leq C \leq (n-1)$, за время $t_A = \lceil \frac{(n-1)}{C} \rceil$, тогда как обнуление вероятности p_z появления величины x_z потребует пересчета $(n-2)$ значений вероятностей p_i , $i = \overline{1, z-1, z+1, n}$, в векторе вида (1). Эта величина имеет порядок $O(n)$.

Для предложенного Метода после выполнения этапов 1–3 требуется реализовать операции сравнения либо последовательно, либо параллельно. В первом случае для h d -ГДСВ, соответствующих пути через узлы дерева T от корня до листа, последовательно выполним по $(d-1)$ операций сравнения h раз, всего $h(d-1)$ операций. Во втором случае параллельно реализуем $(d-1)$ операций сравнения a раз, $a = \lceil \frac{(n-1)}{d-1} \rceil$. Это требует примерно $(n-1)$ операций сравнения, как и в альтернативном способе, при использовании C компараторов, $1 \leq C \leq (n-1)$, за время, равное

$$t_1 = \lceil (d-1) \frac{\lceil \frac{n-1}{d-1} \rceil}{C} \rceil.$$

На этапах 3–6 требуется пересчет законов распределения для h d -ГДСВ, т. е. для $(d-2)$ значений вероятностей h раз, $\lceil \log_d n \rceil - 1 \leq h \leq \lceil \log_d n \rceil$. Путь из корня дерева T в лист l_z при обнулении величины p_z известен, поэтому пересчет $(d-2)h$ значений реализуем параллельно. Данная величина имеет порядок $O(\log_d n)$.

В результате получим, что времена генерирования ДСВ X предложенным (t_1) и альтернативным (t_A) методами практически не отличаются.

Пересчет закона распределения ДСВ X при обнулении одного из его элементов при использовании этапов 4–6 предложенного Метода сводится к пересчету значений элементов h d -ГДСВ, количество которых имеет порядок $O(\log_d n)$, если не требуется отображать обновленный закон ДСВ (1) в явном виде, в то время как альтернативный метод требует пересчета порядка $O(n)$ элементов.

Заключение

Решена задача снижения сложности пересчета закона ДСВ, имеющей n значений. Суть метода в том, что генератор ДСВ представим системой из $a = \lceil \frac{(n-1)}{d-1} \rceil$ d -ГДСВ. При обнулении вероятности появления одного из заданных значений ДСВ, x_z , требуется выполнить пересчет законов для h , $\lceil \log_d n \rceil - 1 \leq h \leq \lceil \log_d n \rceil$, d -ГДСВ. Как на этапах представления ДСВ в виде d -арного дерева, так и на этапах пересчета закона ДСВ процесс получения законов для d -ГДСВ может быть выполнен параллельно. Это открывает возможности для распределенной реализации этапов Метода на многопроцессорных вычислительных системах.

Наличие большого количества всевозможных значений n ДСВ при фиксированном значении d позволяет уменьшить порядок количества пересчитываемых элементов с $O(n)$ до $O(\log_d n)$ при условии, что не требуется отображать обновленный закон ДСВ в явном виде.

Предложенные модель и метод применимы при решении задач, требующих пересчета закона распределения ДСВ без его отображения в явном виде в режиме реального времени, таких как генерирование сложных цепей Маркова [27], решение задачи коммивояжера [24] и т. п.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Закревский А.Д.* Реализация случайных событий с заданной вероятностью // Тр. СФТИ. 1965. Вып. 47. С. 56–59.
2. *Бухараев Р.Г.* Автоматное преобразование вероятностных последовательностей // Вероятн. методы и киберн. 1966. Вып. 1. С. 24–33.
3. *Ченцов В.М.* Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата // Кибернетика. 1968. № 3. С. 32–35.
4. *Бухараев Р.Г.* Вероятностные автоматы. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. 188 с.
5. *Поспелов Д.А.* Вероятностные автоматы. М.: Энергия, 1970. 88 с.
6. *Полляк Ю.Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971. 400 с.
7. *Гладкий В.С.* Вероятностные вычислительные модели. М.: Наука, 1973. 300 с.
8. *Walker A.I.* An efficient method for generating discrete random variables with general distributions // ACM Trans. Math. Software. 1977. V. 3, No 3. P. 253–256. <https://doi.org/10.1145/355744.355749>.
9. *Федоров Р.Ф., Яковлев В.В., Добрис Г.В.* Стохастические преобразователи информации. Л.: Машиностроение, 1978. 304 с.
10. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В.* Вычислительная техника для статистического моделирования. М.: Сов. радио, 1978. 312 с.
11. *Бухараев Р.Г.* Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985. 287 с.
12. *Походзей Б.Б.* Сложность табличных методов моделирования конечных дискретных распределений // Изв. вузов. Матем. 1985. № 7. С. 45–50.
13. *Левин Б.Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
14. Вероятностные автоматы и их приложения (Докл. симпоз., 6–8 июня 1983 г. / Сост. В.М. Захаров). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 212 с.
15. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А.* Стохастические вычислительные устройства систем моделирования. М.: Машиностроение, 1989. 272 с.
16. *Дородницын А.А. и др.* Словарь по кибернетике. Под ред. В.С. Михалевича. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Гл. ред. Укр. сов. энцикл., 1989. 751 с.
17. *Захаров В.М., Шалагин С.В.* О развитии аппаратных средств статистического моделирования // Тр. SORUCOM – 2014. III Международн. науч.-практ. конф. «Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и в странах бывшего СССР: история и перспективы». Казань, 13–17 окт. 2014 г. С. 103–108. URL: <https://computer-museum.ru/articles/materialy-mezhdunarodnoy-konferentsii-sorucum-2014/490/>.
18. *Шалагин С.В.* Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа: монография. Казань: Изд-во КНИТУ – КАИ, 2016. 228 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/149577>.

19. *Захаров В.М., Шалагин С.В., Эминов Б.Ф.* Автоматные марковские модели над конечным полем: монография. Казань: Спец. фонд упр. целев. капитал. для развит. КНИТУ – КАИ, 2022. 328 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/366542>.
20. *Захаров В.М., Шалагин С.В., Гумиров А.И.* Генератор дискретной случайной величины с заданным законом распределения в архитектуре ПЛИС/FPGA // Вестн. ДГУ. Сер. 1: Естеств. науки. 2023. Т. 38, № 3. С. 28–33. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33>.
21. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967. 499 с.
22. *Воронцова И.П.* Алгоритмы изменения переходных вероятностей стохастических автоматов // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1, вып. 3. С. 122–126. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ppi756>.
23. *Zacharov V.M., Kuznetsov S.E.* Complexity of the problem of approximation of stochastic matrix by rational elements // Budach L., Bukharaev R.G., Lupanov O.B. (Eds.) Fundamentals of Computation Theory: International Conference FCT'87 Kazan, USSR, June 22–26, 1987. Proceedings. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 278. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 483–487. https://doi.org/10.1007/3-540-18740-5_106.
24. *Шалагин С.В.* Решение задачи коммивояжера методом статистических испытаний при использовании сложных цепей Маркова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 639–650. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650>.
25. *Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.* Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автомат. и телемех. 1989. № 11. С. 3–26. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/at6463>.
26. *Quang T.L., Aibin M.* Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms. Baeldung. 2024. URL: <https://www.baeldung.com/cs/tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms>.
27. *Альпин Ю.А., Захаров В.М.* Теоретико-автоматный метод описания и моделирования случайных процессов // Вероятн. методы и киберн. 1983. Вып. 19. С. 10–16. URL: <https://eudml.org/doc/69222>.
28. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. Пер. с англ. А.О. Слисенко; под ред. Ю.В. Матиясевича. М.: Мир, 1979. 536 с.

References

1. Zakrevskii A.D. Implementation of random events with a given probability. *Tr. SFTI*, 1965, vol. 47, pp. 56–59. (In Russian)
2. Bukharaev R.G. Automaton conversion of probability sequences. *Veroyatn. Metody Kibern.*, 1966, vol. 1, pp. 24–33. (In Russian)
3. Chentsov V.M. A method of synthesizing an autonomous stochastic automaton. *Cybernetics*, 1968, vol. 4, no. 3, pp. 27–30. <https://doi.org/10.1007/BF01073919>.
4. Bukharaev R.G. *Veroyatnostnye avtomaty* [Probabilistic Automata]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1970. 188 p. (In Russian)
5. Pospelov D.A. *Veroyatnostnye avtomaty* [Probabilistic Automata]. Moscow, Energiya, 1970. 88 p. (In Russian)

6. Pollyak Yu.G. *Veroyatnostnoe modelirovanie na elektronnykh vychislitelnykh mashinakh* [Probabilistic Modeling on Electronic Computers]. Moscow, Sov. Radio, 1971. 400 p. (In Russian)
7. Gladkii V.S. *Veroyatnostnye vychislitelnye modeli* [Probabilistic Computational Models]. Moscow, Nauka, 1973. 300 p. (In Russian)
8. Walker A.I. An efficient method for generating discrete random variables with general distributions. *ACM Trans. Math. Software*, 1977, vol. 3, no. 3, pp. 253–256.
<https://doi.org/10.1145/355744.355749>.
9. Fedorov R.F., Yakovlev V.V., Dobris G.V. *Stokhasticheskie preobrazovateli informatsii* [Stochastic Information Converters]. Leningrad, Mashinostroenie, 1978. 304 p. (In Russian)
10. Chetverikov V.N., Bakanovich E.A., Menkov A.V. *Vychislitel'naya tekhnika dlya statisticheskogo modelirovaniya* [Computer Technology for Statistical Modeling]. Moscow, Sov. Radio, 1978. 312 p. (In Russian)
11. Bukharaev R.G. *Osnovy teorii veroyatnostnykh avtomatov* [Fundamentals of the Theory of Probabilistic Automata]. Moscow, Nauka, 1985. 287 p. (In Russian)
12. Pokhodzej B.B. Complexity of tabular methods for modeling finite discrete distributions. *Sov. Math.*, 1985, vol. 29, no. 7, pp. 64–72.
13. Levin B.R., Schwartz W. *Veroyatnostnye modeli i metody v sistemakh svyazi i upravleniya* [Probabilistic Models and Methods in Communication and Control Systems]. Moscow, Radio Svyaz', 1985. 312 p. (In Russian)
14. *Veroyatnostnye avtomaty i ikh prilozheniya (Dokl. simpoz., 6–8 iyunya 1983 g.)* [Probabilistic Automata and Their Applications (Proc. Symp., June 6–8, 1983)]. Zakharov V.M. (Ed.). Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1986. 212 p. (In Russian)
15. Chetverikov V.N., Bakanovich E.A. *Stokhasticheskie vychislitel'nye ustroystva sistem modelirovaniya* [Stochastic Computing Devices of Simulation Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 272 p. (In Russian)
16. Dorodnitsyn A.A. et al. *Slovar' po kibernetike* [Dictionary of Cybernetics]. Mikhalevich V.S. (Ed.). Kyiv, Gl. Red. Ukr. Sov. Entsikl., 1989. 751 p. (In Russian)
17. Zakharov V.M., Shalagin S.V. On the development of statistical modeling hardware. *Tr. SORUCOM–2014. III Mezhdunarodn. nauch.-prakt. konf. "Razvitie vychislitel'noi tekhniki i ee programmogo obespecheniya v Rossi i v stranakh byvshego SSSR: istoriya i perspektivy". Kazan', 13–17 okt. 2014 g.* [SORUCOM–2014. Proc. 3rd Int. Sci.-Pract. Conf. "The History of Computers and Informatics in the Soviet Union and Russian Federation: History and Prospects". Kazan, October 13–17, 2014]. Kazan, 2014, pp. 103–108. URL:
<https://computer-museum.ru/articles/materialy-mezhdunarodnoy-konferentsii-sorucm-2014/490/>. (In Russian)
18. Shalagin S.V. *Realizatsiya tsifrovyykh ustroystv v arkhitekture PLIS/FPGA pri ispol'zovanii raspredelennykh vychislenii v polyakh Galua: monografiya* [Implementing Digital Devices in FPGA Architecture When Using Distributed Computing in Galois Fields: A Monograph]. Kazan, Izd. KNITU – KAI, 2016. 228 p. URL: <https://e.lanbook.com/book/149577>. (In Russian)

19. Zakharov V.M., Shalagin S.V., Eminov B.F. *Avtomatnye markovskie modeli nad konechnym polem: monografiya* [Automata Markov Models over a Finite Field: A Monograph]. Kazan, Spets. Fond Upr. Tselevym Kapitalom Razvit. KNITU – KAI, 2022. 328 p.
URL: <https://e.lanbook.com/book/366542>. (In Russian)
20. Zakharov V.M., Shalagin S.V., Gumirov A.I. Discrete random variable generator with the given distribution law in FPGA-architecture. *Vestn. DGU. Ser. 1: Estestv. Nauki*, 2023, vol. 38, no. 3, pp. 28–33. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33>. (In Russian)
21. Feller W. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya* [An Introduction to Probability Theory and Its Applications]. Vol. 1. Moscow, Mir, 1967. 499 p. (In Russian)
22. Vorontsova I.P. Algorithms for changing stochastic automata transition probabilities. *Probl. Inf. Transm.*, 1965, vol. 1, no. 3, pp. 97–101. (In Russian)
23. Zacharov V.M., Kuznetsov S.E. Complexity of the problem of approximation of stochastic matrix by rational elements. In: Budach L., Bukharajev R.G., Lupanov O.B. (Eds.) *Fundamentals of Computation Theory: International Conference FCT'87 Kazan, USSR, June 22–26, 1987. Proceedings*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 278. Berlin, Heidelberg, Springer, 1987, pp. 483–487. https://doi.org/10.1007/3-540-18740-5_106.
24. Shalagin S.V. Solving the traveling salesman problem by statistical testing using complex Markov chains. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 639–650. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650>. (In Russian)
25. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
26. Quang T.L., Aibin M. Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms. Baeldung. 2024.
URL: <https://www.baeldung.com/cs/tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms>.
27. Al'pin Yu.A., Zakharov V.M. A theoretical automata method for describing and modeling random processes. *Veroyatn. Metody Kibern.*, 1983, vol. 19, pp. 10–16. URL: <http://eudml.org/doc/69222>. (In Russian)
28. Aho A., Hopcroft J., Ullman J. *Postroenie i analiz vychislitel'nykh algoritmov* [The Design and Analysis of Computer Algorithms]. Slisenko A.O. (Trans.), Matiyasevich Yu.V. (Ed.). Moscow, Mir, 1979. 536 p. (In Russian)

Информация об авторах

Вячеслав Михайлович Захаров, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: gilvv@mail.ru

Сергей Викторович Шалагин, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: sshalagin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2591-2749>

Author Information

Vyacheslav M. Zakharov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: gilvv@mail.ru

Sergei V. Shalagin, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: sshalagin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2591-2749>

Поступила в редакцию 24.02.2025

Принята к публикации 24.07.2025

Received February 24, 2025

Accepted July 24, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.544

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530>

Об одном способе выделения класса задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме

С.Н. Киясов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Sergey.Kijasov@kpfu.ru

Аннотация

Задача линейного сопряжения для двумерного кусочно-аналитического вектора сведена к эквивалентной задаче дробно-линейного сопряжения и установлена связь между решениями этих задач. Показано, что при известном частном решении задачи линейного сопряжения или соответствующей задачи дробно-линейного сопряжения каноническая система решений задачи линейного сопряжения может быть записана в замкнутой форме. Указаны соотношения между элементами гильдеровской матрицы-функции задачи линейного сопряжения, при выполнении которых задача дробно-линейного сопряжения имеет рациональное решение, что позволяет записать решение задачи линейного сопряжения в замкнутой форме.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация

Для цитирования: Киясов С.Н. Об одном способе выделения класса задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 519–530.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530>

A method of defining a class of linear conjugation problems for two-dimensional vector with closed-form solutions

S.N. Kiyasov

Kazan Federal University, Kazan, Russia

Sergey.Kiyasov@kpfu.ru

Abstract

The problem of linear conjugation for a two-dimensional piecewise analytic vector was reduced to an equivalent problem of fractional linear conjugation, and a connection between their solutions was established. It was shown that, once a particular solution of either problem is known, the canonical system of solutions of the linear conjugation problem can be written in closed form. The relations were specified between the elements of the Hölder matrix-function of the linear conjugation problem under which the fractional linear conjugation problem has a rational solution, thus enabling a closed solution of the linear conjugation problem.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, factorization

For citation: Kiyasov S.N. A method of defining a class of linear conjugation problems for two-dimensional vector with closed-form solutions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 519–530. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530>. (In Russian)

Введение

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$),

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma, \quad (1)$$

– матрица-функция второго порядка, H -непрерывная на Γ . Однородная задача линейного сопряжения для двумерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной вектор-функции $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z))$ с H -непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^\pm(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t), \quad (2)$$

или в скалярной форме – условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Качественная теория задачи (2) в классах гельдеровских функций (причем любой размерности) изложена в монографии [1], а сама задача находит приложения в различных разделах математики и механики, в частности, при изучении ортогональных систем полиномов и рациональных аппроксимаций матриц-функций, рассмотренных, например, в работах [2] и [3]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи (построение ее канонической матрицы ([1], с. 30–31) может быть записано в замкнутой форме. Одним из таких примеров служит решение задачи с треугольной матрицей-функцией второго порядка [4]. В работе [5] предложен конструктивный алгоритм решения задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций, в том числе для мероморфных матриц-функций второго порядка.

В работе автора [6] показано, что в случае произвольной размерности n при наличии $n - 1$ частного решения задачи линейного сопряжения (2) каноническая система решений задачи может быть построена в замкнутой форме. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть известно $n - 1$ решений задачи без конечных полюсов. Тогда, если определитель матрицы-функции, получаемый из прямоугольной матрицы-функции, столбцами которой служат компоненты этих решений, вычеркиванием строки с номером k ($1 \leq k \leq n$), не обращается в нуль в $D^+ \cup \Gamma$, а определитель матрицы-функции, получаемый вычеркиванием строки с номером s ($1 \leq s \leq n$), не имеет нулей в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$, то каноническая система решений может быть построена в замкнутой форме. В частности, предложенный метод может найти применение при решении задачи линейного сопряжения с треугольной и мероморфной матрицами-функциями, а также с матрицами-функциями, для которых могут быть найдены частные решения задачи линейного сопряжения.

Отметим, что подобного рода результат, основанный на «операторном подходе» к исследованию задачи, получен в работе [7].

Для двумерной задачи линейного сопряжения соответствующее утверждение работы [6] можно сформулировать следующим образом.

Пусть известно частное решения $\mathbf{w}_1(z)$ задачи (3) без конечных полюсов, одна из компонент которого $w_1^{1+}(z)$ или $w_1^{2+}(z)$ не имеет нулей в $D^+ \cup \Gamma$, а одна из его компонент $w_1^{1-}(z)$ или $w_1^{2-}(z)$ не обращается в нуль в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$. Тогда каноническая система решений задачи (3) строится в замкнутой форме.

Так, например, если $w_1^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно, то для первой вектор-функции канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z) = (v_1^1(z), v_1^2(z))$ получим на Γ представления

$$\begin{aligned} v_1^{1+} &= -w_1^{1+}P[K_1] + cw_1^{1+}, & v_1^{1-} &= w_1^{1-}Q[K_1] + cw_1^{1-}, \\ K_1 &= \frac{g_{12}p_1\Delta^-}{w_1^{1+}w_1^{1-}}, & v_1^{2\pm} &= -\frac{p_1\Delta^\pm - v_1^{1\pm}w_1^{2\pm}}{w_1^{1\pm}}, \end{aligned} \quad (4)$$

в которых $P = (I + S)/2$, $Q = (I - S)/2$ (I – единичный, а S – сингулярный операторы), $\Delta(t) = \det G(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$, $t \in \Gamma$, $p_1(z)$ – неопределенный полином степени, не превосходящей $2l + \varkappa$. Здесь l – порядок решения $\mathbf{w}_1(z)$ на бесконечности (положительный порядок означает порядок полюса), а \varkappa – суммарный индекс матрицы-функции $G(t)$, c – постоянная. Коэффициенты полинома $p_1(z)$ и постоянная c подбираются так, чтобы $\mathbf{v}_1(z)$ имела порядок $-\varkappa_1$ на бесконечности, самый низкий из возможных.

Вторая вектор-функция канонической системы решений $\mathbf{v}_2(z)$ находится как отличная от $\mathbf{v}_1(z)$, умноженной на некоторый полином, и имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa_2 = \varkappa_1 - \varkappa$ из аналогичных представлений, в которых $p_1(z)$ – неопределенный полином

степени, не превосходящей $l + \varkappa_1$, а c следует считать полиномом, степень которого должна быть такой, чтобы порядок слагаемого $cw_1^{1-}(z)$ на бесконечности был не выше $-\varkappa_2$.

В дальнейшем под решением задачи факторизации в замкнутой форме будем понимать запись решения задачи в интегралах типа Коши, как это принято в случае скалярной задачи Римана.

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение работы [8], поэтому приведем для удобства основные понятия и утверждения последней работы, которые будем использовать далее.

Определение 1. Пусть $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z))$ – кусочно-мероморфное решение задачи (3). Будем называть его решением с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, если на Γ

$$w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda(t), \quad w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \mu(t).$$

Всюду в дальнейшем, чтобы избежать рассмотрения тривиальных случаев, дополнительно предположим, что для этого решения $\lambda(t) \neq 0, \infty$ и $\mu(t) \neq 0, \infty$ на Γ . В этих предположениях отношения

$$\Phi^+(t) = w^{2+}(t)/w^{1+}(t), \quad \Phi^-(t) = w^{2-}(t)/w^{1-}(t), \quad (5)$$

как это следует из краевого условия (3), являются предельными значениями на Γ кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}(t)\Phi^+(t) - g_{22}(t)\Phi^-(t) + g_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = g_{21}(t). \quad (6)$$

Определение 2. Будем называть кусочно-мероморфное решение $\Phi(z)$ задачи (6) решением с парой (λ, μ) , если на Γ

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \lambda(t), \quad g_{22}(t) + g_{21}(t)/\Phi^-(t) = \mu(t).$$

Очевидно, если $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи (3) с парой (λ, μ) , то отношения (5) определяют предельные значения на Γ решения задачи (6) с той же парой (λ, μ) .

Обратно, если $\Phi(z)$ – решение задачи (6) с парой (λ, μ) , то, полагая на Γ

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \quad w^{2\pm}(t) = \Phi^\pm(t)w^{1\pm}(t), \quad (7)$$

получим решение задачи (3) с парой (λ, μ) , что следует из (7) и равенства

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\Phi^+(t)} \left(g_{22}(t) + \frac{g_{21}(t)}{\Phi^-(t)} \right).$$

1. Постановка задачи

Целью работы является получение соотношения между элементами матрицы-функции задачи, при выполнении которых каноническая система решений может быть записана в замкнутой форме.

Ответим сначала на почти очевидный вопрос: «Когда задача дробно-линейного сопряжения (6) может иметь своим частным решением рациональную функцию $(\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z))$?».

Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. Для того чтобы задача дробно-линейного сопряжения (6) имела своим частным решением рациональную функцию $R(z)$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из определенных на Γ функций

$$\frac{g_{22}(t) - g_{11}(t) \pm \sqrt{(g_{22}(t) - g_{11}(t))^2 + 4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)} \tag{8}$$

$$((g_{22}(t) - g_{11}(t))^2 + 4g_{12}(t)g_{21}(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma)$$

была равна $R(t)$, а при выполнении условия

$$(g_{22}(t) - g_{11}(t))^2 + 4g_{12}(t)g_{21}(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma, \tag{9}$$

имело место тождество

$$\frac{g_{22}(t) - g_{11}(t)}{2g_{12}(t)} \equiv R(t), \quad t \in \Gamma. \tag{10}$$

Если эти условия выполнены, то каноническая система решений задачи линейного сопряжения (3) может быть построена в замкнутой форме.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть задача дробно-линейного сопряжения (6) имеет своим частным решением рациональную функцию: $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z)$. Тогда из краевого условия (6) получим

$$g_{12}(t)R^2(t) + (g_{22}(t) - g_{11}(t))R(t) - g_{21}(t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma.$$

Таким образом, хотя бы одна из функций (8) или функция (10), при выполнении тождества (9), равна $R(t)$.

Достаточность. Докажем сначала вторую часть утверждения теоремы 1. Пусть выполнены тождества (9) и (10). Перепишем краевое условие (6) в виде

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) - \frac{2g_{12}(t)}{g_{22}(t) + g_{11}(t)} \left(\Phi^+(t) - \frac{g_{22}(t) - g_{11}(t)}{2g_{12}(t)} \right) \left(\Phi^-(t) - \frac{g_{22}(t) - g_{11}(t)}{2g_{12}(t)} \right), \quad t \in \Gamma,$$

который фактически аналогичен виду параболического дробно-линейного отображения комплексной плоскости с конечной и кратной неподвижной точкой ([9], с. 84). Справедливость этого представления проверяется непосредственно, если принять во внимание тождество (9). Поэтому, если отношение (10) является рациональной функцией, то $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z)$ будет решением задачи (6).

Пусть теперь одна из функций (8) есть рациональная функция. Положим для определенности, что функция

$$\frac{g_{22}(t) - g_{11}(t) + \sqrt{(g_{22}(t) - g_{11}(t))^2 + 4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)} \equiv R(t), \quad t \in \Gamma.$$

Так как

$$\frac{g_{22}(t) - g_{11}(t) - \sqrt{(g_{22}(t) - g_{11}(t))^2 + 4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)} \equiv -\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)},$$

перепишем краевое условие (6) в виде

$$(\Phi^+(t) - R(t)) \left(\Phi^-(t) + \frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)} \right) = K(t)(\Phi^-(t) - R(t)) \left(\Phi^+(t) + \frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)} \right),$$

в котором

$$K(t) = -\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R^2(t)} \left(\frac{g_{21}(t)}{g_{11}(t)} - R(t) \right) / \left(\frac{g_{21}(t)}{g_{11}(t)} + \frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)} \right)$$

– аналог гиперболического (эллиптического или локсодромического) дробно-линейного отображения комплексной плоскости с различными конечными неподвижными точками. Справедливость полученного представления также проверяется непосредственно, что и доказывает достаточность первого утверждения теоремы.

Покажем, что каноническая система решений задачи (3) может быть построена в замкнутой форме.

Предположим, что условия теоремы выполнены и определенная в (7) функция

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)R(t) \quad (11)$$

не обращается в нуль и бесконечность на Γ . Тогда, решив скалярную задачу Римана

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)R(t) = w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \quad t \in \Gamma,$$

в классе кусочно-голоморфных функций без нулей – каноническая функция задачи ([7], с. 107), получим частное решение задачи линейного сопряжения (3):

$$\mathbf{w}(z) = (w^1(z), R(z)w^1(z)).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $R(z) = p(z)$ – полином. Тогда решение

$$\mathbf{w}_1(z) = (w^1(z), p(z)w^1(z))$$

не будет иметь конечных полюсов, а первые его компоненты $w_1^{1\pm}(z) = w^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно. Поэтому каноническая система решений может быть построена по формулам (4).

Пусть $R(z) = 1/q(z)$, где $q(z)$ – полином. Тогда, положив $\mathbf{w}_1(z) = q(z)\mathbf{w}(z)$, получим решение задачи (3), равное

$$\mathbf{w}_1(z) = (q(z)w^1(z), w^1(z)),$$

у которого вторые компоненты $w_1^{2\pm}(z) = w^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно. Поэтому каноническая система решений также может быть построена по соответствующим формулам (4).

Пусть теперь $R(z) = p(z)/q(z)$, где $p(z), q(z)$ – полиномы, не имеющие общих нулей. В этом случае, также положив $\mathbf{w}_1(z) = q(z)\mathbf{w}(z)$, запишем решение задачи (3) в виде

$$\mathbf{w}_1(z) = (q(z)w^1(z), p(z)w^1(z)),$$

компоненты которого могут обращаться в нуль как на контуре, так и в соответствующих областях комплексной плоскости. Однако в силу условий, наложенных на функцию (11), отношение $g_{12}(t)/q(t)$ остается на Γ ограниченным. В этом случае в алгоритм построения канонической системы решений задачи (3) следует внести некоторые изменения. А именно, первую вектор-функцию канонической системы решений следует искать в виде

$$\begin{aligned} v_1^{1+} &= -w^{1+}P[K_2] + cw^{1+}, & v_1^{1-} &= w^{1-}Q[K_2] + cw^{1-}, \\ K_2 &= \frac{g_{12}p_1\Delta^-}{qw^{1+}w^{1-}}, & v_1^{2\pm} &= -\frac{p_1\Delta^\pm - pv_1^{1\pm}w^{1\pm}}{qw^{1\pm}}, \end{aligned}$$

где $c(z)$ – некоторый полином, для которого порядок на бесконечности слагаемого $c(z)w^{1-}(z)$ не должен превосходить порядка решения $\mathbf{w}_1(z)$ в рассмотренном случае. Так, если индекс Коши функции (11) равен $\tilde{\kappa}$ ($w^{1-}(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\kappa}$), то степень этого полинома не должна превосходить $-\tilde{\kappa} + \max(l_1, l_2)$, где l_1 и l_2 – степени полиномов $p(z)$ и $q(z)$ соответственно. Коэффициенты неопределенных полиномов $p_1(z)$ и $c(z)$ должны быть подобраны, как указано в формуле (4), а также «гасить» нули знаменателей в выражениях для $v_1^{2\pm}(z)$. Вторая вектор-функция канонической системы решений представима аналогичными формулами с учетом пояснений к формуле (4).

В случае, когда функция $g_{11}(t) + g_{12}(t)R(t)$ может иметь нули и особенности на контуре, алгоритм построения канонической системы решений также может быть реализован с привлечением теории краевой задачи Римана в исключительных случаях ([7], с. 130). Теорема доказана. \square

Пример 1. Рассмотрим матрицу-функцию

$$G(t) = \begin{pmatrix} g(t) & -\omega(t)/2 \\ \omega(t)/2 & g(t) + \omega(t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $g(t)$ и $\omega(t)$ – такие H -непрерывные на Γ функции, что определитель

$$\Delta(t) = \left(g(t) + \frac{\omega(t)}{2} \right)^2 \neq 0, \quad t \in \Gamma.$$

Для этой матрицы-функции выполнены тождества (9) и (10) теоремы 1 с $R(t) \equiv -1$. Поэтому функции $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = -1$ определяют частное решение задачи дробно-линейного сопряжения

$$g(t)\Phi^+(t) - (g(t) + \omega(t))\Phi^-(t) - \frac{\omega(t)}{2}\Phi^+(t)\Phi^-(t) = \frac{\omega(t)}{2}.$$

Будем считать, что для функции (11), которая в нашем случае имеет вид

$$g(t) + \frac{\omega(t)}{2} \tag{13}$$

и не обращается в нуль на Γ , индекс Коши равен $\tilde{\kappa}$. Обозначив через $w^\pm(z)$ каноническую функцию однородной скалярной задачи Римана с коэффициентом (13), получим, что $w^+(z)$ не имеет нулей в $D^+ \cup \Gamma$, а $w^-(z)$ не обращается в нуль в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ и имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\kappa}$. Частное решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (12), согласно (7), дается формулой

$$\mathbf{w}_1(z) = (w^1(z), -w^1(z)).$$

Первую вектор-функцию канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z) = (v_1^1(z), v_1^2(z))$ задачи запишем по формулам (4), в которой положим $p_1(z) \equiv 1$, $c = 0$:

$$\begin{aligned} v_1^{1+} &= \frac{w^{1+}}{2}P[K_3], & v_1^{1-} &= -\frac{w^{1-}}{2}Q[K_3], & K_3 &= \frac{\omega\Delta^-}{w^{1+}w^{1-}}, \\ v_1^{2+} &= -\frac{\Delta^+}{w^{1+}} - \frac{w^{1+}}{2}P[K_3], & v_1^{2-} &= -\frac{\Delta^-}{w^{1-}} + \frac{w^{1-}}{2}Q[K_3]. \end{aligned}$$

Так как $\Delta^-(z)$ имеет на бесконечности порядок $-2\tilde{\varkappa}$, то вектор-функция $\mathbf{v}_1(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$, и частный индекс \varkappa_1 матрицы-функции (12) равен $\tilde{\varkappa}$. За вторую вектор-функцию $\mathbf{v}_2(z)$ канонической системы решений возьмем ранее полученное решение $\mathbf{w}_1(z)$, также имеющее на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$, значит, $\varkappa_2 = \varkappa_1 = \tilde{\varkappa}$.

Проверка того, что матрица, столбцами которой служат компоненты вектор-функций $\mathbf{v}_1(z)$ и $\mathbf{v}_2(z)$, будет канонической матрицей рассмотренной задачи линейного сопряжения, проверяется непосредственно.

Выясним теперь, когда задача дробно-линейного сопряжения (6) может иметь своим частным решением рациональные функции

$$\Phi^+(z) = R(z), \quad \Phi^-(z) = R_1(z). \quad (14)$$

Пусть $R_1(z) = r(z)R(z)$, где $r(z)$ – некоторая рациональная функция. Тогда задача дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}(t)\Psi^+(t) - r(t)g_{22}(t)\Psi^-(t) + r(t)g_{12}(t)\Psi^+(t)\Psi^-(t) = g_{21}(t) \quad (15)$$

имеет своим частным решением

$$\Psi^+(z) = \Psi^-(z) = R(z). \quad (16)$$

Поэтому условия существования рационального решения (14) задачи (6) сводятся к условию существования у задачи (15) решения (16). Таким образом, необходимые и достаточные условия существования у задачи (6) решения (14) можно сформулировать в виде условий теоремы 1, в которых элементы $g_{12}(t)$ и $g_{22}(t)$ матрицы-функции $G(t)$ нужно заменить на $r(t)g_{12}(t)$ и $r(t)g_{22}(t)$ соответственно, где $r(z)$ – некоторая рациональная функция.

2. Обобщение полученного результата

Остановимся на случае матриц-функций, для которых условия теоремы 1 не выполняются. Рассмотрим матрицу-функцию $G_1(t) = F^+(t)G(t)F^-(t)$, $t \in \Gamma$, где

$$F^+ = \begin{pmatrix} f^+(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^- = \begin{pmatrix} f^-(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $f^\pm(t)$ – предельные значения функций, аналитических в соответствующих областях конечной плоскости.

Для матрицы-функции $G_1(t)$ с элементами

$$\tilde{g}_{11}(t) = f^+(t)f^-(t)g_{11}(t), \quad \tilde{g}_{22}(t) = g_{22}(t), \quad \tilde{g}_{12}(t) = f^+(t)g_{12}(t), \quad \tilde{g}_{21}(t) = f^-(t)g_{21}(t)$$

тождество (9) принимает вид

$$g_{11}^2(t)(f^+(t)f^-(t))^2 - 2(g_{11}(t)g_{22}(t) - 2g_{12}(t)g_{21}(t))f^+(t)f^-(t) + g_{22}^2(t) \equiv 0,$$

откуда

$$f^+(t)f^-(t) = \frac{\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}{g_{11}^2(t)}. \quad (17)$$

Рассмотрим задачу дробно-линейного сопряжения

$$\tilde{g}_{11}(t)\Phi^+(t) - \tilde{g}_{22}(t)\Phi^-(t) + \tilde{g}_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = \tilde{g}_{21}(t).$$

В силу теоремы 1 (выполнение тождеств (9) и (10)), условием существования у этой задачи решения $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z)$ служит условие

$$\frac{g_{22}(t) - f^+(t)f^-(t)g_{11}(t)}{2f^+(t)g_{12}(t)} = R(t), \quad t \in \Gamma. \tag{18}$$

Перепишем условие (18) в виде краевого условия скалярной задачи Римана для функций $1/f^+(z)$ и $f^-(z)$:

$$\frac{1}{f^+(t)} = \frac{g_{11}(t)}{g_{22}(t)}f^-(t) + 2\frac{R(t)g_{12}(t)}{g_{22}(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

Потребуем, чтобы элементы $g_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$, матрицы-функции (1) не имели нулей на Γ так, что представления $g_{11}(t) = g_{11}^+(t)g_{11}^-(t)$ и $g_{22}(t) = g_{22}^+(t)g_{22}^-(t)$ есть факторизации на Γ этих скалярных функций. Тогда кусочно-мероморфное решение задачи (18) (его предельные значения на контуре) запишем по формулам

$$f^+(t) = \frac{g_{22}^+(t)}{2g_{11}^+(t)(P[K_4(t)] + r(t))}, \quad f^-(t) = \frac{2g_{22}^-(t)(-Q[K_4(t)] + r(t))}{g_{11}^-(t)}, \tag{19}$$

$$K_4(t) = \frac{R(t)g_{12}(t)}{g_{11}^+(t)g_{22}^-(t)},$$

в которых $r(t)$ – рациональная функция. Если положить $r(t) \equiv c$, где c – постоянная, подобранная так, чтобы аналитические продолжения выражений, стоящих в круглых скобках (19), не имели нулей на Γ и в соответствующих областях, получим кусочно-голоморфное решение без конечных нулей. Этого всегда можно добиться в силу ограниченности операторов P и Q .

Подставив функции (19) в (17), придем к необходимости выполнения на Γ хотя бы одного из тождеств

$$g_{11}(t)g_{22}(t)(Q[K(t)] - r(t)) + (P[K(t)] + r(t)) \left(\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)} \right) \equiv 0$$

или тождеств

$$\frac{g_{12}(t)(\Delta(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}{g_{11}^+(t)g_{22}^-(t)}R(t) + \left(-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)} \right) S[K(t)] \equiv \tag{20}$$

$$\equiv -2r(t) \left(-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)} \right), \quad t \in \Gamma.$$

На тождества (20) можно смотреть как на сингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t)\varphi(t) + b(t)S[k(t)\varphi(t)] = 2r(t)b(t) \tag{21}$$

с коэффициентами, H -непрерывными на Γ , $r(t)$ – рациональная функция (в нашем случае $-r(t)$), хотя бы одно из которых имеет своим решением рациональную функцию $R(t)$.

Получим сначала условия, при выполнении которых решение этого уравнения будет функцией, мероморфно продолжимой в область D^+ или в область D^- . Введя на Γ новые неизвестные функции $\varphi^+(t) = P[k(t)\varphi(t)] - r(t)$ и $\varphi^-(t) = Q[k(t)\varphi(t)] + r(t)$, мероморфно продолжимые в соответствующие области, придем к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\varphi^+(t) = -\frac{a(t) - k(t)b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}\varphi^-(t), \quad t \in \Gamma. \quad (22)$$

На основе решения этой задачи в классе кусочно-мероморфных функций решение уравнения (21) определим по любой из формул

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^+(t) + \varphi^-(t)}{k(t)} = \frac{2b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}\varphi^-(t) = -\frac{2b(t)}{a(t) - k(t)b(t)}\varphi^+(t), \quad t \in \Gamma. \quad (23)$$

Значит, для мероморфной продолжимости решения уравнения в области D^+ или D^- необходимо и достаточно такой продолжимости для отношения

$$\frac{b(t)}{a(t) - k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (24)$$

или

$$\frac{b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (25)$$

соответственно.

Вернемся теперь к поставленному вопросу. Легко видеть, что решение $\varphi(z)$ задачи линейного сопряжения (22) будет иметь рациональную компоненту $\varphi^+(z)$ или $\varphi^-(z)$, если коэффициент этой задачи

$$G(t) = -\frac{a(t) - k(t)b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (26)$$

будет функцией, мероморфно продолжимой в области D^- или D^+ соответственно. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Решение уравнения (21) ($a(t), b(t), k(t) \in H(\Gamma), a(t) \pm k(t)b(t) \neq 0$) будет рациональной функцией, если выполнено одно из следующих условий:*

- A. *функция (26) мероморфно продолжима в область D^+ , а отношение (25) – рациональная функция;*
- B. *функция (26) мероморфно продолжима в область D^- , а отношение (24) – рациональная функция.*

Применив эту лемму к уравнению (20), в котором $r(t) \equiv -c$ – постоянная, подобранная так, как указано выше, рациональное решение этого уравнения получим по соответствующим формулам (23), а функции (19) в этом случае будут кусочно-голоморфными в конечной части плоскости. Тогда, согласно утверждению теоремы 1, каноническая система решений матрицы-функции $G_1(t)$, значит, и матрицы-функции $G(t)$ может быть найдена в замкнутой форме.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть для H -непрерывной на простом гладком замкнутом контуре Γ матрицы-функции (1) элементы $g_{11}(t)$ и $g_{22}(t)$ не обращаются в нуль, а одна из функций

$$\frac{g_{11}(t)g_{22}(t)}{\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}$$

ограничена на Γ .

Тогда, если соответствующая функция мероморфно продолжима в область D^+ и для нее отношение

$$\frac{g_{11}^+(t)g_{22}^-(t)(-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}{g_{12}(t)(\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}$$

– рациональная функция, либо эта функция мероморфно продолжима в область D^- , а отношение

$$\frac{-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}{g_{12}(t)g_{11}^-(t)g_{22}^+(t)}$$

– рациональная функция, то каноническая система решений задачи линейного сопряжения (3) может быть построена в замкнутой форме.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 380 с.
2. Deift P. Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach. Ser.: Courant Lecture Notes. V. 3. Am. Math. Soc., Courant Inst. Math. Sci., 2000. 261 p.
3. Aptekarev A.I., Van Assche W. Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight // J. Approximation Theory. 2004. V. 129, No 2. P. 129–166. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.06.001>.
4. Чеботарев Г.Н. Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // УМН. 1956. Т. 11, № 3. С. 199–202.
5. Адуков В.М. Факторизация Винера–Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 1. С. 54–74.
6. Киясов С.Н. Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 369–377.
7. Cătara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M. One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols // Linear Algebra Appl. 2014. V. 459. P. 58–82. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.038>.
8. Киясов С.Н. Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме // Изв. вузов. Матем. 2013. № 1. С. 3–20.
9. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969. 240 с.

References

1. Vekua N.P. *Sistemy singulyarnykh integral'nykh uravnenii* [Systems of Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1970. 380 p. (In Russian)
2. Deift P. *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach*. Ser.: Courant Lecture Notes. Vol. 3. Am. Math. Soc., Courant Inst. Math. Sci., 2000. 261 p.
3. Aptekarev A.I., Van Assche W. Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight. *J. Approximation Theory*, 2004, vol. 129, no. 2, pp. 129–166.
<https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.06.001>.
4. Chebotarev G.N. Partial indices for the Riemann boundary-problem with a triangular matrix of second order. *Usp. Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 3, pp. 199–202. (In Russian)
5. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Algebra Anal.*, 1992, vol. 4, no. 1, pp. 54–74. (In Russian)
6. Kiyasov S.N. Contribution to the general linear conjugation problem for a piecewise analytic vector. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 288–294.
<https://doi.org/10.1134/S003744661802012X>.
7. Câmara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M. One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols. *Linear Algebra Its Appl.*, 2014, vol. 459, pp. 58–82. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.038>.
8. Kiyasov S.N. Certain classes of problems on linear conjugation for a two-dimensional vector admitting explicit solutions. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 1, pp. 1–16.
<https://doi.org/10.3103/S1066369X13010015>.
9. Bitsadze A.V. *Osnovy teorii analiticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo* [Fundamentals of the Theory of Analytical Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1969. 240 p. (In Russian)

Информация об авторах

Сергей Николаевич Киясов, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Sergey.Kiyasov@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8352-3207>

Author Information

Sergey N. Kiyasov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: Sergey.Kiyasov@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8352-3207>

Поступила в редакцию 14.04.2025

Принята к публикации 5.07.2025

Received April 14, 2025

Accepted July 5, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.958; 535.4

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>**Модифицированный метод разделения переменных
в задаче дифракции ТЕ-волны на дифракционной
решетке с двухслойными штрихами на периоде****Ю.Г. Смирнов, В.Ю. Мартынова** ✉*Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия*✉ lynxbax@mail.ru**Аннотация**

Целью работы является исследование дифракции электромагнитной ТЕ-волны на многослойных дифракционных решетках с несколькими двухслойными штрихами на периоде. Рассматриваемые оптические структуры применяются для спектрального объединения лучей. Задача дифракции решена методом, основанным на модифицированном методе разделения переменных. В рамках такого подхода необходимо решить две одномерные краевые задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке с кусочно-постоянными коэффициентами. Каждая из краевых задач на собственные значения сводится к вычислению определителя второго порядка. Предложенный метод применен к решению задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на многослойных дифракционных решетках с несколькими различными конфигурациями, а также к расчету дифракционной эффективности таких оптических структур. Представлены численные результаты. Для моделирования дифракционных решеток выбраны материалы, используемые при создании тонкопленочных покрытий. Предложенный метод может быть использован для моделирования более сложных дифракционных решеток с многослойным отражающим покрытием.

Ключевые слова: дифракционная решетка, модифицированный метод разделения переменных, электромагнитная ТЕ-волна, дифракционная эффективность

Для цитирования: Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю. Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТЕ-волны на дифракционной решетке с двухслойными штрихами на периоде // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 531–546. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>

A modified method of variable separation for the problem of TE wave diffraction on a diffraction grating with two-layer lines in the period

Yu.G. Smirnov, V.Yu. Martynova ✉

Penza State University, Penza, Russia✉ lynxbax@mail.ru

Abstract

The diffraction of an electromagnetic TE wave on multilayer diffraction gratings with several two-layer lines in the period was investigated. Such optical structures are employed in spectral beam combining. The diffraction problem was solved by a modified method of variable separation, which requires the solution of two one-dimensional boundary value problems for eigenvalues of second-order differential equations on a segment with piecewise constant coefficients. Each of the boundary value problems for eigenvalues reduces to the calculation of a second-order determinant. The proposed method was applied to solve the problem of the electromagnetic TE wave diffraction on multilayer diffraction gratings with several different configurations, as well as to determine their diffraction efficiency. The numerical results were presented. For modeling the diffraction gratings, materials that are commonly used in thin-film coatings were selected. The method can be further developed to model more complex diffraction gratings with multilayer reflective coatings.

Keywords: diffraction grating, modified method of variable separation, electromagnetic TE wave, diffraction efficiency

For citation: Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu. A modified method of variable separation for the problem of TE wave diffraction on a diffraction grating with two-layer lines in the period. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 531–546. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>. (In Russian)

Введение

Многослойные дифракционные решетки находят важное применение в спектральном объединении лазерного излучения, где множество некогерентных лучей с различными длинами волн комбинируются в единый пучок [1–3]. Такая технология представляет собой компактный и эффективный метод получения высокомоощного излучения, поскольку суммарная мощность объединенного пучка равна сумме мощностей исходных лучей. Это обеспечивает возможность прямого контроля и наращивания выходной мощности.

Современные технологии изготовления многослойных дифракционных решеток достигли значительного прогресса [4], что теоретически позволяет формировать решетки

с несколькими штрихами в пределах одного периода. Однако практическое применение пока ограничено элементами с одинарным штрихом на период. Такие решетки демонстрируют высокую дифракционную эффективность, но имеют относительно узкую спектральную полосу шириной около 40–50 нм [5]. Увеличить рабочий диапазон рассматриваемых оптических структур удалось с использованием решеток с двухслойными штрихами на периоде [6, 7]. Приведенные результаты доказывают, что увеличение числа параметров решетки, по которым можно проводить оптимизацию, позволяет добиться значительного усовершенствования характеристик рассматриваемых оптических структур.

В настоящей работе описан численный метод решения задачи дифракции ТЕ-волны на многослойной дифракционной решетке с несколькими двухслойными штрихами на периоде. Предложенный метод основан на модифицированном методе разделения переменных [8, 9], который успешно применялся для исследования дифракционных решеток с несколькими цельными, но различными по ширине штрихами [10, 11]. Таким образом, разработанный метод позволяет анализировать более сложные оптические структуры с увеличенным числом параметров решетки, допускающих оптимизацию, что в будущем поможет конструировать дифракционные решетки с высокой дифракционной эффективностью в нужном порядке дифракции на широкой спектральной полосе [12].

1. Постановка задачи

Применение метода электронно-лучевого испарения, голографической литографии и ионно-лучевого травления позволяет из многослойного нанопокрывтия получить комбинацию дифракционной решетки с многослойным штрихом на периоде и слоистого отражающего покрытия [6, 7]. Геометрия описанной оптической структуры с двухслойными штрихами на периоде представлена на рис. 1. Будем использовать следующие обозначения: $T > 0$ – период дифракционной решетки, $h_1 > 0$ – высота гребня решетки, $h_2 > 0$ – высота нижнего слоя гребня решетки, $n(x, y)$ – показатель преломления, определяемый по формуле

$$n(x, y) = \begin{cases} n_{2,m}, & a_{2m-1} < x \leq a_{2m} \quad (m = \overline{1, N/2}), \quad h_2 < y \leq h_1; \\ n_{1,m}, & a_{2m-1} < x \leq a_{2m} \quad (m = \overline{1, N/2}), \quad 0 < y \leq h_2; \\ n_{0,j}, & d_j < y \leq d_{j-1} \quad (j = \overline{1, J}); \\ n_s, & y < d_J; \\ n_{0,0}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $n_{0,0} = n_0$ – индекс преломления свободного пространства, $N > 0$ – четное целое, $N/2$ – количество штрихов на периоде, $J \geq 0$ – количество слоев в отражающем покрытии, $a_m, m = \overline{0, N-1}$, – значения узлов в периоде решетки. Справедливо, что $a_0 = 0, a_N = T$. Величина шага в решетке $a_{m+1} - a_m, m = \overline{0, N-1}$, непостоянна, то есть рассматриваются неравномерные дифракционные решетки. Толщины слоев $d_j - d_{j+1}, j = \overline{0, J}$, также отличаются между собой, а $d_0 = 0$.

Считаем, что свободное от рассеивателя пространство характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$.

На решетку под углом φ падает электромагнитная ТЕ-волна. Угол падения волны зависит от ее длины и направления необходимого дифракционного порядка так, чтобы

выполнялось условие для спектрального объединения лазерного излучения [1–3]. Падающее электрическое поле определяется продольной составляющей

$$u_0 = \exp\{-ik_0 n_0 (x \sin \varphi - (y - h_1) \cos \varphi)\},$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число свободного пространства, а λ – длина волны.

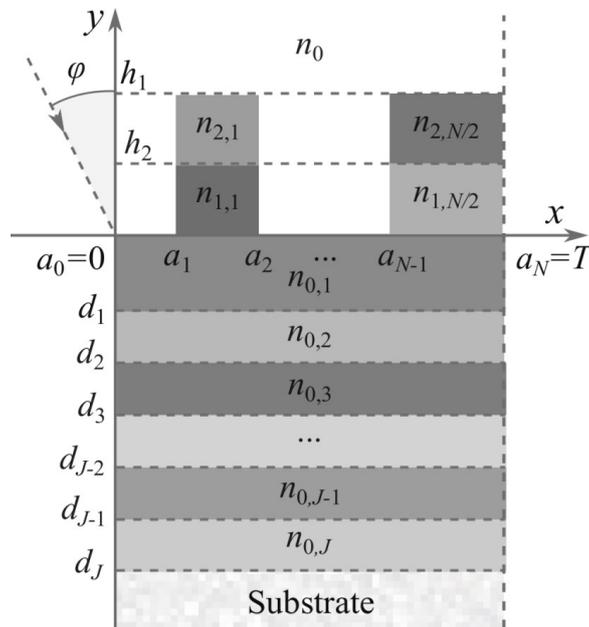


Рис. 1. Геометрия изучаемой оптической структуры

Fig. 1. Geometry of the studied optical structure

Требуется найти продольную составляющую полного электрического поля $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2 n^2(x, y)) u(x, y) = 0,$$

условию квазипериодичности Флоке [13]

$$u(x, y) = Au(x + T, y),$$

где $A = \exp\{ik_0 n_0 T \sin \varphi\}$, условию непрерывности на поверхности решетки, за исключением краев заземления и на границах раздела между слоями, условию излучения на бесконечности [14] и условию конечности энергии в каждой ограниченной пространственной области. Также необходимо определить значения дифракционной эффективности основных порядков дифракции [15, 16]. Заметим, что для постоянной, входящей в условие квазипериодичности Флоке, справедливо $|A| = 1$.

Согласно методу плоских волн [15] представление функции $u(x, y)$ имеет вид

$$u^{(0)}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x) e^{-ik_{0,y}l(y-h_1)}, \quad y > h_1; \tag{1}$$

$$u^{(j)}(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(p_l^{(j)} e^{ik_{j,y}(y-d_j)} + q_l^{(j)} e^{-ik_{j,y}(y-d_j)} \right), \quad d_j < y < d_{j-1}, \quad j = \overline{1, J}, \tag{2}$$

где

$$k_{j,yl} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_{0,j}^2 - k_{xl}^2}, & k_0 n_{0,j} > |k_{xl}|, \\ -i\sqrt{k_{xl}^2 - k_0^2 n_{0,j}^2}, & k_0 n_{0,j} < |k_{xl}|, \end{cases} \quad j = \overline{0, J+1},$$

$z_l(x) = e^{-ik_{xl}x}$, $j = \overline{1, J}$, $p_l^{(J+1)} \equiv t_l$, $q_l^{(J+1)} \equiv 0$, $d_0 = 0$, $k_{xl} = k_0 n_0 \sin \varphi - 2\pi l/T$. Коэффициенты r_l и t_l – неизвестные амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l -х мод.

Для удобства введем следующие обозначения

$$P_l^{(j)} = \exp\{ik_{j,yl}(d_{j-1} - d_j)\}, \quad Q_l^{(j)} = \exp\{-ik_{j,yl}(d_{j-1} - d_j)\}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

которые понадобятся нам далее. В работе [10] показано, что $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через амплитудный коэффициент прохождения t_l , $j = \overline{1, J}$. Таким образом, $p_l^{(1)} = \tilde{p}_l^{(1)} t_l$, $q_l^{(1)} = \tilde{q}_l^{(1)} t_l$, где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_l^{(j)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} + \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \\ \tilde{q}_l^{(j)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} - \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$j = \overline{1, J}, \quad \tilde{p}_l^{(J+1)} \equiv 1, \quad \tilde{q}_l^{(J+1)} \equiv 0.$$

Дифракционная эффективность в l -м порядке дифракции определяется выражением [15, 16]

$$DE_l = |r_l|^2 \Re \left(\frac{k_{0,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right) + |t_l|^2 \Re \left(\frac{k_{J+1,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right). \tag{3}$$

2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Искомая функция в области $V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, y > h_1\}$ представима в виде (1), а в областях $V_{j+2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, d_{j-1} < y < d_j\}$, $j = \overline{1, J}$, – в виде (2). Необходимо найти представление функции $u(x, y)$ в областях

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, h_2 < y < h_1\} \quad \text{и} \quad V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, 0 < y < h_2\}.$$

Выделим подобласти \bar{V}_1 и \bar{V}_2 в виде

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bigcup_{m=0}^{N-1} \bar{\Pi}_{1,m}, \quad \Pi_{1,m} = (a_m, a_{m+1}) \times (h_2, h_1), \quad m = \overline{0, N-1}, \\ \bar{V}_2 &= \bigcup_{m=0}^{N-1} \bar{\Pi}_{2,m}, \quad \Pi_{2,m} = (a_m, a_{m+1}) \times (0, h_2), \quad m = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Значения волнового числа в прямоугольниках $\Pi_{j,m}$ равны $\kappa_{j,2m} = k_0 n_0$, $\kappa_{j,2m+1} = k_0 n_{j,m+1}$, $m = \overline{0, N/2 - 1}$, $j = 1, 2$. Решение задачи в прямоугольниках $\bar{\Pi}_{j,m}$ будем искать в виде рядов [8]

$$u(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{j,l}(x) Y_{j,l}(y), \tag{4}$$

учитывая, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике $\Pi_{j,m}$, $j = 1, 2$, условиям сопряжения при $x = a_m$, $m = \overline{1, N-1}$, и условию квазипериодичности.

Применив метод разделения переменных, получим функции $Y_{j,l}$ в виде

$$\begin{aligned} Y_{1,l}(y) &= b_{1,1,l}e^{i(y-h_2)\sqrt{\lambda_{1,l}}} + b_{1,2,l}e^{-i(y-h_1)\sqrt{\lambda_{1,l}}}, \\ Y_{2,l}(y) &= b_{2,1,l}e^{iy\sqrt{\lambda_{2,l}}} + b_{2,2,l}e^{-i(y-h_2)\sqrt{\lambda_{2,l}}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $X_{j,l}(x)$, $j = 1, 2$, являются решениями следующих задач

$$\begin{aligned} \frac{X''_{j,l}}{X_{j,l}} + \kappa^2(x) &= \lambda_{j,l}, \quad \kappa^2(x) = \kappa_{j,m}^2, \quad x \in (a_m, a_{m+1}), \quad m = \overline{0, N-1}; \\ X_{j,l}(0) &= AX_{j,l}(T), \quad X'_{j,l}(0) = AX'_{j,l}(T); \quad [X_{j,l}] = [X'_{j,l}] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение (4)–(6) называется точным решением задачи дифракции, полученным модифицированным методом разделения переменных.

Решив задачи (6), получим представление для функций $X_{j,l}(x)$ в виде

$$X_{j,l}(x) = c_{j,m,l}f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) + d_{j,m,l}f_{c,jm}(\lambda_{j,l}), \quad x \in (a_m, a_{m+1}), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} f_{s,jm}(\lambda) &= \sin(\gamma_{j,m}(\lambda)(a_{m+1} - a_m)), \quad f_{c,jm}(\lambda) = \cos(\gamma_{j,m}(\lambda)(a_{m+1} - a_m)), \\ \gamma_{j,m}(\lambda) &= \sqrt{\kappa_{j,m}^2 - \lambda}, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Из условий сопряжения во внутренних узлах a_m , $m = \overline{1, N-1}$, получим систему из $2N - 2$ уравнений

$$\begin{aligned} d_{j,m+1,l} &= c_{j,m,l}f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) + d_{j,m,l}f_{c,jm}(\lambda_{j,l}), \\ c_{j,m+1,l} &= \frac{\gamma_{j,m}(\lambda_{j,l})}{\gamma_{j,m+1}(\lambda_{j,l})} (c_{j,m,l}f_{c,jm}(\lambda_{j,l}) - d_{j,m,l}f_{s,jm}(\lambda_{j,l})), \end{aligned} \tag{8}$$

где $j = 1, 2$, $m = \overline{0, N-2}$. Из условий квазипериодичности получим еще два уравнения

$$\begin{aligned} d_{j,0,l} &= Ac_{j,N-1,l}f_{s,jN-1}(\lambda_{j,l}) + Ad_{j,N-1,l}f_{c,jN-1}(\lambda_{j,l}), \\ c_{j,0,l} &= \frac{A\gamma_{j,N-1}(\lambda_{j,l})}{\gamma_{j,0}(\lambda_{j,l})} (c_{j,N-1,l}f_{c,jN-1}(\lambda_{j,l}) - d_{j,N-1,l}f_{s,jN-1}(\lambda_{j,l})). \end{aligned} \tag{9}$$

В результате имеем две однородные системы $2N$ уравнений относительно $c_{j,m,l}$, $d_{j,m,l}$, $j = 1, 2$, $m = \overline{0, N-1}$. Ненулевые решения таких систем существуют, только если определители их матриц равны нулю. Таким образом, задачи нахождения собственных значений $\lambda_{j,l}$ можно свести к вычислению определителей второго порядка.

Записав уравнения (8), (9) в матричной форме, получим

$$\begin{aligned} (c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top &= S_{j,m,l} (c_{j,m,l}, d_{j,m,l})^\top, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, N-2}, \\ (c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top &= Q_{j,l} (c_{j,N-1,l}, d_{j,N-1,l})^\top, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Приведем исходные системы к виду систем из двух уравнений с неизвестными $c_{j,0}$, $d_{j,0}$:

$$(c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top = Q_{j,l} S_{j,N-2,l} S_{j,N-3,l} \dots S_{j,0,l} (c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Из формул (10) найдем требуемые уравнения

$$\det(I - Q_{j,l} S_{j,N-2,l} S_{j,N-3,l} \dots S_{j,0,l}) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

В качестве $(c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top$ можно взять любое нетривиальное решение системы (10) при $\lambda = \lambda_{j,l}$, $j = 1, 2$.

Определив собственные значения $\lambda_{j,l}$ и собственные функции задач (6), получим из (4) представление решения $u(x, y)$ в конечных областях V_j с неизвестными коэффициентами $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$.

Заметим, что за счет выбора функций в (1), (2) и выполнения условий в (6), условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Далее, коэффициенты $r_l, t_l, b_{j,1,l}, b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$, найдем из условий сопряжения при $y = h_1, y = h_2, y = 0$:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y_{1,l}(h_1) = u_0(x, h_1) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) r_l, \quad (12)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y'_{1,l}(h_1) = u'_0(x, h_1) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k_{0,yl} z_l(x) r_l, \quad (13)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y_{1,l}(h_2) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y_{2,l}(h_2), \quad (14)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y'_{1,l}(h_2) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y'_{2,l}(h_2), \quad (15)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y_{2,l}(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) t_l, \quad (16)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y'_{2,l}(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i k_{1,yl} z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) t_l, \quad (17)$$

где в $u'_0(x, h_1)$ производная берется по y в точке h_1 .

Заметим, что выражения справа в формулах (12), (13), (16), (17) – это ряды Фурье функции на отрезке $[0, T]$. Умножив (12), (13), (16), (17) на соответствующие экспоненты и проинтегрировав полученные выражения и уравнения (14), (15) от 0 до T , построим четыре уравнения относительно $b_{j,1,l}, b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} - i k_{0,yl} \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{1,p}(x) Y_{1,p}(h_1) - u_0(x, h_1) \right) dx = \\ = \int_0^T e^{ik_{kl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{1,p}(x) Y'_{1,p}(h_1) - u'_0(x, h_1) \right) dx, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_{1,p}(x)Y_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \tag{19}$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_{1,p}(x)Y'_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} ik_{1,yl} \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{2,p}(x)Y_{2,p}(0) \right) dx = \\ = \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(0) \right) dx \end{aligned} \tag{21}$$

для всех целых l .

3. Численный метод решения задачи

Численное решение задачи дифракции, описанной в разделе 1, можно разделить на несколько этапов.

Прежде всего необходимо найти конечное нечетное количество собственных значений $\lambda = \lambda_{j,l}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, как решение уравнения (11), для каждого $j = 1, 2$, $M > 0$ – четное целое число. На этом этапе можно использовать любой из известных численных методов, позволяющих находить приближенное решение λ уравнения вида

$$F(\lambda) = 0.$$

Для данной задачи достаточно эффективным является метод перемены знака, поскольку он позволяет определять сразу несколько решений на заданном отрезке [17]. Следует заметить, что количество найденных собственных значений влияет на точность дальнейших вычислений. Тогда приближенное решение задачи дифракции в прямоугольниках $\bar{\Pi}_{j,m}$ представимо в виде

$$u(x, y) = \sum_{l=-M/2}^{M/2} X_{j,l}(x)Y_{j,l}(y),$$

где $j = 1, 2$.

Далее выберем вектора $(c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top$ как любое нетривиальное решение систем (11) для найденных собственных значений $\lambda = \lambda_{j,l}$, $j = 1, 2$, $l = \overline{-M/2, M/2}$. По ним вычислим все остальные коэффициенты $c_{j,m,l}$, $d_{j,m,l}$, $j = 1, 2$, $m = \overline{1, N-1}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, которые используем при определении функций $X_{j,l}(x)$ в областях V_j , $j = 1, 2$, по формулам (7).

На следующем этапе рассчитаем $4M + 4$ неизвестных коэффициентов $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, которые используем при определении функций $Y_{j,l}(y)$ в областях V_j , $j = 1, 2$, по формулам (5). Из уравнений (18)–(21) следует система $4M + 4$ уравнений:

$$\begin{aligned}
 -ik_{0,yl} \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p}(x)Y_{1,p}(h_1) - u_0(x, h_1) \right) dx = \\
 = \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p}(x)Y'_{1,p}(h_1) - u'_0(x, h_1) \right) dx, \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} (X_{1,p}(x)Y_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} (X_{1,p}(x)Y'_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 ik_{1,yl} \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p}(x)Y_{2,p}(0) \right) dx = \\
 = \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(0) \right) dx, \quad (25)
 \end{aligned}$$

где $l = \overline{-M/2, M/2}$. Интегралы в системе (22)–(25) вычислены аналитически.

Далее амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l -х мод можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
 r_l &= T^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p,l} Y_{1,p}(h_1), & l &= -M/2, \dots, -1, 1, \dots, M/2, \\
 r_0 &= T^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p,0} Y_{1,p}(h_1) - 1, \\
 t_l &= T^{-1} (\tilde{p}_l + \tilde{q}_l)^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p,l} Y_{2,p}(0), & l &= \overline{-M/2, M/2},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 X_{j,p,l} &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_l(a_m)}{\gamma_{j,m}^2(\lambda_{j,l}) - k_{xl}^2} [c_{j,m,l} \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) - id_{j,m,l} k_{xl} + \\
 &\quad + c_{j,m,l} z_l(a_{m+1} - a_m) (ik_{xl} f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) - \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) f_{c,jm}(\lambda_{j,l})) + \\
 &\quad + d_{j,m,l} z_l(a_{m+1} - a_m) (ik_{xl} f_{c,jm}(\lambda_{j,l}) + \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) f_{s,jm}(\lambda_{j,l}))].
 \end{aligned}$$

На данном этапе найдены все коэффициенты для расчета искомой функции $u(x, y)$ в любой точке пространства.

На заключительном этапе можно определить значения дифракционной эффективности необходимых порядков дифракции по формуле (3).

4. Результаты расчетов

С использованием разработанного метода найдена дифракционная эффективность в -1 -м дифракционном порядке в диапазоне длин волн от 1000 нм до 1100 нм для трех конфигураций многослойной дифракционной решетки с одним штрихом на периоде. Результаты расчетов представлены на рис. 2–4. Для расчетов были использованы параметры, аналогичные тем, что приведены в работе [5]. Период $T = 1040$ нм, $N = 2$, $a_1 = 0.44T$, $J = 22$, $d_0 - d_1 = 295$ нм, $d_{2j-1} - d_{2j} = 88.35$ нм ($j = \overline{1, 11}$), $d_{2j} - d_{2j+1} = 248.6$ нм ($j = \overline{1, 10}$).

Угол падения рассчитан по следующей формуле [6]

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2T}\right).$$

Таким образом, φ в рассматриваемом диапазоне длин волн от 1000 нм до 1100 нм изменяется примерно от 28.7° до 31.2° . Отражающее покрытие для всех рассмотренных конфигураций многослойной дифракционной решетки совпадает. Оно состоит из чередующихся слоев диоксида кремния (SiO_2) и оксида тантала (Ta_2O_5) так, что $n_{0,2j-1} = 1.44$, $n_{0,2j} = 2.15$, $j = \overline{1, 11}$. Кроме того, многослойная дифракционная решетка во всех трех случаях, представленных на рис. 2–4, помещена на подложку из оптического стекла с показателем преломления $n_s = 1.517$.

На рис. 2 представлен случай двухслойного штриха на периоде решетки. При этом высота гребня решетки $h_1 = 700$ нм, высота нижнего слоя штриха решетки $h_2 = 380$ нм. Верхний слой штриха дифракционной решетки состоит из оксида гафния (HfO_2) с показателем преломления $n_{2,1} = 1.9$, нижний слой штриха состоит из диоксида кремния (SiO_2) с показателем преломления $n_{1,1} = 1.44$. Важно заметить, что на рис. 2, а) дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции превышает 95% на диапазоне длин волн от 1000 нм до 1090 нм, а минимальное значение дифракционной эффективности при длине волны 1100 нм приблизительно равно 89.5%. На рис. 2, б) представлено уточнение решения в окрестности точки локального минимума при длине волны 1020 нм. Результаты расчетов показывают, что такое падение дифракционной эффективности не связано с вычислительным методом, а имеет физическую причину и объясняется дифракцией электромагнитной волны в этом диапазоне длин волн.

На рис. 3 представлен случай, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из оксида гафния (HfO_2). Для численного моделирования такой конфигурации решетки применим численный метод, описанный в работе [10]. Высота гребня решетки при этом составляет 700 нм, что соответствует предыдущему случаю, в котором и для верхнего, и для нижнего слоев штриха на периоде выбран один и тот же материал. Структура отражающего многослойного покрытия и подложки описаны выше. При такой конфигурации дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции значительно падает в первой половине выбранного диапазона. Следует подчеркнуть, что при длинах волн от 1000 нм до 1030 нм она опускается ниже 20%.

На рис. 4 представлен случай, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из диоксида кремния (SiO_2). Высота гребня снова 700 нм, а отражающее покрытие соответствует предыдущим случаям. На рис. 4 дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции нигде не превышает 90%, но не опускается ниже 40% на всем диапазоне.

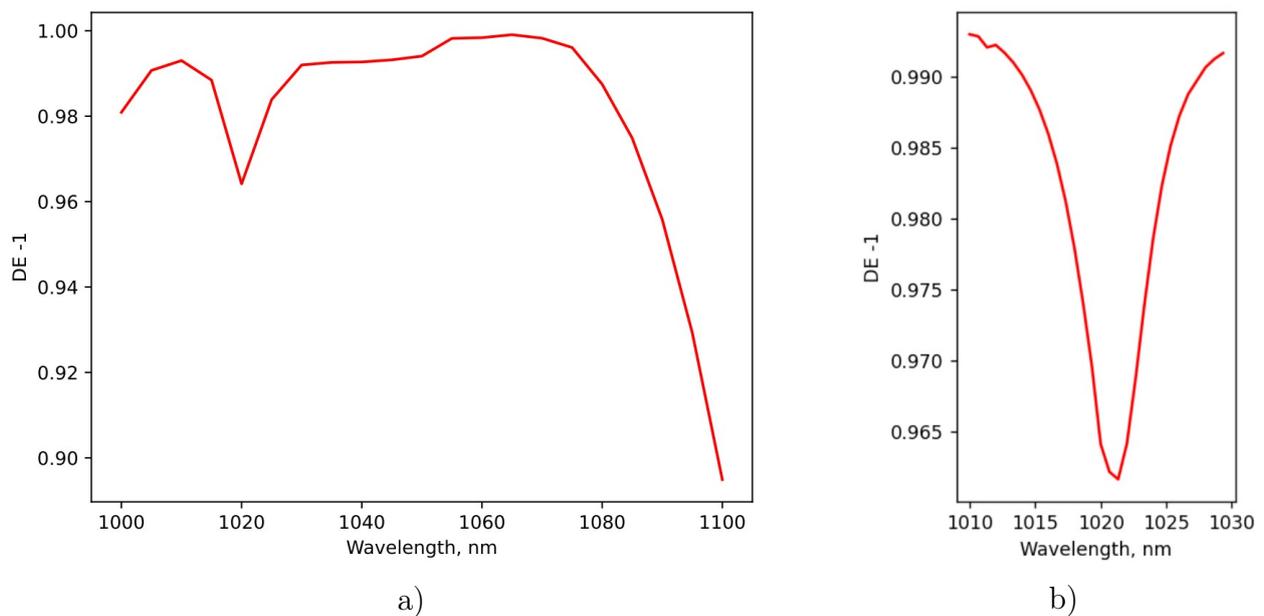


Рис. 2. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае двухслойного штриха на периоде решетки

Fig. 2. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case of a two-layer line in the grating period

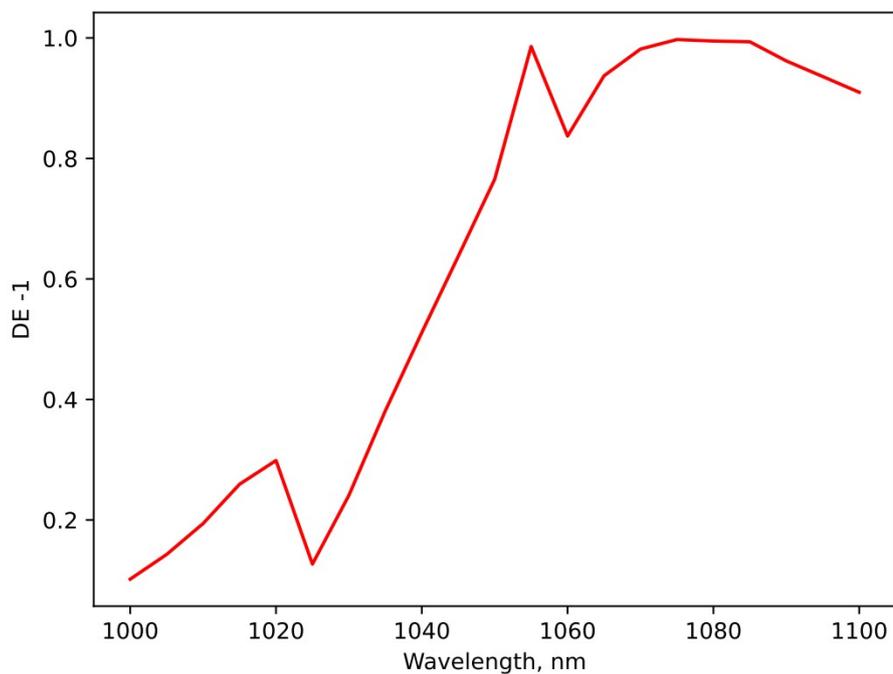


Рис. 3. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из оксида гафния (HfO_2)

Fig. 3. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case when a line in the grating period consists entirely of hafnium oxide (HfO_2)

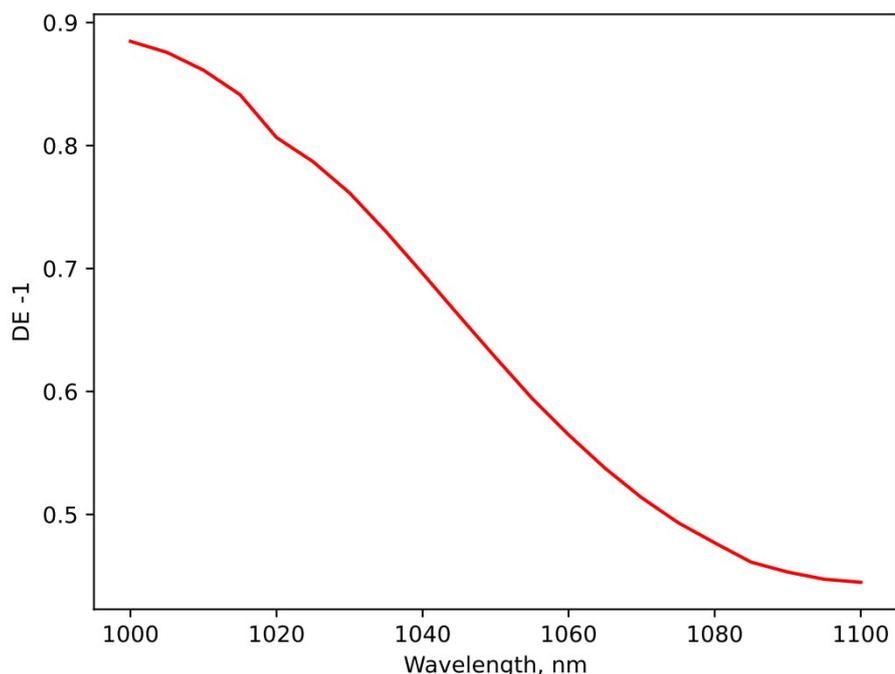


Рис. 4. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из диоксида кремния (SiO_2)

Fig. 4. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case when a line in the grating period consists entirely of silicon dioxide (SiO_2)

Численные результаты показывают, что использование двухслойного штриха на периоде многослойной дифракционной решетки позволяет повысить дифракционную эффективность в нужном порядке.

Заключение

Описано применение модифицированного метода разделения переменных для расчета полного электрического поля и дифракционной эффективности многослойной решетки с несколькими двухслойными штрихами на периоде в случае падения на нее ТЕ-волны. Численно показано преимущество дифракционных решеток с двухслойными штрихами на периоде. Предложенный метод позволяет моделировать дифракционные решетки с несколькими различными по ширине и составу штрихами на периоде. Разработанный подход допускает дальнейшее обобщение для структур, в которых каждый штрих решетки представляет собой многослойную систему, содержащую более двух материалов с различными оптическими характеристиками. Дальнейшая оптимизация рассматриваемой оптической структуры по дополнительным параметрам может повысить дифракционную эффективность решетки в нужном порядке дифракции, а также расширить рабочий диапазон длин волн. Кроме того, возможность моделирования дифракционных решеток с более сложной конфигурацией позволяет добиться повышения дифракционной эффективности в нужном порядке дифракции за счет применения оптимизации с использованием метода игольчатых вариаций [12, 18].

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Wirth C., Schmidt O., Tsybin I., Schreiber T., Eberhardt R., Limpert J., Tünnermann A., Ludewigt K., Gowin M., ten Have E., Jung M.* High average power spectral beam combining of four fiber amplifiers to 8.2 kW // *Opt. Lett.* 2011. V. 36, No 16. P. 3118–3120. <https://doi.org/10.1364/OL.36.003118>.
2. *Zheng Y., Yang Y., Wang J., Hu M., Liu G., Zhao X., Chen X., Liu K., Zhao C., He B., Zhou J.* 10.8 kW spectral beam combination of eight all-fiber superfluorescent sources and their dispersion compensation // *Opt. Express.* 2016. V. 24, No 11. P. 12063–12071. <https://doi.org/10.1364/OE.24.012063>.
3. *Петухов А.А.* Синтез высокоэффективных многослойных диэлектрических дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков // *Вычисл. методы и программир.* 2021. Т. 22, № 3. С. 201–210. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r312>.
4. *Smith D.J., McCullough M., Xu B., Smith S.D., Schattenburg M.L., Jitsuno T., Mikami T.* Large area pulse compression gratings fabricated onto fused silica substrates using scanning beam interference lithography // *Proc. 3rd Int. Conf. on Ultrahigh Intensity Lasers: Development, Science, and Emerging Applications (ICUIL'08).* Shanghai-Tongli, 2008. URL: <https://www.plymouthgrating.com/wp-content/uploads/2018/06/Large-Area-Pulse-Compression-Gratings-Fabricated-onto-Fused-Silica-ICUIL-2008.pdf>.
5. *Rumpel M., Moeller M., Moormann C., Graf T., Ahmed M.A.* Broadband pulse compression gratings with measured 99.7% diffraction efficiency // *Opt. Lett.* 2014. V. 39, No 2. P. 323–326. <https://doi.org/10.1364/OL.39.000323>.
6. *Liu Q., Jin Y., Wu J., Guo P.* Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating // *Proc. SPIE.* V. 10255, Pt. 1. Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016. Lv Y., Le J., Chen H., Wang J., Shao J. (Eds.). SPIE, 2017. Art. 1025514. <https://doi.org/10.1117/12.2266500>.
7. *Pan J., Li Ch., Chen X., Wu T., Xu G., Sun Sh.* Design of polarization-independent multilayer dielectric grating with broadband // *Proc. SPIE.* V. 12556. AOPC 2022: Optoelectronics and Nanophotonics. Cheng B., Guo J., Qian S. (Eds.). SPIE, 2023. Art. 125561M. <https://doi.org/10.1117/12.2651638>.
8. *Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю., Москалева М.А., Цунак А.А.* Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных // *Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки.* 2021. № 4. С. 57–70. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-4-5>.
9. *Смирнов Ю.Г.* Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной решетке // *Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки.* 2023. № 1. С. 3–14. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-1-1>.
10. *Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A.V.* Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 5. P. 1277–1284. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080303>.

11. Мартынова В.Ю., Смирнов Ю.Г., Тихонравов А.В. Численный метод оптимизации дифракционной эффективности тонкослойных покрытий с дифракционными решетками // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 3. С. 400–408. <https://doi.org/10.31857/S0374064123030111>.
12. Мартынова В.Ю., Смирнов Ю.Г., Тихонравов А.В. Оптимизация параметров многослойных дифракционных решеток с использованием игольчатых вариаций // Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки. 2022. № 4. С. 56–68. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2022-4-6>.
13. Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
14. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев: Наук. думка, 1986. 231 с.
15. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12, No 5. P. 1068–1077. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.001068>.
16. Popov E. Gratings: Theory and Numeric Applications. 2nd revisited ed. Inst. Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. 578 p.
17. Гусарова Е.В., Мартынова В.Ю., Медведев М.Ю. Расчет дифракционной эффективности в задаче проектирования многоуровневых дифракционных решеток // Вычисл. методы и программир. 2024. Т. 25, вып. 3. С. 336–346. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r326>.
18. Тихонравов А.В. О методе синтеза оптических покрытий, использующем необходимые условия оптимальности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1982. № 6. С. 91–93.

References

1. Wirth C., Schmidt O., Tsybin I., Schreiber T., Eberhardt R., Limpert J., Tünnermann A., Ludewigt K., Gowin M., ten Have E., Jung M. High average power spectral beam combining of four fiber amplifiers to 8.2 kW. *Opt. Lett.*, 2011, vol. 36, no. 16, pp. 3118–3120. <https://doi.org/10.1364/OL.36.003118>.
2. Zheng Y., Yang Y., Wang J., Hu M., Liu G., Zhao X., Chen X., Liu K., Zhao C., He B., Zhou J. 10.8 kW spectral beam combination of eight all-fiber superfluorescent sources and their dispersion compensation. *Opt. Express*, 2016, vol. 24, no. 11, pp. 12063–12071. <https://doi.org/10.1364/OE.24.012063>.
3. Petukhov A.A. Synthesis of highly efficient multilayer dielectric diffraction gratings for spectral combining of laser beams. *Numer. Methods Program.*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 201–210. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r312>. (In Russian)
4. Smith D.J., McCullough M., Xu B., Smith S.D., Schattenburg M.L., Jitsuno T., Mikami T. Large area pulse compression gratings fabricated onto fused silica substrates using scanning beam interference lithography. *Proc. 3rd Int. Conf. on Ultrahigh Intensity Lasers: Development, Science, and Emerging Applications (ICUIL'08)*. Shanghai-Tongli, 2008. URL: <https://www.plymouthgrating.com/wp-content/uploads/2018/06/Large-Area-Pulse-Compression-Gratings-Fabricated-onto-Fused-Silica-ICUIL-2008.pdf>.
5. Rumpel M., Moeller M., Moormann C., Graf T., Ahmed M.A. Broadband pulse compression gratings with measured 99.7% diffraction efficiency. *Opt. Lett.*, 2014, vol. 39, no. 2, pp. 323–326. <https://doi.org/10.1364/OL.39.000323>.

6. Liu Q., Jin Y., Wu J., Guo P. Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating. *Proc. SPIE*. Vol. 10255, Pt. 1. Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016. Lv Y., Le J., Chen H., Wang J., Shao J. (Eds.). SPIE, 2017, art. 1025514. <https://doi.org/10.1117/12.2266500>.
7. Pan J., Li Ch., Chen X., Wu T., Xu G., Sun Sh. Design of polarization-independent multilayer dielectric grating with broadband. *Proc. SPIE*. Vol. 12556. AOPC 2022: Optoelectronics and Nanophotonics. Cheng B., Guo J., Qian S. (Eds.). SPIE, 2023, art. 125561M. <https://doi.org/10.1117/12.2651638>.
8. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tsupak A.A. Study of diffraction efficiency of diffraction gratings by the modified method of variables separation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2021, no. 4, pp. 57–70. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-4-5>. (In Russian)
9. Smirnov Yu.G. A modified method for separating variables in the diffraction problem of TM-polarized wave on diffraction grating. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2023, no. 1, pp. 3–14. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-1-1>. (In Russian)
10. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A.V. Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1277–1284. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080303>.
11. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G., Tikhonravov A.V. A numerical method for the optimization of the diffraction efficiency of thin-layer coatings with diffraction gratings. *Differ. Equations*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 404–413. <https://doi.org/10.1134/S0012266123030114>.
12. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G., Tikhonravov A.V. Optimization of parameters of multilayer diffraction gratings using needle variations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2022, no. 4, pp. 56–68. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2022-4-6>. (In Russian)
13. Shestopalov V.P., Sirenko Yu.K. *Dinamicheskaya teoriya reshetok* [Dynamic Theory of Gratings]. Kyiv, Naukova Dumka, 1989. 216 p. (In Russian)
14. Shestopalov V.P., Kirilenko A.A., Masalov S.A., Sirenko Yu.K. *Rezonansnoe rasseyanie voln.* [Resonant Wave Scattering]. Vol. 1: Diffraction gratings. Kyiv, Naukova Dumka, 1986. 231 p. (In Russian)
15. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, vol. 12, no. 5, pp. 1068–1077. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.001068>.
16. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications*. 2nd revisited ed. Inst. Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. 578 p.
17. Gusarova E.V., Martynova V.Yu. Medvedik M.Yu. Calculation of diffraction efficiency in the problem of designing multilevel diffraction gratings. *Numer. Methods Program.*, 2024, vol. 25, no. 3, pp. 336–346. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r326>. (In Russian)
18. Tikhonravov A.V. A method of synthesis of optical coverings which uses the necessary optimality conditions. *Moscow Univ. Phys. Bull.*, 1982, vol. 37, no. 6, pp. 108–110.

Информация об авторах

Юрий Геннадьевич Смирнов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

Валерия Юрьевна Мартынова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: lynxbax@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9098-8600>

Author Information

Yury G. Smirnov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Head of Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University

E-mail: smirnovyug@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

Valeria Yu. Martynova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University

E-mail: lynxbax@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9098-8600>

Поступила в редакцию 16.06.2025

Принята к публикации 5.07.2025

Received June 16, 2025

Accepted July 5, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.946

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>О спектре оператора Шрёдингера системы трех частиц
на решеткеА.М. Халхужаев¹✉, Х.Г. Хайитова², И.А. Хужамиеров³¹Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова, г. Самарканд, Узбекистан²Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан³Узбекско-Финляндский педагогический институт, г. Самарканд, Узбекистан✉ ahmad_x@mail.ru

Аннотация

Рассмотрен трехчастичный дискретный оператор Шрёдингера $H_{\mu,\gamma}(K) \equiv H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, ассоциированный с системой трех частиц (две – фермионы с массой 1 и одна – другая частица с массой $m = 1/\gamma$), взаимодействующих с помощью парных отталкивающих контактных потенциалов $\mu > 0$ на трехмерной решетке \mathbb{Z}^3 . Найдены такие критические значения $\gamma_s(K)$ и $\gamma_{as}(K)$ отношений масс, что оператор $H_{\mu,\gamma}(K)$ при $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$ не имеет собственных значений, при $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$ имеет единственное значение, а при $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$ – три собственных значения, лежащих правее существенного спектра при достаточно больших $\mu > 0$.

Ключевые слова: решетка, гамильтониан, оператор Шрёдингера, контактный потенциал, фермион, собственное значение, квазиимпульс, инвариантное подпространство

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ж.И. Абдуллаеву за ценные обсуждения и полезные предложения.

Для цитирования: Халхужаев А.М., Хайитова Х.Г., Хужамиеров И.А. О спектре оператора Шрёдингера системы трех частиц на решетке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 547–565. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>

On the spectrum of the Schrödinger operator for a three-particle system on a lattice

A.M. Khalkhuzhaev¹ ✉, Kh.G. Khayitova², I.A. Khujamiyrov³

¹*Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan*

²*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

³*Uzbek-Finnish Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan*

✉ ahmad_x@mail.ru

Abstract

A three-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu,\gamma}(K) \equiv H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, which is associated with a system of three particles (two fermions of mass 1 and one other particle of mass $m = 1/\gamma$), interacting via pairwise repulsive contact potentials $\mu > 0$ on a three-dimensional lattice \mathbb{Z}^3 , was analyzed. Critical values of mass ratios $\gamma_s(K)$ and $\gamma_{as}(K)$ were determined such that the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has no eigenvalues if $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$, the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has a single eigenvalue if $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$, and the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has three eigenvalues lying to the right of the essential spectrum for sufficiently large $\mu > 0$ if $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$.

Keywords: lattice, Hamiltonian, Schrödinger operator, contact potential, fermion, eigenvalue, quasi-momentum, invariant subspace

Acknowledgments. J.I. Abdullaev is gratefully acknowledged for valuable discussions and helpful suggestions.

For citation: Khalkhuzhaev A.M., Khayitova Kh.G., Khujamiyrov I.A. On the spectrum of the Schrödinger operator for a three-particle system on a lattice. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 547–565. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>. (In Russian)

Введение

В работе изучены спектральные свойства семейства операторов

$$H_{\mu,\gamma}(K) := H_{0,\gamma}(K) + \mu(V_1 + V_2), \quad \mu, \gamma > 0, \quad (1)$$

определенных в гильбертовом пространстве $L^{2,as}([\mathbb{T}^3]^2)$ квадратично-интегрируемых и антисимметричных функций относительно перестановки переменных, где \mathbb{T}^3 – трехмерный тор (зона Бриллюэна) с единичной мерой $\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1$. Невозмущенный оператор $H_{0,\gamma}(K)$ в (1) есть оператор умножения на функцию

$$E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3,$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3, \quad (2)$$

а возмущения V_i определены как

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) ds, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) ds.$$

Оператор $H_{\mu,\gamma}(K)$ появляется как слойный оператор в разложении фон Неймана в прямой интеграл трехчастичного гамильтониана, связанного с квантовой системой, состоящей из двух одинаковых фермионов с массой 1 и другой частицы с массой $m = 1/\gamma$, движущихся по трехмерной решетке \mathbb{Z}^3 и взаимодействующих через парные контактные потенциалы (см., например, [1]).

Напомним, что Ефимов [2] впервые обнаружил эффект, впоследствии названный в его честь. Он заметил, что если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Дополнительную информацию об эффекте Ефимова можно найти в [3–5]. Кроме того, помимо эффекта Ефимова, некоторые достаточные условия существования собственных значений были получены, например, в [6, 7] для непрерывных операторов Шрёдингера и в [8, 9] для дискретного случая с использованием вариационных методов. Более того, вариационную технику можно применять не напрямую к оператору $H_{\mu,\gamma}(K)$, а к (компактному самосопряженному) оператору типа Фаддеева $F(K, z)$, полученному при исследовании уравнения собственных значений для $H_{\mu,\gamma}(K)$ ниже существенного спектра; известный эффект Ефимова также доказан с помощью $F(K, z)$ [4, 5, 10]. Вариационный метод хорошо работает и при малых размерностях $d = 1, 2$ (см., например, [9]), поскольку норма $F(K, z)$ взрывается вблизи нижнего края существенного спектра. Однако при высоких размерностях $d \geq 3$ оператор $F(K, z)$ ограничен до краев существенного спектра, поэтому вариационные методы не вполне эффективны. Более того, согласно дискретной версии HVZ-теоремы (см., например, [8]) существенный спектр не является полупрямой, а представляет собой объединение отрезков. Таким образом, собственные значения могут возникать и в промежутке между этими сегментами. Это создает серьезные технические трудности при исследовании явления *порога константы связи* [11] – появления собственных значений из существенного спектра.

Существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K))$ оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$, определенного по формуле (1), задается спектром $H_{0,\gamma}(K) + \mu V_1$ и состоит из объединения двух (возможно, взаимно пересекающихся) отрезков

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = [E_{\min,\gamma}(K), E_{\max,\gamma}(K)] \cup [\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)],$$

где $\tau_{\min,\gamma}(\mu, K)$ и $\tau_{\max,\gamma}(\mu, K)$ являются соответственно «наименьшей» и «наибольшей» связанными энергиями системы одного фермиона и третьей частицы (см. раздел 1 ниже). Можно показать, что $\tau_{\max}(\mu) \rightarrow +\infty$, когда $\mu \rightarrow +\infty$. Другими словами, «двухчастичная ветвь» существенного спектра $H_{\mu,\gamma}(K)$ сдвигается к $+\infty$, когда μ становится большим, и естественно ожидать, что она охватывает некоторую часть дискретного

спектра, которая растет медленнее. Поэтому для изучения собственных значений правее существенного спектра мы анализируем поведение компактного оператора типа Фаддеева $F_{\mu,\gamma}(K, z) := F(K, z)$, определенного ниже в (15), более тщательно проверяя условия, дающие собственные значения больше 1.

С помощью унитарного оператора $(Uf)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(-\mathbf{p}, -\mathbf{q})$ можно показать унитарную эквивалентность операторов $H_{\mu,\gamma}(K)$ и $H_{\mu,\gamma}(-K)$ для любого $K \in \mathbb{T}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $K \in [0, \pi]$.

Основная цель настоящей статьи – найти достаточные условия и изучить некоторые количественные свойства дискретного спектра, при которых существуют собственные значения оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ в случае, когда полный квазиимпульс $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3$ пробегает по диагонали первой зоны Бриллюэна, т. е. когда $K_1 = K_2 = K_3 = K \in \mathbb{T}$. Поскольку каждый V_i является положительным оператором, $H_{0,\gamma}(K) + \mu(V_1 + V_2)$ не может иметь дискретного спектра левее существенного спектра, значит, дискретные собственные значения появляются либо в промежутках между отрезками существенного спектра, либо правее существенного спектра.

Введем интегральный оператор $\mathbf{B}(K)$, $K \in \mathbb{T}$, ранга шесть, действующий в $L^2(\mathbb{T}^3)$, с ядром

$$\mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\left(C(p_i)C(q_i) - \sin p_i \sin q_i \right) \cos K + \left(C(q_i) \sin p_i + C(p_i) \sin q_i \right) \sin K}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}\sqrt{\varepsilon(\mathbf{q})}}, \quad (3)$$

где

$$C(p_i) = \cos p_i - W_1/W. \quad (4)$$

Интегралы Ватсона W и типа Ватсона W_1 соответственно равны

$$W = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} \approx 0,50623, \quad W_1 = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_1 ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} \approx 0,17239.$$

Положительные собственные значения оператора $B(K)$ имеют вид (см. леммы 12–14)

$$\lambda_s^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right],$$

$$\lambda_{as}^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right],$$

где

$$\lambda_s^+(0) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3 - 3\frac{W_1}{W})^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})} \approx 0.34013, \quad (5)$$

$$\lambda_s^+(\pi) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_1 + \sin q_2 + \sin q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_2 - \sin q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} d\mathbf{q} = \lambda_{as}^+(\pi) \approx 0.21016, \quad (6)$$

$$\lambda_{as}^+(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_2 - \cos q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})} = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(2 \cos q_1 - \cos q_2 - \cos q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} d\mathbf{q} \approx 0.18551. \quad (7)$$

Пусть

$$\gamma_s(K) = \frac{1}{\lambda_s^+(K)} \quad \text{и} \quad \gamma_{as}(K) = \frac{1}{\lambda_{as}^+(K)}.$$

Отметим, что $\gamma_s(\pi) = \gamma_{as}(\pi)$, а при $K \neq \pi$ выполняется неравенство $\gamma_s(K) < \gamma_{as}(K)$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, $K \neq \pi$.

- (а) Для каждого $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$ существует такое $\mu_0(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_0(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра;
- (б) для каждого $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$ существует такое $\mu_1(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_1(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ имеет единственное собственное значение, лежащее правее существенного спектра;
- (с) для каждого $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$ существует такое $\mu_3(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_3(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ имеет ровно три собственных значения с учетом кратности, лежащих правее существенного спектра.

Замечание 1. Если $K = \pi$, то $\gamma_s(\pi) = \gamma_{as}(\pi)$, и при $\mu > \mu_3(\gamma, \pi)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(\pi)$ имеет единственное трехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра (см. [1]).

Уместны некоторые комментарии к основным результатам.

- С физической точки зрения наши результаты применимы в теории сильно взаимодействующих ультрахолодных атомов (см., например, [12] и ссылки в ней; также [13], где обсуждаются вопросы существования одномерных слабосвязанных триммеров с сильными локальными взаимодействиями).
- Применив теорию возмущений, можно показать, что полученные результаты относительно числа собственных значений сохраняются при малой окрестности $\mathbf{K} = (K, K, K)$.
- Теорема 1 обобщает результаты работ [14] и [1], где было найдено число собственных значений оператора $H_{\mu, \gamma}(K)$ при $\mathbf{K} = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ и $\mathbf{K} = \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$ соответственно, и разъяснено изменение критических значений отношений масс, а также собственных функций, когда полный квазиимпульс \mathbf{K} пробегает от начала координат до (π, π, π) по диагонали.

1. О спектре двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке

Для изучения спектра оператора (1) сначала изучим спектр оператора, соответствующего системе двух частиц (фермион и другая частица) на \mathbb{Z}^3 .

Двухчастичный дискретный оператор Шрёдингера $h_{\mu, \gamma}(\mathbf{k})$ действует в $L^2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_{\mu, \gamma}(\mathbf{k}) = h_{0, \gamma}(\mathbf{k}) + \mu v,$$

где

$$(h_{0, \gamma}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \gamma}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \tag{8}$$

функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ определена по формуле (2),

$$(vf)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Приведем некоторые известные факты, которые относятся к спектру оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ (см. [1]).

Существенный спектр $\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}))$ оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$, совпадает со спектром $\sigma(h_{0,\gamma}(\mathbf{k}))$ невозмущенного оператора $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$, т. е. $\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) = [\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k})]$, где $\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})$, $\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})$.

Пусть $z \in (\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}), +\infty)$ и $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ – детерминант Фредгольма оператора $I - \mu v r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$, где $r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ – резольвента оператора $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$, v – интегральный оператор с ядром $v(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1$. Функция $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ имеет вид

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{q}}{z - \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})}. \tag{9}$$

Лемма 1. Число $z \in (\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}), +\infty)$ является собственным значением оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 0$.

Пусть

$$\mu_0(\gamma) = (1 + \gamma) \frac{1}{W}.$$

Лемма 2. а) При $\mu > \mu_0(\gamma)$ оператор $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ имеет единственное простое собственное значение $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$, лежащее правее существенного спектра;

б) собственное значение $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = z_{\mu,\gamma}(k_1, k_2, k_3)$ – симметричная функция относительно перестановки переменных k_i, k_j , четна по $k_i \in [-\pi, \pi]$ и монотонно убывает по $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 3. Для каждого $\gamma > 0$ и $\mu > 3(1 + \gamma)$ имеют место оценки

$$\mu + 3(1 + \gamma) < z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) < \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{9(1 + \gamma)^2}{\mu}. \tag{10}$$

Лемма 4. Для каждого $\gamma > 0$ имеет место асимптотика

$$z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^3 (1 + 2\gamma \cos k_i + \gamma^2) + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right) \tag{11}$$

при $\mu \rightarrow \infty$ равномерно по $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$.

Доказательство. Из неравенства (10) можно установить, что

$$z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{c_0(\gamma, k)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right), \quad \mu \rightarrow \infty. \tag{12}$$

Отсюда, учитывая равенства (2) и (8) для достаточно больших $\mu > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})} &= \frac{1}{\mu + \xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu} + O(1/\mu^2)} = \\ &= \frac{1}{\mu \left[1 + \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} + \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right]} = \\ &= \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{(\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}))^2}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Используя равенства

$$\int_{\mathbb{T}^3} [\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^{2n-1} d\mathbf{q} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} [\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 d\mathbf{q} = \frac{1}{2}(3 + 2\gamma\xi(\mathbf{k}) + 3\gamma^2),$$

из соотношений $\Delta_\mu(\mathbf{k}, z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) \equiv 0$ и (13) получим

$$\frac{1}{\mu} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{(\xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}))^2}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right] d\mathbf{q} =$$

$$= \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\gamma^2 + \gamma\xi(\mathbf{k}) \right) + O(1/\mu^4) \right].$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов убедимся, что

$$c_0(\gamma, k) = \frac{3}{2}(1 + \gamma)^2 + \gamma\varepsilon(\mathbf{k}).$$

Отсюда и из (12) следует искомое равенство (11). □

2. Существенный спектр трехчастичного оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ и принцип Бирмана – Швингера

Для каждого $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$ обозначим

$$E_{\min,\gamma}(K) = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad E_{\max,\gamma}(K) = \max_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

$$\tau_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}) = z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}), \tag{14}$$

$$\tau_{\min,\gamma}(\mu, K) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\}, \quad \tau_{\max,\gamma}(\mu, K) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\},$$

где $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$ – собственное значение оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$. Существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K))$ оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$, определенного по формуле (1), состоит из объединения двух отрезков

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = [E_{\min,\gamma}(K), E_{\max,\gamma}(K)] \cup [\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)].$$

Доказательство аналогичного утверждения приведено в работе [15].

Отрезки $[\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)]$ и $[E_{\min,\gamma}(K), E_{\max,\gamma}(K)]$ называют «двухчастичной ветвью» и «трехчастичной ветвью» существенного спектра $H_{\mu,\gamma}(K)$ соответственно.

Нас интересует дискретный спектр оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ при достаточно больших $\mu > 0$ и фиксированном $\gamma > 0$. Из утверждения и структуры существенного спектра следует (см. [1]), что двухчастичная ветвь $[\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)]$ существенного спектра сдвигается к $+\infty$ с порядком μ при $\mu \rightarrow +\infty$. Поэтому в дальнейшем предположим, что $z \geq \sup \sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)$.

Отметим, что оператор $H_{\mu,\gamma}(K)$ не имеет собственных значений ниже $E_{\min,\gamma}(K)$ (см. [1], теорема 5).

Теперь найдем эквивалентное уравнение для собственных функций трехчастичного оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$, $K \in \mathbb{T}$. Для каждого $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ зададим самосопряженный оператор $F_{\mu,\gamma}(K, z)$ по формуле

$$(F_{\mu,\gamma}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{(z - E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}, \quad (15)$$

который определен в подпространстве

$$D(F_{\mu,\gamma}(K, z)) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{T}^3) : \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{q}, z)}} = 0 \right\},$$

где

$$\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}, z) := \Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}, z - \varepsilon(\mathbf{p})), \quad (16)$$

функция $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ находится по формуле (9).

Лемма 5. Число $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ является собственным значением оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 является собственным значением оператора $F_{\mu,\gamma}(K, z)$.

Доказательство леммы 5 имеется в работе [1], поэтому мы его не приводим.

Лемма 6. Для любого $\gamma > 0$ существует такое $\mu > 3(1 + \gamma)$, что для любых $\mu > \mu_\gamma$ функция $\mathbf{p} \rightarrow \Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p})$ имеет единственную максимальную точку

$$\mathbf{p}_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = (p_{\mu,\gamma}^{\max}(K), p_{\mu,\gamma}^{\max}(K), p_{\mu,\gamma}^{\max}(K)).$$

При этом имеет место

$$p_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = \pi - \frac{\gamma \sin K}{\mu} + O(\mu^{-3}), \quad \mu \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\mu > 3(1 + \gamma)$ и $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) > 0$ – единственный нуль функции $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, \cdot)$. Используя равенство (11), представим функцию $\tau_{\mu,\gamma}(K, p)$, определенную по формуле (14), в виде суммы

$$\tau_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}) = \tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \mathbf{p}) + \tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p}),$$

где

$$\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \tau_{\mu,\gamma}(K, p_i), \quad (17)$$

$$\tau_{\mu,\gamma}(K, x) = \frac{\mu}{3} + (2 + \gamma) + \frac{1}{2\mu}(1 + \gamma^2) - \cos x + \frac{\gamma}{\mu} \cos(K - x), \quad x \in (-\pi, \pi],$$

а функция $\tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})$ и все частные производные удовлетворяют неравенству

$$|\tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})| \leq \frac{C}{\mu^3}, \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})}{\partial p_1^{\alpha_1} \partial p_2^{\alpha_2} \partial p_3^{\alpha_3}} \right| \leq \frac{C}{\mu^3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+,$$

равномерно по $K \in \mathbb{T}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3$, при достаточно больших $\mu > 0$.

Из равенства (17) следует, что задача об экстремумах функции $\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \cdot)$ сводится к задаче нахождения экстремумов функции $\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \cdot)$ одной переменной на \mathbb{T} .

Таким образом, если x – критическая точка функции $\tau_{\mu,\gamma}(K, x)$, то

$$\frac{d}{dx}\tau_{\mu,\gamma}(K, x) = \sin x - \frac{\gamma}{\mu} \sin(x - K) = 0$$

либо

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\mu} \cos K\right) \sin x + \frac{\gamma}{\mu} \sin K \cos x = 0.$$

Отсюда получим

$$\sin(x + \theta) = 0, \tag{18}$$

где $\theta = \theta(K)$ определяется из равенств

$$\cos \theta = \frac{1 - \frac{\gamma}{\mu} \cos K}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}, \quad \sin \theta = \frac{\frac{\gamma}{\mu} \sin K}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}.$$

Решение уравнения (18) в $(-\pi, \pi]$ имеет вид

$$x_1 = -\arcsin \frac{\gamma \sin K}{\mu \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} + \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}$$

или

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{\gamma \sin K}{\mu \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} + \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}.$$

Кроме того, верны неравенства

$$\frac{d^2\tau_{\mu,\gamma}(K, x_1)}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2\tau_{\mu,\gamma}(K, x_2)}{dx^2} < 0.$$

Теперь, используя разложения в ряд Тейлора $(1+u)^{-1/2}$ и $\arcsin u$ в окрестности $u = 0$, найдем следующую асимптотику для x_2 :

$$x_2 = p_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = \pi - \frac{\gamma \sin K}{\mu} + O(\mu^{-2}), \quad \mu \rightarrow +\infty.$$

□

Замечание 2. Предельный оператор

$$\lim_{z \rightarrow \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)} F_{\mu,\gamma}(K, z) = F_{\mu,\gamma}(K, \tau_{\max,\gamma}(\mu, K))$$

является компактным самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{T}^3)$.

Доказательство этого свойства непосредственно вытекает из утверждения леммы 6.

Обозначим через $n[\lambda, A]$ число собственных значений самосопряженного оператора A , которые больше $\lambda > 0$. Верно следующее утверждение, называемое принципом Бирмана–Швингера [16].

Лемма 7. Пусть $\mu > \mu_0(\gamma)$. Тогда для каждого $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ имеет место равенство

$$n[z, H_{\mu,\gamma}(K)] = n[1, F_{\mu,\gamma}(K, z)].$$

3. О дискретном спектре оператора $F(K, z) := F_{\mu, \gamma}(K, z)$

Используя равенство $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$ ($x \neq -1$) и учитывая обозначение (2), получим

$$\frac{1}{z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{1}{a(\gamma, z)} \left(1 - \frac{\zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{a(\gamma, z)} + \frac{\zeta^2(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{a(\gamma, z)(z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))} \right), \tag{19}$$

где

$$a(\gamma, z) = z - 6 - 3\gamma \text{ и } \zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \xi(\mathbf{p}) + \xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{K} - (\mathbf{p} + \mathbf{q})).$$

Используя равенство (19), представим оператор $F(K, z)$ в виде суммы

$$F(K, z) = F^{(p)}(K, z) + R_F(K, z) \tag{20}$$

Конечномерный оператор

$$(F^{(p)}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu}{a^2(\gamma, z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) - a(\gamma, z))\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}$$

назовем «главной частью» оператора $F(K, z)$, а оператор

$$(R_F(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = -\frac{\mu}{a^2(\gamma, z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\zeta^2(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{(z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}$$

– «остаточной частью» оператора $F(K, z)$. Докажем, что $\|F^{(r)}(K, z)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ (см. лемму 15).

Пусть $\Phi := \Phi(K, z)$ – одномерное подпространство, натянутое на функцию

$$\varphi_K(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{c(K, z)}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}},$$

где $c(K, z)$ – нормирующий множитель, т. е.

$$\frac{1}{c(K, z)} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{p}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}. \tag{21}$$

Обозначим через \mathbb{Q} оператор проектирования на подпространство

$$D(F(K, z)) = L^2(\mathbb{T}^3) \ominus \Phi.$$

Пусть $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z) = \mathbb{Q}F^{(p)}(K, z)\mathbb{Q}$ – сужение оператора $F^{(p)}(K, z)$ на подпространство $D(F(K, z))$, где

$$(\mathbb{Q}\varphi)(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) - (\varphi, \varphi_K)\varphi_K(\mathbf{p}), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

После элементарных вычислений получим

$$(F_{\mathbb{Q}}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu\gamma}{a^2(\gamma, z)\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, z; \mathbf{p})}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} F(K, z, p_i, q_i) \frac{\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}},$$

$$F(K, z; p_i, q_i) = \left[\left(C(K, z; p_i)C(K, z; q_i) - S(K, z; p_i)S(K, z; q_i) \right) \cos K + \right. \\ \left. + \left(C(K, z; q_i)S(K, z; p_i) + C(K, z; p_i)S(K, z; q_i) \right) \sin K \right], \\ C(K, z; p_i) = \cos p_i - c(K, z) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q_i d\mathbf{q}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}, \tag{22}$$

$$S(K, z; p_i) = \sin p_i - c(K, z) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin q_i d\mathbf{q}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Лемма 8. При всех $\mu > 6(1+\gamma)$ и $z \in (\tau_{\max, \gamma}(\mu, K), +\infty)$ имеют место соотношения

$$\frac{(z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - 6 - 6\gamma)(z - 12 - 6\gamma)}{\mu(z - z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))} \leq \frac{1}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)} \leq \frac{z \cdot z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p})}{\mu(z - z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))},$$

где $z_{\mu, \gamma}(\mathbf{p})$ – собственное значение двухчастичного оператора $h_{\mu, \gamma}(\mathbf{p})$.

Кроме того, верна асимптотика

$$\frac{1}{\Lambda_{\mu, \gamma}(\mathbf{p}, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K))} = \frac{\mu}{\varepsilon(\mathbf{p})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right), \quad \mu \rightarrow \infty. \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.4 работы [14]. □

Лемма 9. Верны следующие асимптотики при $\mu \rightarrow \infty$:

$$C(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K); p_i) = \cos p_i - \frac{W_1}{W} + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad S(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K); p_i) = \sin p_i + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Доказательство. Из равенства $\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin p_i d\mathbf{p}}{\varepsilon(\mathbf{p})} = 0$ и соотношений (21)–(24) непосредственно вытекают искомые равенства. □

Лемма 10. Пусть $\gamma > 0$. При $\mu \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K), \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \gamma \mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right)$$

равномерно по $K \in \mathbb{T}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3$, где через $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ обозначено ядро интегрального оператора $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z)$, а функция $\mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ определена по формуле (3).

Доказательство. По формуле (10) для любого $K \in \mathbb{T}$ имеет место

$$a(\gamma, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)) = \mu - 3 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{25}$$

при $\mu \rightarrow \infty$. Для удобства обозначим

$$B(K, p_i, q_i) = \left(C(p_i)C(q_i) - \sin p_i \sin q_i \right) \cos K + \left(C(q_i) \sin p_i + C(p_i) \sin q_i \right) \sin K.$$

Из леммы 8, равенств (16) и (25) при $\mu \rightarrow +\infty$ получим

$$\begin{aligned} & F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K), p, q) = \\ &= \frac{\mu^2 \gamma}{\left(\mu - 3 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\left(B(K, p_i, q_i) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})} \sqrt{\varepsilon(\mathbf{q})}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) = \\ &= \gamma \mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \end{aligned}$$

□

Обозначим через $L^{2,s}(\mathbb{T}^3) \subset L^2(\mathbb{T}^3)$ подпространство симметричных функций относительно перестановки любых двух переменных, т. е.

$$L^{2,s}(\mathbb{T}^3) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{T}^3) : g(p_1, p_2, p_3) = g(p_2, p_1, p_3) = g(p_3, p_2, p_1) = g(p_1, p_3, p_2) \right\},$$

а через $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$ – подпространство антисимметричных функций относительно замены второго и третьего аргументов, т. е.

$$L^{2,as}(\mathbb{T}^3) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{T}^3) : g(p_1, p_2, p_3) = -g(p_1, p_3, p_2) \right\}.$$

Обозначим через $L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$ ортогональное дополнение пространства $L^{2,s}(\mathbb{T}^3) \oplus L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$.

Лемма 11. Подпространства $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$, $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$ и $L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$ инвариантны относительно операторов $\mathbf{B}(K)$, $F^{(p)}(K, z)$ и $F(K, z)$.

Доказательство. Доказательство леммы тривиально. □

Обозначим через P^s оператор проектирования $L^2(\mathbb{T}^3)$ на $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$, т. е.

$$\begin{aligned} (P^s g)(\mathbf{p}) = & \frac{1}{6} \left[g(p_1, p_2, p_3) + g(p_2, p_1, p_3) + g(p_3, p_1, p_2) + \right. \\ & \left. + g(p_1, p_3, p_2) + g(p_2, p_3, p_1) + g(p_3, p_2, p_1) \right]. \end{aligned}$$

Сужение $B^s(K) = P^s \mathbf{B}(K) P^s$ оператора $\mathbf{B}(K)$ на подпространство $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$ является оператором ранга два и действует по формуле

$$\begin{aligned} (B^s(K)\psi)(\mathbf{p}) = & \int_{\mathbb{T}^3} \left[\left(\lambda_s^+(0) C(\mathbf{p}) C(\mathbf{q}) - \lambda_s^+(\pi) S(\mathbf{p}) S(\mathbf{q}) \right) \cos K + \right. \\ & \left. + \sqrt{\lambda_s^+(0) \lambda_s^+(\pi)} \left(S(\mathbf{p}) C(\mathbf{q}) + C(\mathbf{p}) S(\mathbf{q}) \right) \sin K \right] \psi(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \end{aligned}$$

где нормированные функции \mathbf{C} и \mathbf{S} ортогональны и определены по формулам

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(0)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}} \sum_{i=1}^3 C(p_i), \quad \mathbf{S}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(\pi)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}} \sum_{i=1}^3 \sin p_i,$$

а $C(p_i)$ – по формуле (4).

Лемма 12. Оператор $\mathbf{B}^s(K)$ имеет два ненулевых собственных значения

$$\lambda_s^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right] > 0, \quad (26)$$

$$\lambda_s^-(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K - \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right] < 0, \quad (27)$$

где $\lambda_s^+(\pi)$ и $\lambda_s^+(0)$ определены по формулам (5) и (6).

Доказательство. Пусть уравнение

$$(\mathbf{B}^s(K)g)(\mathbf{p}) = \lambda\psi(\mathbf{p}) \quad (28)$$

имеет ненулевое решение $\psi \in L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$. Введем обозначения

$$\alpha_1 = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{C}(\mathbf{q})g(\mathbf{q})d\mathbf{q}, \quad (29)$$

$$\alpha_2 = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{S}(\mathbf{q})g(\mathbf{q})d\mathbf{q}. \quad (30)$$

Используя их, перепишем уравнение (28) в виде

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda} \left[(\lambda_s^+(0)\mathbf{C}(\mathbf{p}) \cos K + \sqrt{\lambda_s^+(\pi)\lambda_s^+(0)}\mathbf{S}(\mathbf{p}) \sin K)\alpha_1 + \right. \\ \left. + (\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) \sin K - \lambda_s^+(\pi)\mathbf{S}(\mathbf{p}) \cos K)\alpha_2 \right]. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (29) и (30) и учитывая обозначения (5)–(7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_s^+(0) \cos K) \alpha_1 - (\sqrt{\lambda_s^+(\pi)\lambda_s^+(0)} \sin K) \alpha_2 = 0, \\ -(\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K) \alpha_1 + (\lambda + \lambda_s^+(\pi) \cos K) \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Решая квадратное уравнение относительно λ , найдем его решения, которые имеют вид (26) и (27). \square

Найдем вид собственной функции, соответствующей положительному собственному значению $\lambda_s^+(K)$. Из первого уравнения системы (32) получим

$$\alpha_2 = \frac{(\lambda_s^+(K) - \lambda_s^+(0) \cos K)\alpha_1}{\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K}, \quad K \neq 0, \pi.$$

Полагая $\alpha_1 = \sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K$, имеем

$$\alpha_2 = \lambda_s^+(K) - \lambda_s^+(0) \cos K.$$

Используя эти равенства, из (29) найдем явный вид элемента из пространства собственных функций:

$$g_K^s(\mathbf{p}) = \sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(K)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) \sin K + (\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K) \cos K)\sqrt{\lambda_s^+(\pi)}\mathbf{S}(\mathbf{p}), \quad K \neq 0.$$

Отсюда следует, что нормированная собственная функция имеет вид

$$\psi_K^s(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_s^+(0)}\lambda_s^+(K) \sin K}{a_s(K)} \mathbf{C}(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_s^+(\pi)}}{a_s(K)} \mathbf{S}(\mathbf{p}),$$

где

$$a_s(K) = \sqrt{\lambda_s^+(0)(\lambda_s^+(K) \sin K)^2 + \lambda_s^+(\pi)(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K) \cos K)^2}.$$

В случае $K = \pi$ собственная функция выражается как

$$\psi_\pi^s(\mathbf{p}) = \mathbf{S}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(\pi)}} \frac{\sin p_1 + \sin p_2 + \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

При $K = 0$ собственную функцию определим как предел

$$\lim_{K \rightarrow 0} \psi_K^s(\mathbf{p}) = \psi_0^s(\mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(0)}} \frac{\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3 - 3\frac{W_1}{W}}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Пусть P_{23}^{as} – оператор проектирования $L_2(\mathbb{T}^3)$ на подпространство $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$:

$$(P_{23}^{as}\psi)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\psi(p_1, p_2, p_3) - \psi(p_1, p_3, p_2) \right].$$

Обозначим через $\mathbf{B}^{as}(K) = P_{23}^{as}\mathbf{B}(K)P_{23}^{as}$ сужение оператора $\mathbf{B}(K)$ на подпространство $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$. Проведя нужные вычисления, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{as}(K)\psi)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} & \left[(\lambda_{as}^+(0)\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{q}) - \lambda_{as}^+(\pi)\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{q})) \cos K + \right. \\ & \left. \sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)}(\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{q}) + \mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{q})) \sin K \right] \psi(\mathbf{q})d(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

где нормированные функции \mathbf{C}_{23}^{as} и \mathbf{S}_{23}^{as} ортогональны и определены формулами

$$\mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(0)}} \frac{\cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}, \quad \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{\sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Лемма 13. *Оператор $\mathbf{B}^{as}(K)$ имеет два ненулевых собственных значения*

$$\lambda_{as}^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right] > 0,$$

$$\lambda_{as}^-(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K - \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right] < 0,$$

где $\lambda_{as}^+(\pi)$ и $\lambda_{as}^+(0)$ определены формулами (5) и (7).

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 12. \square

Нормированная собственная функция, соответствующая положительному собственному значению $\lambda_{as}^+(K)$, имеет вид

$$\psi_K^{as}(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(K)} \sin K}{a_{as}(K)} \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_{as}^+(\pi)}}{a_{as}(K)} \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}), \quad K \neq 0,$$

где $a_{as}(K)$ – нормирующий множитель, т. е.

$$a_{as}(K) = \sqrt{\lambda_{as}^+(0)(\lambda_{as}^+(K) \sin K)^2 + \lambda_{as}^+(\pi)(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K)^2}.$$

В случае $K = \pi$ собственная функция выражается как

$$\psi_\pi^{as}(\mathbf{p}) = \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{\sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

При $K = 0$ собственную функцию определим как предел

$$\lim_{K \rightarrow 0} \psi_K^{as}(\mathbf{p}) = \psi_0^{as}(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(0)}} \frac{\cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Полагая $P^\perp = I - P_{123}^s - P_{23}^{as}$, из равенства $\mathbf{B}^\perp(K) = P^\perp \mathbf{B}(K) P^\perp$ определим сужение $\mathbf{B}(K)$ на $L^{2,\perp}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^\perp(K)\psi)(\mathbf{p}) = & \int_{\mathbb{T}^3} \left[(\lambda_{as}^+(0) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{q}) - \lambda_{as}^+(\pi) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{q})) \cos K + \right. \\ & \left. + \sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} (\mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{q}) + \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{q})) \sin K \right] \psi(\mathbf{q}) d(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

где нормированные функции \mathbf{C}_{23}^s и \mathbf{S}_{23}^s ортогональны и определяются по формулам

$$\mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_{as}^+(0)}} \frac{2 \cos p_1 - \cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}, \quad \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{2 \sin p_1 - \sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Лемма 14. *Операторы $\mathbf{B}^{as}(K)$ и $\mathbf{B}^\perp(K)$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Унитарность операторов осуществляется с помощью унитарного оператора $U : L^{2,as}(\mathbb{T}^3) \rightarrow L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$, и

$$U \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) \\ \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Замечание 3. Собственные значения операторов $\mathbf{B}^{as}(K)$ и $\mathbf{B}^\perp(K)$ совпадают. Собственная функция оператора $\mathbf{B}^\perp(K)$, соответствующая собственному значению $\lambda_\perp^+(K) = \lambda_{as}^+(K)$, имеет вид

$$\psi_K^\perp(\mathbf{p}) = (U\psi_K^{as})(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(K)} \sin K}{a_{as}(K)} \mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_{as}^+(\pi)}}{a_{as}(K)} \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}).$$

Лемма 15. Пусть $\gamma > 0$. Тогда существует такое $\mu_\gamma > 0$, что для любого $\mu > \mu_\gamma$ верна оценка

$$\|R_F(z)\| \leq \frac{C}{\mu},$$

которая выполняется равномерно по $z \geq \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)$, $K \in \mathbb{T}$, где C – положительная константа, зависящая только от γ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.5 из работы [14].

Доказательство теоремы 1. (а) Пусть $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$. Из равенства (20) и утверждения леммы 15 следует, что существует такое $\mu_0(\gamma, K) > 0$, что для всех $\mu > \mu_0(\gamma, K)$ операторы $F(K, z)$ и $F^{(p)}(K, z)$ имеют одинаковое число собственных значений, больших 1:

$$n[1, F(K, z)] = n[1, F^{(p)}(K, z)].$$

Число собственных значений оператора $F^{(p)}(K, z)$, больших 1, равно числу собственных значений оператора $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z) = \mathbb{Q}F^{(p)}(K, z)\mathbb{Q}$, больших 1.

По лемме 10 числа собственных значений, больших 1, операторов $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K))$ и $\gamma\mathbf{B}(K)$ совпадают при $\mu > \mu_0(\gamma, K)$. Из утверждений лемм 12–14 можно заключить, что оператор $\gamma\mathbf{B}(K)$ имеет три положительных собственных значения с учетом кратности: $\gamma\lambda_s^+(K)$, $\gamma\lambda_{as}^+(K) = \gamma\lambda_{\perp}^+(K)$. Так как $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$, то выполнены неравенства

$$\gamma\lambda_s^+(K) < 1, \quad \gamma\lambda_{as}^+(K) < 1,$$

и по лемме 7 оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ не имеет собственных значений $z > \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)$ при $\mu > \mu_0(\gamma, K)$.

Аналогично могут быть доказаны утверждения (b) и (c).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Хужамиеров И.А. Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Изв. вузов. Матем. 2023. № 2. С. 3–25. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-2-3-25>.
2. Efimov V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system // Phys. Lett. B. 1970. V. 33, No 8. P. 563–564. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(70\)90349-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(70)90349-7).
3. Ovchinnikov Yu.N., Sigal I.M. Number of bound states of three-particle systems and Efimov's effect // Ann. Phys. 1989. V. 123, No 2. P. 274–295. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90339-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90339-7).
4. Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Commun. Math. Phys. 1993. V. 156, No 1. P. 101–126. <https://doi.org/10.1007/BF02096734>.
5. Tamura H. Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect // Yajima K. (Ed.) Spectral and Scattering Theory and Applications: Conf. on Spectral and Scattering Theory, Celebrating ShigeToshi Kuroda June 30–July 3, 1992. Ser.: Advanced Studies in Pure Mathematics. V. 23. Tokyo: Tokyo Inst. Technol., 1994. P. 311–322. <https://doi.org/10.2969/aspm/02310311>.

6. *Chadan K., Martin A.* A sufficient condition for the existence of bound states in a potential without spherical symmetry // *J. Phys. Lett.* 1980. V. 41, No 9. P. 205–206.
<https://doi.org/10.1051/jphyslet:01980004109020500>.
7. *Liu Y., Yu Y.-C., Chen S.* Three-body bound states of two bosons and one impurity in one dimension // *Phys. Rev. A.* 2021. V. 104, No 3. Art. 033303.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.033303>.
8. *Kholmatov Sh.Yu., Muminov Z.I.* Existence of bound states of N -body problem in an optical lattice // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2018. V. 51, No 26. Art. 265202.
<https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac534>.
9. *Lakaev S.N., Dell'Antonio G.F., Khalkhuzhaev A.M.* Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2016. V. 49, No 14. Art. 145204.
<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/14/145204>.
10. *Lakaev S.N.* On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles // *Funct. Anal. Its Appl.* 1993. V. 27, No 3. P. 166–175. <https://doi.org/10.1007/BF01087534>.
11. *Klaus M., Simon B.* Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case // *Ann. Phys.* 1980. V. 130, No 2. P. 251–281.
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(80\)90338-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3).
12. *Valiente M., Zinner N.T.* Strongly Interacting Quantum Systems. V. 1: Few-body physics. Ser.: IOP Series in Quantum Technology. Bristol: IOP Publ., 2023. 218 p.
<https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3087-9>.
13. *Valiente M., Petrosyan D., Saenz A.* Three-body bound states in a lattice // *Phys. Rev. A.* 2010. V. 81, No 1. Art. 011601(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.011601>.
14. *Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A.* On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the $2 + 1$ fermionic trimer on the lattice // *Nanosyst.: Phys., Chem., Math.* 2023. V. 14, No 5. P. 518–529. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-5-518-529>.
15. *Халхужаев А.М.* Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора, соответствующего системе трех фермионов на решетке // *Изв. вузов. Матем.* 2017. № 9. С. 76–88.
16. *Dell'Antonio G.F., Muminov Z.I., Shermatova V.M.* On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2011. V. 44, No 31. Art. 315302. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/31/315302>.

References

1. Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A. Existence condition for the eigenvalue of a three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 1–22. <https://doi.org/10.3103/S1066369X23020019>.
2. Efimov V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Phys. Lett. B*, 1970, vol. 33, no. 8, pp. 563–564. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(70\)90349-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(70)90349-7).
3. Ovchinnikov Yu.N., Sigal I.M. Number of bound states of three-particle systems and Efimov's effect. *Ann. Phys.*, 1989, vol. 123, no. 2, pp. 274–295.
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90339-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90339-7).

4. Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics. *Commun. Math. Phys.*, 1993, vol. 156, no. 1, pp. 101–126. <https://doi.org/10.1007/BF02096734>.
5. Tamura H. Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect. In: Yajima K. (Ed.) *Spectral and Scattering Theory and Applications: Conf. on Spectral and Scattering Theory, Celebrating ShigeToshi Kuroda June 30–July 3, 1992*. Ser.: Advanced Studies in Pure Mathematics. Vol. 23. Tokyo, Tokyo Inst. Technol., 1994, pp. 311–322. <https://doi.org/10.2969/aspm/02310311>.
6. Chadan K., Martin A. A sufficient condition for the existence of bound states in a potential without spherical symmetry. *J. Phys. Lett.*, 1980, vol. 41, no. 9, pp. 205–206. <https://doi.org/10.1051/jphyslet:01980004109020500>.
7. Liu Y., Yu Y.-C., Chen S. Three-body bound states of two bosons and one impurity in one dimension. *Phys. Rev. A*, 2021, vol. 104, no. 3, art. 033303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.033303>.
8. Kholmatov Sh.Yu., Muminov Z.I. Existence of bound states of N -body problem in an optical lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, vol. 51, no. 26, art. 265202. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac534>.
9. Lakaev S.N., Dell'Antonio G.F., Khalkhuzhaev A.M. Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2016, vol. 49, no. 14, art. 145204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/14/145204>.
10. Lakaev S.N. On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1993, vol. 27, no. 3, pp. 166–175. <https://doi.org/10.1007/BF01087534>.
11. Klaus M., Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Ann. Phys.*, 1980, vol. 130, no. 2, pp. 251–281. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(80\)90338-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3).
12. Valiente M., Zinner N.T. *Strongly Interacting Quantum Systems*. Vol. 1: Few-body physics. Ser.: IOP Series in Quantum Technology. Bristol, IOP Publ., 2023. 218 p. <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3087-9>.
13. Valiente M., Petrosyan D., Saenz A. Three-body bound states in a lattice. *Phys. Rev. A*, 2010, vol. 81, no. 1, art. 011601(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.011601>.
14. Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A. On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the $2 + 1$ fermionic trimer on the lattice. *Nanosyst.: Phys., Chem., Math.*, 2023, vol. 14, no. 5, pp. 518–529. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-5-518-529>.
15. Khalkhuzhaev A.M. The essential spectrum of a three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 9, pp. 67–78. <https://doi.org/10.3103/S1066369X17090080>.
16. Dell'Antonio G.F., Muminov Z.I., Shermatova Y.M. On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2011, vol. 44, no. 31, art. 315302. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/31/315302>.

Информация об авторах

Ахмад Мияссарович Халхужаев, доктор физико-математических наук, профессор математического факультета, Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова

E-mail: ahmad_x@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-0569-6780>

Хилола Гафуровна Хайитова, ассистент, Бухарский государственный университет

E-mail: xilola_xayitova@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4613-6179>

Ислом Абдумаликович Хужамиеров, ассистент, Узбекско-Финский педагогический институт

E-mail: islom.xujamiyorov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5439-8729>

Author Information

Ahmad M. Khalkhuzhaev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Faculty of Mathematics, Samarkand State University named after Sharof Rashidov

E-mail: ahmad_x@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-0569-6780>

Khilola G. Khayitova, Teaching Assistant, Bukhara State University

E-mail: xilola_xayitova@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4613-6179>

Islom A. Khujamiyrov, Teaching Assistant, Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

E-mail: islom.xujamiyorov@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5439-8729>

Поступила в редакцию 17.07.2025

Принята к публикации 2.09.2025

Received July 17, 2025

Accepted September 2, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.958

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>

Об эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов

Е.Е. Шабардин ✉, Е.М. Карчевский

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

✉ eg.shabardin@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена обоснованию метода граничных интегральных уравнений Мюллера, предназначенного для решения задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов. Доказана теорема о спектральной эквивалентности исходной дифференциальной задачи и задачи для системы граничных интегральных уравнений Мюллера на физическом листе римановой поверхности, на которой разыскиваются собственные значения – постоянные распространения собственных волн. Для доказательства этого факта изучены области локализации спектров исходной задачи и так называемой «вывернутой наизнанку» задачи, порождающей фиктивные собственные значения. Получено достаточное условие эквивалентности: задачи эквивалентны, если вывернутая наизнанку задача имеет только тривиальное решение. Как следствие, показано, что метод граничных интегральных уравнений Мюллера позволяет находить только истинные собственные значения на физическом листе поверхности Римана. Это подтверждено результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: слабонаправляющий диэлектрический волновод, собственные волны, граничные интегральные уравнения Мюллера

Для цитирования: Шабардин Е.Е., Карчевский Е.М. Об эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 566–587. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>

On the equivalence of differential and integral formulations of the problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides

E.E. Shabardin ✉, E.M. Karchevskii

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ eg.shabardin@gmail.com

Abstract

The use of the method of Muller boundary integral equations for solving the problem of eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides was justified. A theorem was proved about the spectral equivalence between the original differential problem and the problem for the system of Muller boundary integral equations on the physical sheet of the Riemann surface, where the eigenvalues, the propagation constants of the eigenwaves, are sought. With this aim, the localization regions of the spectra of the original problem and a so-called “turned inside out” problem generating spurious eigenvalues were analyzed. A sufficient condition of equivalence was obtained: the problems are equivalent if the problem turned inside out has only a trivial solution. Consequently, as confirmed by the results of the numerical experiments, only true eigenvalues on the physical sheet of the Riemann surface can be found by using the method of Muller boundary integral equations.

Keywords: weakly guided dielectric waveguide, eigenwaves, Muller boundary integral equations

For citation: Shabardin E.E., Karchevskii E.M. On the equivalence of differential and integral formulations of the problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 566–587. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>. (In Russian)

Введение

Задачи на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости, возникающие при математическом моделировании слабонаправляющих оптических волокон, являются фундаментальными в теории диэлектрических волноводов [1]. Для моделирования таких оптических устройств было разработано множество численных методов, включая метод конечных разностей во временной области [2–4], метод декомпозиции [5–8] и метод конечных элементов [9–11]. Однако ни один из этих методов не является универсальным; каждый из них эффективен только для определенного класса задач и требует значительных вычислительных ресурсов. Методы граничных интегральных уравнений [12], такие

как метод уравнений Мюллера [13], представляют собой альтернативу, снижая размерность задач и обеспечивая высокую точность. Тем не менее они также требуют тщательной настройки и значительных ресурсов для волноводов сложных конфигураций. Развитие методов интегральных уравнений открывает возможности для более точного и эффективного моделирования современных оптических устройств [14–17].

Метод граничных интегральных уравнений Мюллера использовался при исследовании микродисковых лазеров, например, в таких работах, как [18–21], и, относительно недавно, в [22–27]. Эти двумерные лазеры весьма перспективны для применения в фотонике и нанооптике благодаря своим компактным размерам, низким порогам излучения [28] и стабилизации скорости затухания мод на высоких волновых числах [27]. Численное моделирование таких микролазеров основано на решении задач на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости [29]. Сведение трехмерных уравнений Максвелла к двумерным задачам возможно благодаря тому, что толщина резонатора значительно меньше длины волны, что позволяет считать, что электромагнитное поле остается постоянным вдоль оси, ортогональной плоскости резонатора [29].

В так называемой «лазерной задаче на собственные значения» (Lasing Eigenvalues Problem, LEP), систематически применяемой, начиная с [30], для теоретического исследования спектральных свойств двумерных микродисковых лазеров [19–26] и плазмонных нанолазеров [31–33], волновые числа электромагнитного излучения являются вещественными собственными значениями. Точнее, обезразмеренные волновые числа κ являются первыми компонентами двухкомпонентных собственных значений. Важно отметить, что в LEP рассматриваются только активные материалы с комплексными показателями преломления. Отрицательная мнимая часть показателя преломления γ называется коэффициентом усиления, а пороговые значения усиления являются вторыми компонентами двухкомпонентных собственных значений (κ, γ) .

Для численного решения LEP исходная задача на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости сводится к нелинейной задаче на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера [19–26]. Эта система обладает фиктивными собственными значениями, которые соответствуют так называемой «вывернутой наизнанку» задаче [34]. В работе [35] было доказано, что не существует полной спектральной эквивалентности между исходной LEP и задачей на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера. С одной стороны, все собственные значения исходной LEP являются собственными значениями системы интегральных уравнений. Однако обратное утверждение не верно. А именно, собственными значениями исходной задачи являются только те собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера, которые не являются собственными значениями вывернутой наизнанку задачи.

Для частного случая круглого резонатора в [35] было доказано, что множество всех собственных значений системы граничных интегральных уравнений Мюллера можно разделить на два подмножества: подмножество истинных собственных значений исходной LEP и подмножество фиктивных собственных значений вывернутой наизнанку LEP. Численные примеры также показали, что подмножества истинных и фиктивных собственных значений хорошо разделяются на плоскости (κ, γ) , что облегчает их идентификацию. В результате система граничных интегральных уравнений Мюллера может быть эффективно использована для расчета собственных значений LEP.

Кроме того, фиктивные собственные значения были исследованы для задачи трансмиссии [36] и внешней задачи Неймана [37] для уравнения Гельмгольца на плоскости. В этих задачах в качестве собственных значений рассматривались комплексные волновые числа. Чтобы избежать вычисления фиктивных собственных значений, в работах [36, 37] были предложены различные модификации интегральных уравнений, в том числе граничных интегральных уравнений Мюллера.

В недавней работе [38] метод граничных интегральных уравнений Мюллера был применен для расчета собственных волн слабонаправляющих оптических волокон. Следуя [1], исходная трехмерная задача для системы уравнений Максвелла была сведена к задаче на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости. Здесь волновое число является заданным вещественным параметром, а комплексные собственные значения – это постоянные распространения собственных волн, разыскиваемые на соответствующей римановой поверхности. Однако вопрос о том, имеет ли система Мюллера фиктивные собственные значения для данной задачи, не рассматривался.

В работе [14] был предложен метод, альтернативный методу граничных интегральных уравнений Мюллера. Исходная задача о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов была сведена к операторному уравнению с помощью метода потенциалов простого слоя. Однако доказать теорему о полной спектральной эквивалентности для данного метода не удалось. Установлено, что исходная задача эквивалентна задаче в интегральной постановке на физическом листе римановой поверхности, лишь за исключением множества, на котором поперечное волновое число оболочки волновода принимает вещественные значения.

Основная идея настоящей работы заключается в доказательстве эквивалентности спектральной задачи для системы граничных интегральных уравнений Мюллера исходной задаче о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов в дифференциальной постановке. Прежде всего, мы формулируем исходную задачу (раздел 1). В этом разделе мы доказываем теорему 1, показывающую, что ее собственные значения могут лежать только в строго определенном интервале главного листа поверхности Римана. В разделе 2 мы формулируем вывернутую наизнанку задачу. Здесь мы доказываем теорему 2, показывающую, что собственные значения этой задачи не могут лежать на указанном листе. В разделе 3 построена система граничных интегральных уравнений Мюллера. В разделе 4 мы доказываем теорему 3, утверждающую, что в общем случае на всей римановой поверхности спектральная задача для системы граничных интегральных уравнений Мюллера не эквивалентна исходной задаче. Установлено, что эквивалентность достигается, если вывернутая наизнанку задача имеет только тривиальное решение. В этом же разделе приведена теорема 4, доказывающая полную спектральную эквивалентность дифференциальной и интегральной постановок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов на физическом листе римановой поверхности. Из этой теоремы следует, что, решая задачу на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера на физическом листе поверхности Римана, мы будем получать только истинные собственные значения. В разделе 5 описаны вычислительные эксперименты, подтверждающие полученные теоретические результаты.

1. Исходная задача на собственные значения

Следуя [1], сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Пусть область поперечного сечения волновода Ω_i ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром Γ . Показатель преломления n является кусочно-постоянной функцией, а именно, в области Ω_i он равен константе n_i , а в области $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i$ – константе n_e , причем $0 < n_e < n_i$. Будем считать, что постоянная распространения β является неизвестным комплексным параметром. Символом ω обозначим заданную положительную частоту электромагнитных колебаний. Задача заключается в нахождении таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца,

$$\Delta u + \chi_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \tag{1}$$

$$\Delta u + \chi_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \tag{2}$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $\chi_i = \sqrt{k^2 n_i^2 - \beta^2}$ и $\chi_e = \sqrt{k^2 n_e^2 - \beta^2}$ – поперечные волновые числа областей Ω_i и Ω_e соответственно, $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} > 0$ – волновое число в свободном пространстве. Через $u^+(u^-)$ обозначены предельные значения функции u снаружи (изнутри) контура Γ . Символ $\partial u / \partial \nu$ обозначает производную по внешней нормали к контуру Γ .

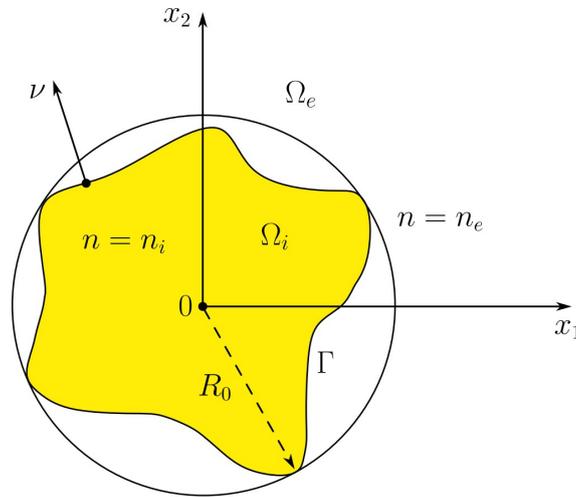


Рис. 1. Геометрия исходной задачи на собственные значения

Fig. 1. Geometry of the original eigenvalue problem

Будем предполагать, что функция u удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения, т. е. при $|x| \geq R_0$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда, допускающего почленное дифференцирование [14]:

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_e r) \exp(il\varphi), \tag{4}$$

где $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, а $H_l^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка l .

Следуя [12, с. 68], мы предполагаем, что нормальные производные изнутри и снаружи границы Γ в (3) являются правильными в том смысле, что пределы

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} (\nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x))), \quad x \in \Gamma, \tag{5}$$

сходятся равномерно по $x \in \Gamma$.

Будем искать нетривиальные решения u задачи (1)–(4) в классе функций, непрерывных в $\overline{\Omega_i}$ и $\overline{\Omega_e}$, а также дважды непрерывно дифференцируемых в Ω_i и Ω_e . Множество таких функций обозначим символом U .

Будем предполагать, что постоянные распространения β принадлежат множеству Λ – пересечению римановых поверхностей Λ_i и Λ_e функций $\ln \chi_i(\beta)$ и $\ln \chi_e(\beta)$:

$$\Lambda = \Lambda_i \cap \Lambda_e.$$

Пусть символ

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{i0}^{(1)} \cap \Lambda_{e0}^{(1)}$$

обозначает пересечение главных листов этих поверхностей, определяемых следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_i(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im} \chi_i(\beta) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{i0}^{(1)}, \tag{6}$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_e(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im} \chi_e(\beta) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{e0}^{(1)}. \tag{7}$$

Обозначим вещественную ось листа $\Lambda_0^{(1)}$ символом $\mathbb{R}_0^{(1)}$, а мнимую ось – символом $\mathbb{I}_0^{(1)}$. Пусть множество G является объединением двух интервалов вещественной оси $\mathbb{R}_0^{(1)}$, а именно, $G = \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_e < |\beta| < kn_i\}$. Введем множества $B = \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_i\}$, $C_0^{(1)} = \Lambda_0^{(1)} \setminus \{\mathbb{I}_0^{(1)} \cup \mathbb{R}_0^{(1)}\}$ и $D = \{\beta \in \mathbb{I}_0^{(1)}\} \cup \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_e\}$ (см. рис. 2).

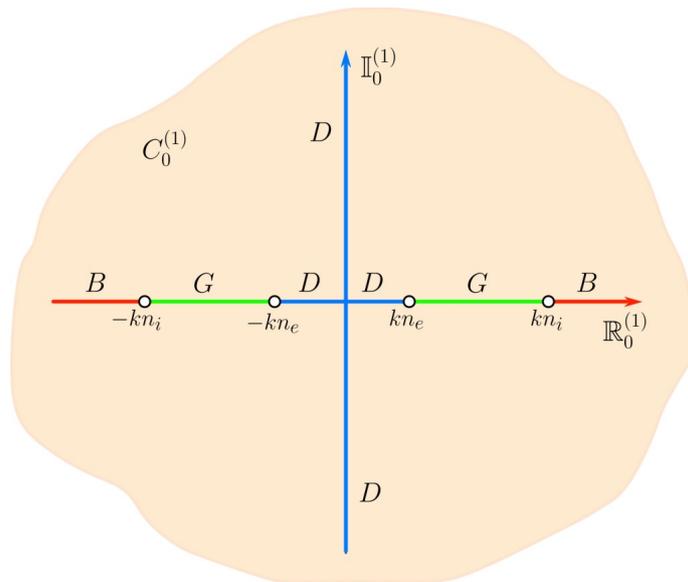


Рис. 2. Изображение листа $\Lambda_0^{(1)}$

Fig. 2. Image of the sheet $\Lambda_0^{(1)}$

Ненулевую функцию $u \in U$ будем называть собственной функцией задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (1)–(4).

Теорема 1. *На листе $\Lambda_0^{(1)}$ собственные значения β задачи (1)–(4) могут лежать лишь в области G .*

Доказательство данной теоремы приведено в ([14], теорема 1).

2. Вывернутая наизнанку задача на собственные значения

Следуя [34], сформулируем вывернутую наизнанку задачу, соответствующую исходной задаче (1)–(4) (см. рис. 3). Области Ω_i и Ω_e остаются теми же, что и в задаче (1)–(4), но показатель преломления в области Ω_i равен константе n_e , а в области Ω_e – константе n_i , причем, как и ранее, $0 < n_e < n_i$. Символом Γ обозначен тот же самый дважды непрерывно дифференцируемый контур. Постоянная распространения β является неизвестным комплексным параметром, а ω – заданная положительная частота электромагнитных колебаний. Задача заключается в нахождении таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta v + \chi_e^2 v = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (8)$$

$$\Delta v + \chi_i^2 v = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$v^+ = v^-, \quad \frac{\partial v^+}{\partial \nu} = \frac{\partial v^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (10)$$

и парциальным условиям излучения на бесконечности

$$v(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l H_l^{(1)}(\chi_i r) \exp(il\varphi). \quad (11)$$

Здесь мы используем те же обозначения и понимаем нормальные производные в (10) так же, как в предыдущем разделе.

Ненулевую функцию $v \in U$ будем называть собственной функцией вывернутой наизнанку задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (8)–(11).

Теорема 2. *Собственные значения β задачи (8)–(11) не могут лежать на листе $\Lambda_0^{(1)}$.*

Доказательство. Лист $\Lambda_0^{(1)}$ является объединением четырех множеств (см. рис. 2), а именно, $\Lambda_0^{(1)} = C_0^{(1)} \cup D \cup G \cup B$. Докажем, что ни одно из множеств $C_0^{(1)}$, D , B и G не содержит собственных значений задачи (8)–(11).

Предположим, что v является собственной функцией задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in D \cup G$. Тогда получим, что χ_i и χ_e – вещественные положительные числа при $\beta \in D$. Если $\beta \in G$, то параметр χ_i является вещественным,

а χ_e становится чисто мнимым с положительной мнимой частью. Применим вторую формулу Грина (см., например, [12, с. 79]) в областях Ω_i и $\Omega_R \setminus \overline{\Omega}_i$, где $R \geq R_0$, к функциям v и \bar{v} (здесь \bar{v} означает функцию, комплексно-сопряженную с v). Получим равенства

$$\int_{\Omega_i} (v\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta v) dx = \int_{\Gamma} \left(v^- \frac{\partial\bar{v}^-}{\partial\nu} - \bar{v}^- \frac{\partial v^-}{\partial\nu} \right) dl,$$

$$\int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega}_i} (v\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta v) dx = - \int_{\Gamma} \left(v^+ \frac{\partial\bar{v}^+}{\partial\nu} - \bar{v}^+ \frac{\partial v^+}{\partial\nu} \right) dl + \int_{\Gamma_R} \left(v \frac{\partial\bar{v}}{\partial r} - \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dl.$$

При $\beta \in D \cup G$ левые части двух последних равенств обращаются в нуль. Сложим их почленно и воспользуемся условиями сопряжения (10). В результате получим

$$\int_{\Gamma_R} \left(v \frac{\partial\bar{v}}{\partial r} - \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0. \tag{12}$$

Подставим разложение (11) в равенство (12):

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(H_l^{(1)}(\chi_i R) H_l^{(2)'}(\chi_i R) - H_l^{(1)'}(\chi_i R) H_l^{(2)}(\chi_i R) \right) |c_l|^2 = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках, является определителем Вронского (см., например, [39, с. 182]) и не зависит от значения переменной l :

$$H_l^{(1)}(\chi_i R) H_l^{(2)'}(\chi_i R) - H_l^{(1)'}(\chi_i R) H_l^{(2)}(\chi_i R) = \frac{4}{i\pi\chi_i R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

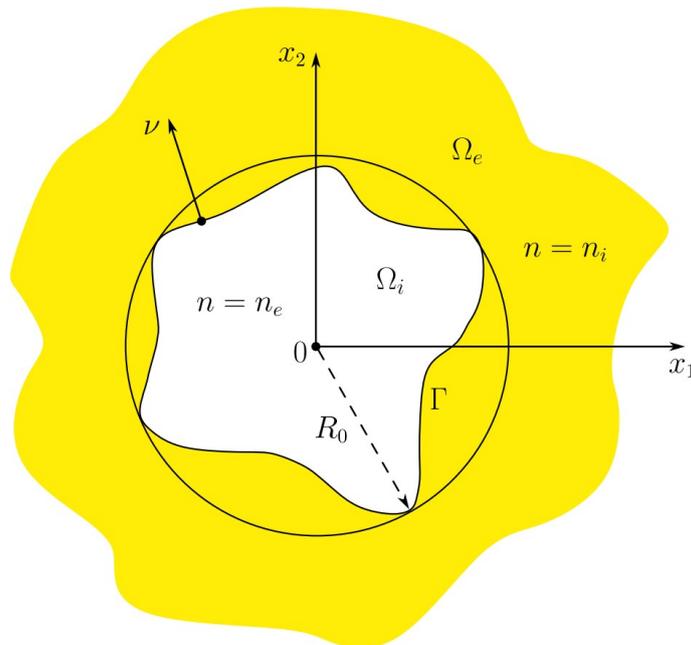


Рис. 3. Геометрия вывернутой наизнанку задачи на собственные значения
Fig. 3. Geometry of the eigenvalue problem turned inside out

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ все коэффициенты c_l в разложении (11) обращаются в нуль. Таким образом, $v = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$. Функция v удовлетворяет в области Ω_e уравнению Гельмгольца (9) с постоянным коэффициентом и, значит, аналитическая по x в Ω_e . Поэтому $v = 0$ при $x \in \Omega_e$, а также $v^+ = 0$ и $\partial v^+ / \partial \nu = 0$ на контуре Γ . Применим в области Ω_i третью формулу Грина (см., например, [12, с. 80]). Из этого представления функции v и условий сопряжения (10) следует, что $v = 0$ в Ω_i . Итак, мы доказали, что при $\beta \in D \cup G$ функция v тождественно равна нулю на всей плоскости \mathbb{R}^2 , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (8)–(11). Следовательно, области D и G свободны от собственных значений данной задачи.

Предположим теперь, что v является собственной функцией задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$. Если $\beta \in C_0^{(1)}$, то согласно условиям (6), (7) параметры χ_i и χ_e будут комплексными числами с положительными мнимыми частями. Если $\beta \in B$, то согласно тем же условиям χ_i и χ_e будут чисто мнимыми числами с положительными мнимыми частями. Применим первую формулу Грина (см., например, [12, с. 79]) в областях Ω_i и $\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}$, где $R \geq R_0$, к функциям v и \bar{v} . Сложим полученные равенства почленно, учитывая условия сопряжения (10):

$$\int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_i} \bar{v} \Delta v dx + \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}} \bar{v} \Delta v dx = \int_{\Gamma_R} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} dl.$$

Устремим R к бесконечности. При этом заметим, что согласно асимптотике (см., например, [39, с. 364])

$$H_i^{(1)}(\chi_i r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_i r}} \exp \left[i \left(\chi_i r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{\chi_i r} \right) \right], \quad r \rightarrow \infty,$$

все подынтегральные выражения, зависящие от r , экспоненциально убывают при любом $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$. В результате получим

$$\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_e} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_i} (\beta^2 - k^2 n_e^2) |v|^2 dx + \int_{\Omega_e} (\beta^2 - k^2 n_i^2) |v|^2 dx = 0. \tag{13}$$

При $\beta \in B$ равенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда $v = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Возьмем от левой и правой частей равенства (13) мнимую часть:

$$\text{Im}(\beta^2) \int_{\Omega_i} |v|^2 dx + \text{Im}(\beta^2) \int_{\Omega_e} |v|^2 dx = 2 \text{Re}(\beta) \text{Im}(\beta) \left(\int_{\Omega_i} |v|^2 dx + \int_{\Omega_e} |v|^2 dx \right) = 0.$$

Заметим, что ни мнимая, ни вещественная части числа $\beta \in C_0^{(1)}$ не обращаются в нуль. Следовательно, при $\beta \in C_0^{(1)}$ равенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда $v = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, мы доказали, что при любом $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ функция v тождественно равна нулю на всей плоскости \mathbb{R}^2 , что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (8)–(11). Следовательно, области B и $C_0^{(1)}$ также свободны от собственных значений данной задачи. \square

3. Система граничных интегральных уравнений Мюллера

Если u является собственной функцией задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, то справедливы следующие интегральные представления (см. [12], с. 80, теорема 3.1; с. 81, теорема 3.3):

$$\int_{\Gamma} \left(u^-(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu} \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega_i; \\ 0, & x \in \Omega_e, \end{cases} \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma} \left(u^+(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu} \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_i; \\ u(x), & x \in \Omega_e. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь символами

$$\Phi_m(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_m |x - y|), \quad m = i, e,$$

обозначены фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (1), (2). Используя условия сопряжения (3), определим функции

$$\varphi = u^+ = u^-, \quad \psi = \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (16)$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow \Gamma$ в (14) и используя свойства потенциалов двойного слоя (см. [12], с. 59, теорема 2.13) и непрерывность потенциалов простого слоя (см. [12], с. 58, теорема 2.12), получим

$$u^-(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} u^-(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \Phi_i(\beta; x, y) \frac{\partial u^-(y)}{\partial \nu} dl(y) + \frac{1}{2} u^-(x), \quad x \in \Gamma.$$

Аналогично из (15) следует, что

$$u^+(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} u^+(y) dl(y) - \int_{\Gamma} \Phi_e(\beta; x, y) \frac{\partial u^+(y)}{\partial \nu} dl(y) + \frac{1}{2} u^+(x), \quad x \in \Gamma.$$

Вместо подстановки этих выражений в условия сопряжения (3), следуя [13], сложим их почленно. Учитывая равенства (16), получим уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma} (\Phi_e(\beta; x, y) - \Phi_i(\beta; x, y)) \psi(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Возьмем производные по нормали ν от равенств (14), (15) и перейдем к пределу при $x \rightarrow \Gamma$, используя хорошо известные свойства потенциалов (см. [12], с. 64, теорема 2.19; с. 65, теорема 2.21). Сложив данные равенства почленно и применив соотношения (16), получим уравнение

$$\psi(x) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} \right) \varphi(y) dl(y) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} \right) \psi(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (18)$$

Система (17), (18) называется системой граничных интегральных уравнений Мюллера. Введем обозначения:

$$K^{(1,1)} = \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}, \quad K^{(1,2)} = \Phi_e(\beta; x, y) - \Phi_i(\beta; x, y), \quad x, y \in \Gamma,$$

$$K^{(2,1)} = \frac{\partial^2 \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)}, \quad K^{(2,2)} = \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}, \quad x, y \in \Gamma.$$

Следуя [40], можно показать, что для любого $\beta \in \Lambda$ ядра $K^{(1,1)}$ и $K^{(2,2)}$ непрерывны, а ядра $K^{(1,2)}$ и $K^{(2,1)}$ слабо сингулярны. Следовательно, интегральный оператор, соответствующий левым частям равенств (17) и (18), является фредгольмовым оператором с нулевым индексом в пространстве $[C(\Gamma)]^2$, где $C(\Gamma)$ – банахово пространство функций, непрерывных на Γ [40].

Назовем $\beta \in \Lambda$ собственным значением системы граничных интегральных уравнений Мюллера, если при данном β система (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$. Вектор-функцию (φ, ψ) будем называть собственным вектором системы граничных интегральных уравнений Мюллера, отвечающим собственному значению β .

4. Эквивалентность

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- A. Если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению $\beta \in \Lambda$, то функции φ и ψ , определенные в (16), принадлежат банахову пространству $C(\Gamma)$ и являются нетривиальным решением системы (17), (18) с тем же значением параметра β .
- B. Пусть для данного значения $\beta \in \Lambda$ система граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$, а задача, вывернутая наизнанку, (8)–(11), имеет только тривиальное решение. Тогда функция u , определенная как

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (19)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_e, \quad (20)$$

является собственной функцией задачи (1)–(4), отвечающей β .

Доказательство. Проведем доказательство этой теоремы, следуя работе [41]. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть u – собственная функция задачи (1)–(4). Тогда u^+ и u^- принадлежат пространству $C(\Gamma)$. Функции $\partial u^+/\partial\nu$ и $\partial u^-/\partial\nu$, определенные в (5), также принадлежат пространству $C(\Gamma)$ как равномерные пределы непрерывных функций. Тогда $\varphi, \psi \in C(\Gamma)$. Вектор (φ, ψ) , определенный в (16), является решением (17), (18) по построению этой системы уравнений. Предположим, что $\varphi = \psi = 0$, тогда из (16) получим, что $u^+ = u^- = 0$ и $\partial u^+/\partial\nu = \partial u^-/\partial\nu = 0$. Подставив полученные равенства в интегральные представления (14), (15), получим, что $u = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$, что противоречит предположению о том, что u – собственная функция исходной задачи (1)–(4).

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть вектор $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$ является собственным вектором системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18), соответствующим собственному значению $\beta \in \Lambda$. Определим функцию v :

$$v(x) = - \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (21)$$

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_e. \quad (22)$$

Докажем, что функция v удовлетворяет всем условиям задачи, вывернутой наизнанку, (8)–(11).

Функция v дважды непрерывно дифференцируема в областях Ω_i, Ω_e и удовлетворяет уравнениям (8), (9) как линейная комбинация потенциалов простого и двойного слоев с непрерывными плотностями (см., например, [12]). Эта линейная комбинация также будет непрерывна в $\overline{\Omega}_i$ и $\overline{\Omega}_e$. Применив теорему сложения Графа (см., например, [39, с. 184]), получим, что функция $\Phi_i(\beta; x, y)$ при любых $\beta \in \Lambda$ и $y \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет разложению (11). Тогда из (22) следует, что v удовлетворяет парциальным условиям излучения (11). Граничные условия (10) также выполняются, что легко проверить непосредственными вычислениями. Таким образом, функция v удовлетворяет всем условиям задачи, вывернутой наизнанку, (8)–(11).

Определим функцию u по формулам (19), (20). Вычислим предельные значения функций u, v и их нормальных производных. Получим

$$\begin{aligned} u^+ + v^- &= \varphi, & u^- - v^+ &= \varphi, & x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} + \frac{\partial v^-}{\partial \nu} &= \psi, & \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial v^+}{\partial \nu} &= \psi, & x \in \Gamma. \end{aligned}$$

Согласно предположению теоремы $v(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Поэтому из предыдущих четырех равенств следует равенство вида (16) для построенной сейчас функции u , а это значит, что граничные условия (3) выполняются. Рассуждая, как выше для функции v , получим, что и для u выполняются все остальные условия задачи (1)–(4). Таким образом, функция u , определенная в (19), (20), является собственной функцией исходной задачи (1)–(4). Действительно, если предположить, что $u = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$, то из полученных равенств вида (16) следует, что $\varphi = \psi = 0$ на Γ . Это противоречит предположению теоремы о том, что вектор (φ, ψ) является нетривиальным решением системы граничных интегральных уравнений Мюллера. \square

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- А. Если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$, то функции φ и ψ , определенные в (16), принадлежат банахову пространству $C(\Gamma)$ и являются нетривиальным решением системы (17), (18) с тем же значением параметра β .
- В. Пусть для заданного значения $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ система граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$. Тогда функция u , определенная в (19) и (20), является собственной функцией исходной задачи (1)–(4), отвечающей β .

Доказательство. Первый пункт теоремы непосредственно следует из первого пункта теоремы 3. Второй пункт вытекает из второго пункта теоремы 3 и теоремы 2 о локализации спектра вывернутой наизнанку задачи. \square

5. Вычислительные эксперименты

Проведем вычислительные эксперименты, демонстрирующие справедливость теоремы 4 об эквивалентности. Рассмотрим волновод с круговым поперечным сечением радиуса a . Показатель преломления во внутренней области Ω_i зададим как $n_i = 1.5440$, а во внешней области Ω_e – как $n_e = 1.4874$, что типично для волоконной оптики. Ограничимся поиском β на физическом листе $\Lambda_0^{(1)}$. При этом значения параметров k и β будем считать обезразмеренными умножением на a .

Решив задачу (1)–(4) методом разделения переменных, получим семейство характеристических уравнений

$$\det(A_m(\beta)) = 0, \quad A_m(\beta) = \begin{pmatrix} J_m(\chi_i a) & H_m^{(1)}(\chi_e a) \\ \chi_i J_m'(\chi_i a) & \chi_e H_m^{(1)'}(\chi_e a) \end{pmatrix}, \quad m = -N, \dots, N. \quad (23)$$

Каждое из уравнений (23) имеет бесконечное число корней β . Обозначим через β_{mn} n -й корень уравнения (23) с номером m . Решения уравнений (23) будем называть точными собственными значениями задачи (1)–(4).

Рассуждая аналогично [38], используя метод Галеркина с тригонометрическим базисом, сведем задачу на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) к матричной задаче. Она имеет нетривиальные решения, если выполняется условие

$$\det(C(\beta)) = 0. \quad (24)$$

Здесь $C(\beta)$ – матрица системы Галеркина, она имеет блочно-диагональную структуру, а каждый ее диагональный блок имеет вид

$$C_m(\beta) = \begin{pmatrix} c_m^{(1,1)}(\beta) & c_m^{(2,1)}(\beta) \\ c_m^{(1,2)}(\beta) & c_m^{(2,2)}(\beta) \end{pmatrix}, \quad m = -N, \dots, N.$$

Элементы этих блоков вычисляются по следующим формулам:

$$c_m^{(1,1)}(\beta) = \frac{2}{a} + \frac{i\pi}{2} \chi_i J_m(\chi_i a) H_m^{(1)'}(\chi_i a) - \frac{i\pi}{2} \chi_e J_m'(\chi_e a) H_m^{(1)}(\chi_e a),$$

$$c_m^{(1,2)}(\beta) = \frac{i\pi}{2} J_m(\chi_e a) H_m^{(1)}(\chi_e a) - \frac{i\pi}{2} J_m(\chi_i a) H_m^{(1)}(\chi_i a),$$

$$c_m^{(2,1)}(\beta) = \frac{i\pi}{2} \chi_i^2 J_m'(\chi_i a) H_m^{(1)'}(\chi_i a) - \frac{i\pi}{2} \chi_e^2 J_m'(\chi_e a) H_m^{(1)'}(\chi_e a),$$

$$c_m^{(2,2)}(\beta) = \frac{2}{a} + \frac{i\pi}{2} \chi_e J_m(\chi_e a) H_m^{(1)'}(\chi_e a) - \frac{i\pi}{2} \chi_i J_m'(\chi_i a) H_m^{(1)}(\chi_i a).$$

Решения уравнения (24) можно назвать приближенными собственными значениями задачи (1)–(4), полученными методом Галеркина.

Найдем точные и приближенные значения постоянной распространения β для $m = 0, 1, 2, 3, 4$ и $n = 1$. На рис. 4 сплошными линиями показаны решения уравнений (24), а точками – уравнения (23). Полное совпадение результатов двух подходов на множестве $\Lambda_0^{(1)}$ служит численным подтверждением эквивалентности между исходной краевой задачей (1)–(4) и соответствующей спектральной задачей для системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18). Фиктивные собственные значения для данной системы на $\Lambda_0^{(1)}$ найдены не были.

На рис. 4 обозначены две точки: синим цветом выделена точка с параметрами $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2} = 1.46$, $\beta = 15.33$, а красным цветом – точка с параметрами $p = 0.84$, $\beta = 23.19$. Для указанных значений построены графики соответствующих собственных функций, представленные на рис. 5.

Заключение

Основным результатом работы является теоретическое обоснование метода граничных интегральных уравнений Мюллера для решения задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов. Установлена спектральная эквивалентность исходной дифференциальной задачи и задачи для системы уравнений Мюллера на физическом листе римановой поверхности, где разыскиваются собственные значения – постоянные распространения собственных волн. Установлено, что истинные собственные значения, соответствующие исходной задаче, могут находиться лишь в определенном ограниченном множестве на вещественной оси физического листа поверхности Римана, тогда как фиктивные собственные значения, соответствующие вывернутой наизнанку задаче, на этом листе отсутствуют. Вычислительные эксперименты подтвердили теоретические выводы, продемонстрировав отсутствие фиктивных собственных значений на физическом листе римановой поверхности. Вычисления проводились с помощью метода Галеркина. Исследование эквивалентности дифференциальной и интегральной постановок задачи является основой и для доказательства сходимости примененного метода. Обоснованию сходимости метода Галеркина будет посвящена специальная работа.

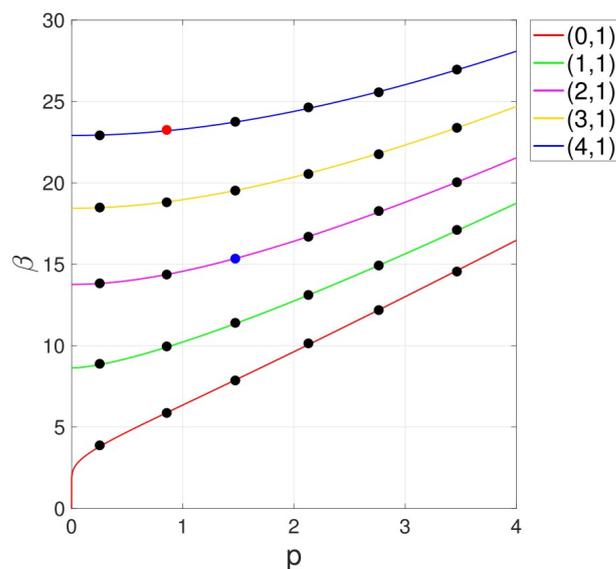


Рис. 4. Зависимость параметра β от параметра $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2}$. Сплошными линиями указаны приближенные собственные значения, а точками – точные

Fig. 4. Dependence of the parameter β on the parameter $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2}$. Solid lines show approximate eigenvalues, while dots indicate exact eigenvalues

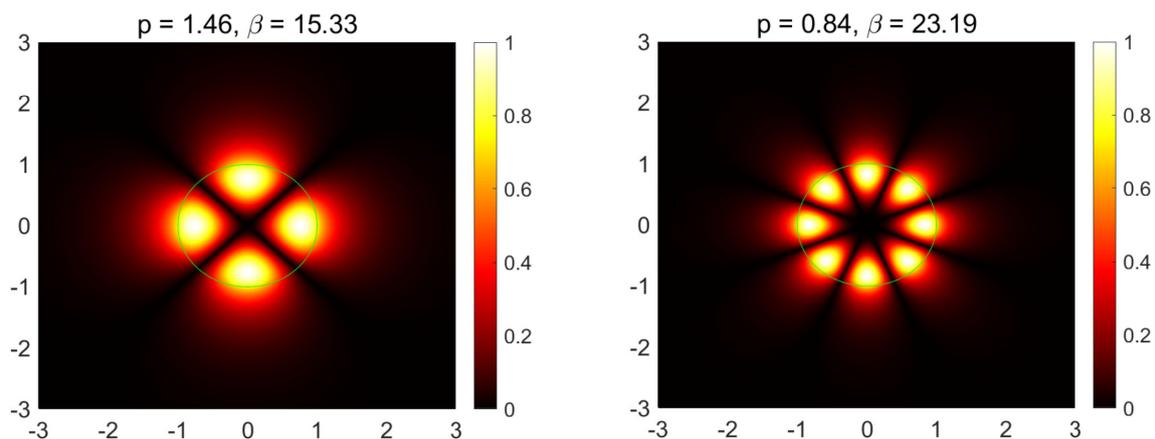


Рис. 5. Графики собственных функций для $\beta = 15.33$ и $\beta = 23.19$

Fig. 5. Eigenfunction graphs for $\beta = 15.33$ and $\beta = 23.19$

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Snyder A.W., Love J.D.* Optical Waveguide Theory. New York, NY: Springer, 1983. viii, 738 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2813-1>.
2. *Kunz K.S., Luebbers R.J.* The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993. 464 p. <https://doi.org/10.1201/9780203736708>.

3. *Taflove A., Hagness S.C.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston, MA, London: Artech House, 2005. 1038 p.
4. *Elsherbeni A.Z., Demir V.* The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations. Ser.: The ACES Series on Computational Electromagnetics and Engineering. SciTech Publ., 2015. 560 p. <https://doi.org/10.1049/SBEW514E>.
5. *Obayya S.* Computational Photonics. Chichester, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010. xv, 306 p. <https://doi.org/10.1002/9780470667064>.
6. *Shao Y., Peng Z., Lim K.H., Lee J.-F.* Non-conformal domain decomposition methods for time-harmonic Maxwell equations // Proc. R. Soc. A. 2012. V. 468, No 2145. P. 2433–2460. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0028>.
7. *Koczka G., Bauernfeind T., Preis K., Bíró O.* An iterative domain decomposition method for solving wave propagation problems // Electromagnetics. 2014. V. 34, Nos 3–4. P. 210–221. <https://doi.org/10.1080/02726343.2014.877751>.
8. *Beilina L., Lindström E.* An adaptive finite element/finite difference domain decomposition method for applications in microwave imaging // Electronics. 2022. V. 11, No 9. Art. 1359. <https://doi.org/10.3390/electronics11091359>.
9. *Wartak M.S.* Computational Photonics: An Introduction with MATLAB. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. xiv, 452 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511794247>.
10. *Lavrinenko A.V., Lægsgaard J., Gregersen N., Schmidt F., Søndergaard T.* Numerical Methods in Photonics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015. 364 p. <https://doi.org/10.1201/b17408>.
11. *Dautov R.Z., Karchevskii E.M.* Numerical modeling of optical fibers using the finite element method and an exact non-reflecting boundary condition // Comput. Methods Appl. Math. 2018. V. 18, No 4. P. 581–601. <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0049>.
12. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. Ser.: Classics in Applied Mathematics. V. 72. Philadelphia, PA: SIAM, 2013. 287 p.
13. *Müller C.* Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 155. Berlin, Heidelberg: Springer, 1969. viii, 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11773-6>.
14. *Karchevskii E.M.* Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides // Comput. Math. Math. Phys. 1999. V. 39, No 9. P. 1493–1498.
15. *Karchevskii E.M.* The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides // Differ. Equations. 2000. V. 36, No 7. P. 1109–1111. <https://doi.org/10.1007/BF02754515>.
16. *Frolov A., Kartchevskiy E.* Integral equation methods in optical waveguide theory // Beilina L., Shestopalov Y.V. (Eds.) Inverse Problems and Large-Scale Computations. Ser.: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. V. 52. Cham: Springer, 2013. P. 119–133. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00660-4_9.
17. *Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M.* Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides // Proc. Int. Conf. Days on Diffraction 2013. St. Petersburg: IEEE, 2013. P. 131–135. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2013.6712817>.

18. *Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I.* Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2004. V. 21, No 3. P. 393–402.
<http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.21.000393>.
19. *Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P.* Trends in microdisk laser research and linear optical modelling // *Opt. Quantum Electron.* 2007. V. 39, No 15. P. 1253–1272.
<http://dx.doi.org/10.1007/s11082-008-9203-z>.
20. *Smotrova E.I., Byelobrov V.O., Benson T.M., Čtyroký J., Sauleau R., Nosich A.I.* Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions // *IEEE J. Quantum Electron.* 2011. V. 47, No 1. P. 20–30.
<http://dx.doi.org/10.1109/JQE.2010.2055836>.
21. *Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I.* Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2013. V. 30, No 6. P. 1732–1742. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.30.001732>.
22. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Spectra, thresholds, and modal fields of a circular microcavity laser transforming into a square // *Proc. 2015 17th Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON)*. Budapest: IEEE, 2015. P. 1–4.
<http://dx.doi.org/10.1109/ICTON.2015.7193654>.
23. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions // *Proc. 2016 Days on Diffraction (DD)*. St. Petersburg: IEEE, 2016. P. 390–395.
<http://dx.doi.org/10.1109/DD.2016.7756880>.
24. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes // *Axioms*. 2019. V. 8, No 3. Art. 101. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms8030101>.
25. *Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method // *Opt. Commun.* 2020. V. 476. Art. 126311.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126311>.
26. *Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities // *SIAM J. Appl. Math.* 2020. V. 80, No 4. P. 1977–1998.
<http://dx.doi.org/10.1137/19M1261882>.
27. *Yi C.-H., Dietz B., Han J.-H., Ryu J.-W.* Decay rates of optical modes unveiling the island structures in mixed phase space // *Phys. Rev. A.* 2025. V. 111, No 3. Art. 033509.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.033509>.
28. *Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z.* Nanolasers based on 2D materials // *Laser Photonics Rev.* 2020. V. 14, No 12. Art. 2000271. <http://dx.doi.org/10.1002/lpor.202000271>.
29. *Smotrova E.I., Nosich A.I., Benson T.M., Sewell P.* Cold-cavity thresholds of microdisks with uniform and nonuniform gain: Quasi-3-D modeling with accurate 2-D analysis // *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 2005. V. 11, No 5. P. 1135–1142.
<http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2005.853848>.

30. *Smotrova E.I., Nosich A.I.* Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity // *Opt. Quantum Electron.* 2004. V. 36, No 1. P. 213–221. <http://dx.doi.org/10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c>.
31. *Herasymova D.O., Dukhopelnykov S.V., Natarov D.M., Zinenko T.L., Lucido M., Nosich A.I.* Threshold conditions for transversal modes of tunable plasmonic nanolasers shaped as single and twin graphene-covered circular quantum wires // *Nanotechnology.* 2022. V. 33, No 49. Art. 495001. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6528/ac8e0c>.
32. *Kaliberda M.E., Pogarsky S.A., Kostenko O.V., Nosych O.I., Zinenko T.L.* Circular quantum wire symmetrically loaded with a graphene strip as the plasmonic micro/nano laser: Threshold conditions analysis // *Opt. Express.* 2024. V. 32, No 7. P. 12213–12227. <https://doi.org/10.1364/OE.514643>.
33. *Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Zinenko T.L., Nosych O.I.* Microsize graphene strip grating on gain substrate laser: Comparison of the H- and E-polarized mode threshold conditions // *Opt. Express.* 2025. V. 33, No 6. P. 14266–14287. <https://doi.org/10.1364/OE.554771>.
34. *Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41, No 7. P. 1377–1384. <https://doi.org/10.1134/s1995080220070343>.
35. *Ketov I.V., Karchevskii E.M.* Characteristic equations for true and fictitious eigenvalues of Muller boundary integral equations // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 9. P. 4016–4027. <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080223090147>.
36. *Misawa R., Nimo K., Nishimura N.* Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems // *SIAM J. Appl. Math.* 2017. V. 77, No 2. P. 770–788. <https://doi.org/10.1137/16m1087436>.
37. *Steinbach O., Unger G.* Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 40, No 5. P. 1516–1530. <https://doi.org/10.1002/mma.4075>.
38. *Shabardin E.E., Spiridonov A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M.* Numerical modeling of photonic crystal fibers using Muller boundary integral equations // *Lobachevskii J. Math.* 2024. V. 45, No 10. P. 4787–4797. <https://doi.org/10.1134/S1995080224605861>.
39. *Abramowitz M., Stegun I.A.* (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* National Bureau of Standards. Ser.: Applied Mathematics Series. V. 55. Washington, DC: US Gov. Print. Office, 1972. xiv, 1046 p.
40. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, No 8. P. 1148–1157. <https://doi.org/10.1134/s1995080218080127>.
41. *Кетов И.В., Октябрьская А.О., Спиридонов А.О., Карчевский Е.М.* Истинные и фиктивные собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера // *Програм. продукты и сист.* 2022. Т. 35, № 3. С. 316–328. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.139.316-328>.

References

1. Snyder A.W., Love J.D. *Optical Waveguide Theory*. New York, NY, Springer, 1983. viii, 738 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2813-1>.
2. Kunz K.S., Luebbers R.J. *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1993. 464 p. <https://doi.org/10.1201/9780203736708>.
3. Taflove A., Hagness S.C. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston, MA, London, Artech House, 2005. 1038 p.
4. Elsherbeni A.Z., Demir V. *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations*. Ser.: The ACES Series on Computational Electromagnetics and Engineering. SciTech Publ., 2015. 560 p. <https://doi.org/10.1049/SBEW514E>.
5. Obayya S. *Computational Photonics*. Chichester, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2010. xv, 306 p. <https://doi.org/10.1002/9780470667064>.
6. Shao Y., Peng Z., Lim K.H., Lee J.-F. Non-conformal domain decomposition methods for time-harmonic Maxwell equations. *Proc. R. Soc. A*, 2012, vol. 468, no. 2145, pp. 2433–2460. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0028>.
7. Koczka G., Bauernfeind T., Preis K., Bíró O. An iterative domain decomposition method for solving wave propagation problems. *Electromagnetics*, 2014, vol. 34, nos. 3–4, pp. 210–221. <https://doi.org/10.1080/02726343.2014.877751>.
8. Beilina L., Lindström E. An adaptive finite element/finite difference domain decomposition method for applications in microwave imaging. *Electronics*, 2022, vol. 11, no. 9, art. 1359. <https://doi.org/10.3390/electronics11091359>.
9. Wartak M.S. *Computational Photonics: An Introduction with MATLAB*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013. xiv, 452 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511794247>.
10. Lavrinenko A.V., Lægsgaard J., Gregersen N., Schmidt F., Søndergaard T. *Numerical Methods in Photonics*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2015. 364 p. <https://doi.org/10.1201/b17408>.
11. Dautov R.Z., Karchevskii E.M. Numerical modeling of optical fibers using the finite element method and an exact non-reflecting boundary condition. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 581–601. <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0049>.
12. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Vol. 72. Philadelphia, PA, SIAM, 2013. 287 p.
13. Müller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 155. Berlin, Heidelberg, Springer, 1969. viii, 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11773-6>.
14. Karchevskii E.M. Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 39, no. 9, pp. 1493–1498.
15. Karchevskii E.M. The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides. *Differ. Equations*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 1109–1111. <https://doi.org/10.1007/BF02754515>.

16. Frolov A., Kartchevskiy E. Integral equation methods in optical waveguide theory. In: Beilina L., Shestopalov Y.V. (Eds.) *Inverse Problems and Large-Scale Computations*. Ser.: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 52. Cham, Springer, 2013, pp. 119–133. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00660-4_9.
17. Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M. Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides. *Proc. Int. Conf. Days on Diffraction 2013*. St. Petersburg, IEEE, 2013, pp. 131–135. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2013.6712817>.
18. Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I. Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, vol. 21, no. 3, pp. 393–402. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.21.000393>.
19. Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P. Trends in microdisk laser research and linear optical modelling. *Opt. Quantum Electron.*, 2007, vol. 39, no. 15, pp. 1253–1272. <http://dx.doi.org/10.1007/s11082-008-9203-z>.
20. Smotrova E.I., Byelobrov V.O., Benson T.M., Čtyroký J., Sauleau R., Nosich A.I. Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions. *IEEE J. Quantum Electron.*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 20–30. <http://dx.doi.org/10.1109/JQE.2010.2055836>.
21. Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.30.001732>.
22. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a circular microcavity laser transforming into a square. *Proc. 2015 17th Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON)*. Budapest, IEEE, 2015, pp. 1–4. <http://dx.doi.org/10.1109/ICTON.2015.7193654>.
23. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions. *Proc. 2016 Days on Diffraction (DD)*. St. Petersburg, IEEE, 2016, pp. 390–395. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2016.7756880>.
24. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes. *Axioms*, 2019, vol. 8, no. 3, art. 101. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms8030101>.
25. Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method. *Opt. Commun.*, 2020, vol. 476, art. 126311. <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126311>.
26. Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities. *SIAM J. Appl. Math.*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 1977–1998. <http://dx.doi.org/10.1137/19M1261882>.
27. Yi C.-H., Dietz B., Han J.-H., Ryu J.-W. Decay rates of optical modes unveiling the island structures in mixed phase space. *Phys. Rev. A*, 2025, vol. 111, no. 3, art. 033509. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.033509>.

28. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials. *Laser Photonics Rev.*, 2020, vol. 14, no. 12, art. 2000271. <http://dx.doi.org/10.1002/lpor.202000271>.
29. Smotrova E.I., Nosich A.I., Benson T.M., Sewell P. Cold-cavity thresholds of microdisks with uniform and nonuniform gain: Quasi-3-D modeling with accurate 2-D analysis. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 2005, vol. 11, no. 5, pp. 1135–1142. <http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2005.853848>.
30. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity. *Opt. Quantum Electron.*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 213–221. <http://dx.doi.org/10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c>.
31. Herasymova D.O., Dukhopelnykov S.V., Natarov D.M., Zinenko T.L., Lucido M., Nosich A.I. Threshold conditions for transversal modes of tunable plasmonic nanolasers shaped as single and twin graphene-covered circular quantum wires. *Nanotechnology*, 2022, vol. 33, no. 49, art. 495001. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6528/ac8e0c>.
32. Kaliberda M.E., Pogarsky S.A., Kostenko O.V., Nosych O.I., Zinenko T.L. Circular quantum wire symmetrically loaded with a graphene strip as the plasmonic micro/nano laser: Threshold conditions analysis. *Opt. Express*, 2024, vol. 32, no. 7, pp. 12213–12227. <https://doi.org/10.1364/OE.514643>.
33. Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Zinenko T.L., Nosych O.I. Microsize graphene strip grating on gain substrate laser: Comparison of the H- and E-polarized mode threshold conditions. *Opt. Express*, 2025, vol. 33, no. 6, pp. 14266–14287. <https://doi.org/10.1364/OE.554771>.
34. Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1377–1384. <https://doi.org/10.1134/s1995080220070343>.
35. Ketov I.V., Karchevskii E.M. Characteristic equations for true and fictitious eigenvalues of Muller boundary integral equations. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 9, pp. 4016–4027. <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080223090147>.
36. Misawa R., Niino K., Nishimura N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 2017, vol. 77, no. 2, pp. 770–788. <https://doi.org/10.1137/16m1087436>.
37. Steinbach O., Unger G. Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 40, no. 5, pp. 1516–1530. <https://doi.org/10.1002/mma.4075>.
38. Shabardin E.E., Spiridonov A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M. Numerical modeling of photonic crystal fibers using Muller boundary integral equations. *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 10, pp. 4787–4797. <https://doi.org/10.1134/S1995080224605861>.
39. Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards. Ser.: Applied Mathematics Series. Vol. 55. Washington, DC, US Gov. Print. Office, 1972. xiv, 1046 p.
40. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1148–1157. <https://doi.org/10.1134/s1995080218080127>.

41. Ketov I.V., Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. True and fictitious eigenvalues of the set of Muller boundary integral equations. *Software Syst.*, 2022, vol. 35, no. 3, pp. 316–328. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.139.316-328>. (In Russian)

Информация об авторах

Егор Евгеньевич Шабардин, студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: eg.shabardin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2894-4785>

Евгений Михайлович Карчевский, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ekarchev70@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6931-425X>

Author Information

Egor E. Shabardin, Student, Kazan Federal University

E-mail: eg.shabardin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2894-4785>

Evgenii M. Karchevskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Kazan Federal University

E-mail: ekarchev70@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6931-425X>

Поступила в редакцию 4.06.2025

Принята к публикации 20.08.2025

Received June 4, 2025

Accepted August 20, 2025

ЛЮДИ НАУКИ

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.588-602>

Чибрикова Любовь Ивановна. 100 лет со дня рождения**Н.Б. Плещинский**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

pnb@kpfu.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научной деятельности профессора Казанского университета Любви Ивановны Чибриковой.

Ключевые слова: Чибрикова Любовь Ивановна

Для цитирования: Плещинский Н.Б. Чибрикова Любовь Ивановна. 100 лет со дня рождения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 588–602. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.588-602>.

PERSONALIA

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.588-602>

**Lubov' Ivanovna Chibrikova.
In honor of the 100th anniversary of birth****N.B. Pleshchinskii**

Kazan Federal University, Kazan, Russia

pnb@kpfu.ru

Abstract

This article is a tribute to the life and scientific legacy of Professor Lubov' Ivanovna Chibrikova of Kazan University.

Keywords: Lubov' Ivanovna Chibrikova

For citation: Pleshchinskii N.B. Lubov' Ivanovna Chibrikova. In honor of the 100th anniversary of birth. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 588–602. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.588-602>. (In Russian)

2 февраля 2025 года исполнилось 100 лет со дня рождения Любови Ивановны Чибриковой.



Рис. 1. Л.И. Чибрикова

Fig. 1. L.I. Chibrikova

Любовь Ивановна родилась в деревне Ново-Шигалеево Пестречинского района Татарской АССР, в крестьянской семье. Ее отец, Иван Чибриков, умер в 1926 г. Ее мать, Чибрикова Анисья Фоминична, вырастила трех дочерей: Веру, Надежду и Любовь.

Начальное образование Л.И. Чибрикова получила в Ново-Шигалеевской начальной школе, потом – в школе в Старом Шигалеево. В 1939 г. она поступила в восьмой класс средней школы № 24 Бауманского района г. Казани и окончила ее в 1942 г. В этом же году была принята на первый курс физико-математического факультета Казанского государственного университета. В сложное военное время студенты слушали лекции в холодных аудиториях и часто записывали их уже дома, по памяти. За работу на лесозаготовках студентка Чибрикова получила заслуженную награду – медаль «За доблестный труд в Великой Отечественной войне».



Рис. 2. Л.И. Чибрикова, 1947 г., выпускница КГУ

Fig. 2. L.I. Chibrikova, 1947, Kazan State University graduate

В 1947 г. Л.И. Чибрикова поступила в аспирантуру, руководителем стал Ф.Д. Гахов. Кандидатскую диссертацию «Особые случаи линейных краевых задач теории аналитических функций, аналогичных задаче Римана» Любовь Ивановна защитила в марте 1951 г.

Первая научная публикация была написана по материалам этой работы. Докторскую диссертацию «Краевая задача Римана для автоморфных функций» Л.И. Чибрикова защитила в Белорусском государственном университете в 1962 г. В 1965 г. получила звание профессора.

С марта по сентябрь 1951 г. Любовь Ивановна проработала ассистентом кафедры высшей математики в Новочеркасском политехническом институте (по распределению после аспирантуры). В сентябре вернулась в Казань и была принята на должность ассистента кафедры дифференциальных уравнений КГУ. На этой кафедре она и проработала до конца жизни – ассистентом, доцентом (с 1954 г.), профессором (с 1965 г.). Заведовала кафедрой с 1959 по 1991 г.

Направления научных исследований Любви Ивановны сформировались в Казанской научной школе Ф.Д. Гахова – первой его школе по краевым задачам (вторая была создана в Ростове-на-Дону, третья – в Минске). Первые ученики Ф.Д. Гахова защищали диссертации в Казани; при кафедре дифференциальных уравнений, которой он заведовал, активно работал научный семинар.



Рис. 3. 24 февраля 1952 г. Л.А. Чикин, М.П. Ганин, Ю.М. Крикунов, В.К. Наталевич, Л.И. Чибрикова, Ф.Д. Гахов, В.С. Рогожин

Fig. 3. February 24, 1952. L.A. Chikin, M.P. Ganin, Yu.M. Krikunov, V.K. Natalevich, L.I. Chibrikova, F.D. Gakhov, and V.S. Rogozhin

Тридцать учеников Л.И. Чибриковой успешно защитили кандидатские диссертации, из них десять стали докторами наук (см. Приложение 1). Темы диссертаций аспирантов были тесно связаны с направлениями исследований, которые были интересны ей самой. Все они лежат в области теории функций комплексного переменного и ее приложений.

1. Краевые задачи для аналитических функций, в первую очередь удовлетворяющих условиям автоморфности и типа автоморфности, а также задачи для счетного множества контуров и особые случаи краевых задач.

2. Сингулярные интегральные уравнения, разрешимые в замкнутой форме, с автоморфными и квазиавтоморфными ядрами, с ядрами, имеющими логарифмические или степенные особенности, со специальными функциями в ядрах.



Рис. 4. 26 февраля 1952 г. Научный семинар Ф.Д. Гахова

Fig. 4. February 26, 1952. F.D. Gakhov's scientific seminar

3. Граничные задачи для уравнений с частными производными в областях с алгебраическими границами и эквивалентные им задачи для аналитических функций на римановых поверхностях, полученные методом симметрии.

4. Применение кусочно-голоморфных функций при решении обыкновенных дифференциальных уравнений класса Фукса, развитие теории специальных функций методами ТФКП.

В списке публикаций Л.И. Чибриковой сто одиннадцать работ (см. Приложение 2). Выделим среди них две монографии: «Основные граничные задачи для аналитических функций» (1977 г.) и «Избранные главы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений» (1996 г.).

В первой подведен итог многолетних исследований краевой задачи Римана для симметричных и автоморфных функций, задачи Римана в случае счетного множества контуров и некоторых сингулярных интегральных уравнений (электронная копия книги есть на сайте библиотеки КФУ). Во второй изложена локальная теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с регулярными особыми точками и нелокальная теория уравнений класса Фукса (восстановленная версия выложена на сайте <http://abcnpb.ru>).

Остались неопубликованными учебное пособие по ТФКП и книга по применению метода симметрии при решении краевых задач.

В разные годы Любовь Ивановна читала лекции по всем общим курсам кафедры: «Дифференциальные уравнения», «Теория функций комплексного переменного», «Уравнения математической физики». Из спецкурсов, например, такие как «Краевые задачи для аналитических функций», «Сингулярные интегральные уравнения», «Метод симметрии», «Аналитическая теория дифференциальных уравнений». Она была членом редколлегии журнала «Известия вузов. Математика», входила в состав нескольких диссертационных советов, принимала активное участие в работе городского семинара по краевым задачам и в подготовке к печати в издательстве КГУ сборников «Труды семинара по краевым задачам».



Рис. 5. На лекции по ТФКП. На заседании Ученого совета

Fig. 5. During the lecture on the theory of functions of a complex variable. At the meeting of the Academic Council



Рис. 6. Городской семинар по краевым задачам (1965 г.). Первый ряд: Н.Б. Ильинский, М.Т. Нужин, Л.И. Чибрикова, Л.А. Аксентьев, К.А. Березин, Н.Ф. Салихов, А.В. Кузнецов, Г.Г. Тумашев, В.Я. Булыгин

Fig. 6. City Seminar on Boundary Value Problems (1965). Front row: N.B. Il'inskii, M.T. Nuzhin, L.I. Chibrikova, L.A. Aksentiev, K.A. Berezin, N.F. Salikhov, A.V. Kuznetsov, G.G. Tumashev, and V.Ya. Bulygin

На кафедре дифференциальных уравнений Казанского университета, которой Л.И. Чибрикова заведовала тридцать два года, работали в 1980–1990-е гг. в основном ее ученики. Заседания кафедры проходили практически еженедельно, но текущие дела решались за несколько минут. Затем, как правило, был научный доклад – сотрудника или аспиранта, а довольно часто и приехавшего из другого города диссертанта.

Характер Л.И. Чибриковой и ее жизненную позицию исключительно точно описал В.И. Жегалов [1]: «Она не терпела расхлябанности и неорганизованности. Не жаловала людей, которые ради своей выгоды были способны на предательство по отношению к коллегам. ... Открыто высказывала свою точку зрения на происходящее, не заботясь особенно о том, что это может кому-то не понравиться. При решении кадровых вопросов,

связанных с кафедрой, могла противостоять давлению начальства». Вот еще одна цитата [2]: «Студенты механико-математического факультета с большим удовольствием вспоминают лекции Любви Ивановны, разработанные ею оригинальные специальные курсы. Спокойным доверительным тоном она в доходчивой форме доносила до слушателей существо самых сложных математических вопросов. Четкая правильная речь и размеренный ритм позволяли студентам не только проникнуть в суть излагаемой темы, но и успеть все аккуратно законспектировать».

В 1982 г. Любви Ивановне было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки ТАССР», в 1997 г. – «Заслуженный деятель науки РФ».

Скончалась Л.И. Чибрикова 18 июня 2001 г., после тяжелой продолжительной болезни. Воспоминания о Любви Ивановне ее коллег и учеников опубликованы в книге [3].



Рис. 7. Кафедра дифференциальных уравнений (1983 г.): С.Н. Киясов, И.А. Бикчентаев, В.И. Жегалов, Л.Г. Салехов, Ю.М. Крикунов, Ю.В. Обносков; Л.К. Астафьева, С.Г. Аблаева, Л.И. Чибрикова, И.Г. Салехова, Л.Б. Бродниковская и аспиранты

Fig. 7. Department of Differential Equations (1983?): S.N. Kiyasov, I.A. Bikchentaev, V.I. Zhegalov, L.G. Salekhov, Yu.M. Krikunov, Yu.V. Obnosov; L.K. Astaf'eva, S.G. Ablaeva, L.I. Chibrikova, I.G. Salekhova, L.B. Brodnikovskaya, and postgraduate students

Приложение 1. Список учеников Л.И. Чибриковой, ставших кандидатами наук

1. Жегалов Валентин Иванович, «Некоторые краевые задачи для уравнений и систем смешанного типа высшего порядка» (1962 г.).

2. Сербин Александр Иванович, «Обобщенная краевая задача Римана на конечной римановой поверхности» (1963 г.).

3. Показеев Виктор Иванович, «Некоторые краевые задачи на фундаментальных многоугольниках фуксовых групп дробно-линейных преобразований» (1963 г.).

4. Марков Геннадий Вениаминович, «Некоторые краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях» (1965 г.).

5. Салехов Леонард Гарунович, «Исследование одной общей задачи линейного сопряжения методом симметрии» (1968 г.).

6. Аксентьева Евгения Павловна, «Применение римановых поверхностей к исследованию нелинейной задачи типа Гильберта» (1970 г.).
7. Феттер Эрвин Альбертович, «Некоторые сингулярные интегральные уравнения, связанные с группами итераций» (1970 г.).
8. Бабурин Юрий Степанович, «Некоторые краевые задачи для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в многосвязной области» (1971 г.).
9. Мерлин Анатолий Вольфович, «Сингулярные интегральные уравнения с многозначными на римановой поверхности ядрами» (1971 г.).
10. Бикчантаев Ильдар Ахмедович, «Краевые задачи для одного эллиптического уравнения» (1972 г.).
11. Кулагина Марина Фокеевна, «Характеристические сингулярные уравнения в случае счетного множества контуров» (1974 г.).
12. Мкоян Погос Хачатурович, «Краевая задача Римана в случае счетного множества контуров с несколькими точками сгущения» (1974 г.).
13. Салехова Илюся Гаруновна, «Задача Римана в случае счетного множества гладких разомкнутых дуг» (1975 г.).
14. Обносов Юрий Викторович, «Некоторые нелинейные краевые задачи теории голоморфных функций» (1976 г.).
15. Плещинский Николай Борисович, «Интегральные уравнения с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами и их приложение в теории уравнений смешанного типа» (1978 г.).
16. Сильвестров Василий Васильевич, «Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп первого класса» (1979 г.).
17. Гарифьянов Фархат Нургаязович, «Применение теории роста аналитических функций по кривым в исследовании граничной задачи Римана» (1979 г.).
18. Мочалов Владимир Викторович, «Граничные задачи на открытых римановых поверхностях» (1980 г.).
19. Киясов Сергей Николаевич, «Интегральные уравнения с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, эквивалентные краевой задаче Римана на римановой поверхности алгебраической функции» (1981 г.).
20. Показеев Валерий Викторович, «Граничные задачи для некоторых классов полианалитических функций» (1982 г.).
21. Усманова Светлана Гумеровна, «Исследование краевых задач на открытых римановых поверхностях методом интегральных уравнений» (1982 г.).
22. Майстер Андрей Владимирович, «Условия разрешимости интегральных уравнений с обобщенными степенными ядрами» (1983 г.).
23. Астафьева Лилия Кабировна, «Нелинейные краевые задачи со смещением для некоторых уравнений смешанного типа» (1984 г.).
24. Дильман Валерий Лейзерович, «Интегральные уравнения первого рода с одной или двумя подвижными логарифмическими особенностями в ядре» (1985 г.).
25. Хайруллин Равиль Сагитович, «Краевые задачи для модельных дифференциальных уравнений с сильным вырождением внутри области» (1986 г.).
26. Тимергалиев Самат Низаметдинович, «Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа второго порядка в многосвязных областях» (1989 г.).
27. Нут Закария Мухаммед, «Решение граничных задач для эллиптических уравнений второго порядка методом аналитического продолжения» (1991 г.).

28. Аль-Джаур Ахмад Махмуд, «Решение граничных задач для систем эллиптических уравнений второго порядка методами комплексного анализа» (1993 г.).

29. Художников Владимир Иванович, «Обращение интегральных уравнений Вольтерра со специальными функциями в ядре» (1994 г.).

30. Казза Ахмад Мохаммад, «Приведение задачи Дирихле и ее обобщений для эллиптических уравнений к граничным задачам для голоморфных функций» (2000 г.).

Из них докторами наук стали

1. Жегалов Валентин Иванович, «Исследование краевых задач со смещениями для уравнений смешанного типа» (1987 г.).

2. Сильвестров Василий Васильевич, «Основные задачи теории упругости для плоскости и многолистных поверхностей с разрезами» (1991 г.).

3. Хайруллин Равиль Сагитович, «Задачи Трикоми для дифференциальных уравнений с сильным вырождением на линии изменения типа» (1994 г.).

4. Бикчантаев Ильдар Ахмедович, «Краевые задачи для эллиптических систем первого порядка на римановых поверхностях» (1996 г.).

5. Плещинский Николай Борисович, «Сингулярные интегральные уравнения со сложной особенностью в ядре, алгоритмы их численного решения и приложения» (1997 г.).

6. Гарифьянов Фархат Нургаязович, «Операторы с дробно-линейными сдвигами и биортогональные ряды» (1997 г.).

7. Обносов Юрий Викторович, «Математические модели плоских стационарных силовых полей в гетерогенных средах» (1998 г.).

8. Тимергалиев Самат Низаметдинович, «Теоремы существования в нелинейной теории тонких упругих оболочек» (2003 г.).

9. Дильман Валерий Лейзерович, «Математическое моделирование напряженного состояния тонкостенных неоднородных цилиндрических оболочек» (2011 г.).

10. Киясов Сергей Николаевич, «Классификация задач линейного сопряжения для двумерного и трехмерного вектора, разрешимых в замкнутой форме» (2016 г.).

Приложение 2. Список трудов Л.И. Чибриковой

1. Особые случаи линейных краевых задач теории аналитических функций, аналогичных задаче Римана. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1950. 89 с.

2. Особые случаи обобщенной задачи Римана // Учен. зап. Казан. ун-та. 1952. Т. 112, кн. 10. С. 129–154.

3. О сведениях некоторых краевых задач к обобщенной задаче Римана // Учен. зап. Казан. ун-та. 1952. Т. 112, кн. 10. С. 123–127. (Совм. с В.С. Рогожиным).

4. О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров // Учен. зап. Казан. ун-та. 1953. Т. 113, кн. 10. С. 107–110. (Совм. с Ф.Д. Гаховым).

5. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Матем. сб. 1954. Т. 35 (77), вып. 3. С. 395–436. (Совм. с Ф.Д. Гаховым).

6. О краевой задаче Римана для автоморфных функций // Учен. зап. Казан. ун-та. 1956. Т. 116, кн. 4. С. 59–110.

7. Некоторые типы сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Тр. III Всесоюз. матем. съезда. Т. I. Москва, 1956. С. 48–49. (Совм. с Ф.Д. Гаховым).

8. О краевой задаче Римана для автоморфных функций // Тр. III Всесоюз. матем. съезда. Т. I. Москва, 1956. С. 111.
9. Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей // Учен. зап. Казан. ун-та. 1957. Т. 117, кн. 2. С. 22–26.
10. Новый метод решения одной краевой задачи смешанного типа // Учен. зап. Казан. ун-та. 1957. Т. 117, кн. 9. С. 44–47.
11. К решению краевой задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$ // Учен. зап. Казан. ун-та. 1957. Т. 117, кн. 9. С. 48–51.
12. Применение автоморфных функций при решении некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа // Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексн. переменного. М.: Физматгиз, 1960. С. 515–519.
13. Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами // Изв. вузов. Матем. 1961. № 6. С. 121–131.
14. Решение краевой задачи Римана для автоморфных функций в случае групп, характеризующихся двумя инвариантами // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141, № 1. С. 47–50.
15. Письмо в редакцию // Изв. вузов. Матем. 1962. № 3. С. 195–196.
16. Краевая задача Римана для автоморфных функций. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Минск, 1961. 281 с.
17. К методу Д.А. Граве решения задачи Дирихле // Краевые задачи теории аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 73–80. (Учен. зап. Казан. ун-та. 1962. Т. 122, кн. 3).
18. Об одном особом случае задачи Римана для автоморфных функций // Краевые задачи теории аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 81–94. (Учен. зап. Казан. ун-та. 1962. Т. 122, кн. 3).
19. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений // Краевые задачи теории аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 95–124. (Учен. зап. Казан. ун-та. 1962. Т. 122, кн. 3).
20. О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 59–72.
21. Задача Трикоми для одной многосвязной области // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1962. С. 73–79. (Совм. с В.И. Показеевым).
22. Решение задач механики сплошной среды сведением к краевым задачам для автоморфных функций // Прилож. теории функц. в механ. сплошн. среды. Аннот. докл. Междунар. симпоз. в Тбилиси. Москва, 1963. С. 12–13. (Совм. с Ф.Д. Гаховым).
23. Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. С. 3–14. (Учен. зап. Казан. ун-та. 1963. Т. 123, кн. 9).
24. О граничных задачах для прямоугольника // Краевые задачи теории функций комплексного переменного. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. С. 15–39. (Учен. зап. Казан. ун-та. 1963. Т. 123, кн. 9).
25. Краевая задача Римана на поверхности конечного рода // Тез. докл. VII Всесоюз. конф. по теории функций комплексн. переменного. Ростов-на-Дону, 1964. С. 184–186.
26. К решению краевой задачи Гильберта // Тр. семинара по обратным краевым задачам. Вып. 2. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. С. 201–212.

27. О задачах склеивания для прямоугольника // Итог. науч. конф. Казан. гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина за 1963 г. (краткое содерж. докл.). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1964. С. 31–33.
28. Решение задач механики сплошной среды сведением к краевым задачам для автоморфных функций // Прилож. теории функций в механ. сплошн. среды. Тр. Междунар. симп. (Тбилиси, 17–23 сент. 1963 г.). Т. II. М.: Наука, 1965. С. 208–218. (Совм. с Ф.Д. Гаховым).
29. К решению краевых задач методом симметрии // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 3. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. С. 202–224.
30. О некоторых краевых задачах на неориентируемых поверхностях // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 3. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. С. 225–229. (Совм. с Г.В. Марковым).
31. О решении некоторых краевых задач методом симметрии // Тез. кр. науч. сообщ. Междунар. конгр. матем. Секц. 12. Москва, 1966. С. 56.
32. О методе симметрии в теории упругости // Изв. вузов. Матем. 1967. № 10. С. 102–112.
33. Группы, порожденные алгебраической функцией, и их приложение при решении сингулярных уравнений // Тез. II конф. матем. Белоруссии. Минск, 1967. (Совм. с Э.А. Феттером).
34. К решению одной общей задачи линейного сопряжения аналитических функций в случае алгебраических контуров // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 5. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1968. С. 224–249. (Совм. с Л.Г. Салеховым).
35. Применение метода симметрии при решении одной задачи линейного сопряжения // Изв. вузов. Матем. 1968. № 9. С. 94–105. (Совм. с Л.Г. Салеховым).
36. Решение некоторых граничных задач методом симметрии // Тр. II Казахстанской межвуз. конф. по матем. и механ. (Алма-Ата, 17–22 сент. 1965 г.). Алма-Ата: Наука, 1968. С. 147–152.
37. Об одном сингулярном интегральном уравнении, связанном с группой итераций алгебраической функции // Изв. вузов. Матем. 1969. № 9. С. 109–120. (Совм. с Э.А. Феттером).
38. О применении римановых поверхностей при исследовании плоских краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 7. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. С. 28–42.
39. К решению краевой задачи Гильберта // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 8. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971. С. 155–175. (Совм. с Л.Г. Салеховым).
40. К решению задачи Римана в особых случаях, I // Изв. вузов. Матем. 1971. № 3. С. 101–113.
41. Задача Римана в случае счетного множества контуров // Аннот. докл. симпоз. по механ. сплошн. среды и родств. пробл. анализа. Тбилиси, 1971. С. 50–51.
42. Задача Римана в случае счетного множества контуров // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 9. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. С. 216–233. (Совм. с И.Г. Салеховой).
43. К решению сингулярных интегральных уравнений, связанных с группами итераций // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 9. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1972. С. 234–239. (Совм. с Э.А. Феттером).
44. Задача Римана для счетного множества контуров с двумя предельными точками, I // Изв. вузов. Матем. 1972. № 3. С. 90–102. (Совм. с П.Х. Мкояном).

45. К решению задачи Римана в особых случаях, II // Изв. вузов. Матем. 1972. № 12. С. 95–101.
46. К решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Вып. 1. Чебоксары, 1972. С. 76–98.
47. Задача Римана в случае счетного множества контуров // Тр. симп. по мех. сплош. среды и родств. пробл. анализа (Тбилиси, 23–29 сент. 1971 г.). Т. 1. Тбилиси: Мецниереба, 1973. С. 255–270.
48. К решению задачи Римана в случае счетного множества контуров // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 10. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1973. С. 171–175.
49. О некоторых кусочно-голоморфных функциях со счетным множеством особых контуров // Изв. вузов. Матем. 1974. № 5. С. 198–204.
50. Задача Римана для счетного множества контуров с двумя предельными точками, II // Изв. вузов. Матем. 1974. № 1. С. 113–125. (Совм. с П.Х. Мкояном).
51. Об одном представлении мероморфной функции и его применении // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 2. С. 293–296. (Совм. с М.Ф. Кулагиной).
52. Краевая задача Римана в случае счетного множества контуров // Тез. докл. IV респ. конф. матем. Белоруссии «Проблемы развития прикладных математических исследований». Ч. II. Минск, 1975. С. 113.
53. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами // Изв. вузов. Матем. 1976. № 6. С. 91–104. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
54. Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 302 с.
55. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, II // Изв. вузов. Матем. 1977. № 10. С. 150–162. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
56. К вопросу об эффективности решения краевой задачи Римана для автоморфных функций // Изв. вузов. Матем. 1978. № 12. С. 117–121. (Совм. с В.В. Сильвестровым).
57. Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, I // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 15. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. С. 139–167.
58. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, III // Изв. вузов. Матем. 1978. № 6. С. 129–146. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
59. Граничная задача типа Трикоми для некоторых уравнений второго порядка // Тр. Всесоюз. конф. по уравн. с частн. производн., посв. 75-летию со дня рожд. акад. И.Г. Петровского (27–31 января 1976 г.). Москва, 1978. С. 481–482. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
60. Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, II // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 185–201.
61. Построение автоморфного аналога ядра Коши для одного класса собственно разрывных групп // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 16. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 202–217. (Совм. с В.В. Сильвестровым).
62. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, IV // Изв. вузов. Матем. 1979. № 9. С. 62–74. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
63. Об интегральных уравнениях с обобщенными логарифмическими и степенными ядрами, V // Изв. вузов. Матем. 1979. № 10. С. 74–87. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
64. О вычислении рода и о точках Вейерштрасса фундаментального многоугольника функциональной группы // Изв. вузов. Матем. 1979. № 12. С. 51–56. (Совм. с В.В. Сильвестровым).

65. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Матем. анализ. Т. 18. Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР. М., 1980. С. 3–67.
66. Сингулярные интегральные уравнения с автоморфными и квазиавтоморфными логарифмическими и степенными ядрами, I // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 17. Казань: Казан. гос. ун-т, 1980. С. 210–247. (Совм. с Н.Б. Плещинским).
67. Метод интегральных уравнений при построении некоторых классов мероморфных функций // III респ. симпоз. по дифференц. и интегр. уравн. Тез. докл. (1–3 июня 1982 г.). Одесса, 1982. С. 198–199.
68. Об одном обобщении двоякопериодических функций // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Чебоксары, 1982. С. 112–140. (Совм. с В.В. Показеевым).
69. Краевая задача Римана для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Проблемы гидродинамики больших скоростей и краевых задач. Тез. докл. краевой конф. (Сент. 1982 г.). Краснодар, 1982. С. 64–65.
70. Некоторые результаты исследований по краевым задачам теории аналитических функций и сингулярным интегральным уравнениям в Казанском университете // Проблемы гидродинамики больших скоростей и краевых задач. Тез. докл. краевой конф. (Сент. 1982 г.). Краснодар, 1982. С. 66–68.
71. О построении автоморфных функций и автоморфных форм в случае конечнопорожденных групп методом интегральных уравнений, I. Казань: Казан. гос. ун-т, 1983. 46 с. (Деп. в ВИНТИ 15.08.1983, N 4470–83 Деп.).
72. О применении краевой задачи Римана при построении интегральных представлений некоторых решений уравнений класса Фукса // Теория функций комплексного переменного и краевые задачи. Чебоксары, 1983. С. 160–172.
73. Исследование разрешимости одного интегрального уравнения Фредгольма и его применение // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 21. Казань: Казан. гос. ун-т, 1984. С. 193–209.
74. Исследование разрешимости одного интегрального уравнения первого рода с двумя подвижными логарифмическими особенностями в ядре. Казань: Казан. гос. ун-т, 1984. 26 с. (Деп. в ВИНТИ 18.07.1984, N 5153–84 Деп.). (Совм. с В.Л. Дильманом).
75. Разрешимость и применение одного интегрального уравнения Карлемана // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 4. С. 817–820.
76. Некоторые результаты исследований по автоморфным функциям и их применениям в теории сингулярных интегральных уравнений // Научн. тр. Юбилейного семинара по краевым задачам, посв. 75-летию со дня рожд. акад. АН БССР Ф.Д. Гахова. Изд-во Белорусск. у-та, 1985. С. 128–138.
77. Некоторые свойства криволинейных интегралов с взаимно союзными ядрами Карлемана // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1985. С. 111–121.
78. Применение кусочно-голоморфных функций при построении интегральных представлений некоторых спецфункций // Докл. расшир. засед. сем. Ин-та прикл. матем. им. И.Н. Векуа. Тбилиси, 1985. Т. 1, № 1. С. 217–220.
79. О решениях интегрального уравнения с обобщенным логарифмическим ядром в L_p , $p > 1$ // Изв. вузов. Матем. 1986. № 4. С. 26–36. (Совм. с В.Л. Дильманом).
80. О кусочно-голоморфных решениях уравнений класса Фукса // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1986. С. 136–148.

81. Некоторые интегральные уравнения с периодическими ядрами // Краевые задачи и их приложения. Чебоксары, 1986. С. 60–67. (Совм. с С.П. Кузнецовым).

82. Применение одного интегрального преобразования в теории фуксовых уравнений // Тез. докл. XI Всесоюз. школы по теории операторов в функц. пространствах (Челябинск, 26–30 мая 1986 г.). Ч. III. Челябинск, 1986. С. 134.

83. Integral equation with generalized power kernel and its application to the theory of boundary value problems for the generalized Tricomi equation // Mixed type equations / edit. by John M. Rassias. (Teubner-Texte zur Mathematik; 90). Leipzig: BSB Teubner, 1986. P. 84–104. (Совм. с Н.Б. Плещинским).

84. Построение автоморфных форм измерения -2 методом интегральных уравнений // Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 23. Казань: Казан. гос. ун-т. 1987. С. 239–257.

85. Решение дифференциальных уравнений класса Фукса методом интегральных преобразований // Классич. и неклассич. краевые задачи для диф. уравн. с частн. произв., спец. функции, интегр. уравн. и их прилож. Тез. докл. Всесоюз. науч. конф. (25–29 апреля 1987 г.). Куйбышев, 1987. С. 153.

86. Решение обобщенного гипергеометрического уравнения посредством одного интегрального преобразования // Респ. науч. конф. «Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения» (22–24 сент. 1987 г.). Тез. докл. Ч. 2. Одесса, 1987. С. 133–134.

87. Об уравнении Гойна // Исследования по краевым задачам и их приложениям. Чебоксары, 1987. С. 126–132.

88. Application of the Cauchy type integrals and their generalizations in the theory of automorphic functions // Topics in mathematical analysis. World Scientific Publ. Co. 1989. P. 78–122.

89. Применение интегральных представлений кусочно-голоморфных функций в теории фуксовых дифференциальных уравнений // Линейные операторы в функциональных пространствах. Тез. докл. Сев.-Кавказ. рег. конф. Грозный, 1989. С. 176–178.

90. Кусочно-голоморфные решения дифференциальных уравнений класса Фукса // Abstracts «Continuum mechanics and related problems of analysis» (Symposium dedicated to the centenary of academician N. Muskhelishvili). Tbilisi. 1991. P. 139–140.

91. Применение метода симметрии при решении граничных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. и интегр. уравнения. Матем. физика и спец. функции. Междунар. научн. конф. (24–31 мая 1992 г.). Самара, 1992. С. 265–266.

92. Обращение некоторых интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гипергеометрическими функциями в ядре. Казань: Казан. гос. ун-т, 1992. 31 с. (Деп. в ВИНТИ 05.11.1992, N 3183–В92). (Совм. с В.И. Художниковым).

93. О применении метода симметрии к решению основных задач плоской теории упругости в случае анизотропных сред. Казань: Казан. гос. ун-т, 1993. 28 с. (Деп. в ВИНТИ). (Совм. с Лин Вэйем).

94. Развитие метода И.Н. Векуа решения задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа в случае областей с алгебраическими границами. Казань: Казан. гос. ун-т, 1993. 33 с. (Деп. в ВИНТИ). (Совм. с З.М. Нутом).

95. Применение метода симметрии при решении задачи Дирихле для эллиптических уравнений в случае многосвязных областей с алгебраическими границами. Казань: Казан. гос. ун-т, 1993. 27 с. (Деп. в ВИНТИ). (Совм. с З.М. Нутом).

96. О решении граничных задач для эллиптических уравнений в случае плоских областей с алгебраическими границами // Алгебра и анализ. Тез. докл. Междунар. научн. конф., посв. 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева (5–11 июля 1994 г.). Ч. II. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. С. 144.

97. Об интегральных уравнениях Вольтерра второго рода с вырожденными гипергеометрическими функциями в ядре // Тез. докл. V межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи» (24–25 мая 1995 г.). Самара, 1995. С. 91. (Совм. с В.И. Художниковым).

98. Избранные главы аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Казань: Математика, 1996. 312 с.

99. О возможности эффективного решения граничных задач для эллиптических уравнений в случае многосвязных областей с алгебраическими границами // Тез. докл. Междунар. науч. конф., посв. 90-летию со дня рожд. С.П. Пулькина (27–30 мая 1997 г.). Самара, 1997. С. 63–64.

100. Решение граничных задач для полианалитических функций в случае плоскости с конечным числом разрезов на одной прямой // Тез. докл. Междунар. науч. конф., посв. 90-летию со дня рожд. С.П. Пулькина (27–30 мая 1997 г.). Самара, 1997. С. 64–65. (Совм. с Ю.А. Шмагиным).

101. Об одном свойстве обобщенных гипергеометрических функций // Тез. докл. Междунар. науч. конф., посв. 90-летию со дня рожд. С.П. Пулькина (27–30 мая 1997 г.). Самара, 1997. С. 129–130. (Совм. с В.И. Художниковым).

102. Граничные задачи типа Гильберта для эллиптических уравнений в случае плоских областей с алгебраическими границами // Тез. докл. школы-конф., посв. 100-летию со дня рожд. Б.М. Гагаева (16–22 июня 1997 г.). Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1997. С. 238–239.

103. О применении метода симметрии к решению основных задач плоской теории упругости в случае анизотропной среды. Препринт № 98-1. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1998. 30 с. (Совм. с Лин Вэйем).

104. Задачи типа Гильберта для полианалитических функций на плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов // Тез. докл. III Сибирск. конгр. по прикл. и индустр. матем., посв. памяти С.Л. Соболева (22–27 июня 1998 г.). Ч. IV. Секц. «Неклассич. уравнения с частными производными». Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО РАН, 1998. С. 45. (Совм. с Ю.А. Шмагиным).

105. Интегральные представления обобщенных функций Лежандра. Препринт N 98-1. Казань: Унипресс, 1998. 14 с. (Совм. с С.Г. Аблаевой).

106. Интегральные представления обобщенных функций Лежандра // Тез. VII Междунар. конф. «Математика. Экономика. Экология. Образование» (26 мая – 1 июня 1999 г.). Секц. 1. Диф. уравн. Ростов-на-Дону, 1999. С. 42. (Совм. с С.Г. Аблаевой).

107. О методе симметрии при исследовании плоских граничных задач для ДУ в частных производных высшего порядка // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE'99). Тез. докл. Междунар. конф. (Минск, 14–18 сент. 1999 г.). Минск: Белгосуниверситет, 1999. С. 241. (Совм. с Ю.А. Шмагиным).

108. Решение граничных задач D и A для эллиптических уравнений в случае плоских областей приведением к одноименным задачам для голоморфных функций // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения (Матер. Всеросс. науч. конф. Казань, 18–24 окт. 1999 г.). Казань: Унипресс, 1999. С. 381–387.

109. Роль Ф.Д. Гахова в становлении и развитии научных исследований по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 3. Краевые задачи и их приложения (Матер. Всеросс. науч. конф. Казань, 18–24 окт. 1999 г.). Казань: Унипресс, 1999. С. 387–393.

110. Об одном конструктивном методе решения линейных граничных задач для вещественных эллиптических уравнений в случае плоских областей. Казань: Казан. гос. ун-т, 1999. 39 с. (Деп. в ВИНТИ РФ 23.12.1999, N 3825–В99). (Совм. с А.М. Каззой).

111. Applications of symmetry methods in basic problems of orthotropic elasticity // *Applicable Analysis*. 1999. V. 73, No 1–2. P. 19–43. (Совм. с Лин Вэйем).

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Литература

1. Жегалов В.И. Любовь Ивановна Чибрикова. В кн.: Механико-математический факультет Казанского университета: Очерки истории. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2003. С. 145–151.
2. Насыров С.Р. Горение // Казань. 2004. № 10. С. 91–92.
3. Любовь Ивановна Чибрикова, 1925–2001. Сост. Ю.В. Обносков. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2003. 32 с.

References

1. Zhegalov V.I. Lubov' Ivanovna Chibrikova. In: *Mekhaniko-matematicheskii fakul'tet Kazanskogo universiteta: Ocherki istorii* [Faculty of Mechanics and Mathematics at Kazan Federal University: A Historical Overview]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2003, pp. 145–151. (In Russian)
2. Nasyrov S.R. Combustion. *Kazan'*, 2004, no. 10, pp. 91–92. (In Russian)
3. *Lubov' Ivanovna Chibrikova, 1925–2001* [Lubov' Ivanovna Chibrikova, 1925–2001]. Obnosov Yu.V. (Compil.). Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2003. 32 p. (In Russian)

Информация об авторах

Николай Борисович Плещинский, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: pnb@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-091X>

Author Information

Nikolai B. Pleshchinskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

E-mail: pnb@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-091X>

Поступила в редакцию 14.07.2025

Принята к публикации 28.07.2025

Received July 14, 2025

Accepted July 28, 2025

