

ISSN 2541-7746 (Print) ISSN 2500-2198 (Online)

# **УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ** Казанского университета

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki



Том 167 Книга 2 Volume 167 Issue 2

ISSN 2541–7746 (Print) ISSN 2500–2198 (Online)

# Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки

2025 Т. 167, кн. 2

рецензируемый научный журнал

#### УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

#### Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенова – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

*Р.З. Даутов* – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

P.X. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

- А.Г. Мельников доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия
- С.Р. Насыров д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- В.Н. Паймушин д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- *М.Х. Салахов* д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия
- Ю.Г. Смирнов д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия
- В.Ф. Тишкин д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия
- О.Н. Шерстноков д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста А.О. Кармазина

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»: 420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18 Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: *uz.ku@kpfu.ru*; сайт: http://kpfu.ru/uz-rus/phm

Дата выхода в свет 02.07.2025. Формат 60×84/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 23,25. Уч.-изд. л. 12,10. Тираж 300 экз. Заказ 64/6 Отпечатано в типографии Издательства Казанского университета 420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

© Казанский федеральный университет, 2025

# Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

Proceedings of Kazan University.

2025 Vol. 167, No. 2

Physics and Mathematics Series Peer-Reviewed Scientific Journal

#### UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

#### Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) - Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov - Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

#### English Editor: A.O. Karmazina

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Kazan (Volga Region) Federal University" The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technologies and Mass Media Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; website: http://kpfu.ru/uz-eng/phm

Date of publication: July 02, 2025. Page size:  $60 \times 84/8$ . Offset printing. Conventional printing sheet: 23.25. Publisher's signature: 12.10. Circulation: 300 copies. Order: 64/6 Printed in KFU Publishing House ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia

© Kazan Federal University, 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

Едемский В.А. 2-адическая сложность бинарных последовательностей	
Динга–Хеллесета с периодом <i>pq</i>	213
Зубарев В.М. Аналитическая аппроксимация решения задачи Блазиуса	
в пограничном слое на плоской пластине	227
Кабанова Л.А. О некоторых свойствах коэффициентов в методе структурных	
функций	244
Каленов Н.Е., Сотников А.Н. Язык представления онтологии Единого цифрового	
пространства научных знаний	267
Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В., Шишов М.А.	
Формы потери устойчивости и разрушения тест-образцов	
из волокнистых композитов со структурой $[0^{\circ}]_s$ при испытаниях	
на осевое сжатие. Теория и эксперимент	282
Печников А.А. Пилотная модель сети научных журналов России: анализ на основе	
графа пересечений	311
Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В., Попова М.В. Нелинейный гидроупругий отклик стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой	
жидкостью, при продольных колебаниях его противоположной стенки	329
Росляков А.В., Герасимов В.В. Применение теории сетевого исчисления для анализа задержек трафика радиоинтерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul	951
	201
Ступников С.А. Верификация интеграции данных в интегрированной системе баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов	367
Хадур М. Один метод построения идемпотентов в унитальной алгебре	384
Янилкин И.В., Гумаров А.И., Увин Д.С., Киямов А.Г., Хохорин С.А., Батулин Р.Г.	
Влияние термического отжига на магнитные свойства сплава	
Hastelloy C-276 с промежуточными буферными слоями	
$Al_2O_3/Y_2O_3/MgO/LaMnO_3$	397

# CONTENTS

Edemskiy V.A. 2-Adic complexity of Ding–Helleseth binary sequences with period $pq$ .	213				
Zubarev V.M. Analytical approximation of solutions to the Blasius problem in the					
boundary layer on a flat plate	227				
Kabanova L.A. On some properties of the coefficients in the structural functions method					
Kalenov N.E., Sotnikov A.N. A language for the Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology representation	267				
Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V., Shishov M.A. Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a [0°], layup under axial compression. Theory	_0.				
and experiment	282				
Pechnikov A.A. A pilot model of the scientific journal network in Russia: An intersection graph analysis	311				
Popov A.A., Popova A.A., Chernenko A.V., Popova M.V. Nonlinear hydroelastic response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid due to longitudinal vibrations of its opposite wall					
Roslyakov A.V., Gerasimov V.V. Application of network calculus to analyze eCPRI traffic delays in 4G/5G fronthaul mobile networks					
Stupnikov S.A. Verification of data integration in an integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials	367				
Khadour M. A method for constructing idempotents in a unital algebra	384				
Yanilkin I.V., Gumarov A.I., Uvin D.S., Kiiamov A.G., Khokhorin S.A., Batulin R.G. Effect of thermal annealing on the magnetic properties of Hastelloy C-276					
alloy with intermediate $Al_2O_3/Y_2O_3/MgO/LaMnO_3$ buffer layers	397				

# ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.7

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.213-226

# 2-адическая сложность бинарных последовательностей Динга-Хеллесета с периодом *pq*

# В.А. Едемский

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, г. Великий Новгород, Россия

vladimir.edemsky@novsu.ru

#### Аннотация

Предложен метод анализа 2-адической сложности бинарных обобщенных циклотомических последовательностей с периодом *pq*. 2-адическая сложность, наряду с линейной сложностью, является важной характеристикой непредсказуемости последовательностей. Метод основан на использовании обобщенных гауссовых периодов различных порядков по простым модулям *p* и *q*. Оценена 2-адическая сложность обобщенных циклотомических последовательностей Динга– Хеллесета второго, четвертого и шестого порядков с высокой линейной сложностью. Показано, что рассмотренные последовательности обладают большой 2-адической сложностью, достаточной для отражения атак посредством алгоритма рациональной аппроксимации. Обобщены предыдущие результаты, полученные для последовательностей второго порядка.

Рассмотренный метод может быть использован для последовательностей другого вида, которые определяются посредством использования обобщенных циклотомических классов разных порядков. Его также можно применять для анализа *m*-адической сложности как бинарных, так и небинарных последовательностей, например, четвертичных.

**Ключевые слова:** 2-адическая сложность, обобщенная циклотомическая последовательность

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00442.

Для цитирования: *Едемский В.А.* 2-адическая сложность бинарных последовательностей Динга-Хеллесета с периодом *pq* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 213–226. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.213-226.

# ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.213-226

# 2-Adic complexity of Ding–Helleseth binary sequences with period pq

# V.A. Edemskiy

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Veliky Novgorod, Russia

vladimir.edemsky@novsu.ru

#### Abstract

A method is proposed to analyze the 2-adic complexity of generalized cyclotomic binary sequences with period pq. Along with linear complexity, 2-adic complexity serves as an important measure of sequence unpredictability. The method is based on generalized Gaussian periods of various orders using the prime modules p and q. The 2-adic complexity of Ding–Helleseth generalized cyclotomic sequences of orders two, four, and six with high linear complexity is estimated. The analysis shows that these sequences have high 2-adic complexity, which is sufficient to resist attacks using the rational approximation algorithm. Previous results obtained for the sequences of order two are summarized. The proposed method can be applied to a different type of sequences defined using generalized cyclotomic classes of various orders, as well as to investigate the m-adic complexity of both binary and non-binary sequences, such as quaternary sequences.

Keywords: 2-adic complexity, generalized cyclotomic sequences

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00442).

For citation: Edemskiy V.A. 2-Adic complexity of Ding-Helleseth binary sequences with period pq. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 213–226. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.213-226. (In Russian)

#### Введение

Для оценки непредсказуемости псевдослучайных последовательностей применяют различные виды сложностей, наиболее известной из которых является линейная. 2-адическая сложность, как мера непредсказуемости последовательностей, была предложена в [1] для оценки последовательностей, синтезируемых регистром сдвига с обратной связью по переносу. Свойства 2-адической сложности и различные алгоритмы её вычисления изложены в [2]. Согласно алгоритму рациональной аппроксимации для нахождения последовательности с 2-адической сложностью *m* достаточно 2*m* последовательных членов последовательности, то есть для «хороших» периодических последовательностей их 2-адическая сложность должна быть больше половины периода. Таким образом, желательно, чтобы последовательности имели не только высокую линейную сложность, но и 2-адическую. Последнее замечание послужило причиной появления серии статей, посвященных исследованию 2-адической сложности бинарных последовательностей, обладающих высокой линейной сложностью. Так, в [3–5] определена 2-адическая сложность последовательностей с идеальной или почти идеальной автокорреляцией, в [6–8] – чередующихся последовательностей, а в [9–12] – ряда обобщенных циклотомических последовательностей, в частности, в [13, 14] оценена 2-адическая сложность последовательностей Динга – Хеллесета второго порядка с периодом *pq*, где *p* и *q* – различные простые числа, при ограничениях на *p* и *q*. Линейная сложность таких последовательностей изучена ранее.

В настоящий момент известно несколько теоретических способов исследования 2-адической сложности последовательности, основанных на использовании: автокорреляции последовательности; циклического определителя, составленного из значений дискретного преобразования Фурье последовательности; обобщенных гауссовых периодов для последовательностей простого периода или удвоенного [3, 12, 15]. В настоящей статье предложено распространение последнего подхода на последовательности с периодом pq, где p и q – различные простые числа. Для иллюстрации метода обобщим результаты из [13, 14] без ограничений на p, q, а также докажем, что обобщенные циклотомические последовательности Динга–Хеллесета четвертого и шестого порядков обладают высокой 2-адической сложностью. Предложенный метод исследования 2-адической сложности можно использовать для изучения 2-адической сложности модернизированных последовательностей Динга–Хеллесета [16], а также m-адической сложности подобных последовательностей для m > 2.

#### 1. Обобщенные циклотомические последовательности

Прежде всего, напомним определение обобщенных циклотомических классов Динга– Хеллесета по модулю *pq* [17].

Пусть p и q – различные нечетные простые числа, d = HOД(p-1,q-1) и e = (p-1)(q-1)/d. Так как p и q – простые числа, то всегда существует общий примитивный корень g по модулям p и q, его порядок по модулю pq равен e [18].

Обозначим через  $H_i$  и  $G_i$  циклотомические классы порядка d по модулям p и q соответственно, то есть

$$H_i = \left\{ g^{i+dj} \mod p \mid j = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{d} - 1 \right\} \bowtie G_i = \left\{ g^{i+dj} \mod q \mid j = 0, 1, \dots, \frac{q-1}{d} - 1 \right\},$$
$$i = 0, 1, \dots, d-1.$$

Тогда справедливы разбиения

$$\mathbb{Z}_p = \bigcup_{i=0}^{d-1} H_i \cup \{0\} \quad \text{if } \mathbb{Z}_q = \bigcup_{i=0}^{d-1} G_i \cup \{0\}.$$

Согласно китайской теореме об остатках существует такое число  $x \in \mathbb{Z}$ , что  $x \equiv g \pmod{p}$ ,  $x \equiv 1 \pmod{q}$ . Обобщенные циклотомические классы Динга–Хеллесета порядка d по модулю pq определяются следующим образом:

$$D_i = \left\{ g^{i+jd} x^t \mod pq \ \middle| \ j = 0, 1, \dots, \frac{e}{d} - 1, \ t = 0, 1, \dots, d - 1 \right\}, \ i = 0, 1, \dots, d - 1.$$

Обозначим через  $\mathbb{Z}_{pq}^*$  группу обратимых элементов  $\mathbb{Z}_{pq}$ , где  $\mathbb{Z}_{pq}$  – кольцо классов вычетов по модулю pq. Пусть  $P = \{p, 2p, \ldots, (q-1)p\}$  и  $Q = \{q, 2q, \ldots, (p-1)q\}$ . Тогда

$$\mathbb{Z}_{pq}^{*} = \bigcup_{i=0}^{d-1} D_{i} \quad \text{if} \quad \mathbb{Z}_{pq} = \bigcup_{i=0}^{d-1} D_{i} \cup P \cup Q \cup \{0\}.$$

Определим последовательность Динга-Хеллесета s с периодом pq по формуле

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mod pq \in \bigcup_{i=d/2}^{d-1} D_i \cup C, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$
(1)

где C = Q, или C = P, или  $C = \bigcup_{i=d/2}^{d-1} qH_i \cup \bigcup_{i=d/2}^{d-1} pG_i$  [13,14].

В завершение раздела напомним, что 2-адическая сложность  $\Phi_2(s)$  последовательности *s* с периодом *pq*, согласно [2], может быть вычислена по формуле

$$\Phi_2(s) = \log_2\left(\frac{2^{pq} - 1}{\text{HOД}\left(S(2), 2^{pq} - 1\right)} + 1\right),\tag{2}$$

где  $S(x) = \sum_{i=0}^{pq-1} s_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$  – многочлен последовательности *s*. Таким образом, для нахождения 2-адической сложности достаточно изучить наибольший общий делитель двух чисел S(2) и  $2^{pq} - 1$ . В данном случае, при определении последовательности посредством  $D_i$ , важны свойства сумм  $\sum_{j \in D_i} 2^j$ . В следующем разделе покажем, как классы вычетов  $D_i$ связаны с циклотомическими классами порядка *d* по модулям *p*, *q*, и рассмотрим метод вычисления этих сумм.

#### 2. Метод анализа 2-адической сложности

Кольцо классов вычетов  $\mathbb{Z}_{pq}$  изоморфно прямому произведению  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  относительно изоморфизма  $f(t) = (t \mod p, t \mod q)$  [18]. Пусть  $F_{i,j} = f^{-1}(H_i \times G_j), i, j = 0, 1, \ldots, d-1$ . Следовательно,

$$\mathbb{Z}_{pq}^{*} = \bigcup_{i=0}^{d-1} \bigcup_{j=0}^{d-1} F_{i,j} \quad \text{if} \quad \mathbb{Z}_{pq} = \bigcup_{i=0}^{d-1} \bigcup_{j=0}^{d-1} F_{i,j} \cup \bigcup_{i=0}^{d-1} qH_i \cup \bigcup_{i=0}^{d-1} pG_i \cup \{0\}.$$

Использовав определения множеств  $D_i$  и  $F_{i,j}$ , получим следующее утверждение.

Лемма 1. Для 
$$i = 0, 1, ..., d - 1$$
 имеем  $D_i = \bigcup_{j=0}^{d-1} F_{j,i}$ .

Таким образом, обобщенная циклотомическая последовательность Динга–Хеллесета с периодом pq может быть определена с использованием множеств  $F_{i,j}$ ,  $H_i$ ,  $G_i$ . Следовательно, согласно формуле (2) для анализа 2-адической сложности таких последовательностей достаточно изучить суммы степеней 2, когда показатели степеней принадлежат множествам  $F_{i,j}$ ,  $H_i$ ,  $G_i$ . Определим вспомогательные многочлены  $S_i^{(d)}(x) = \sum_{u \in H_i} x^u$  и  $T_i^{(d)}(x) = \sum_{v \in G_i} x^v$  для всех  $i = 0, 1, \ldots, d-1$ . Далее индексы многочленов  $S_i^{(d)}(x)$  и  $T_i^{(d)}(x)$  всегда будем вычислять по модулю d. Следующие сравнения непосредственно вытекают из определений вспомогательных многочленов и классов вычетов.

Лемма 2. Пусть 
$$u, v$$
 – натуральные числа, НОД  $(u, p) = 1$   $u$  НОД  $(v, q) = 1$ . Тогда  
A.  $S_i^{(d)} \left(2^{ug^j}\right) \equiv S_{i+j}^{(d)} \left(2^u\right) \pmod{2^{up} - 1};$   
B.  $S_0^{(d)} \left(2^u\right) + S_1^{(d)} \left(2^u\right) + \dots + S_{d-1}^{(d)} \left(2^u\right) \equiv -1 \pmod{(2^{up} - 1)/(2^u - 1)};$   
C.  $T_i^{(d)} \left(2^{vg^j}\right) \equiv T_{i+j}^{(d)} \left(2^v\right) \pmod{2^{vq} - 1};$   
D.  $T_0^{(d)} \left(2^v\right) + T_1^{(d)} \left(2^v\right) + \dots + T_{d-1}^{(d)} \left(2^v\right) \equiv -1 \pmod{(2^{vq} - 1)/(2^v - 1)}.$ 

Так как числа p и q взаимно просты, то всегда существуют такие целые числа a и b, что  $1 \equiv aq + bp \pmod{pq}, \ 0 < a < p, \ 0 < b < q$ .

Лемма 3. Пусть 
$$i, j = 0, 1, \dots, d-1$$
. Тогда  $\sum_{u \in F_{i,j}} 2^u \equiv S_i^{(d)}(2^{aq}) T_j^{(d)}(2^{bp}) \pmod{2^{pq}-1}$ .

Доказательство. По определению  $F_{i,j}$  получим, что

$$\sum_{u \in F_{i,j}} 2^u \equiv \sum_{u \in F_{i,j}} 2^{uaq} 2^{ubp} \pmod{2^{pq} - 1}.$$

Тогда

$$\sum_{u \in F_{i,j}} 2^u \equiv \sum_{u \in H_i} 2^{uaq} \sum_{u \in G_j} 2^{ubp} \equiv S_i^{(d)}(2^{aq}) T_j^{(d)}(2^{bp}) \pmod{2^{pq} - 1}.$$

Следствие 1. Если последовательность в определена по формуле (1), то

$$S(2) \equiv \sum_{i=0}^{d-1} S_i^{(d)}(2^{aq}) \sum_{j=d/2}^{d-1} T_j^{(d)}(2^{bp}) + \sum_{i \in C} 2^i \pmod{2^{pq} - 1}.$$

Это утверждение следует непосредственно из леммы 3 и определения последовательности.

**Лемма 4.** Пусть  $P_i = pG_i, \ Q_i = qH_i, \ i = 0, 1, \dots, d-1$ . Тогда

$$\sum_{u \in P_i} 2^u \equiv T_i^{(d)}(2^p) \pmod{2^{pq} - 1} \quad u \quad \sum_{u \in Q_j} 2^u \equiv S_j^{(d)}(2^q) \pmod{2^{pq} - 1}.$$

Лемма 4 может быть доказана тем же самым способом, что и лемма 3.

Согласно формуле (2) для анализа 2-адической сложности достаточно изучить  $HOД(S(2), 2^{pq} - 1)$ . Так как p и q – простые числа, то справедливо разложение

$$2^{pq} - 1 = (2^p - 1) \cdot (2^q - 1) \cdot \frac{2^{pq} - 1}{(2^p - 1)(2^q - 1)}$$

и НОД $(2^p-1, 2^q-1) = 1$ . Применив следствие 1 и лемму 2, получим следующие сравнения, представленные в лемме 5.

Лемма 5. Пусть последовательность Динга – Хеллесета s определена по формуле (1)  $u \ U^{(d)}(2) = \sum_{j=d/2}^{d-1} T_j^{(d)} \left(2^{bp}\right)$ . Тогда A.  $\operatorname{HOД}(S(2), 2^p - 1) = \operatorname{HOД}\left(2^p - 1, -(q-1)/2 + \sum_{i \in C} 2^i\right);$ B.  $\operatorname{HOД}(S(2), 2^q - 1) = \operatorname{HOД}\left(2^q - 1, (p-1)U^{(d)}(2) + \sum_{i \in C} 2^i\right);$ C.  $\operatorname{HOД}\left(S(2), \frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}\right) = \operatorname{HOД}\left(\frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}, -U^{(d)}(2) + \sum_{i \in C} 2^i\right).$ 

Таким образом, в силу лемм 1–5 для анализа 2-адической сложности последовательностей с периодом pq можно использовать свойства многочленов  $S_i^{(d)}(x)$  и  $T_i^{(d)}(x)$ , которые рассматривались ранее в [12,19,20]. Применив их в следующих разделах, получим оценку 2-адической сложности последовательностей.

В заключение раздела заметим, что утверждения лемм 2–4 останутся верными, если взять циклотомические классы  $H_i$  и  $G_j$  разных порядков, а также, когда d – делитель HOД(p-1,q-1), не равный HOД(p-1,q-1). Таким образом, данный подход можно использовать и для других обобщенных циклотомических последовательностей с периодом pq, в частности, для модернизированных последовательностей Динга–Хеллесета, предложенных в [16].

#### 3. 2-адическая сложность последовательностей

Изучим 2-адическую сложность обобщенных циклотомических последовательностей Динга – Хеллесета второго, четвертого и шестого порядков.

**3.1.** Последовательности второго порядка. Пусть *d* = 2 и последовательность *s* с периодом *pq* определена по формуле

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mod pq \in D_1 \cup Q, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
(3)

Для исследования 2-адической сложности последовательностей второго порядка используем свойства многочленов  $T_0^{(2)}(x)$ ,  $T_1^{(2)}(x)$ , полученные в [19]. Согласно [19] справедливы следующие сравнения:

$$\left(T_0^{(2)}(2^u) - T_1^{(2)}(2^u)\right)^2 \equiv \left(\frac{-1}{q}\right)q \pmod{(2^{uq} - 1)/(2^u - 1)},\tag{4}$$

где  $\left(\frac{-1}{q}\right)$  – символ Лежандра, НОД (u,q) = 1. По лемме 1

$$\left(2T_i^{(2)}\left(2^u\right)+1\right)^2 \equiv \left(\frac{-1}{q}\right)q \pmod{(2^{uq}-1)}{(2^u-1)}, \ i=0,1.$$
(5)

Аналогичные сравнения справедливы для многочлена  $S_{i}^{\left(2
ight)}\left(x
ight).$ 

**Теорема 1.** Пусть последовательность *s* с периодом рд определена по формуле (3). Тогда

$$\Phi_2(s) = \log_2\left(\frac{2^{pq}-1}{d_1d_2}+1\right),$$

где  $d_1 = \text{HOД}(2^p - 1, (q+1)/2)$  и  $d_2 = \text{HOД}(2^q - 1, p-1)$ . В частности,

$$\Phi_2(s) \ge pq - \log_2(\max(p,q)).$$

**Доказательство.** По условию C = Q. Тогда

$$\sum_{i \in C} 2^i \equiv -1 \pmod{2^p - 1}, \quad \sum_{i \in C} 2^i \equiv p - 1 \pmod{2^q - 1}, \quad \sum_{i \in C} 2^i \equiv -1 \left( \mod \frac{2^{pq} - 1}{(2^p - 1)(2^q - 1)} \right).$$

Следовательно, согласно лемме 5

$$d_1 = \text{HO}\mathcal{A}(S(2), 2^p - 1) = \text{HO}\mathcal{A}(2^p - 1, (q+1)/2),$$
  
$$d_2 = \text{HO}\mathcal{A}(S(2), 2^q - 1) = \text{HO}\mathcal{A}(2^q - 1, (p-1)T_1^{(2)}(2^{bp}) + (p-1)).$$

Так как НОД  $(2^q - 1, T_1^{(2)}(2^{bp}) + 1) = 1$  в силу соотношения (5) и малой теоремы Ферма, то НОД $(S(2), 2^q - 1) =$  НОД $(2^q - 1, p - 1)$ .

Наконец, если  $d_3 > 1$  делит НОД  $\left(S(2), \frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}\right)$ , то опять же по лемме 5 имеет место сравнение  $T_1^{(2)}(2^{bp}) \equiv 1 \pmod{d_3}$ . По формуле (5) последнее сравнение невозможно, значит,  $d_3 = 1$ . А так как НОД $(2^p - 1, 2^q - 1) = 1$ , то  $d_1d_2 \leq \max((q-1)/2, p-1)$ . Это замечание завершает доказательство теоремы 1 в силу формулы (2).

В частном случае, когда q = p + 2, значения  $d_1 = d_2 = 1$  по малой теореме Ферма и  $\Phi_2(s) = pq$ , что было показано в [13]. Отметим, что в общем случае  $d_1$  или  $d_2$  могут быть больше единицы, например, имеем  $d_1 = 7$ , когда p = 3 и q = 13 или p = 3 и q = 41; для p = 29 и q = 3 значение  $d_2 = 7$ , а если p = 47 и q = 11, то значение  $d_2 = 23$ .

2-адическая сложность последовательности s, определенной по правилу (1) для d = 2и C = P, изучена в [19].

Рассмотрим ещё один вариант определения последовательности Динга – Хеллесета второго порядка [14]. Как уже отмечалось во введении, достаточно показать, что 2-адическая сложность последовательности больше половины её периода, поэтому далее ограничимся только её оценкой.

Пусть последовательность *s* с периодом *pq* определена по формуле

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mod pq \in D_1 \cup qH_1 \cup pG_1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
(6)

**Теорема 2.** Если последовательность *s* с периодом *pq* определена по формуле (6), то  $\Phi_2(s) \ge pq - 4 \log_2 p - 3 \log_2 q$ .

**Доказательство.** Если последовательность определена по формуле (6), то  $C = qH_1 \cup pG_1$  и  $\sum_{i \in C} 2^i = S_1^{(2)}(2^q) + T_1^{(2)}(2^p)$ . Тогда по лемме 5 (A) и формуле (5) имеем

НОД $(S(2), 2^p - 1) =$  НОД $(2^p - 1, S_1^{(2)}(2^q)) = 1$ . Далее, если  $d_2 =$  НОД $(S(2), 2^q - 1)$ , то по лемме 5 (В) получим сравнение  $0 \equiv (p - 1)T_1^{(2)}(2^{bp}) + T_1^{(2)}(2^p)/2 + (p - 1)/2 \pmod{d_2}$ .

Если  $b \in G_0$ , то  $pT_1^{(2)}(2^p) \equiv -(p-1)/2 \pmod{d_2}$  или  $p(2T_1^{(2)}(2^p)+1) \equiv 1 \pmod{2d_2}$ . Тогда  $p^2\left(\frac{-1}{q}\right)q \equiv 1 \pmod{4d_2}$  и  $d_2 < (1+p^2q)/4$ .

Если же  $b \in G_1$ , то  $(p-2)T_1^{(2)}(2^p) \equiv (p-3)/2 \pmod{d_2}, (p-2)^2 \left(\frac{-1}{q}\right)q \equiv 1 \pmod{4d_2}$ . Значит, всегда  $d_2 < (1+p^2q)/4$ .

Пусть  $d_3 = \text{HOД}\left(S(2), \frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}\right)$ . В этом случае согласно лемме 5 (C)

$$0 \equiv -T_1^{(2)} \left(2^{bp}\right) + S_1^{(2)} \left(2^q\right) + T_1^{(2)} \left(2^p\right) \pmod{d_3}.$$

Использовав два раза соотношение (5), получим, что  $4d_3 < q^2 + q(p+1)/2 + (p-1)^2/16$ .

Таким образом, заведомо  $d_2 d_3 < p^4 q^3$ , что доказывает теорему 2.

2-адическая сложность последовательности *s* оценена в [14], когда  $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$ . Заметим, что если  $p \not\equiv q \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $d_3$  может быть не равным единице, как в [14], например,  $d_3 = 71$  для p = 5, q = 7. Но если  $b \in G_0$ , то  $d_3 = 1$ . Если p = 67, q = 3, то  $d_2 = 7$ , и  $d_2 = 23$ , если p = 43, q = 11. Метод, предложенный нами, проще, чем в [14], а оценка  $d_2$  лучше.

**3.2.** Последовательности четвертого порядка. Исследуем 2-адическую сложность бинарных последовательностей Динга–Хеллесета четвертого порядка. Пусть d = 4 и последовательность *s* определена по правилу

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mod pq \in D_2 \cup D_3 \cup Q, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
(7)

Используем свойства многочленов  $T_i^{(4)}(x)$  и  $U^{(4)}(x) = T_2^{(4)}(x) + T_3^{(4)}(x)$ . В силу сравнения  $q \equiv 1 \pmod{4}$  существуют такие целые числа z, y, что  $q = z^2 + 4y^2$ ,  $z \equiv 1 \pmod{4}$ . Тогда

$$\left(U^{(4)}(2^u)\right)^2 + U^{(4)}(2^u) \equiv (q-1)/4 + y\left(T_0^{(2)}(2^u) - T_1^{(2)}(2^u)\right)/2 \pmod{(2^{uq}-1)}(2^u-1), (8)$$

где HOД(u, q) = 1.

**Теорема 3.** Пусть последовательность *s* с периодом *pq* определена по формуле (7). Тогда

$$\Phi_2(s) = \log_2\left(\frac{2^{pq} - 1}{d_1 d_2} + 1\right),$$

где  $d_1 = \text{HOД}(2^p - 1, (q+1)/2)$  и  $d_2 = \text{HOД}(2^q - 1, p-1)$ . В частности,

 $\Phi_2(s) \ge pq - \log_2(\max(p,q)).$ 

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, получим

$$HOД(S(2), 2^{p} - 1) = HOД(2^{p} - 1, (q + 1)/2).$$

Пусть  $d_2$  делит НОД $(S(2), 2^q - 1)$ , тогда согласно лемме 5 справедливо сравнение

$$(p-1)U^{(4)}(2^{bp}) + (p-1) \equiv 0 \pmod{d_2}.$$

Покажем, что  $U^{(4)}(2^{bp}) \not\equiv -1 \pmod{d_2}$ .

Предположим противное. В этом случае из сравнений (8) и (4) следует

$$y^2 q/4 \equiv (q-1)^2/16 \pmod{d_3}$$
 или  $(z^2 q - 2q + 1)/16 \equiv 0 \pmod{d_2}.$ 

Так как q – простое число, то по малой теореме Ферма имеем  $d_2 = 1 + 2tq$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Умножив последнее сравнение на 2t, получим  $-(z^2 - 2) + 2t \equiv 0 \pmod{d_2}$ . Значит,  $z^2 - 2 = 2t$ . Пришли к противоречию, так как z – нечетное число. Следовательно,

$$HOД(S(2), 2^{q} - 1) = HOД(2^{q} - 1, p - 1).$$

Положим  $d_3 = \text{HOД}\left(S(2), \frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}\right)$ , тогда согласно лемме 5 (C)

$$U^{(4)}\left(2^{bp}\right) \equiv -1 \pmod{d_3}.$$

Использовав сравнения (8) и (4), получим

$$y^2 q/4 \equiv (q-1)^2/16 \pmod{d_3}$$
 или  $(z^2 q - 2q + 1)/16 \equiv 0 \pmod{d_3}.$ 

Если  $d_3$  делит  $2^p - 1$  и  $\frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)} = 1 + 2^p + \dots + 2^{(q-1)p}$ , то  $d_3 = q$ , что невозможно по вышедоказанному. Аналогично, если  $d_3$  делит  $2^q - 1$  и  $\frac{2^{pq}-1}{(2^p-1)(2^q-1)}$ , то  $d_3 = p$ , что также невозможно. Следовательно, порядок 2 по модулю  $d_3$  равен pq, и по малой теореме Ферма  $d_3 = 1 + 2tpq$ . Тогда, рассуждая, как и при оценке  $d_2$ , получим, что  $d_3 = 1$ .

Пусть теперь последовательность s определена по правилу

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i \mod pq \in D_2 \cup D_3 \cup P, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
(9)

**Теорема 4.** Если последовательность *s* с периодом *pq* определена по формуле (9), то  $\Phi_2(s) \ge pq - 4 \log_2 p - 3 \log_2 q$ .

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3, получим

НОД
$$(S(2), 2^p - 1) =$$
 НОД $(2^p - 1, (q - 1)/2)$  и НОД $\left(S(2), \frac{2^{pq} - 1}{(2^p - 1)(2^q - 1)}\right) = 1.$ 

Пусть  $d_2$  делит НОД $(S(2), 2^q - 1)$ . Тогда  $(p - 1) \left(T_2^{(4)}(2^{bp}) + T_3^{(4)}(2^{bp})\right) \equiv 1 \pmod{d_2}$ , и согласно соотношению (8) справедливо

$$p \equiv (p-1)^2 \left( (q-1)/4 + y \left( T_0^{(2)} \left( 2^u \right) - T_1^{(2)} \left( 2^u \right) \right)/2 \right) \pmod{d_2}$$

или в силу сравнения (4)

$$(p-1)^4 y^2 q/4 \equiv \left((p-1)^2 (q-1)/4 - p\right)^2 \pmod{d_2}.$$

Следовательно,  $d_2 < p^4 q^2$ , что завершает доказательство теоремы 4.

**3.3.** Последовательности шестого порядка. Исследуем теперь 2-адическую сложность обобщенных циклотомичских последовательностей шестого порядка. Пусть d = 6. Тогда  $q \equiv 1 \pmod{6}$ , и 4q можно представить следующим образом:  $4q = L^2 + 27M^2$ ,  $L \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $L, M \in \mathbb{Z}$  [18].

Пусть  $U_0(x) = T_0^{(6)}(x) + T_1^{(6)}(x) + T_2^{(6)}(x)$  и  $U_1(x) = T_3^{(6)}(x) + T_4^{(6)}(x) + T_5^{(6)}(x)$ . Следующие два утверждения доказаны в [20].

Лемма 6. Пусть  $4p = L^2 + 27M^2$ ,  $L \equiv 1 \pmod{3}$  и  $Z_j(c) = T_{j+2}^{(3)}(c) - T_j^{(3)}(c)$  для  $j = 0, 1, 2, c \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $Z_0(c)$ ,  $Z_1(c)$  и  $Z_2(c)$  удовлетворяют сравнению

 $X^3 - qX - qM \equiv 0 \pmod{(c^q - 1)/(c - 1)}.$ 

Лемма 7. Пусть  $4q = L^2 + 27M^2$ ,  $L \equiv 1 \pmod{3}$  и  $c \in \mathbb{Z}$ . Тогда

A.  $U_0(c)U_1(c) \equiv MZ_j(c) + (q+1)/4 \pmod{(c^q-1)/(c-1)}$ , korda  $q \equiv 7 \pmod{12}$ . 3decb  $j \equiv -\text{ind}_g 2 \pmod{3}$ ;

B. 
$$U_0^2(c) + U_0(c) \equiv MZ_j(c) + (q-1)/4 \pmod{(c^q-1)/(c-1)}$$
, ecnu  $q \equiv 1 \pmod{12}$ .

**Теорема 5.** Пусть последовательность s с периодом pq определена по формуле (1). Тогда  $\Phi_2(s) \ge pq - \log_2 p - 4\log_2 q$ , если C = Q,  $u \ \Phi_2(s) \ge pq - 7\log_2 p - 4\log_2 q$ , если C = P.

**Доказательство.** Применив лемму 5 для C = Q, как и ранее, получим, что

НОД
$$(S(2), 2^p - 1) =$$
 НОД $(2^p - 1, (q + 1)/2),$   
 $d_2 =$  НОД $(S(2), 2^q - 1)$  делит  $(p - 1)U_1(2^{bp}) \equiv p - 1 \pmod{d_2},$   
 $d_3 =$  НОД $\left(S(2), \frac{2^{pq} - 1}{(2^p - 1)(2^q - 1)}\right)$  делит  $U_1(2^{bp}) + 1.$ 

Если r делит  $U_1(2^{bp}) + 1$ , то по лемме 7  $MZ_j(c) + (q \pm 1)/4 \equiv 0 \pmod{r}$  и согласно лемме 6

$$-(q \pm 1)^3/64 + M^2 q(q \pm 1)/4 - qM^4 \equiv 0 \pmod{r}.$$

Значит,  $d_2d_3 < (p-1)q^3$ . Применив формулу (2), получим утверждение теоремы 5 для C = Q. Когда C = P, неравенство для 2-адической сложности может быть доказано аналогично.

#### Заключение

Рассмотрен метод анализа 2-адической сложности обобщенных циклотомических последовательностей с периодом pq. Получены её оценки для обобщенных циклотомических последовательностей Динга–Хеллесета второго, четвертого и шестого порядков. Обобщены предыдущие результаты, полученные для последовательностей второго порядка. Применив этот же подход, можно показать, что 2-адическая сложность модернизированных последовательностей Динга–Хеллесета, предложенных в [16], больше чем  $pq-2\log_2 p-4\log_2 q$ , а 4-адическая сложность четвертичных последовательностей, линейная сложность которых изучена в [21], больше чем  $pq - 1 - 4\log_2 pq$ .

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

# Литература

- Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory // J. Cryptol. 1997. V. 10, No 2. P. 111–147. https://doi.org/10.1007/s001459900024.
- 2. Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. xvi, 498 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139057448.
- Hu H. Comments on "a new method to compute the 2-adic complexity of binary sequences" // IEEE Trans. Inf. Theory. 2014. V. 60, No 9. P. 5803–5804. https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2336843.
- Sun Y., Wang O., Yan T. The exact autocorrelation distribution and 2-adic complexity of a class of binary sequences with almost optimal autocorrelation // Cryptogr. Commun. 2018. V. 10, No 3. P. 467–477. https://doi.org/10.1007/s12095-017-0233-x.
- Sun Y., Yan T., Chen Z. The 2-adic complexity of a class of binary sequences with optimal autocorrelation magnitude // Cryptogr. Commun. 2020. V. 12, No 4. P. 675–683. https://doi.org/10.1007/s12095-019-00411-4.
- 6. Xiao Z., Zeng X. 2-Adic complexity of two constructions of binary sequences with period 4N and optimal autocorrelation magnitude // Cryptogr. Commun. 2021. V. 13, No 5. P. 865–885. https://doi.org/10.1007/s12095-021-00498-8.
- Yan F., Ke P., Chang Z. The symmetric 2-adic complexity of Tang–Gong interleaved sequences from Legendre sequence pair // Cryptogr. Commun. 2025. V. 17, No 1. P. 167–179. https://doi.org/10.1007/s12095-024-00751-w.
- Xiao Z., Zeng X., Ke M. On the symmetric 2-adic complexity of periodic binary sequences // Adv. Math. Commun. 2024. V. 18, No 5. P. 1303–1314. https://doi.org/10.3934/amc.2022088.
- Hofer R., Winterhof A. On the 2-adic complexity of the two-prime generator // IEEE Trans. Inf. Theory. 2018. V. 64, No 8. P. 5957–5960. https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2811507.
- Xiao Z., Zeng X., Sun Z. 2-Adic complexity of two classes of generalized cyclotomic binary sequences // Int. J. Found. Comput. Sci. 2016. V. 27, No 7. P. 879–893. https://doi.org/10.1142/S0129054116500350.
- Sun Y., Wang Q., Yan T. A lower bound on the 2-adic comeplxity of the modified Jacobi sequences // Cryptogr. Commun. 2019. V. 11, No 2. P. 337–349. https://doi.org/10.1007/s12095-018-0300-y.
- Zhang L., Zhang J., Yang M., Feng K. On the 2-adic complexity of the Ding-Helleseth-Martinsen binary sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2020. V. 66, No 7. P. 4613–4620. https://doi.org/10.1109/TIT.2020.2964171.
- Yan M., Yan T., Li Y. Computing the 2-adic complexity of two classes of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of periods of twin prime products // Cryptogr. Commun. 2021.
   V. 13, No 1. P. 15-26. https://doi.org/10.1007/s12095-020-00451-1.
- Yan T., Yan M., Sun Y., Sun S. The 2-Adic Complexity of Ding–Helleseth Generalized Cyclotomic Sequences of Order 2 and Period pq // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 140682–140687. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3012570.

- Xiong H., Qu L., Li C. A new method to compute the 2-adic complexity of binary sequences // IEEE Trans. Inf. Theory. 2014. V. 60, No 4. P. 2399–2406. https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2304451.
- Ma J., Zhao W., Jia Y., Shen X., Jiang H. Linear complexity and trace representation of new Ding generalized cyclotomic sequences with period pq and order two // Mathematics. 2021. V. 9, No 18. Art. 2285. https://doi.org/10.3390/math9182285.
- 17. Ding C., Helleseth T. New generalized cyclotomy and its applications // Finite Fields. 1998. V. 4, No 2. P. 140–166. https://doi.org/10.1006/ffta.1998.0207.
- 18. *Айерлэнд К., Роузен М.* Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 416 с.
- Edemskiy V., Wu C. Symmetric 2-adic complexity of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of period pq // Wu Y., Yung M. (Eds.) Information Security and Cryptology: Inscrypt 2020. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 12612. Cham: Springer, 2021. P. 318–327. https://doi.org/10.1007/978-3-030-71852-7 21.
- Edemskiy V.A., Koltsova S.A. Symmetric 2-adic complexity of generalized cyclotomic sequences of order six with period p<sup>n</sup> // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2052. Art. 012009. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2052/1/012009.
- Ma J., Zhao W., Jia Y., Jiang H. New generalized cyclotomic quaternary sequences with large linear complexity and a product of two primes period // Information. 2021. V. 12, No 5. Art. 193. https://doi.org/10.3390/info12050193.

#### References

- 1. Klapper A., Goresky M. Feedback shift registers, 2-adic span, and combiners with memory. J. Cryptol., 1997, vol. 10, no. 2, pp. 111–147. https://doi.org/10.1007/s001459900024.
- Goresky M., Klapper A. Algebraic Shift Register Sequences. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2012. xvi, 498 p. https://doi.org/10.1017/CBO9781139057448.
- Hu H. Comments on "a new method to compute the 2-adic complexity of binary sequences". *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, no. 9, pp. 5803–5804. https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2336843.
- 4. Sun Y., Wang O., Yan T. The exact autocorrelation distribution and 2-adic complexity of a class of binary sequences with almost optimal autocorrelation. *Cryptogr. Commun.*, 2018, vol. 10, no. 3, pp. 467–477. https://doi.org/10.1007/s12095-017-0233-x.
- Sun Y., Yan T., Chen Z. The 2-adic complexity of a class of binary sequences with optimal autocorrelation magnitude. *Cryptogr. Commun.*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 675–683. https://doi.org/10.1007/s12095-019-00411-4.
- 6. Xiao Z., Zeng X. 2-Adic complexity of two constructions of binary sequences with period 4N and optimal autocorrelation magnitude. *Cryptogr. Commun.*, 2021, vol. 13, no. 5, pp. 865–885. https://doi.org/10.1007/s12095-021-00498-8.
- Yan F., Ke P., Chang Z. The symmetric 2-adic complexity of Tang–Gong interleaved sequences from Legendre sequence pair. *Cryptogr. Commun.*, 2025, vol. 17, no. 1, pp. 167–179. https://doi.org/10.1007/s12095-024-00751-w.

- Xiao Z., Zeng X., Ke M. On the symmetric 2-adic complexity of periodic binary sequences. Adv. Math. Commun., 2024, vol. 18, no. 5, pp. 1303–1314. https://doi.org/10.3934/amc.2022088.
- Hofer R., Winterhof A. On the 2-adic complexity of the two-prime generator. *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2018, vol. 64, no. 8, pp. 5957–5960. https://doi.org/10.1109/TIT.2018.2811507.
- Xiao Z., Zeng X., Sun Z. 2-Adic complexity of two classes of generalized cyclotomic binary sequences. Int. J. Found. Comput. Sci., 2016, vol. 27, no. 7, pp. 879–893. https://doi.org/10.1142/S0129054116500350.
- Sun Y., Wang Q., Yan T. A lower bound on the 2-adic comeplxity of the modified Jacobi sequences. Cryptogr. Commun., 2019, vol. 11, no. 2, pp. 337–349. https://doi.org/10.1007/s12095-018-0300-y.
- Zhang L., Zhang J., Yang M., Feng K. On the 2-adic complexity of the Ding–Helleseth–Martinsen binary sequences. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2020, vol. 66, no. 7, pp. 4613–4620. https://doi.org/10.1109/TIT.2020.2964171.
- Yan M., Yan T., Li Y. Computing the 2-adic complexity of two classes of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of periods of twin prime products. *Cryptogr. Commun.*, 2021, vol. 13, no. 1, pp. 15–26. https://doi.org/10.1007/s12095-020-00451-1.
- Yan T., Yan M., Sun Y., Sun S. The 2-adic complexity of Ding–Helleseth generalized cyclotomic sequences of order 2 and period *pq. IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 140682–140687. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3012570.
- Xiong H., Qu L., Li C. A new method to compute the 2-adic complexity of binary sequences. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2014, vol. 60, no. 4, pp. 2399–2406. https://doi.org/10.1109/TIT.2014.2304451.
- Ma J., Zhao W., Jia Y., Shen X., Jiang H. Linear complexity and trace representation of new Ding generalized cyclotomic sequences with period pq and order two. Mathematics, 2021, vol. 9, no. 18, art. 2285. https://doi.org/10.3390/math9182285.
- Ding C., Helleseth T. New generalized cyclotomy and its applications. *Finite Fields*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 140–166. https://doi.org/10.1006/ffta.1998.0207.
- 18. Ireland K., Rosen M. *Klassicheskoe vvedenie v sovremennuyu teoriyu chisel* [A Classical Introduction to Modern Number Theory]. Moscow, Mir, 1987. 416 p. (In Russian)
- Edemskiy V., Wu C. Symmetric 2-adic complexity of Ding-Helleseth generalized cyclotomic sequences of period pq. In: Wu Y., Yung M. (Eds.) Information Security and Cryptology: Inscrypt 2020. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12612. Cham, Springer, 2021, pp. 318–327. https://doi.org/10.1007/978-3-030-71852-7\_21.
- Edemskiy V.A., Koltsova S.A. Symmetric 2-adic complexity of generalized cyclotomic sequences of order six with period p<sup>n</sup>. J. Phys.: Conf. Ser., 2021, vol. 2052, art. 012009. https://doi.org/10.1088/1742-6596/2052/1/012009.
- Ma J., Zhao W., Jia Y., Jiang H. New generalized cyclotomic quaternary sequences with large linear complexity and a product of two primes period. *Information*, 2021, vol. 12, no. 5, art. 193. https://doi.org/10.3390/info12050193.

# Информация об авторах

Владимир Анатольевич Едемский, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика и информатика», Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

E-mail: vladimir.edemsky@novsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1368-3827

# Author Information

**Vladimir A. Edemskiy**, Doc. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, Yaroslav-the-Wise Novgorod State University

E-mail: vladimir.edemsky@novsu.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1368-3827

Поступила в редакцию 16.04.2025 Принята к публикации 16.05.2025

Received April 16, 2025 Accepted May 16, 2025

# ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.526.2

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243

# Аналитическая аппроксимация решения задачи Блазиуса в пограничном слое на плоской пластине

# В.М. Зубарев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва, Россия

zubarev@ipmnet.ru

#### Аннотация

В последние годы изучение устойчивого потока вязкой жидкости приобрело значительный интерес из-за его обширного инженерного применения. В статье рассмотрена классическая задача из теории вязкого ламинарного стационарного пограничного слоя несжимаемой ньютоновской жидкости на плоской тонкой пластине (задача Блазиуса). Методом пристрелки совместно с численной схемой Рунге-Кутты четвертого порядка точности на большом интервале для очень мелкой сетки получено конечно-разностное решение этой задачи. Численные результаты сопоставлены с известными аналогичными расчетными тестовыми данными. Проведена оценка функции Блазиуса  $f(\eta)$  и ее двух производных B-сплайном третьего порядка, получено отличное совпадение с расчетами. Нелинейным методом наименьших квадратов (НМНК) установлена новая аналитическая корреляционная зависимость для функции Блазиуса, приближающая результаты проведенных расчетов в широком диапазоне автомодельной переменной  $\eta$ . Дано сравнение значений функции f, первой и второй ее производных с точными данными. Эти результаты находятся в полном согласии с ранее полученными решениями. Профиль продольной скорости в пограничном слое, определенный через производную f' функции Блазиуса, может быть использован в качестве начального профиля скорости при численном моделировании турбулентных плоских и трехмерных течений несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, стационарное течение, несжимаемая ньютоновская жидкость, тонкая плоская пластина, задача Блазиуса, *B*-сплайн, аналитическая аппроксимация, нелинейный метод наименьших квадратов (HMHK)

**Благодарности.** Исследование выполнено по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012500440-9).

Для цитирования: Зубарев В.М. Аналитическая аппроксимация решения задачи Блазиуса в пограничном слое на плоской пластине // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 227–243. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243.

# ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243

# Analytical approximation of solutions to the Blasius problem in the boundary layer on a flat plate

# V.M. Zubarev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

zubarev@ipmnet.ru

#### Abstract

In recent years, the steady-state flow of viscous fluids has attracted considerable research interest due to its broad engineering applications. This study provides new insights into the classical problem of the theory of the viscous laminar stationary boundary layer of an incompressible Newtonian fluid on a thin flat plate (Blasius problem). A finite-difference solution to the Blasius problem was obtained by the shooting method in combination with the Runge–Kutta numerical scheme of the fourth-order accuracy over a large interval for a very fine mesh. The numerical results were validated against similar known data of calculation tests. The Blasius function  $f(\eta)$  and its first two derivatives were approximated using the third-order *B*-spline. Excellent agreement with the results of known calculations was demonstrated. A new analytical correlation for the Blasius function, which approximates the results of the calculations in a wide range of the self-similar variable  $\eta$ , was established by the nonlinear least squares method (NLLSM). The values of the function f and its first- and second-order derivatives were compared with known data. The results align with previous solutions. The longitudinal velocity profile in the boundary layer, defined through the derivative f' of the Blasius function, can serve as the initial velocity profile in the numerical modeling of turbulent flat and three-dimensional flows of an incompressible fluid.

Keywords: laminar boundary layer, steady-state flow, incompressible Newtonian fluid, thin flat plate, Blasius problem, B-spline, analytical approximation, nonlinear least squares method (NLLSM)

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment (state registration no. 124012500440-9).

For citation: Zubarev V.M. Analytical approximation of solutions to the Blasius problem in the boundary layer on a flat plate. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 227–243. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.227-243. (In Russian)

### Введение

В начале прошлого века Л. Прандтль [1,2] заложил основы теории пограничного слоя. Эта теория нашла свое основное применение при расчете сопротивления трения, которое действует на тело при его перемещении в жидкости, например, сопротивления крыла самолета, лопасти турбины или судна. Двумерный поток над фиксированной непроницаемой поверхностью создает пограничный слой, когда частицы движутся медленнее вблизи поверхности, чем вблизи свободного потока. Эта проблема теории пограничного слоя вызвала интерес у видных ученых. Задача Блазиуса – простейшая задача нелинейного пограничного слоя. Огромное количество авторов исследовало различные аспекты этой проблемы. Определение движения жидкости в области, близкой к поверхности пластины, как раз и называется проблемой или задачей Блазиуса [3], которая стала предметом большого интереса математиков и физиков. Ей посвящены целые главы в монографиях и учебниках по теории пограничного слоя [3–9], а также множество публикаций.

В 1908 году Г. Блазиус вывел уравнение (называемое в литературе уравнением Блазиуса) с использованием методики преобразования подобия [10] для пограничного слоя Прандтля (без градиента давления, давление p постоянно). Преобразование подобия было использовано для сведения параболической системы уравнений в частных производных к одному обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению третьего порядка.

В работе [11] доказаны существование и единственность решения этой первоначальной задачи в частных производных. Вопросы единственности решения задачи Блазиуса рассматривались также в [12, 13].

Для решения названного выше уравнения разными авторами было использовано много способов или методик. Первое аналитическое решение этого уравнения было предложено Г. Блазиусом, который использовал формальное решение в виде ряда в окрестности стенки и асимптотическое расширение для больших значений автомодельной переменной  $\eta$ . Ряд Блазиуса сходится в области  $|\eta| \leq 5.690$ . В 1912 году К. Топфер [14] пересмотрел работу Блазиуса и численно решил уравнение с начальными условиями. Наконец, более точное численное решение уравнения Блазиуса было построено Л. Ховартом [15], который составил классическую таблицу значений функции Блазиуса f и двух ее производных f', f'' с пятью знаками после запятой. Им приведены данные расчета величины  $\eta$  в сорока пяти точках в диапазоне  $0 \leq \eta \leq 8.8$ , которые использованы ниже для сравнения с результатами, полученными в настоящей работе.

Известно много методов приближения функции Блазиуса  $f(\eta)$ . Некоторые аналитические подходы оказались полезными при решении уравнения пограничного слоя, например, метод вариационной итерации [16–19], метод разложения Адомиана [20] и метод гомотопического анализа (метод продолжения по параметру, или деформационный метод) [21], спектральные методы, основанные на ортогональных функциях [22], *B*-сплайновые аппроксимации [23]. Применимость различных методов проверялась на хорошо известной задаче Блазиуса много раз (см. обзоры [24,25]). Однако аналитические методы ограничены в своем применении и могут использоваться только в простых системах с несколькими уравнениями.

Имеются также другие обобщения задачи Блазиуса, например, для плоской пластины в неньютоновской среде; для жидкости с учетом влияния термозависимой вязкости; для пластины с массопереносом как за счет всасывания, так и за счет вдува.

Более общее уравнение Фолькнера–Скан [26, 27] описывает устойчивый двумерный ламинарный пограничный слой, который образуется на клине, – течение, в котором пластина не параллельна потоку. Здесь имеется приложенный градиент давления по длине пластины. Это является обобщением задачи Блазиуса для плоской пластины, в которой градиент давления вдоль пластины равен нулю. Такие случаи были изучены многими исследователями. Численные решения с использованием компьютерного программного обеспечения и алгоритмов широко распространены в инженерных приложениях, относящихся к механике жидкости. Известные системы компьютерной алгебры (символьных вычислений) – математические пакеты Maple [28,29], Matlab [30,31], Mathematica [21,32] и другие – способны решать такие краевые задачи.

Стандартным численным способом решения двухточечных граничных задач является метод стрельбы, который устраняет проблему, возникающую с граничным условием на бесконечности  $\eta \to \infty$ . Другие численные подходы использовали метод конечных разностей [33], предиктора – корректора [34], модифицированный предиктор – корректор, искусственную прямую нейронную сеть [35] и т. д. Их авторы изучали указанное уравнение в основном для использования в качестве теста оценки точности для новых алгоритмов и методов решения нелинейных дифференциальных уравнений с граничными условиями.

Возрастает также интерес ученых и инженеров к поиску приближенных аналитических представлений функции Блазиуса  $f(\eta)$  и ее производных f', f'' [29,36].

### 1. Постановка задачи

Система уравнений двумерного ламинарного пограничного слоя несжимаемой ньютоновской жидкости совместно с начальными и граничными условиями представлена, например, в [3–9, 37, 38]. В настоящем исследовании при решении классической задачи Блазиуса о пограничном слое на плоской пластине использован численный подход, основанный на алгоритме стрельбы со схемой Рунге–Кутты четвертого порядка точности на подробной сетке с большим количеством точек. Проведена аппроксимация *B*-сплайном функции Блазиуса f, рассчитанной численно, оценены также производные f' и f''. Применен аналитический подход при оценке и подборе новой корреляции на основе данных для функции f, полученных численно методом HMHK.

#### 2. Математическая модель

Условная схема течения динамического ламинарного пограничного слоя при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластины (задача Блазиуса) приведена на рис. 1.



**Рис. 1.** Ламинарный пограничный слой при обтекании несжимаемой жидкостью плоской пластины (задача Блазиуса); x, y – ортогональные декартовые координаты;  $U_{\infty}$  – скорость набегающего потока;  $\delta$  – толщина пограничного слоя

Fig. 1. Laminar boundary layer for incompressible fluid flow around a flat plate (Blasius problem); x, y – orthogonal Cartesian coordinates;  $U_{\infty}$  – incoming flow velocity;  $\delta$  – boundary layer thickness

Плоское стационарное движение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости может быть описано уравнениями Навье – Стокса в приближении пограничного слоя с высоким числом Рейнольдса и представлено в виде [4, 37, 38]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$
(2)

Здесь и далее обозначения совпадают с общепринятыми: (1) – уравнение неразрывности и (2) – уравнение импульсов в проекции на ось x; x, y – ортогональные декартовые координаты, где x – координата вдоль поверхности, отсчитываемая от передней кромки пластины, y является нормальным направлением к стенке; соответствующие компоненты скорости (продольная и нормальная) – u и v; p – среднее статическое давление, которое зависит только от x и не зависит от координаты y;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\nu$  – кинематический коэффициент молекулярной вязкости жидкости;  $U_{\infty}$  – скорость набегающего потока.

### 3. Граничные условия

В качестве граничных условий для уравнений (1) и (2) заданы условия прилипания и непротекания на стенке

$$y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0$$

На внешней границе пограничного слоя имеем

$$y \to \infty : \quad u \to U_e(x),$$

где  $U_e$  – скорость основного потока.

Если ввести функцию тока  $\psi$  и перейти к переменным Мизеса x и  $\psi$ , как в работе [10],

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

получим, что уравнение неразрывности удовлетворится автоматически. Подстановка в уравнение импульсов (2) дает

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}.$$

Для задачи внешнего обтекания стационарным свободным потоком со скоростью  $U_{\infty}$  граничными условиями уравнения третьего порядка будут

$$y = 0, \quad -\infty < x < +\infty: \quad \psi = 0,$$
  

$$y = 0, \quad 0 \le x \le L: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$
  

$$y \to +\infty, \quad 0 \le x \le L: \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \to U_e(x).$$
(3)

Уравнение Блазиуса имеет вид

$$f'''(\eta) + 0.5f(\eta)f''(\eta) = 0, \quad \eta \ge 0, \tag{4}$$

где f – безразмерная функция тока,  $f = \psi/\sqrt{U_{\infty}\nu x}$ ;  $\eta$  – переменная подобия, определяемая как  $\eta = y\sqrt{U_{\infty}/(\nu x)}$ ; штрих обозначает дифференцирование по  $\eta$ ;  $\bar{u} = u/U_{\infty} = f'$  – безразмерная продольная скорость в пограничном слое.

Граничные условия для этого уравнения можно выразить в виде

$$\eta = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \\ \eta \to +\infty, \quad f' = 1.$$
(5)

Функция Блазиуса f является решением простой нелинейной задачи пограничного слоя – обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка при  $\eta \subseteq [0, \infty]$ . Производная f'(x) дает профиль скорости в пограничном слое на половине бесконечного интервала. Имеем двухточечную краевую задачу (4), (5), описывающую стационарный плоский поток вязкой жидкости вдоль пластины. Отметим, что исходная задача (4) рассматривается на полубесконечном интервале.

## 4. Результаты численного моделирования

Краевая задача Блазиуса (4), (5) решалась численно методом пристрелки с использованием схемы Рунге–Кутты четвертого порядка точности на интервале  $\eta \subseteq [0, 40]$ . Число точек вычисления по координате  $\eta$  было равно 1001 (расчет 2). Функция f, включая ее первую f' и вторую f'' производные, представлены на рис. 2 в области  $0 \le \eta \le 10$ . Здесь же для сравнения приведены данные Ховарта [15] (точки 1) из работы [4]. Видно, что результаты расчетов хорошо согласуются с решением Ховарта.



Рис. 2. График функции Блазиуса и ее производных f, f' и f'' для  $0 \le \eta \le 10$ : 1 – данные Ховарта из работы [4]; 2 – расчет для задачи Блазиуса (4) и (5) Fig. 2. Graph of the Blasius function and its derivatives f, f', and f'' for  $0 \le \eta \le 10$ : 1 – Howarth's data from [4]; 2 – calculation of the Blasius problem (4) and (5)

Функция  $f(\eta)$  была аппроксимирована *B*-сплайном третьего порядка [39], с количеством точек 2001 на полубесконечном интервале  $\eta \subseteq [0, 40]$ . *B*-сплайн, как видно из графика, точно проходит через каждую расчетную точку, правильно вычисляет первую  $f'(\eta)$  и вторую  $f''(\eta)$  производные. Кубический сплайн является гладким в первой производной и непрерывным во второй производной. Результаты расчетов показаны на рис. 3 для  $0 \le \eta \le 10$ . Для удобства восприятия отмечена каждая десятая точка.



**Рис. 3.** График функции Блазиуса  $f(\eta)$  и ее производных  $f'(\eta)$  и  $f''(\eta)$  для  $0 \le \eta \le 10$ : 1 – аппроксимация *B*-сплайном; 2 – расчет для задачи Блазиуса (4) и (5) **Fig. 3.** Graph of the Blasius function  $f(\eta)$  and its derivatives  $f'(\eta)$  and  $f''(\eta)$  for  $0 \le \eta \le 10$ : 1 – *B*-spline approximation; 2 – calculation of the Blasius problem (4) and (5)

В результате математической обработки с помощью алгоритма Левенберга–Марквардта для НМНК предложена новая аппроксимация функции  $f(\eta)$  от нормированной координаты  $\eta$ . Функция f представлена в параметрическом виде – в виде рациональной дроби от отрезков рядов Фурье – в интервале  $[-\pi, \pi]$  изменения параметра t:

$$f(t) = \left(a_0 + \sum_{1}^{5} (a_i \cos(it) + b_i \sin(it))\right) / \left(c_0 + \sum_{1}^{5} (c_i \cos(it) + d_i \sin(it))\right),$$
(6)  
$$\eta(t) = -40 + 80(t+\pi)/(2\pi), \quad t \subseteq [-\pi,\pi].$$

Соответствующие коэффициенты определены из условия минимизации различий между рассчитанными данными и значениями, полученными с использованием аналитического выражения. Видно, что приближенное аналитическое решение, полученное настоящим способом, имеет хорошую точность аппроксимации во всем интервале. Значения коэффициентов в формуле (6) приведены в табл. 1.

Рисунки 4–7 иллюстрируют функцию Блазиуса и ее производные. График функции  $f(\eta)$  представлен на рис. 4 для  $0 \le \eta \le 40$ . Здесь кривая 2 показывает аппроксимацию, полученную по формуле (6), точки 1 – это результаты настоящих численных расчетов задачи Блазиуса (4) и (5) (для удобства восприятия дана каждая сороковая точка). Независимая переменная  $\eta$  дискретизирована в диапазоне [0,40] с шагом 0.04. Величина достоверности аппроксимации  $R^2 = 0.9999999999999999999997$ . Стандартная ошибка равна 3.68396324464614181 × 10<sup>-06</sup>. Здесь же приведен график  $f(\eta)$  (кривая 3), построенный интерполяционным полиномом из работы [29], который получен при помощи пакета Марle

$a_0$	35.5396693506857453	$c_0$	1
$a_1$	-54.4634814646330042	$c_1$	-1.47476509075902279
$b_1$	1.00944581347068968	$d_1$	0.32461330353516935
$a_2$	23.760694568625368	$c_2$	0.562706142200476372
$b_2$	-1.74228631165980711	$d_2$	-0.300985808076688625
$a_3$	-5.23296629210679103	$c_3$	-0.084139069383258464
$b_3$	1.27092806874448022	$d_3$	0.106963357320887097
$a_4$	0.382490992576368006	$c_4$	-0.00302986415448399835
$b_4$	-0.350925233215430188	$d_4$	-0.011506546783571724
$a_5$	0.013592879433268412	$c_5$	0.000289358324681787389
$b_5$	0.0132073542451078006	$d_5$	-0.000179480784699367342

## Табл. 1. Значения коэффициентов

 Table 1. Values of approximation coefficients

## и показан ниже:

 $f(\eta) = 0.169590122015878\eta^{2} - 0.00975243043702233\eta^{3} + 0.00949920484878554\eta^{4} - 0.00490827418566491\eta^{5} + 0.00107974724248178\eta^{6} - 0.000128524622004544\eta^{7} + 0.873236904505410 \times 10^{-5}\eta^{8} - 3.20151483330390 \times 10^{-7}\eta^{9} + 4.93213211515512 \times 10^{-9}\eta^{10}.$  (7)

Видно, что аппроксимация по формуле (7) дает неправильное поведение функции  $f(\eta)$ в области  $\eta \gtrsim 14$ . Формула (6), найденная с помощью алгоритма Левенберга – Марквардта для НМНК, хорошо оценивает значения функции  $f(\eta)$  на очень большом интервале  $0 \le \eta \le 40$ . Аппроксимации по формуле (6) сопоставимы и близки к результатам, полученным численным интегрированием. Видно, что наклон  $f(\eta)$  является постоянным при больших значениях  $\eta$ . Если наклон функции постоянен при больших значениях  $\eta$ , то значения высших производных должны стремиться к нулю, как в случае  $f''(\eta)$  (см. рис. 7).

Для более понятного восприятия полученных данных на рис. 5 приведены графики, построенные по формулам (6) и (7) в окрестности  $0 \le \eta \le 2$ . Видно, что все кривые практически совпадают и проходят через точки, соответствующие численным расчетам 1.

Безразмерный профиль продольной скорости  $\bar{u} = f'$  показан на рис. 6 для  $0 \le \eta \le 15$ . Здесь 1 – результаты расчета решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5), приведена каждая пятнадцатая точка на графике; 2 – первая производная функции (6); 3 – аппроксимация по следующей формуле из работы [29]:

$$f'(\eta) = 0.337538516034295\eta - 0.0224722593243771\eta^{2} + 0.0309005339811106\eta^{3} - 0.0211885940031025\eta^{4} + 0.00562296515736044\eta^{5} - 0.000773827415658246\eta^{6} + 0.0000591838415872827\eta^{7} - 0.239635130719565 \times 10^{-5}\eta^{8} + 4.01841870085965 \times 10^{-8}\eta^{9}.$$
(8)



Рис. 4. График функции Блазиуса  $f(\eta)$  для  $0 \le \eta \le 40$ : 1 – расчет краевой задачи Блазиуса (4)–(5); 2 – аппроксимация по формуле (6); 3 – расчет по формуле (7) Fig. 4. Graph of the Blasius function  $f(\eta)$  for  $0 \le \eta \le 40$ : 1 – calculation of the Blasius boundary value problem (4)–(5); 2 – approximation by the formula (7)



Рис. 5. График функции Блазиуса  $f(\eta)$  вблизи стенки  $0 \le \eta \le 2$ : 1 – расчет краевой задачи Блазиуса (4) и (5); 2 – аппроксимация по формуле (6); 3 – расчет по формуле (7) Fig. 5. Graph of the Blasius function  $f(\eta)$  near the wall  $0 \le \eta \le 2$ : 1 – calculation of the Blasius boundary value problem (4) and (5); 2 – approximation by the formula (7)

На рис. 6 хорошо видно, что f' увеличивается по мере увеличения расстояния от плоской пластины до тех пор, пока не достигнет значения 1.0 на конце пластины.



Рис. 6. Безразмерный профиль продольной скорости  $\bar{u}$  или первой производной функции  $f'(\eta)$ для  $0 \leq \eta \leq 15$ : 1 – расчет краевой задачи Блазиуса (4)–(5); 2 – производная, рассчитанная при аппроксимации по формуле (6); 3 – расчет по формуле (8) Fig. 6. Dimensionless profile of the longitudinal velocity  $\bar{u}$  or the first derivative of the function  $f'(\eta)$ 

for  $0 \le \eta \le 15$ : 1 – calculation of the Blasius boundary value problem (4)–(5); 2 – the derivative calculated from the approximation by the formula (6); 3 – approximation by the formula (8)

Аналогичное сопоставление расчетных значений второй производной функции  $f''(\eta)$  сделано для  $0 \le \eta \le 15$  с использованием формулы [29] (см. рис. 7)

$$f''(\eta) = 0.332057336270228 - 0.0264531212585649\eta + + 0.0663932833156139\eta^2 - 0.0689310639889838\eta^3 + + 0.0232453293176898\eta^4 - 0.00381202903000096\eta^5 + + 0.000334793989126382\eta^6 - 0.0000151821911347140\eta^7 + + 2.79989280616388 \times 10^{-7}\eta^8.$$
(9)

Здесь использованы те же обозначения, что на рис. 6. Видно, что аппроксимация (9) снова не работает в области  $\eta \gtrsim 14$ . Автор статьи [29] численно провел расчет решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5) стандартным методом пристрелки и получил решение для функции  $f(\eta)$  и ее производных с тринадцатью знаками дробной части для  $0 \leq \eta \leq 12.43$ , использовав простой (приведенный в статье), код системы компьютерной алгебры Maple. Однако метод пристрелки расходится за пределами указанного интервала. На основе численных расчетов, сделанных в [29], этим же автором предложены приближенные аналитические решения с использованием подгонки кривых: три разные независимые аналитические функции для  $f(\eta)$ ,  $f'(\eta)$  и  $f''(\eta)$ , которые, как видно, не соответствуют численным данным в области больших  $\eta$ . Границы применимости этих формул в статье не указаны. Отметим, что автор модифицировал также метод пристрелки, заменив второе граничное условие для функции  $f: f'(\infty) = 1$  на f''(0) = 0.332057336270228,

и получил более точное численное решение задачи, имеющее больший радиус сходимости  $|\eta| \leq 251.67409$ . Результаты этого расчета второй производной от функции  $f(\eta)$ по формуле (6) хорошо совпадают со значениями  $f''(\eta)$  при численном моделировании.



**Рис. 7.** График второй производной функции Блазиуса  $f''(\eta)$  для  $0 \le \eta \le 15$ : 1 – расчет решения краевой задачи Блазиуса (4) и (5); 2 – производная при аппроксимации по формуле (6); 3 – аппроксимация по формуле (9)

Fig. 7. Graph of the second derivative of the Blasius function  $f''(\eta)$  for  $0 \le \eta \le 15$ : 1 – calculation of the Blasius boundary value problem (4) and (5); 2 – the derivative calculated from the approximation by the formula (6); 3 – approximation by the formula (9)

Производная  $f'(\eta)$ , выражающая продольную скорость u, применяется при расчетах в качестве начального профиля скорости в плоских и трехмерных задачах гидромеханики [40–42]. Полученные результаты используются для численного моделирования, позволяющего непрерывно рассчитывать область потока в пограничном слое с ламинарным, переходным и турбулентным режимами при высокой интенсивности турбулентности свободного потока.

#### Заключение

Решение краевой задачи Блазиуса получено численным интегрированием посредством пристрелки с использованием метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности на большом интервале автомодельной переменной  $0 \le \eta \le 40$  для подробной мелкой сетки. Полученные точные значения f, f' и f'' использованы далее при получении конечного выражения для функции  $f(\eta)$  из решения краевой задачи Блазиуса.

B-сплайном третьего порядка проведена аппроксимация функции Блазиуса  $f(\eta)$  и ее производных f' и f'' с использованием большого числа точек. Установлено хорошее совпадение с расчетами.

При исследовании пограничного слоя несжимаемой жидкости на плоской пластине с нулевым градиентом давления найдена новая аппроксимация функции Блазиуса  $f(\eta)$  нелинейным методом наименьших квадратов, дающая полное совпадение с результатами

численных расчетов. Проведено аналогичное сравнение результатов вычисления аппроксимаций производных f' и f''. Также наблюдается практическое совпадение с расчетными точками. Аналитическая формула, полученная в настоящей работе, применима для всех  $\eta \geq 0$ . Производные f' и f'' стремятся к своим асимптотическим значениям при  $\eta \to \infty$ .

Наиболее важными из полученных результатов представляются следующие: однаединственная найденная функция f дает эффективное приближение к решению классической задачи Блазиуса; первая и вторая производные этой функции практически совпадают с точными значениями, численными расчетами и аппроксимациями B-сплайнами. Продольный профиль скорости в пограничном слое над плоской пластиной, рассчитанный на основе первой производной функции Блазиуса f', может быть использован в качестве начального при численном моделировании переходных и турбулентных течений несжимаемой жидкости.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

# Литература

- Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F. W. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Riegels F.W. (Hrsg.) Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Heidelberg: Springer, 1961, S. 575–584. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8\_43.
- Prandtl L., Wieghardt K. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz // Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl., Math.-Phys.-Chem. Abt. 1945. S. 6–19.
- 3. White F.M. Viscous Fluid Flow. 1st ed. McGraw-Hill, 1974. P. 233–237.
- 4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. 6-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. С. 6–34, 59–73.
- 5. White F.M. Viscous Fluid Flow. 2nd ed. McGraw-Hill, 1991. P. 233–253, 504–520.
- 6. Panton R.L. (Ed.) Incompressible Fluid Flow. New York, NY: Wiley, 1996. P. 581–591.
- Rosenhead L. (Ed.) Laminar Boundary Layers: An Account of the Development, Structure, and Stability of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids, together with a Description of the Associated Experimental Techniques. Oxford: Clarendon Press, 1963. P. 198–292, 419–420.
- Burr K.P., Akylas T.R., Mei C.C. Chapter two. Two-dimensional laminar boundary layers. I-Campus Project. School-wide Program on Fluid Mechanics Modules on High Reynolds Number Flows. 2016. P. 1–33. https://web.mit.edu/fluids-modules/www/highspeed\_flows/ver2/bl\_Chap2.pdf.
- Katopodes N.D. Chapter 9. Boundary-layer flow // Free-Surface Flow: Environmental Fluid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2019. P. 652–708. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-815489-2.00009-5.
- Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys. 1908. Bd. 56.
   S. 1–37. URL: https://dokumen.tips/documents/blasius-h-1908-grenzschichten-in-fluessigkeitenmit-kleiner-reibung.html.

- 11. Олейник О.А. О системе уравнений теории пограничного слоя // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1963. Т. 3, № 3. С. 489–507. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=7851.
- Nickel K. Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichunge // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. Bd. 2, H. 1. S. 1–31. https://doi.org/10.1007/bf00277916.
- Nickel K. Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten // Math. Z. 1960. Bd. 74, H. 1. S. 209–220. https://doi.org/10.1007/BF01180484.
- Töpfer K. Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys. 1912. Bd. 60. S. 397–398.
- Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1938. V. 164, No 919. P. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037.
- Liu Y., Kurra S.N. Solution of Blasius equation by variational iteration // Appl. Math. 2011.
   V. 1, No 1. P. 24–27. https://doi.org/10.5923/j.am.20110101.03.
- He J.H. A simple perturbation approach to Blasius equation // Appl. Math. Comput. 2003.
   V. 140, Nos 2–3. P. 217–222. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00189-3.
- Yun B.I. An iteration method generating analytical solutions for Blasius problem // J. Appl. Math. 2011. V. 2011, No 1. Art. 925649. https://doi.org/10.1155/2011/925649.
- Wazwaz A.-M. The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain // Appl. Math. Comput. 2007. V. 188, No 1. P. 485–491. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.009.
- Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 135, No 2. P. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9.
- Liao S.J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate // J. Fluid Mech. 1999. V. 385. P. 101–128. https://doi.org/10.1017/s0022112099004292.
- Parand K., Dehghan M., Taghavi A. Modified generalized Laguerre function Tau method for solving laminar viscous flow: The Blasius equation // Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow. 2010. V. 20, No 7. P. 728–743. https://doi.org/10.1108/09615531011065539.
- Aminikhah H., Kazemi S. Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by quartic B-spline method // Int. J. Eng. Math. V. 2016, No 1. Art. 9014354. https://doi.org/10.1155/2016/9014354.
- Motsa S.S. A new spectral local linearization method for nonlinear boundary layer flow problems // J. Appl. Math. 2013. V. 2013, No 1. Art. 423628. https://doi.org/10.1155/2013/423628.
- Liao S.-J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems // Int. J. Non-Linear Mech. 1999. V. 34, No 4. P. 759–778. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00056-0.
- Falkner V.M., Skan S.W. LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7. 1931. V. 12, No 80. P. 865–896. https://doi.org/10.1080/14786443109461870.

- Asaithambi A. A second-order finite-difference method for the Falkner–Skan equation // Appl. Math. Comput. 2004. V. 156, No 3. P. 779–786. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.06.020.
- 28. Meade D.B., Haran B.S., White R.E. The shooting technique for the solution of two-point boundary value problems // MapleTech. 1996. V. 3, No 1. P. 1–8.
- 29. Sun B.-H. Solving Prandtl-Blasius boundary layer equation using Maple. Preprints. 2020. 2020080296. 12 p. https://doi.org/10.20944/preprints202008.0296.v2.
- 30. *Givi P.* Blasius similarity solution for boundary layer flow over a flat plate. MEMS1055, Computer Aided Analysis in Transport Phenomena. 11 p.
- Bani-Hani E.H., Assad M.E.H. Boundary-layer theory of fluid flow past a flat-plate: Numerical solution using MATLAB // Int. J. Comput. Appl. 2018. V. 180, No 18. P. 6–8. https://doi.org/10.5120/ijca2018916374.
- 32. *Сабер С.Р.С.* Спектр пульсаций развитого турбулентного пограничного слоя на пластине в несжимаемой жидкости: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Жуковский: МФТИ, 2022. 117 с.
- Khandelwal R., Kumawat P., Khandelwal Y. Solution of the Blasius equation by using Adomian Kamal transform // Int. J. Appl. Comput. Math. 2019. V. 5, No 1. Art. 20. https://doi.org/10.1007/s40819-019-0601-7.
- Majid Z.A., See P.P. Study of predictor corrector block method via multiple shooting to Blasius and Sakiadis flow // Appl. Math. Comput. 2017. V. 314. P. 469–483. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.038.
- Mutuk H. A neural network study of Blasius equation // Neural Process. Lett. 2020. V. 51, No 3. P. 2179–2194. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10184-9.
- 36. Parlange J.Y., Braddock R.D., Sander D. Analytical approximations to the solution of the Blasius equation // Acta Mech. 1981. V. 38, No 1. P. 119–125. https://doi.org/10.1007/BF01351467.
- Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 2017. P. 156–164. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5.
- Schlichting H. Boundary-Layer Theory. New York, NY: McGraw-Hill, 1979. P. 95–101, 127–149, 163–170.
- 39. de Boor C. A Practical Guide to Splines. Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Ser.: Applied Mathematical Sciences. V. 27. New York, NY: Springer, 2001. xvii, 346 p.
- 40. Зубарев В.М. Влияния параметров сильно турбулизированного потока жидкости на пристенные переходные течения в пограничном слое // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 38–51. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.38-51.
- 41. Зубарев В.М. Исследование совместного влияния параметров турбулентности набегающего потока на переход течения в пограничном слое // Тепл. проц. в техн. 2016. Т. 8, № 1. С. 4–15.
- Zubarev V. M. Modeling of a three-dimensional incompressible fluid flow in a turbulent boundary layer in a diffuser // Fluid Dyn. 2023. V. 58, No 8. P. 1684–1696. https://doi.org/0.1134/S0015462823602644.

# References

- Tollmien W., Schlichting H., Görtler H., Riegels F.W. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: Riegels F.W. (Hrsg.) Ludwig Prandtl Gesammelte Abhandlungen. Berlin, Heidelberg, Springer, 1961, S. 575–584. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11836-8\_43. (In German)
- 2. Prandtl L., Wieghardt K. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl., Math.-Phys.-Chem. Abt., 1945, S. 6–19. (In German)
- 3. White F.M. Viscous Fluid Flow. 1 st ed. McGraw-Hill, 1974, pp. 233–237.
- 4. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1987, pp. 6–34, 59–73. (In Russian)
- 5. White F.M. Viscous Fluid Flow. 2nd ed. McGraw-Hill, 1991, pp. 233–253, 504–520.
- 6. Panton R.L. Incompressible Fluid Flow. New York, NY, Wiley, 1996, pp. 581–591.
- Rosenhead L. (Ed.) Laminar Boundary Layers: An Account of the Development, Structure, and Stability of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids, together with a Description of the Associated Experimental Techniques. Oxford, Clarendon Press, 1963, pp. 198–292, 419–420.
- Burr K.P., Akylas T.R., Mei C.C. Chapter two. Two-dimensional laminar boundary layers. I-Campus Project. School-wide Program on Fluid Mechanics Modules on High Reynolds Number Flows. 2016, pp. 1–33. URL: https://web.mit.edu/fluids-modules/www/highspeed\_flows/ver2/bl\_Chap2.pdf.
- Katopodes N.D. Chapter 9. Boundary-layer flow. In: Free-Surface Flow: Environmental Fluid Mechanics. Butterworth-Heinemann, 2019. pp. 652–708. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-815489-2.00009-5.
- Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Z. Math. Phys., 1908, Bd. 56, H. 1, S. 1–37. URL: https://dokumen.tips/documents/blasius-h-1908-grenzschichten-in-fluessigkeitenmit-kleiner-reibung.html. (In German)
- 11. Oleinik O.A. On a system of equations in boundary layer theory. USSR Comput. Math. Math. Phys., 1963, vol. 3, no. 3, pp. 650–673. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90293-3.
- Nickel K. Einige Eigenschaften von Lösungen der Prandtlschen Grenzschicht-Differentialgleichungen. Arch. Ration. Mech. Anal., 1958, Bd. 2, H. 1, S. 1–31. https://doi.org/10.1007/bf00277916. (In German)
- Nickel K. Ein Eindeutigkeitssatz für instationäre Grenzschichten. Math. Z., 1960, Bd. 74, H. 1, S. 209–220. https://doi.org/10.1007/BF01180484. (In German)
- Töpfer K. Bemerkung zu dem Aufsatz von H. Blasius : Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // Z. Math. Phys., 1912, Bd. 60, S. 397–398. (In German)
- Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1938, vol. 164, no. 919, pp. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037.
- 16. Liu Y., Kurra S.N. Solution of Blasius equation by variational iteration. *Appl. Math.*, 2011, vol. 1, no. 1, pp. 24–27. https://doi.org/10.5923/j.am.20110101.03.
- He J.H. A simple perturbation approach to Blasius equation. *Appl. Math. Comput.*, 2003, vol. 140, nos. 2–3, pp. 217–222. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00189-3.

- Yun B.I. An iteration method generating analytical solutions for Blasius problem. J. Appl. Math., 2011, vol. 2011, no. 1, art. 925649. https://doi.org/10.1155/2011/925649.
- Wazwaz A.-M. The variational iteration method for solving two forms of Blasius equation on a half-infinite domain. *Appl. Math. Comput.*, 2007, vol. 188, no. 1, pp. 485–491. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.10.009.
- Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. J. Math. Anal. Appl., 1988, vol. 135, no. 2, pp. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9.
- Liao S.J. A uniformly valid analytic solution of two-dimensional viscous flow over a semi-infinite flat plate. J. Fluid Mech., 1999, vol. 385, pp. 101–128. https://doi.org/10.1017/s0022112099004292.
- Parand K., Dehghan M., Taghavi A. Modified generalized Laguerre function Tau method for solving laminar viscous flow: The Blasius equation. Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow, 2010, vol. 20, no. 7, pp. 728–743. https://doi.org/10.1108/09615531011065539.
- Aminikhah H., Kazemi S. Numerical solution of the Blasius viscous flow problem by quartic B-spline method. Int. J. Eng. Math., 2016, vol. 2016, no. 1, art. 9014354. https://doi.org/10.1155/2016/9014354.
- Motsa S.S. A new spectral local linearization method for nonlinear boundary layer flow problems. J. Appl. Math., 2013, vol. 2013, no. 1, art. 423628. https://doi.org/10.1155/2013/423628.
- Liao S.-J. An explicit, totally analytic approximate solution for Blasius' viscous flow problems. Int. J. Non-Linear Mech., 1999, vol. 34, no. 4, pp. 759–778. https://doi.org/10.1016/S0020-7462(98)00056-0.
- Falkner V.M., Skan S.W. LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations. London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7, 1931, vol. 12, no. 80, pp. 865–896. https://doi.org/10.1080/14786443109461870.
- Asaithambi A. A second-order finite-difference method for the Falkner–Skan equation. Appl. Math. Comput., 2004, vol. 156, no. 3, pp. 779–786. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.06.020.
- 28. Meade D.B., Haran B.S., White R.E. The shooting technique for the solution of two-point boundary value problems. *MapleTech*, 1996, vol. 3, no. 1, pp. 1–8.
- 29. Sun B.-H. Solving Prandtl-Blasius boundary layer equation using Maple. Preprints, 2020, 2020080296. 12 p. https://doi.org/10.20944/preprints202008.0296.v2.
- 30. Givi P. Blasius similarity solution for boundary layer flow over a flat plate. MEMS1055, Computer Aided Analysis in Transport Phenomena. 11 p.
- Bani-Hani E.H., Assad M.E.H. Boundary-layer theory of fluid flow past a flat-plate: Numerical solution using MATLAB. Int. J. Comput. Appl., 2018, vol. 180, no. 18, pp. 6–8. https://doi.org/10.5120/ijca2018916374.
- 32. Saber S.R.S. Pulsation spectrum of the developed turbulent boundary layer on a plate in an incompressible liquid. *Extended Abstract of Cand. Sci.* (*Physics and Mathematics*) Diss. Zhukovsky, MFTI, 2022. 117 p. (In Russian)

- Khandelwal R., Kumawat P., Khandelwal Y. Solution of the Blasius equation by using Adomian Kamal transform. Int. J. Appl. Comput. Math., 2019, vol. 5, no. 1, art. 20. https://doi.org/10.1007/s40819-019-0601-7.
- Majid Z.A., See P.P. Study of predictor corrector block method via multiple shooting to Blasius and Sakiadis flow. *Appl. Math. Comput.*, 2017, vol. 314, pp. 469–483. https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.06.038.
- Mutuk H. A neural network study of Blasius equation. Neural Process. Lett., 2020, vol. 51, no. 3, pp. 2179–2194. https://doi.org/10.1007/s11063-019-10184-9.
- Parlange J.Y., Braddock R.D., Sander D. Analytical approximations to the solution of the Blasius equation. Acta Mech., 1981, vol. 38, no. 1, pp. 119–125. https://doi.org/10.1007/BF01351467.
- Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. Berlin, Heidelberg, Springer, 2017. pp. 156–164. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5.
- Schlichting H. Boundary-Layer Theory. New York, NY, McGraw-Hill, 1979, pp. 95–101, 127–149, 163–170.
- de Boor C. A Practical Guide to Splines. Marsden J.E., Sirovich L. (Eds.). Ser.: Applied Mathematical Sciences. Vol. 27. New York, NY, Springer, 2001. xvii, 346 p.
- 40. Zubarev V.M. The influence of strongly turbulized liquid flow parameters on the near-wall transitional flows in the boundary layer. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 38–51. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.38-51. (In Russian)
- 41. Zubarev V.M. Investigation of combined effect of turbulence parameters of the main stream on a flow transition in a boundary layer. *Therm. Processes Eng.*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 4–15. (In Russian)
- Zubarev V.M. Modeling of a three-dimensional incompressible fluid flow in a turbulent boundary layer in a diffuser. *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 1684–1696. https://doi.org/10.1134/S0015462823602644.

## Информация об авторах

Вячеслав Михайлович Зубарев, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

E-mail: *zubarev@ipmnet.ru* 

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1155-5509

# Author Information

**Vyacheslav M. Zubarev**, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences

E-mail: *zubarev@ipmnet.ru* 

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-1155-5509

Поступила в редакцию 5.11.2024 Принята к публикации 18.04.2025 Received November 5, 2024 Accepted April 18, 2025
# ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266

# О некоторых свойствах коэффициентов в методе структурных функций

# Л.А. Кабанова

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

liubov.kabanova@math.msu.ru

### Аннотация

Исследованы параметры метода структурных функций – способа построения приближенного решения задач теории упругости для неоднородных тел. Доказана эквивалентность двух существующих подходов к вычислению структурных функций; расширен список свойств структурных функций. Метод структурных функций основан на представлении перемещений в неоднородном теле в виде ряда по производным перемещений в однородном (сопутствующем) теле. Сопутствующее тело предполагается имеющим ту же геометрию, что и неоднородное, и нагруженным так же, как неоднородное тело. При решении практических задач представление решения в виде ряда необходимо заменить частичной суммой упомянутого ряда. Для частного вида приближенного решения сопутствующей задачи показана взаимосвязь количества слагаемых в частичной сумме упомянутого ряда и порядка приближения решения сопутствующей задачи; приведены соображения для выбора упругих свойств сопутствующего тела.

**Ключевые слова:** метод структурных функций, приближенное решение, трехмерная задача теории упругости

**Благодарности.** Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М.В. Ломоносова.

Для цитирования: *Кабанова Л.А.* О некоторых свойствах коэффициентов в методе структурных функций // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 244–266. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266.

# ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266

# On some properties of the coefficients in the structural functions method

# L.A. Kabanova

Moscow State University, Moscow, Russia

liubov.kabanova@math.msu.ru

### Abstract

Some parameters of the structural functions method, which is used to construct an approximate solution to the elasticity problem for inhomogeneous solids, were analyzed. The equivalence of two existing approaches to computing structural functions was proved, and the set of known properties of structural functions was expanded. It was demonstrated that the method approximates the displacements in an inhomogeneous body by expressing them as a series involving derivatives of the displacements in a homogeneous (concomitant) body with the same geometry and loading. In practical applications, the series representation of the solution must be replaced by the partial sum of the series. For a specific class of approximate solutions to the concomitant problem, a relationship was established between the number of terms used in the partial sum of the series and the approximation order of the solution to the concomitant problem. Criteria for selecting elastic properties of the concomitant body were discussed.

**Keywords:** structural functions method, approximate solution, three-dimensional problem of elasticity theory

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment to Moscow State University.

For citation: Kabanova L.A. On some properties of the coefficients in the structural functions method. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 244–266. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.244-266. (In Russian)

### Введение

Статья посвящена исследованию метода структурных функций ([1–3] и др.) – способа построения приближенного решения трехмерной задачи теории упругости [4] для тела произвольной неоднородности, разработанного В.И. Горбачевым. Исследование неоднородных материалов и конструкций, изготовленных из композиционных материалов, - одна из наиболее динамично развивающихся областей знания в силу широкого применения изделий из композиционных материалов и высоких потребительских характеристик последних. Заметим, однако, что использование композиционных материалов может быть эффективным в первую очередь при условии использования высокоточных методов расчета, корректно описывающих качественные и количественные особенности напряженнодеформированного состояния неоднородного тела. Один из наиболее распространенных приемов решения задач механики неоднородных тел – сведение последних к эквивалентной (в том или ином смысле) задаче для однородного тела путем осреднения упругих свойств неоднородного материала различными методами. Среди таких методов необходимо отметить в первую очередь осреднение по Фойгту [5], по Рейссу [6,7]; уточненный подход Хашина-Штрихмана [8]. Большей точностью обладают разработанные позднее подходы (метод Мори-Танака [9], метод Эшелби и самосогласованный метод [10–12], метод трех фаз [13,14]) и подходы, учитывающие геометрические особенности самого изделия (например, модель Григолюка – Куликова [15], модель Мураками [16] для слоистых пластин). Более подробный обзор литературы по тематике эффективных свойств материалов приведен, например, в работах [17, 18]. Одним из наиболее гибких и универсальных подходов можно назвать асимптотический метод, восходящий к работам Н.С. Бахвалова [19] и Б.Е. Победри [4], а ныне реализованный для вязкоупругих материалов [20], ряда задач нелинейной теории упругости [21], упругопластичности [22], теории пластин [23–25] и других задач [26]. Асимптотический метод подразумевает необходимость выбора малого геометрического параметра, что может быть возможно не всегда. Поэтому в работе [27] в качестве варианта обобщения асимптотического метода был построен метод интегральной формулы, давший начало методу структурных функций ( $MC\Phi$ ): в работе [1] приведены соотношения МСФ для первой и второй краевых задач, а также показано, что соотношения МСФ для первой краевой задачи могут быть применены к решению смешанной краевой задачи. В более поздних работах того же автора и его учеников МСФ обобщен на случай динамической задачи теории упругости [28], моментной теории упругости [29]; получены упрощенные варианты метода для одномерных и двумерных постановок задач [30, 31]. В работе [32] продемонстрировано применение вариации МСФ для второй краевой задачи – показано, что МСФ-приближения в ряде классических задач совпадают с известными решениями; в работе [33] – для вычисления эффективных свойств неоднородного тела – показано, что результат применения МСФ сопоставим с результатами вычислений по методу Мори – Танака; в статье [3] приведены структурные функции (СФ) для неоднородной полосы. В работах [34–36] построены МСФ-приближения решения задачи о нагружении прямоугольной пластины – показано, что МСФ-приближения позволяют моделировать ряд важных качественных особенностей компонент напряженно-деформированного состояния пластины. Применение МСФ требует выбора некоторых параметров, таких как упругие свойства сопутствующего тела, точность решения сопутствующей задачи, порядок МСФ. В [36] показано, что выбор этих параметров влияет на качество полученного приближения. Настоящая работа посвящена исследованию некоторых свойств структурных функций, а также параметров МСФ.

### 1. Определение и свойства структурных функций

Общий вариант МСФ в перемещениях позволяет построить решение квазистатической задачи теории упругости для тела произвольной неоднородности [4]:

$$\begin{aligned} [C_{ijkl}(\overrightarrow{x})u_{k,l}(\overrightarrow{x})]_{,j} + X_i(\overrightarrow{x}) &= 0, \quad \sigma_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijkl}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{kl}(\overrightarrow{x}), \\ \varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x}) &= \frac{1}{2}[u_{i,j}(\overrightarrow{x}) + u_{j,i}(\overrightarrow{x})], \\ u_i\Big|_{\Sigma_u} &= u_i^0, \quad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = P_i^0. \end{aligned}$$
(1)

Здесь  $C_{ijkl}(\vec{x})$  – тензор упругих модулей неоднородного тела, удовлетворяющий обычным термодинамическим ограничениям [4];  $u_i$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений неоднородного тела;  $X_i$  – объемные силы;  $\Sigma_u$  и  $\Sigma_{\sigma}$  – часть границы тела с кинематическими или статическими краевыми условиями соответственно, их объединение совпадает с полной границей тела;  $n_i$  – внешняя нормаль к границе. Система координат  $Ox_1x_2x_3$  – декартова, по повторяющимся малым латинским индексам предполагается суммирование от 1 до 3, а индекс после запятой обозначает производную:  $f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Задачу (1) далее будем называть ucxodhoù.

В работах [1,27] установлено, что решение исходной задачи можно построить в виде

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \int\limits_V G_{m|n}^{(i)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\overrightarrow{\xi})] e_{kl}(\overrightarrow{\xi}) dV_{\xi}, \tag{2}$$

где |n| обозначает частную производную  $\frac{\partial}{\partial \xi_n}$ ;  $G_k(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})$  – тензор Грина неоднородного тела [37],

$$[C_{ijkl}G_{k,l}^{(t)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})]_{,j} = -\delta_{it}\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2)\delta(x_3 - \xi_3), G_i^{(t)}\Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad C_{ijkl}G_{k,l}^{(t)}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = 0,$$
(3)

а  $v_k(\vec{x})$  – решение квазистатической задачи в перемещениях для однородного тела той же формы, которая аналогична исходной с точки зрения внешних нагрузок и граничных условий:

$$C_{ijkl}^{0}v_{k,lj}(\overrightarrow{x}) + X_{i}(\overrightarrow{x}) = 0, \quad s_{ij}(\overrightarrow{x}) = C_{ijkl}^{0}e_{kl}(\overrightarrow{x}), \quad e_{ij}(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{2}[v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + v_{j,i}(\overrightarrow{x})],$$

$$v_{i}\Big|_{\Sigma_{u}} = u_{i}^{0}, \quad s_{ij}n_{j}\Big|_{\Sigma_{\sigma}} = P_{i}^{0}.$$
(4)

Здесь  $C_{ijkl}^0$  – тензор упругих модулей однородного тела, удовлетворяющий обычным термодинамическим ограничениям;  $v_i$ ,  $e_{ij}$ ,  $s_{ij}$  – компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений однородного тела. Задачу (4) далее будем называть *conymcmsyющей*.

Непосредственное вычисление компонент тензора Грина неоднородного тела представляет собой отдельную сложную задачу, поэтому в работе [27] было предложено использовать приближение интегральной формулы (2) соотношением

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}) e_{kl,i_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}).$$
(5)

Коэффициенты  $N_{ikli_1...i_q}(\vec{x})$  представления (5) называют структурными функциями (СФ). В [1] были предложены два подхода к вычислению последних.

**1.1.** Вычисление структурных функций. Подстановкой соотношения (5) в интегральную формулу (2) можно получить *определение* СФ [1]:

$$N_{ikli_1\dots i_q} = \int_{V} \frac{1}{q!} G_{m|n}^{(i)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x}) [C_{mnkl}^0 - C_{mnkl}(\overrightarrow{\xi})](\xi_{i_1} - x_{i_1}) \dots (\xi_{i_q} - x_{i_q}) \, dV_{\xi}.$$
(6)

Использование соотношения (6) – первый способ нахождения СФ в конкретной задаче, однако его применение затрудняется необходимостью вычислять компоненты тензора Грина. В [1] предложен другой способ нахождения СФ – из соображений совпадения объемных сил в исходной (1) и сопутствующей (4) задаче,  $[C_{ijkl}(\vec{x})u_{k,l}(\vec{x})]_{,j} = C^0_{ijkl}v_{k,lj}(\vec{x})$ . Подставив в это соотношение выражение (5) для перемещений  $u_i^{-1}$ , перепишем его в терминах производных  $e_{mn}(\vec{x})$ :

$$C_{ijkl}^{0}e_{kl,j} = C_{ijkl,j}e_{kl} + C_{ijkl}e_{kl,j} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[ [C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q,l}]_{,j}e_{mn,i_1\dots i_q} + C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q,l}e_{mn,i_1\dots i_q}]_{,j}e_{mn,i_1\dots i_q} + C_{ijkl}N_{kmni_1\dots i_q}e_{mn,i_1\dots i_q}l_j \right].$$
(7)

Достаточное условие выполнения равенства (7) – совпадение коэффициентов при  $e_{mn,i_1...i_q}$  – позволяет записать следующую рекуррентную систему уравнений в частных производных для отыскания СФ:

$$[C_{ijkl}N_{kmn,l} + C_{ijmn}]_{,j} = 0,$$

$$[C_{ijmn}N_{mkli_{1,n}} + C_{ijmi_{1}}N_{mkl}]_{,j} = C^{0}_{ii_{1}kl} - [C_{ii_{1}mn}N_{mkl,n} + C_{ii_{1}kl}],$$

$$[C_{ijmn}N_{mkli_{1}...i_{q,n}} + C_{ijmi_{q}}N_{mkli_{1}...i_{q-1}}]_{,j} =$$

$$= -[C_{ii_{q}mn}N_{mkli_{1}...i_{q-1},n} + C_{ii_{q}mi_{q-1}}N_{mkli_{1}...i_{q-2}}], \quad q \ge 2.$$
(8)

Граничные условия к системе (8) можно записать аналогичным образом из соображений совпадения граничных условий в исходной (1) и сопутствующей (4) задачах

$$u_i\Big|_{\Sigma_u} = v_i\Big|_{\Sigma_u}, \quad \sigma_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} = s_{ij}n_j\Big|_{\Sigma_\sigma} :$$
(9)

в форме, рекуррентной по порядку производной  $e_{mn}$ ,

$$N_{ikli_1\dots i_q} e_{kl,i_1\dots i_q} \Big|_{\Sigma_u} = 0, \quad q \ge 0, \tag{10}$$

$$\left[C_{ijkl}e_{kl} + C_{ijmn}N_{mkl,n}e_{kl}\right]n_j\Big|_{\Sigma_{\sigma}} = C^0_{ijkl}e_{kl}n_j\Big|_{\Sigma_{\sigma}}, \quad q = 0,$$
(11)

$$\left[C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_{q-1}}e_{kl,i_1\dots i_{q-1}n} + C_{ijmn}N_{mkli_1\dots i_q,n}e_{kl,i_1\dots i_q}\right]n_j\Big|_{\Sigma_{\sigma}} = 0, \quad q \ge 1.$$

В [1] показано, что система (8), (10) и (11) является достаточным условием для выполнения с помощью интегральной формулы (2) уравнений равновесия в исходной задаче. Покажем, что представленные подходы к вычислению СФ (прямое вычисление по компонентам тензора Грина (6) и решение рекуррентной системы (8), (10)–(11)) полностью эквивалентны.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Аргументы функций опущены для краткости там, где это возможно.

**Теорема 1.** Структурные функции, определенные соотношениями (6), удовлетворяют соотношениям (8), (10) и (11).

Доказательство. Проведем непосредственную проверку: подставим СФ первого порядка, вычисленные в соответствии с (6), в первое уравнение системы (8) и обозначим результат через I:

$$[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})N_{kmn,l}(\overrightarrow{x}) + C_{ijmn}(\overrightarrow{x})]_{,j} = \int_{V} \left[ C_{ijkl}(\overrightarrow{x})G_{s|t,l}^{(k)}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{x})[C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})] \right]_{,j} dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I$$

Поскольку  $[C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]$  не зависит от  $\overrightarrow{x}$ ,

$$I = \int_{V} \left[ C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) G_{s|t,l}^{(k)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x}) \right]_{,j} [C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})] dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I_{1}.$$

В силу теоремы Максвелла [37] для компонент тензора Грина  $G_s^{(k)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x}) = G_k^{(s)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})$  имеем

$$I_1 = \int_{V} \left[ C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) G_{k,l}^{(s)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi}) \right]_{,j|t} \left[ C_{stmn}^0 - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi}) \right] dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = I_2.$$

Ввиду формулы для производной произведения, теоремы Остроградского–Гаусса, примененной к

$$\int_{V} \left[ \left( C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) G_{k,l}^{(s)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})] \right]_{|t} dV_{\xi},$$

уравнений и граничных условий для тензора Грина (3) получаем

$$I_{2} = \int_{V} \left[ \left( C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) G_{k,l}^{(s)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})] \right]_{|t} dV_{\xi} - \int_{V} \left( C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) G_{k,l}^{(s)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi}) \right)_{,j} [C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi})]_{|t} dV_{\xi} + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = -C_{itmn,t}(\overrightarrow{x}) + C_{ijmn,j}(\overrightarrow{x}) = 0.$$

Таким образом, *N*-функции первого порядка (6) удовлетворяют первому уравнению системы (8).

Преобразуем выражение для производной N-функции второго порядка, пользуясь тем, что координаты  $x_i$  декартовы и  $x_{i,j} = \delta_{ij}$ :

$$N_{kmni_{1},l}(\overrightarrow{x}) = \int_{V} [G_{s|t}^{(k)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})(\xi_{i_{1}} - x_{i_{1}})]_{,l}[C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\xi)]dV_{\xi} =$$

$$= \int_{V} G_{s|t,l}^{(k)}(\overrightarrow{\xi}, \overrightarrow{x})(\xi_{i_{1}} - x_{i_{1}})[C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\xi)]dV_{\xi} - \int_{V} G_{s|t}^{(k)}[C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\xi)]\delta_{i_{1}l}dV_{\xi} =$$

$$= \int_{V} G_{k,l|t}^{(s)}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{\xi})(\xi_{i_{1}} - x_{i_{1}})[C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\xi)]dV_{\xi} - N_{kmn}(\overrightarrow{x})\delta_{i_{1}l}.$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (8):

$$\begin{split} & [C_{ijkl}N_{kmni_{1},l} + C_{ijki_{1}}N_{kmn}]_{,j} = [-C_{ijkl}N_{kmn}\delta_{i_{1}l} + C_{ijki_{1}}N_{kmn}]_{,j} + \\ & + \int_{V} \left[ C_{ijkl}G_{k,l|t}^{(s)}(\overrightarrow{x},\overrightarrow{\xi}) \right]_{,j} \left[ C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\xi) \right] (\xi_{i_{1}} - x_{i_{1}}) dV_{\xi} - \\ & - \int_{V} C_{ijkl}G_{s|t,l}^{(k)}(\overrightarrow{\xi},\overrightarrow{x}) \left[ C_{stmn}^{0} - C_{stmn}(\overrightarrow{\xi}) \right] \delta_{i_{1}j} dV_{\xi} = \\ & = \left[ C_{itmn}^{0} - C_{itmn}(\overrightarrow{x}) \right] \delta_{i_{1}t} - C_{ii_{1}kl}N_{kmn,l}(\overrightarrow{x}), \end{split}$$

что и требовалось доказать. Аналогично, дифференцированием соотношения (6), проверяется выполнение заключительного уравнения системы (8) и граничных условий (10)–(11). Соответствующие технические выкладки опущены.

**Теорема 2.** Решение системы уравнений в частных производных (8) с граничными условиями (10) и (11) единственно.

Доказательство. Данное утверждение следует из единственности решения уравнений типа  $[C_{ijkl}A_{kj_1...j_q,l}]_{,j} + B_{ij_1...j_q} = 0$ , где  $B_{ij_1...j_q}$  – произвольное тензорное поле, так как уравнения системы (8), разрешенные относительно старших по порядку СФ, имеют такой же вид. В свою очередь, единственность решения уравнений указанного вида следует из удовлетворения коэффициентов  $C_{ijkl}(\vec{x})$  термодинамическим ограничениям.

Следствие 1. Функции, удовлетворяющие системе (8) с граничными условиями (10) и (11), совпадают со СФ (6), определенными из интегральной формулы (2); два подхода к вычислению СФ (как взвешенных моментов тензора Грина и как решение системы уравнений в частных производных) эквивалентны.

**Следствие 2.** Для любой пары тензоров упругих свойств исходного и сопутствующего тел  $C_{ijkl}(\overrightarrow{x})$  и  $C_{ijkl}^0$  СФ, входящие в представление (2), определяются однозначно.

1.2. Вывод уравнений для структурных функций из вариационного подхода. Рекуррентную систему уравнений (8) можно также получить, применив вариационный подход. Для этого предположим, что  $v_k(\vec{x})$  – решение сопутствующей задачи (4), а перемещения в исходном теле имеют вид (5), в котором искомыми являются СФ; кроме того, пусть условия на кинематической границе  $\Sigma_u$  для СФ выполнены.

Функционал Лагранжа для исходного тела имеет вид [38]

$$\mathcal{L}[u] = \int_{V} [\sigma_{ij}(\overrightarrow{x})\varepsilon_{ij}(\overrightarrow{x})]/2dV - \int_{V} [X_{i}(\overrightarrow{x})u_{i}(\overrightarrow{x})]dV - \int_{\Sigma_{\sigma}} [P_{i}^{0}(\overrightarrow{x})u_{i}(\overrightarrow{x})]d\Sigma$$

и может быть переписан в терминах СФ:

$$\mathcal{L}[N] = \frac{1}{2} \int_{V} C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) \left[ v_{k,l}(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left( N_{kmni_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}) v_{m,ni_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}) \right)_{,l} \right] \times$$
(12)

$$\times \left[ v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left( N_{istj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x}) v_{s,tj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x}) \right)_{,j} \right] dV - \\ - \int_{V} C_{itop}^{0} v_{o,pt}(\overrightarrow{x}) * \left[ v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{iuvk_1\dots k_q}(\overrightarrow{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\overrightarrow{x}) \right] dV - \\ - \int_{\Sigma_{\sigma}} C_{itop}^{0} v_{o,p} n_t(\overrightarrow{x}) * \left[ v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{iuvk_1\dots k_q}(\overrightarrow{x}) v_{u,vk_1\dots k_q}(\overrightarrow{x}) \right] d\Sigma.$$

Здесь учтено, что  $X_i(\overrightarrow{x}) = C^0_{ijkl} v_{k,lj}(\overrightarrow{x})$  во всем теле,  $P^0_i(\overrightarrow{x}) = C^0_{ijkl} v_{k,l}(\overrightarrow{x}) n_j$  на статической границе  $\Sigma_{\sigma}$ , а граничные условия на кинематической границе  $\Sigma_u$  выполнены.

Вариационное уравнение для функционала (12) имеет вид

$$\delta \mathcal{L}[N] = \int_{V} C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) \Biggl[ \sum_{q=0}^{\infty} \left( \delta N_{kmni_1...i_q,l}(\overrightarrow{x}) v_{m,ni_1...i_q}(\overrightarrow{x}) + \delta N_{kmni_1...i_q}(\overrightarrow{x}) v_{m,ni_1...i_q}(\overrightarrow{x}) v_{m,ni_1...i_q}(\overrightarrow{x}) \Biggr] \times \\ \times \Biggl[ v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} \left( N_{istj_1...j_q}(\overrightarrow{x}) v_{s,tj_1...j_q}(\overrightarrow{x}) \right)_{,j} \Biggr] dV - \\ - \int_{V} C_{itop}^0 v_{o,pt}(\overrightarrow{x}) \sum_{q=0}^{\infty} \delta N_{iuvk_1...k_q}(\overrightarrow{x}) v_{u,vk_1...k_q}(\overrightarrow{x}) dV - \\ - \int_{\Sigma_{\sigma}} C_{itop}^0 v_{o,p} n_t(\overrightarrow{x}) \sum_{q=0}^{\infty} \delta N_{iuvk_1...k_q}(\overrightarrow{x}) v_{u,vk_1...k_q}(\overrightarrow{x}) d\Sigma = 0. \end{aligned}$$
(13)

Выделив слагаемые при  $\delta N_{ikli_1...i_q}(\overrightarrow{x})$  и приравняв их к нулю, получим соотношения

$$\left[ C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) \left( v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} [N_{istj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x})v_{s,tj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x})]_{,j} \right) \right]_{,l} = C_{itop}^0 v_{o,pt}(\overrightarrow{x}), \quad x \in V,$$

$$\left[ C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) \left( v_{i,j}(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{\infty} [N_{istj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x})v_{s,tj_1\dots j_q}(\overrightarrow{x})]_{,j} \right) \right] n_l = C_{itop}^0 v_{o,p}(\overrightarrow{x}) n_t, \quad x \in \Sigma_{\sigma},$$

достаточные условия выполнения которых совпадают с системой (8)-(11).

**1.3.** Свойства структурных функций. В работе [1] отмечено, что СФ – взвешенные моменты тензора Грина; кроме того, СФ  $N_{ikli_1...i_q}$  порядка q имеют размерность  $L^{q+1}$ , L – единица длины. Из определения (6) и эквивалентности подходов к вычислению СФ следуют дополнительные свойства СФ.

- А. СФ зависят от упругих свойств сопутствующего тела, но не от решения сопутствующей задачи, в том числе не зависят от точности, характера приближения и т. п. для приближенных решений сопутствующей задачи.
- В. СФ зависят от граничных условий исходной смешанной краевой задачи (1), но не зависят от величины и характера объемных сил, приложенных к исходному телу.
- С. В тривиальном случае  $C_{ijkl}(\overrightarrow{x}) \equiv C^0_{ijkl}$  СФ тождественно обращаются в нуль.

## 2. Применение МСФ к решению трехмерных задач теории упругости

Рассмотрим вопрос о применении МСФ для построения решения конкретной задачи. Вычисление полной суммы ряда (5) не представляется возможным, следовательно, при практической реализации МСФ необходимо ограничиться представлением перемещений в исходном теле в виде частичной суммы ряда (5):

$$u_i(\overrightarrow{x}) = v_i(\overrightarrow{x}) + \sum_{q=0}^{Q} N_{ikli_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}) v_{k,li_1\dots i_q}(\overrightarrow{x}).$$
(14)

Будем называть метод, основанный на этом представлении, МСФ порядка Q+1. Заметим, что поле, определенное соотношением (14), задает только приближенное решение исходной задачи.

Для сопутствующей задачи (4) – трехмерной задачи теории упругости для однородного тела – как правило, не построено точное аналитическое решение, однако разработано несколько приближенных решений разной точности; кроме того, из общих построений МСФ не следует напрямую выбор упругих свойств сопутствующего тела. Поскольку представление (14) задает приближенное решение исходной задачи, требует изучения влияние упомянутых параметров МСФ – Q, точности решения сопутствующей задачи и упругих свойств сопутствующего тела – на качественные и количественные свойства МСФ-приближений.

**2.1. Пример: реализация МСФ для задачи о нагружении пластины.** Опишем взаимное влияние порядка *Q* МСФ и точности решения сопутствующей задачи в следующем случае. Пусть приближенное решение сопутствующей задачи можно искать в виде

$$v_k(\vec{x}) = \sum_{r=0}^R x_3^{(r)} \varphi_k^{(r)}(x_1, x_2),$$
(15)

например, такой вид приближенного решения сопутствующей задачи соответствует случаю пластины [39,40], если координаты  $x_1, x_2$  – координаты в серединной плоскости пластины, а  $x_3$  ортогональна серединной плоскости. Предположим также, что выбраны конкретные значения Q и R. Тогда определению из уравнений (8) и граничных условий (10)–(11) подлежат  $\sum_{q=0}^{Q} [9(q+1)(q+2)] C\Phi$ .

Рассмотрим подробнее граничные условия (10). Будем называть условие (10) для функции  $N_{ikli_1...i_q}$  тривиальным, если соответствующая производная  $v_{k,li_1...i_q}(\overrightarrow{x}) \equiv 0 \ \forall \ \overrightarrow{x} \in \Sigma_u$ , в противном случае будем называть условие нетривиальным для соответствующей

$$\begin{split} \left[ N_{ikLI_{1}...I_{q}} \sum_{r=0}^{R} x_{3}^{r} \varphi_{k,LI_{1}...I_{q}}^{r} + N_{ik3I_{1}...I_{q}} \sum_{r=0}^{R} rx_{3}^{r-1} \varphi_{k,I_{1}...I_{q}}^{r} + \cdots + \right. \\ \left. + N_{ik} \underbrace{3 \dots 3}_{q+1} \sum_{r=0}^{R} r(r-1) \dots (r-q) x_{3}^{r-q-1} \varphi_{k}^{r} \right] \right|_{\Sigma_{u}} &= 0, \quad q = 0, \dots, Q; \\ \left[ \left( C_{ijkL} + C_{ijmn} N_{mkL,n} - C_{ijkL}^{0} \right) \sum_{r=0}^{R} x_{3}^{r} \varphi_{k,L}^{r} + \right. \\ \left. + \left( C_{ijk3} + C_{ijmn} N_{mk3,n} - C_{ijk3}^{0} \right) \sum_{r=0}^{R} rx_{3}^{r-1} \varphi_{k}^{r} \right] n_{j} \right|_{\Sigma_{\sigma}} &= 0, \\ \left[ \left( C_{ijmI_{q}} N_{mkLI_{1}...I_{q-1}} + C_{ijmn} N_{mkLI_{1}...I_{q,n}} \right) \sum_{r=0}^{R} rx_{3}^{r} \varphi_{k,LI_{1}...I_{q}}^{r} + \cdots + \right. \\ \left( C_{ijm3} N_{mk} \underbrace{3 \dots 3}_{q} + C_{ijmn} N_{mk} \underbrace{3 \dots 3}_{q+1} \right) \sum_{r=0}^{R} r \dots (r-q) x_{3}^{r-q-1} \varphi_{k}^{r} \right] n_{j} \right|_{\Sigma_{\sigma}} &= 0, \\ \left. \left[ C_{ijmN} N_{mkLI_{1}...I_{Q}} \sum_{r=0}^{R} x_{3}^{r} \varphi_{k,LI_{1}...I_{QN}}^{r} + \cdots + \right. \\ \left. + C_{ijm3} N_{mk} \underbrace{3 \dots 3}_{Q+1} \sum_{r=0}^{R} r \dots (r-Q-1) x_{3}^{r-Q-2} \varphi_{k}^{r} \right] n_{j} \right|_{\Sigma_{\sigma}} &= 0. \end{split} \right]$$

Чтобы корректно вычислить СФ, необходимо наличие нетривиальных граничных условий для каждой из них. Таким образом, при R < Q + 2 система уравнений и граничных условий для N-функций смешанной задачи является недоопределенной. Иначе говоря, повышать порядок МСФ, не повышая точности решения сопутствующей задачи, нецелесообразно. В терминологии моделей пластин, принятой в работах [41] и др., в качестве решения сопутствующей задачи для МСФ порядка Q + 1 необходимо выбирать модель не меньшего порядка по поперечным деформациям. Алгоритм применения МСФ можно сформулировать следующим образом.

- А. Выбрать параметры R и Q с учетом рекомендуемого соотношения  $R \ge Q+2$ .
- В. Поставить исходную и сопутствующую задачи.

+

- С. Выделить нетривиальные граничные условия для СФ.
- D. Определить общий вид СФ, отличных от 0. Выбрать упругие свойства сопутствующего тела.

Е. Построить итоговые приближения к решению исходной задачи.

Отметим, что из общих построений МСФ для смешанной краевой задачи не следуют никакие ограничения на выбор упругих свойств сопутствующего тела, за исключением обычных термодинамических ограничений на упругие модули материала: интегральная формула (2) верна независимо от выбора  $C_{ijkl}^0$ . Однако при использовании МСФ конечного порядка выбор  $C_{ijkl}^0$  существенно влияет на качество приближения к решению исходной задачи – это продемонстрировано, в частности, в работе [36]; ниже для примера приведем соображения для выбора упругих свойств сопутствующего тела.

**2.2.** Пример: приближенные решения задачи о нагружении слоистой свободно опертой на контуре пластины. В качестве примера применения МСФ рассмотрим задачу о нагружении прямоугольной пластины размером  $L_1 \times L_2 \times h$ , составленной из слоев, ортотропных в осях координат, параллельных сторонам пластины ( $C_{\alpha\alpha\alpha\beta} = 0$ ,  $C_{\alpha\alpha\beta\gamma} = 0$ ); свободно опертой на боковых гранях [40, 42]. Математическая постановка исходной задачи имеет вид

$$[C_{ijkl}(x_3)u_{k,l}(\overrightarrow{x})]_{,j} + X_i(\overrightarrow{x}) = 0,$$

$$x_3 = \pm h/2 : \sigma_{i3}(x_1, x_2) = q_i^{\pm}(x_1, x_2),$$

$$x_1 = 0, \quad L_1 : u_2(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad u_3(\cdot, x_2, x_3) = 0, \quad \sigma_{11}(\cdot, x_2, x_3) = 0,$$

$$x_2 = 0, \quad L_2 : u_1(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad u_3(x_1, \cdot, x_3) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, \cdot, x_3) = 0,$$
(16)

а сопутствующей задачи –

$$C_{ijkl}^{0}v_{k,lj}(\vec{x}) + X_{i}(\vec{x}) = 0,$$

$$x_{3} = \pm h/2 : s_{i3}(x_{1}, x_{2}) = q_{i}^{\pm}(x_{1}, x_{2}),$$

$$x_{1} = 0, \quad L_{1} : v_{2}(\cdot, x_{2}, x_{3}) = 0, \quad v_{3}(\cdot, x_{2}, x_{3}) = 0, \quad s_{11}(\cdot, x_{2}, x_{3}) = 0,$$

$$x_{2} = 0, \quad L_{2} : v_{1}(x_{1}, \cdot, x_{3}) = 0, \quad v_{3}(x_{1}, \cdot, x_{3}) = 0, \quad s_{22}(x_{1}, \cdot, x_{3}) = 0.$$
(17)

В работах [34, 36] описана процедура вычисления СФ первого и второго порядков для пары задач (16) и (17): приведем только выводы из этих вычислений. Для решения сопутствующей задачи подразумеваем, что выбор модели пластины не грубее, чем модель третьего порядка по поперечным деформациям (TSDT, [40, 41]).

**2.2.1.** Приближение первого порядка. МСФ-приближение первого порядка построим путем выбора Q = 0 в соотношении (14). В случае выбранной неоднородности система уравнений и граничных условий для отыскания СФ первого порядка примет вид [36]

$$\begin{bmatrix} C_{i3mn}(x_3) + C_{i3k3}(x_3)N_{kmn,3}(x_3) \end{bmatrix}_{,3} = 0,$$
  

$$\begin{bmatrix} C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2) \end{bmatrix} = C_{i3mn}^{0},$$
  

$$C_{i3kl}(\pm h/2)N_{kmn}(\pm h/2) = 0.$$
(18)  
(19)

Заметим, что система (19) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функций  $N_{113}(x_3)$ ,  $N_{223}(x_3)$ ,  $N_{311}(x_3)$ ,  $N_{322}(x_3)$ ,  $N_{333}(x_3)$ ,

на каждую из которых сформулированы четыре граничных условия. Первые уравнения системы (18) легко проинтегрировать:

$$N_{3\alpha\alpha} = \int_{-h/2}^{x_3} (C_{33\alpha\alpha}^0 - C_{33\alpha\alpha}) / C_{3333} dy + k_{3\alpha\alpha},$$

$$N_{\alpha\alpha3} = \int_{-h/2}^{x_3} (C_{\alpha3\alpha3}^0 - C_{\alpha3\alpha3}) / C_{\alpha3\alpha3} dy + k_{\alpha\alpha3},$$
(20)

в соотношениях (20) и далее отсутствует суммирование по греческим индексам, а  $k_{ijk}$  – константы интегрирования. Соотношение же (19) при произвольных  $C_{ijkl}^0$  удовлетворить нельзя: из условия (19) на нижней лицевой плоскости следует, что  $k_{ijk} = 0$ , а условие на верхней лицевой плоскости будет выполнено, если и только если

$$C_{33\alpha\alpha}^{0} = \left\langle C_{33\alpha\alpha} / C_{3333} \right\rangle / \left\langle 1 / C_{3333} \right\rangle, \quad C_{\alpha3\alpha3}^{0} = 1 / \left\langle 1 / C_{\alpha3\alpha3} \right\rangle.$$
(21)

Таким образом, поперечные модули сопутствующего тела уже не могут быть произвольными, а должны быть выбраны в соответствии с (21). Продольные же модули  $C_{IJKL}^0$  остаются параметрами метода. Перемещения в исходном теле с учетом вида СФ (20), вида решения сопутствующей задачи (15) и Q = 0 в соотношении (14) имеют вид

$$u_{1}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ x_{3}^{r} \Big( \varphi_{1}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) + N_{113}(x_{3})\varphi_{3,1}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big) + N_{113}(x_{3})rx_{3}^{r-1}\varphi_{1}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big],$$

$$u_{2}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ x_{3}^{r} \Big( \varphi_{2}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) + N_{223}(x_{3})\varphi_{3,2}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big) + N_{223}(x_{3})rx_{3}^{r-1}\varphi_{2}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big],$$

$$u_{3}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ x_{3}^{r} \Big( \varphi_{3}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) + N_{311}(x_{3})\varphi_{1,1}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) + N_{322}(x_{3})\varphi_{2,2}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big) + rx_{3}^{r-1}N_{333}(x_{3})\varphi_{3}^{(r)}(x_{1}, x_{2}) \Big].$$

$$(22)$$

Соотношения (22) задают набор приближений к решению исходной задачи (1), выполняющих граничные условия и параметризованных выбором  $C_{IJKL}^0$ : все функции  $\varphi_i^{(r)}(x_1, x_2)$  зависят от выбора  $C_{IJKL}^0$ . Выбрать  $C_{IJKL}^0$  необходимо так, чтобы соотношения (22) задавали поле перемещений, максимально приближенное к точному. Поскольку (22) при переменных  $C_{IJKL}^0$  можно трактовать как кинематически допустимые поля перемещений, воспользуемся вариационным подходом, принимая во внимание, что параметр полей –  $C_{IJKL}^0$ . Приведем только основные выкладки вариационного подхода. Введем обозначения

$$\varepsilon_{IJ}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ A_{IJKL}^{1,r}(x_3)\varphi_{K,L}^{(r)}(x_1, x_2) + A_{IJKL}^{3,r}(x_3)\varphi_{3,KL}^{(r)}(x_1, x_2) \right],$$
  

$$\varepsilon_{I3}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ B_{IK}^{1,r}\varphi_{K}^{(r)} + B_{IL}^{2,r}\varphi_{3,L}^{(r)} + B_{IKL}^{3,r}\varphi_{K,L}^{(r)} \right],$$
  

$$\varepsilon_{33}(\overrightarrow{x}) = \sum_{r=0}^{R} \left[ C^{1,r}\varphi_{3}^{(r)}(x_1, x_2) + C_{PQ}^{2,r}\varphi_{P,Q}^{(r)}(x_1, x_2) \right],$$

где

$$\begin{split} A_{1111}^{1,r} &= A_{1212}^{1,r} = x_3^r + N_{113}(x_3)rx_3^{r-1}, \quad A_{1221}^{1,r} = A_{2222}^{1,r} = x_3^r + N_{223}(x_3)rx_3^{r-1}, \\ A_{1111}^{3,r} &= A_{1212}^{3,r} = x_3^rN_{113}(x_3), \quad A_{1221}^{3,r} = A_{2222}^{3,r} = x_3^rN_{223}(x_3); \\ B_{11}^{1,r} &= rx_3^{r-1}\Big(1 + N_{113,3}(x_3)\Big) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{113}(x_3), \\ B_{22}^{1,r} &= rx_3^{r-1}\Big(1 + N_{223,3}(x_3)\Big) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{223}(x_3); \\ B_{11}^{2,r} &= rx_3^{r-1}\Big(N_{113}(x_3) + N_{333}(x_3)\Big)\Big) + x_3^r\Big(1 + N_{113,3}(x_3)\Big), \\ B_{22}^{2,r} &= rx_3^{r-1}\Big(N_{223}(x_3) + N_{333}(x_3)\Big)\Big) + x_3^r\Big(1 + N_{223,3}(x_3)\Big); \\ B_{111}^{3,r} &= B_{212}^{3,r} = x_3^rN_{311}(x_3), \quad B_{121}^{3,r} &= B_{222}^{3,r} = x_3^rN_{322}(x_3); \\ C_{1,r}^{1,r} &= rx_3^{r-1}\Big(1 + N_{333,3}(x_3)\Big) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{333}(x_3), \\ C_{11}^{2,r} &= rx_3^{r-1}\Big(1 + N_{333,3}(x_3)\Big) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{333}(x_3), \\ C_{11}^{2,r} &= rx_3^{r-1}\Big(1 + N_{333,3}(x_3)\Big) + r(r-1)x_3^{r-2}N_{333}(x_3), \\ \end{array}$$

Первая вариация интеграла по объему, входящая в функционал Лагранжа (12), записанный в терминах поля (22), имеет вид

$$\begin{split} \delta\mathcal{L}_{V} &= \sum_{r=0}^{R} \sum_{t=0}^{R} \int_{0}^{L_{1}} \int_{0}^{L_{2}} \int_{-H/2}^{H/2} \left[ \left( C_{I3K3} B_{KN}^{1,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,V}^{(r)} + B_{IUV}^{3,r} \varphi_{U,V}^{(r)} \right] - \\ - \left[ C_{IJKL} (A_{IJSO}^{1,r} \varphi_{S,OM}^{(r)} + A_{IJSO}^{3,r} \varphi_{3,SOU}^{(r)}) + C_{33KL} (C^{1,r} \varphi_{3,U}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QU}^{(r)}) \right] A_{KLNM}^{1,t} - \\ - \left[ C_{33KL} (A_{KLSO}^{1,r} \varphi_{S,OU}^{(r)} + A_{KLSO}^{3,r} \varphi_{3,SOU}^{(r)}) + C_{3333} (C^{1,r} \varphi_{3,U}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QU}^{(r)}) \right] C_{NU}^{2,t} + \\ + \left[ C_{I3K3} B_{KNM}^{3,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,M}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,VM}^{(r)} + B_{IVU}^{3,r} \varphi_{V,M}^{(r)} \right] \right] \right) \delta\varphi_{N}^{(t)} + \\ + \left( \left[ [C_{IJKL} (A_{IJSO}^{1,r} \varphi_{S,OMF}^{(r)} + A_{IJSO}^{3,r} \varphi_{3,SOMF}^{(r)}) + \\ + C_{33KL} (C^{1,r} \varphi_{3,MF}^{(r)} + C_{PQ}^{2,r} \varphi_{P,QMF}^{(r)}) \right] A_{KLFM}^{3,t} \right] + \\ - \left[ C_{33KL} (A_{KLUV}^{1,r} \varphi_{V,V}^{(r)} + A_{KLUV}^{3,r} \varphi_{3,VN}^{(r)}) + C_{3333} (C^{1,r} \varphi_{3,SOMF}^{(r)} + \\ - \left[ C_{I3K3} B_{KN}^{2,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IVU}^{3,r} \varphi_{3,SOMF}^{(r)} \right] \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} \right] dx_{3} dx_{2} dx_{1} - \\ - \left[ C_{I3K3} B_{KN}^{2,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IV}^{2,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IVU}^{3,r} \varphi_{V,UN}^{(r)} \right] \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} \right] dx_{3} dx_{2} dx_{1} - \\ - \left[ C_{I3K3} B_{KN}^{2,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IVV}^{2,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IVU}^{3,r} \varphi_{V,UN}^{(r)} \right] \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} \right] dx_{3} dx_{2} dx_{1} - \\ - \left[ C_{I3K3} B_{KN}^{2,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IVV}^{2,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IVU}^{3,r} \varphi_{V,UN}^{(r)} \right] \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} \right] dx_{3} dx_{2} dx_{1} - \\ - \left[ C_{I3K3} A_{KN}^{1,t} [B_{IV}^{1,r} \varphi_{V,N}^{(r)} + B_{IVV}^{1,r} \varphi_{3,VN}^{(r)} + B_{IVV}^{3,r} \varphi_{V,UN}^{(r)} \right] \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} + \\ + \left( (X_{2}x_{3}^{t} + X_{2}N_{223} tx_{3}^{t-1} - X_{3,2}x_{3}^{t}N_{322}) \right) \delta\varphi_{2}^{(t)} + \\ \left( (X_{3}x_{3}^{t} + tx_{3}^{t-1}N_{333} - X_{1,1}N_{113}x_{3}^{t} - X_{2,2}N_{223}x_{3}^{t}) \right] \delta\varphi_{3}^{(t)} dx_{3} dx_{2} dx_{1} \right].$$

С учетом того, что выбору подлежат  $C^0_{IJKL} = const$ , точно удовлетворить вариационному уравнению  $\delta \mathcal{L} = 0$  не представляется возможным. Объемные силы  $X_i$  можно записать в терминах  $\varphi_k^{(r)}$ :

$$X_{i} = C_{ijkl}^{0} v_{k,lj} = \sum_{r=0}^{R} \left[ C_{iJKL}^{0} x_{3}^{r} \varphi_{K,LJ}^{(r)} + C_{i3KL}^{0} r x_{3}^{r-1} \varphi_{K,L}^{(r)} + C_{iJK3}^{0} \left( r x_{3}^{r-1} \varphi_{K,J}^{(r)} + x_{3}^{r} \varphi_{3,KJ}^{(r)} \right) + C_{i3K3}^{0} \left( r x_{3}^{r-1} \varphi_{3,K}^{(r)} + r(r-1) x_{3}^{r-2} \varphi_{K}^{(r)} \right) + C_{iJ33}^{0} x_{3}^{r-1} r \varphi_{3,J}^{(r)} + C_{i333}^{0} r(r-1) x_{3}^{r-2} \varphi_{3}^{(r)} \right].$$

Это представление можно подставить в (23) и выбрать  $C_{IJKL}^0$  из соображений минимизации  $(\delta \mathcal{L})^2$ : в этом случае необходимо выбрать  $C_{IJKL}^0 = \langle C_{IJKL} + C_{IJ33}N_{3KL,3} \rangle$ . Таким образом, упругие свойства сопутствующего тела, выбранные в работе [36], совпадают с выбранными из соображений минимизации  $(\delta \mathcal{L})^2$ .

**2.2.2.** Приближение второго порядка. Рассмотрим приближение решения задачи (16) МСФ второго порядка (Q = 1 в соотношении (14)). В этом случае уравнения (8) примут вид

$$[C_{i3mn} + C_{i3m3}N_{kmn,3}]_{,3} = 0,$$
  
$$[C_{i3m3}N_{mkli_{1,3}} + C_{i3mi_{1}}N_{mkl}]_{,3} = C^{0}_{ii_{1}kl} - [C_{ii_{1}m3}N_{mkl,3} + C_{ii_{1}kl}].$$

Из совпадения кинематических и статических граничных условий исходной (16) и сопутствующей (17) задач на границах  $x_1 = 0$ ,  $L_1$  и  $x_2 = 0$ ,  $L_2$  следует, что  $N_{\alpha\alpha\beta\gamma} \equiv 0$ ,  $N_{\alpha\alpha\alpha\beta} \equiv 0$ . Из совпадения статических граничных условий на лицевых поверхностях следует, что

$$C_{i3mn}(\pm h/2) + C_{i3k3}(\pm h/2)N_{kmn,3}(\pm h/2) = C_{i3mn}^{0},$$

$$x_{3} = \pm h/2: \quad N_{1\alpha\alpha 1,3} = N_{2\alpha\alpha 2,3} = N_{3\alpha\alpha 3,3} = -N_{3\alpha\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, 3,$$

$$x_{3} = \pm h/2: \quad N_{\beta\beta 33,3} = -N_{\beta\beta 3}, \quad \beta = 1, 2,$$

$$x_{3} = \pm h/2: \quad N_{1122,3} = 0, \quad N_{2211,3} = 0,$$

$$x_{3} = \pm h/2: \quad C_{33\gamma\gamma}N_{\gamma\gamma3} = -C_{3333}N_{33\gamma\gamma,3}, \quad \gamma = 1, 2,$$

$$x_{3} = \pm h/2: \quad N_{ikli_{1}}\Big|_{x_{3} = \pm h/2} = 0.$$
(24)

СФ второго порядка примут вид

$$N_{\alpha\beta\beta\alpha}(x_{3}) = \int_{-H/2}^{x_{3}} \left[ \frac{1}{C_{\alpha3\alpha3}(z)} \int_{-H/2}^{z} \left( C_{\alpha\alpha\beta\beta}^{0} - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) - C_{\alpha\alpha\beta\beta}(y) \right) dy - N_{3\beta\beta}(z) \right] dz,$$
  

$$-C_{\alpha\alpha33}(y) N_{3\beta\beta,3}(y) dy - N_{3\beta\beta}(z) \right] dz, \quad \alpha = 1, 2,$$
  

$$N_{\alpha\alpha\beta\beta}(x_{3}) = \int_{-H/2}^{x_{3}} \left[ \frac{1}{C_{\alpha3\alpha3}(z)} \int_{-H/2}^{z} \left( C_{\alpha\beta\alpha\beta}^{0} - C_{\alpha\beta\alpha\beta}(y) \right) dy \right] dz, \quad \alpha = 1, 2,$$
  

$$N_{\alpha\alpha33}(x_{3}) = -\int_{-H/2}^{x_{3}} N_{\alpha\alpha3}(y) dy, \qquad N_{33\alpha\alpha}(x_{3}) = -\int_{-H/2}^{x_{3}} \frac{C_{33\alpha\alpha}(y)}{C_{3333}(y)} N_{\alpha\alpha3}(y) dy.$$
  
(25)

Приведенные соотношения уточнены по сравнению с работой [36]. Свойства сопутствующего тела в случае метода второго порядка выбраны из соображений выполнения условий (24) на верхней лицевой поверхности (функции, определенные соотношениями (25), автоматически удовлетворяют граничным условиям на нижней лицевой поверхности): из этих условий подлежат выбору все компоненты тензора модулей упругости сопутствующего тела. Заметим, что в случае исходного тела с кусочно-постоянными упругими свойствами СФ первого порядка – кусочно-линейные функции поперечной координаты, а второго порядка – кусочно-параболические.

Решение тестовой задачи (16) приближается к точному при уменьшении отношения толщины к поперечным размерам пластины. Приведем результаты вычисления приближенных решений задачи (16) для ортотропных исходных пластин, нормализованные технические постоянные которых приведены в табл. 1. Размеры пластины в плане –  $L \times L$ , пластина нагружена поверхностными силами

$$q_3^+(x_1, x_2) = q_0 \sin(\lambda_1 x_1) \sin(\mu_1 x_2),$$
  
$$q_1^+(x_1, x_2) = 0, \quad q_2^{\pm}(x_1, x_2) = 0, \quad q_1^-(x_1, x_2) = 0 \quad , q_3^-(x_1, x_2) = 0.$$

Рассмотрены пластины с отношением толщины к размерам в плане 1/4 и 1/8. В качестве решения сопутствующей задачи использовано высокоточное решение N.J. Pagano [43]; аналогичное решение для исходной задачи использовано в качестве контрольного. Приведем (рис. 1) графики нормализованных значений продольного перемещения  $\hat{u}_1(0, L/2, x_3) = 100H^3 * E_T * u_1(0, L/2, x_3)/q_0L^4$  и напряжения  $\hat{\sigma}_{11} = H\sigma_{11}(L/2, L/2, x_3)/q_0L^2$ .

Табл.	1.	Нормализованные технические постоянные пластины
Table	1.	Normalized engineering constants of the plate

Слой	$\frac{E_1}{E_T}$	$\frac{E_2}{E_T}$	$\frac{E_3}{E_T}$	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\frac{G_{12}}{E_T}$	$\frac{G_{13}}{E_T}$	$\frac{G_{23}}{E_T}$
[H/6, H/2]	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2
[-H/6, H/6]	1	20	1	0.25/20	0.25	0.25/20	0.5	0.2	0.5
[-H/2, -H/6]	50	1	1	0.25	0.25/50	0.25/50	0.5	0.5	0.2

#### Заключение

Исследованы свойства структурных функций – функциональных коэффициентов, входящих в приближенное решение задачи теории упругости для неоднородного тела, построенное методом структурных функций. Данный метод основан на представлении перемещений в неоднородном теле в виде ряда по производным решения задачи теории упругости для однородного тела идентичной геометрии, подвергнутого тем же нагрузкам и закреплениям. Уравнения для определения структурных функций, которые в предыдущих работах были выведены из соображений совпадения уравнений равновесия исходной и сопутствующей задач, в данной работе получены из вариационного принципа Лагранжа. Приведено доказательство эквивалентности двух существующих подходов к вычислению структурных функций, единственности структурных функций для выбранной пары исходной и сопутствующей задач. В дополнение к описанным предыдущими исследователями отмечены следующие свойства структурных функций:

- структурные функции зависят от упругих свойств сопутствующего тела и обращаются в нуль в тривиальном случае,
- структурные функции зависят от граничных условий смешанной краевой задачи,
- структурные функции не зависят от точности решения сопутствующей задачи.



Рис. 1. Результаты вычисления приближенных решений задачи (16) для пластины с упругими свойствами (табл. 1). Верхние рисунки представляют продольные напряжения  $\hat{\sigma}_{11}(L/2, L/2, x_3)$ , нижние – перемещения  $\hat{u}_1(0, L/2, x_3)$ . Левые иллюстрации относятся к пластине с H/L = 1/4, правые – H/8. Сиреневые кривые – МСФ-приближение первого порядка, серые – второго порядка, красные – контрольное решение N.J. Радапо

Fig. 1. Approximate solutions to problem (16) for a plate with elastic properties (see table). The upper graphs display longitudinal stresses  $\hat{\sigma}_{11}(L/2, L/2, x_3)$ , the bottom graphs show displacements  $\hat{u}_1(0, L/2, x_3)$ . The left and right graphs correspond to a plate with a span-to-depth ratio H/L = 1/4 and H/8, respectively. Purple curves – the first-order structural functions method approximation, gray curves – the second-order approximation, red curves – the classical solution by N.J. Pagano

Определено понятие порядка метода – наибольшего порядка производных перемещений в сопутствующем теле, входящих в приближенное решение исходной задачи. Показано, что использование метода порядка Q + 1 оправдано в сочетании с приближенным решением сопутствующей задачи, позволяющим найти производные деформаций порядка Q+1 по всем координатам. В качестве примера применения метода рассмотрена задача о нагружении слоистой прямоугольной пластины, свободно опертой на контуре: приведены приближенные решения этой задачи методом структурных функций первого и второго порядков.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

# Литература

- 1. Горбачев В.И. Вариант метода осреднения для решения краевых задач неоднородной упругости: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Москва, 1991.
- 2. *Горбачев В.И.* Об эффективных коэффициентах упругости неоднородного тела // Изв. РАН. МТТ. 2018. № 4. С. 115–126. https://doi.org/10.31857/S057232990000703-3.
- 3. *Горбачев В.И.* Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в механике неоднородных тел // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 3. С. 114–121. https://dx.doi.org/10.31857/S0572329920030071.
- 4. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
- 5. *Voigt W.* Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper // Ann. Phys. 1889. Bd. 274, H. 12. S. 573–587. https://doi.org/10.1002/andp.18892741206.
- Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle // Z. Angew. Math. Mech. 1929. Bd. 9, H. 1. S. 49–58. https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104.
- 7. *Полилов А.Н., Татусъ Н.А.* Биомеханика прочности волокнистых композитов. 2018. М.: Физ.-матем. лит-ра. 328 с.
- Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11, No 2. P. 127–140. https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7.
- Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta Mettall. 1973. V 21, No 5. P. 571–574. https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3.
- Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1957. V. 241, No 1226. P. 376–396. https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133.
- 11. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 182–192. https://elibrary.ru/item.asp?id=15130462.
- 12. Соляев Ю.О. Самосогласованный метод Кренера для оценки эффективных констант градиентной теории упругости для поликристаллов // XIII Всероссийск. съезд по теор. и прикл. механ.: сб. тез. докл. в 4 т. Санкт-Петербург, 21–25 августа 2023 г. Т. 3. СПб.: Политех-Пресс, 2023. С. 1001–1002.
- Kriven G., Lurie S.A., Thang T.Q., Orekhov A.A. Strength, stiffness and damping properties of whiskerized fiber composites with longitudinal shear // Compos.: Mech., Comput., Appl. 2021.
   V. 12, No 4. P. 1–22. https://doi.org/10.1615/CompMechComputApplIntJ.2021039237.

- 14. Lurie S.A., Kriven G.I. A study of the effective properties of compact bone tissues // Tech. Phys. Lett. 2024. V. 50, No 3. P. 268–275. https://doi.org/10.1134/S1063785024700378.
- 15. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек // Вестн. ТГТУ. 2005. Т. 11, № 2. С. 439–448.
- Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses // J. Appl. Mech. 1986. V. 53, No 3. P. 661–666. https://doi.org/10.1115/1.3171828.
- 17. Маковский С.В. Динамические характеристики модифицированных волокнистых композитов с вискеризованными волокнами: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2020.
- 18. Муйземнек А.Ю., Иванова Т.Н., Карташова Е.Д. Сопоставление результатов экспериментального и расчетного определения эффективных характеристик упругих свойств полимерных слоистых композитов из угле- и стеклотканей // Вестн. ПНИПУ. Механ. 2021. № 2. С. 88–105. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.09.
- 19. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
- Rodríguez-Ramos R., Otero J.A., Cruz-González O.L., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Sabina F.J., Padilla P., Lebon F., Sevostianov I. Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method // Int. J. Solids Struct. 2020. V. 190. P. 281–290. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014.
- Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Димитриенко А.Ю. Моделирование конечных деформаций композиционных материалов на основе универсальных моделей A<sub>n</sub> и метода асимптотического осреднения // Матем. моделир. и числ. методы. 2024. № 2. С. 17–34. https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-2-1734.
- 22. Савенкова М.И. Применение метода осреднения к материалам с физически нелинейными свойствами: автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. Москва, 2013.
- 23. Шешенин С.В., Скопцов К.А. Теория пластин, основанная на методе асимптотических разложений // Матем. моделир. и числ. методы. 2014. № 2. С 49–61.
- 24. Димитриенко Ю.И., Яковлев Д.О. Сравнительный анализ решений асимптотической теории многослойных тонких пластин и трехмерной теории упругости // Инж. журн.: наука и инновации. 2013. № 7 (19). С. 17. https://engjournal.bmstu.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html.
- 25. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин // Матем. моделир. и числ. методы. 2018. № 1 (17). С. 16–40. https://doi.org/10.18698/2309-3684-2018-1-1640.
- 26. Власов А.Н. Сведение уравнения теории упругости со случайными коэффициентами на области с периодической структурой к усредненному уравнению теории упругости с постоянными коэффициентами. Эффективный тензор жесткости // МКМК. 2021. Т. 27, № 3. С. 309–322. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.309 323.02.
- 27. Горбачев В.И. Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел // Вычисл. механ. 1991. № 2. С. 61–76.
- 28. *Горбачев В.И.* Динамические задачи механики композитов // Изв. РАН. Сер. физ. 2011. Т. 75, № 1. С. 117–122.

- 29. Горбачев В.И., Емельянов АН. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 95–107. https://elibrary.ru/item.asp?id=21404928.
- 30. Горбачев В.И. Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2016. № 6. С. 56–72. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-6-56-72.
- 31. Горбачев В.И. Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов // МКМК. 2016. Т. 22, № 4. С. 585–601.
- 32. Горбачев В.И., Гулин В.В. Точные решения некоторых задач теории упругости о равновесии неоднородной по ширине анизотропной полосы // Композ. и нанострукт. 2021. Т. 13, № 3–4. С. 120–126.
- 33. Соляев Ю.О., Горбачев В.И. Сопоставление методов Мори–Танака и Горбачева–Победри в задаче определения эффективных свойств композитов с пьезоактивными сферическими включениями // МКМК. 2019. Т. 25, № 1. С. 57–75. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.01.057 075.05.
- 34. Kabanova L.A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1866–1877. https://doi.org/10.1134/s199508022210016x.
- 35. *Кабанова Л.А.* Сопоставление приближений решения задачи об изгибе линейно-упругой слоистой пластины, полученных методом структурных функций // Чебышевский сб. 2022. Т. 23, № 4 (85). С. 211–232. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232.
- 36. *Кабанова Л.А., Романов А.В.* Сопоставление решений квазистатической задачи о нагружении пластины, построенных методом структурных функций и методом конечных элементов // Чебышевский сб. 2024. Т. 25, № 4. С. 175–196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196.
- 37. Новацкий В. Теория упругости. 1975. М.: Мир. 872 с.
- 38. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. 1998. М.: Наука. 712 с.
- Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. On refined theories of beams, plates, and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26, No 4. P. 546–557. https://doi.org/10.1177/002199839202600405.
- Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton, FL: CRC Press, 2006. 568 p. https://doi.org/10.1201/9780849384165.
- Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking // Arch. Comput. Methods Eng. 2003.
   V. 10, No 3. P. 215–296. https://doi.org/10.1007/BF02736224.
- 42. Васильев В.В. Теория тонких упругих пластин история и современное состояние проблемы // Изв. РАН. МТТ. 2024. № 2. С. 3–39. https://doi.org/10.31857/S1026351924060013.
- Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates // J. Compos. Mater. 1970. V. 4, No 1. P. 20–34. https://doi.org/10.1177/002199837000400102.

### References

- 1. Gorbachev V.I. A homogenization method for boundary value problems of nonhomogeneous elasticity. *Extended Abstract of Dr. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Moscow, 1991. (In Russian)
- Gorbachev V.I. Effective elastic coefficients of an inhomogeneous solids. Mech. Solids, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 454–463. https://doi.org/10.3103/S0025654418040118.
- Gorbachev V.I. Differential equations with variable coefficients in the mechanics of inhomogeneous bodies. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, no. 3, pp. 396–402. http://dx.doi.org/10.3103/S0025654420030061.
- 4. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1984. 336 p. (In Russian)
- Voigt W. Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. Ann. Phys., 1889, Bd. 274, H. 12, S. 573–587. https://doi.org/10.1002/andp.18892741206. (In German)
- Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. Z. Angew. Math. Mech., 1929, Bd. 9, H. 1, S. 49–58. https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104. (In German)
- 7. Polilov A.N., Tatus' N.A. *Biomekhanika prochnosti voloknistykh kompozitov* [Strength Biomechanics of Fibrous Composites]. Moscow, Fiz.-Mat. Lit., 2018. 328 p. (In Russian)
- Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. J. Mech. Phys. Solids, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 127–140. https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7.
- Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Mettall., 1973, vol. 21, no. 5, pp. 571–574. https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3.
- Eshelby J.D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1957, vol. 241, no. 1226, pp. 376–396. https://doi.org/10.1098/rspa.1957.0133.
- Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in gradient elasticity. Mech. Solids, 2010, vol. 45, no. 4, pp. 648–656. https://doi.org/10.3103/S0025654410040138.
- Solyaev Yu.O. Kröner's self-consistent method to determine the effective elasticity constants of polycrystals. XIII Vserossiisk. s"ezd po teor. i prikl. mekhan.: sb. tez. dokl. Sankt-Peterburg, 21-25 avgusta 2023 g. [Proc. XIII All-Russ. Conf. on the Theoretical and Applied Mechanics. St. Petersburg, August 21-25, 2023 ]. Vol. 3. St. Petersburg, Politekh-Press, 2023, pp. 1001-1002. (In Russian)
- Kriven G., Lurie S.A., Thang T.Q., Orekhov A.A. Strength, stiffness and damping properties of viscous fiber composites with longitudinal shear. *Compos.: Mech., Comput., Appl.*, 2021, vol. 12, no. 4, pp. 1–22. https://doi.org/10.1615/CompMechComputAppIIntJ.2021039237.
- Lurie S.A., Kriven G.I. A study of the effective properties of compact bone tissues. Tech. Phys. Lett., 2024, vol. 50, no. 3, pp. 268–275. https://doi.org/10.1134/S1063785024700378.

- 15. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Trends in the development of the theory of elastic multilayer plates and shells. *Vestn. TGTU*, 2005, vol. 11, no. 2, pp. 439–448. (In Russian)
- Murakami H. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. J. Appl. Mech., 1986, vol. 53, no. 3, pp. 661–666. https://doi.org/10.1115/1.3171828.
- 17. Makovskii S.V. Dynamic properties of modified fiber-reinforced composites with viscose fibers. Extended Abstract of Cand. Sci. (Engineering) Diss. Moscow, 2020. (In Russian)
- Muizemnek A.Yu., Ivanova T.N., Kartashova E.D. A comparison of the experimental and numerical data on the effective characteristics of elastic properties in layered polymer composites from carbon and glass fibers. *Vestn. PNIPU. Mekh.*, 2021, no. 2, pp. 88–105. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.2.09. (In Russian)
- 19. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Process Homogenization in Nonhomogeneous Media]. Moscow, Nauka, 1984. 352 p. (In Russian)
- Rodríguez-Ramos R., Otero J.A., Cruz-González O.L., Guinovart-Díaz R., Bravo-Castillero J., Sabina F.J., Padilla P., Lebon F., Sevostianov I. Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method. *Int. J. Solids Struct.*, 2020, vol. 190, pp. 281–290. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014.
- Dimitrienko Yu.I., Karimov S.B., Dimitrienko A.Yu. Modeling of finite deformations of composite materials based on universal A<sub>n</sub> models and the asymptotic averaging method. Mat. Model. Chislennye Metody, 2024, no. 2, pp. 17–34. https://doi.org/10.18698/2309-3684-2024-2-1734. (In Russian)
- 22. Savenkova M.I. Using homogenization method for materials with physically nonlinear properties. Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss. Moscow, 2013. (In Russian)
- Sheshenin S.V., Skoptsov K.A. Plate theory based on the method of asymptotic expansion. Mat. Model. Chislennye Metody, 2014. no. 2, pp. 49–61. (In Russian)
- 24. Dimitrienko Yu.I., Yakovlev D.O. A comparative analysis of asymptotic theory of multilayer composite plates and three-dimentional theory of elastisity. *Inzh. Zh.: Nauka Innovatsii*, 2013, no. 7 (19), p. 17. URL: https://engjournal.bmstu.ru/catalog/mathmodel/technic/899.html. (In Russian)
- Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V. Asymptotic Timoshenko-type theory of thin multilayered plates. Mat. Model. Chislennye Metody, 2018, no. 1 (17), pp. 16–40. https://doi.org/10.18698/2309-3684-2018-1-1640. (In Russian)
- 26. Vlasov A.N. Reduction of the elasticity equation with random coefficients on a domain with periodic structure to a homogenized elasticity equation with constant coefficients. Effective stiffness tensor. Mekh. Kompoz. Mater. Konstr., 2021, vol. 27, no. 3, pp. 309–322. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.03.309\_323.02. (In Russian)
- 27. Gorbachev V.I. Green tensor method for solving boundary value problems of the theory of elasticity for inhomogeneous media. *Vychisl. Mekh.*, 1991, no. 2, pp. 61–76. (In Russian)
- Gorbachev V.I. Dynamic problems of composite mechanics. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys., 2011, vol. 75, no. 1, pp. 110–115. https://doi.org/10.3103/S1062873810121068.

- Gorbachev V.I., Emel'yanov A.N. Homogenization of the equations of the Cosserat theory of elasticity of inhomogeneous bodies. *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 1, pp. 73–82. https://doi.org/10.3103/S0025654414010099.
- Gorbachev V.I. Engineering resistance theory of heterogeneous rods made of composite materials. Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki, 2016, no. 6, pp. 56–72. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-6-56-72. (In Russian)
- Gorbachev V.I. The engineering theory of nonuniform composite plate strain. Mekh. Kompoz. Mater. Konstr., 2016, vol. 22, no. 4, pp. 585–601. (In Russian)
- Gorbachev V.I., Gulin V.V. Exact solutions of some elasticity problems for the equilibrium of an anisotropic band with inhomogeneous width. *Kompoz. Nanostrukt.*, 2021, vol. 13, nos. 3–4, pp. 120–126. (In Russian)
- 33. Solyaev Yu.O., Gorbachev V.I. Comparison of the Mori–Tanaka and Gorbachev–Pobedrya methods in the problem of determining the effective properties of composites with piezoelectric spherical inclusions. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 57–75. https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2019.25.01.057\_075.05. (In Russian)
- 34. Kabanova L.A. The first-order structural functions method solution to the simply supported layered plate bending problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1866–1877. https://doi.org/10.1134/s199508022210016x.
- 35. Kabanova L.A. Comparison of structural functions method approximations of the solution of a linear elastic layered plate bending problem. *Chebyshevskii Sb.*, 2022, vol. 23, no. 4 (85), pp. 211–232. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-4-211-232. (In Russian)
- 36. Kabanova L.A., Romanov A.V. Comparison of approximate solutions to the quasi-static plate loading problem, obtained by the structural functions method and the finite element method. *Chebyshevskii Sb.*, 2024, vol. 25, no. 4, pp. 175–196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2024-25-4-175-196. (In Russian)
- 37. Nowacki W. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (In Russian)
- Rabotnov Yu.N. Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1998. 712 p. (In Russian)
- Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. On refined theories of beams, plates, and shells. J. Compos. Mater., 1992, vol. 26, no. 4, pp. 546–557. https://doi.org/10.1177/002199839202600405.
- Reddy J.N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Boca Raton, FL, CRC Press, 2006. 568 p. https://doi.org/10.1201/9780849384165.
- 41. Carrera E. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2003, vol. 10, no. 3, pp. 215–296. https://doi.org/10.1007/BF02736224.
- Vasiliev V.V. The theory of thin elastic plates history and current state of the problem. Mech. Solids, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 581–604. https://doi.org/10.1134/S0025654424700286.
- Pagano N.J. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. J. Compos. Mater., 1970, vol. 4, no. 1, pp. 20–34. https://doi.org/10.1177/002199837000400102.

## Информация об авторах

**Любовь Александровна Кабанова**, младший научный сотрудник, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова E-mail: *liubov.kabanova@math.msu.ru* 

## Author Information

Liubov A. Kabanova, Junior Researcher, Moscow State University E-mail: *liubov.kabanova@math.msu.ru* 

Поступила в редакцию 6.02.2025 Принята к публикации 12.02.2025 Received February 6, 2025 Accepted February 12, 2025

## ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.424.4

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.267-281

# Язык представления онтологии Единого цифрового пространства научных знаний

# Н.Е. Каленов <sup>⊠</sup>, А.Н. Сотников

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия

 $\bowtie$  nekalenov@mail.ru

### Аннотация

Предложен язык описания онтологии Единого цифрового пространства научных знаний (ЕЦПНЗ), учитывающий специфику пространства, связанную с высокой динамикой появления новых научных результатов, наличием объектов различных видов с многоуровневыми атрибутами и связями. Язык базируется на принципах, заложенных в основу языка Ontology WEB Language, но, в отличие от него, ориентирован на описание многоуровневых атрибутов объектов и именованных связей различной структуры. На основе анализа специфики объектов ЕЦПНЗ осуществлена классификация их атрибутов и связей между ними. Выделено пять типов атрибутов – простые атрибуты первого и второго родов, составные атрибуты первого и второго родов, атрибуты «как связь» и три класса связей – универсальные, квазиуниверсальные и специфические. Каждая связь внутри класса может являться «простой» или составной одного из трех родов. Основой предлагаемого языка являются справочники и словари унифицированной структуры, представленные в нотации JSON. Синтаксис языка базируется на системе уникальных имен, формируемых по фиксированным мнемоническим правилам, позволяющим по структуре имени однозначно определять вид представленного элемента и его связи с конкретным объектом. Использование языка проиллюстрировано примерами.

**Ключевые слова:** пространство научных знаний, связанные данные, онтология, структуризация, атрибуты объектов, формализованный язык

Благодарности. Работа выполнена в Отделении суперкомпьютерных систем и параллельных вычислений НИЦ «Курчатовский институт» в рамках государственного задания.

Для цитирования: Каленов Н.Е., Сотников А.Н. Язык представления онтологии Единого цифрового пространства научных знаний // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 267–281. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.267-281.

## ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.267-281

# A language for the Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology representation

# N.E. Kalenov<sup>⊠</sup>, A.N. Sotnikov

National Research Center "Kurchatov Institute", Moscow, Russia

 $\bowtie$  nekalenov@mail.ru

### Abstract

A language for describing the Common Digital Space of Scientific Knowledge (CDSSK) ontology was proposed. Tailored to the evolving digital knowledge space with its high dynamics in the emergence of new scientific findings and the presence of various types of objects with multilevel attributes and relations, it incorporates the principles of the Ontology WEB Language but focuses on multilevel attributes of objects and named relations of various structures. Based on the analysis of the CDSSK objects, their attributes were classified, as well as the relations between them. Five types of attributes (first- and second-kind simple attributes, first- and second-kind composite attributes, and attributes "as relations") and three classes of relations (universal, quasi-universal, and specific) were singled out. Within the classes, each relation can be "simple" or composite and falls into one of three distinct kinds. The language uses unified guides and dictionaries in JSON format. Its syntax is built around a system of unique names derived according to fixed mnemonic rules, which uniquely identify the type of the element and its relation to a specific object from the name structure. The language applicability was illustrated with examples.

**Keywords:** space of scientific knowledge, linked data, ontology, structuring, attributes of objects, formal language

Acknowledgments. This study was carried out at the Department of Supercomputer Systems and Parallel Computing of the National Research Center "Kurchatov Institute" as part of the state assignment.

For citation: Kalenov N.E., Sotnikov A.N. A language for the Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology representation. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 267–281. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.267-281. (In Russian)

### Введение

Понятие «Единое цифровое пространство научных знаний» (ЕЦПНЗ) было введено в 2019 году [1] как конкретизация понятий «Единое информационное пространство России» [2] и «Единое российское электронное пространство знаний» [3], декларированных ранее во многих документах. Создание ЕЦПНЗ направлено на поддержку научных и образовательных процессов, популяризацию науки, обеспечение сохранности и доступности отечественного научного наследия [4].

ЕЦПНЗ является интегратором существующих научных информационных систем и представляет собой современную цифровую среду, включающую структурированную взаимосвязанную многоаспектную достоверную (проверенную временем) информацию о «сущностях» различного вида, связанных с научными знаниями. В качестве этих сущностей выступают ученые, научные факты и отражающие их публикации, музейные и архивные предметы, базы данных, научные мероприятия и т. д. Для отражения в ЕЦПНЗ той или иной сущности определяется набор ее характеристик и связей с другими сущностями, отвечающий задачам, решаемым на базе пространства. Общие вопросы, связанные с принципами построения и архитектурой ЕЦПНЗ, отражены в [5,6]. Специфика науки обусловливает особенности ЕЦПНЗ, отличающие его от других информационных ресурсов. Научные знания наращиваются постоянно, и этот процесс бесконечен во времени. ЕЦПНЗ должно отражать состояние научных знаний, соответствующее «текущему моменту». Это требует постоянного развития контента ЕЦПНЗ не только в части отражения новых конкретных сущностей с установленным набором характеристик (что присуще всем научным информационным системам), но и в части появления новых групп сущностей с новыми наборами характеристик и видами связей между ними. Кроме того, объединяя информацию из различных источников научных знаний, ЕЦПНЗ должно обеспечивать совместную обработку данных, отражаемых в них. При этом необходимо учитывать, что значения таких атрибутов как количественные или временные характеристики, температура и т.п. могут быть представлены в различных единицах. Это накладывает дополнительные ограничения на структуру данных ЕЦПНЗ и алгоритмы их обработки.

Реализация проекта создания ЕЦПНЗ требует разработки унифицированного алгоритмического аппарата и реализующих его программных средств, обеспечивающих возможность формирования и развитие контента пространства, независимо от тематики и видов сущностей, отражаемых в нем. Исследования в этом направлении ведутся в Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН (ныне Отделение суперкомпьютерных систем и параллельных вычислений НИЦ «Курчатовский институт»), начиная с 2022 года, и отдельные их результаты опубликованы в ряде научных журналов [7–9]. В частности, в [7] предложены и обоснованы общие подходы к проектированию ЕЦПНЗ, базирующиеся на принципах семантического веба. При этом показано, что особенности ЕЦПНЗ, связанные с высокой динамикой появления новых научных результатов, наличием сложных связей между объектами и многоуровневых атрибутов объектов и связей, не позволяют эффективно использовать в явном виде существующие языки представления онтологий, такие как OWL [10], SWRL [11] и SKOS [12]. На ограниченность возможностей этих языков и проблемы с их применением для создания политематических иерархических информационных систем указывали еще десять лет назад ученые из Новосибирска [13]. Однако развитие онтологического подхода за это время происходило исключительно в области наращивания номенклатуры стандартизированных элементов [14] и применения для отдельных отраслей науки и техники [15–17].

В работах [8,9] предложена структура онтологии ЕЦПНЗ и описан реализованный модельный программный комплекс, обеспечивающий диалоговое формирование ее элементов.

Материалы, представленные ниже, являются обобщением и развитием опубликованных ранее результатов. Для описания элементов ЕЦПНЗ предложен формализованный язык, базирующийся на принципах OWL [10], синтаксисе JSON [18] и являющийся развитием подходов, реализованных в JSON Schema [19].

Переходя к описанию предлагаемого языка, рассмотрим ряд основных понятий, связанных с реализацией ЕЦПНЗ.

### 1. Элементы ЕЦПНЗ

Основным элементом ЕЦПНЗ является объект, представляющий собой совокупность данных, отражающих определенную сущность. Объект характеризуется набором атрибутов, каждый из которых для данного объекта может принимать одно или несколько значений или не иметь значений совсем.

Соответственно, атрибуты априори декларируются как обязательные или факультативные и как уникальные или множественные. Набор атрибутов каждого объекта определяется, исходя из роли объекта в ЕЦПНЗ. Обязательным атрибутом всех объектов является наименование (фамилия или имя для персон).

Объекты, характеризуемые одинаковыми наборами атрибутов, объединяются в классы. Классы объектов подразделяются на предметные и вспомогательные. Предметные классы отражают такие «материальные сущности», как персоны, публикации, музейные предметы и т. п., результаты научной деятельности – постулаты, теоремы, научные открытия и т. п., а также события, связанные с наукой. Вспомогательные классы включают объекты, необходимые для обработки данных в среде семантического веба. Они включают такие объекты, как единицы измерения, временные характеристики, форматы данных и т. п. Как предметные, так и вспомогательные классы объектов могут создаваться по мере необходимости. Каждый класс входит в одно из подпространств (ПП) ЕЦПНЗ. Предметные классы объектов, относящихся к одному научному направлению, объединяются в тематические ПП. Вспомогательные классы, а также предметные классы объектов мультидисциплинарного характера образуют универсальное ПП.

Объекты ЕЦПНЗ или значения их атрибутов могут быть попарно связаны различными связями. Каждая связь относится к одному из классов связей, входящих в ПП (см. ниже).

Единство пространства определяется общим языком представления онтологии различных его элементов и унифицированными алгоритмами реализации процессов наполнения и обработки его контента.

Каждый элемент ЕЦПНЗ (подпространство, класс, объект, атрибут, значение атрибута, связь, значение связи) имеет свой уникальный идентификатор URN (Unified Resource Name), однозначно определяющий конкретный элемент в пространстве. URN представляет собой буквенно-цифровое выражение, факультативно содержащее точку и нижнее подчеркивание, и имеет унифицированную структуру для каждого вида элементов.

URN подпространства состоит из двух буквенно-цифровых символов, URN класса объектов – из четырех, первые два из которых совпадают с URN подпространства, к которому относится класс.

URN объекта состоит из URN класса и отделенного от него точкой целого числа – порядкового номера объекта в данном классе.

URN атрибута объекта состоит из латинской буквы A, URN объекта, следующего за ней после символа «нижнее подчеркивание», и через точку порядкового номера атрибута объектов данного класса.

URN значения атрибута состоит из латинской буквы N, URN атрибута, следующего за ней после символа «нижнее подчеркивание», и через точку порядкового номера значения данного атрибута.

Аналогично строятся URN связей.

Перечень и форматы представления элементов ЕЦПНЗ, связей между ними и их значениями содержатся в соответствующих справочниках. Структура справочников является унифицированной для элементов определенного вида и определяется справочником ЕЦПНЗ (см. ниже).

Значения атрибутов объектов и связей представляются в виде элементов словарей, каждый из которых суть кортеж размерности 2, записанный в нотации JSON [19].

В качестве значения атрибута объекта или связи могут выступать любой текст, число, дата или URN другого значения.

Выделены два типа словарей значений атрибутов – статический и динамический. Статические словари содержат «стандартные» значения элементов (например, названия ученых степеней, рубрики классификационных систем, наименования единиц измерения и т.п.), формируются в основном однократно и дополняются в исключительных случаях пользователями, имеющими специальный статус. Динамические словари наполняются по мере формирования контента пространства. В них хранятся наименования конкретных объектов и их свойства.

Полная информация об объектах ЕЦПНЗ отражается в «словаре объектов», каждый элемент которого представлен в виде записи в структуре JSON, содержащей перечень URN значений атрибутов и связей, относящихся к данному объекту.

Таким образом, совокупность справочников и словарей содержит полную структурированную информацию об объектах ЕЦПНЗ и их связях.

Структура всех типов справочников и словарей приведена в разделе 4.

### 2. Классификация атрибутов объектов

Атрибуты объектов подразделяются на следующие виды в зависимости от структуры их значений.

Простые атрибуты первого рода. Их значения являются литералами любого вида (текст, число, формула, URL и т.п.) и хранятся в словарях, непосредственно связанных с данным классом объектов. К простым атрибутам относятся, например, фамилия персоны, название и текст аннотации книги, ученая степень персоны и т.п.

Простые атрибуты второго рода. Их значения представлены значениями атрибутов объектов других классов. Примерами таких атрибутов являются дата, относящаяся к тому или иному событию (представляется значением атрибута объекта класса «Временные характеристики» универсального ПП), место рождения персоны или город как элемент адреса (может быть представлен значением атрибута объекта класса «Административные единицы» ПП «География). Составной атрибут первого рода. Значение атрибута представляет собой несколько связанных литералов, являющихся значениями атрибутов объектов одного из вспомогательных классов. Примером может служить любой атрибут, значение которого представлено числом и единицей измерения. Это могут быть размеры объекта или величина его скорости (конкретная пара которых представлена объектом вспомогательного класса «Количественные характеристики»), длительность того или иного периода или процесса (значение представлено объектом вспомогательного класса «Временные характеристики»).

Составной атрибут второго рода. Значение атрибута представляет собой иерархическую цепочку значений различных характеристик, относящихся к объектам разных классов. Примеры – численность населения административных единиц, приведенная за определенный год, расход воды в водопаде в определенное время года и т. п.

Атрибут как связь. Этот вид атрибутов используется в случаях, когда в интерфейсе ввода удобнее запрашивать не формирование связи, а атрибут, фактически представляющий собой связь определенного класса. Пример – ввод данных об авторе, оппонентах, научных руководителях диссертаций. В онтологии они отражаются как значения связи диссертации с персонами, но в интерфейсе ввода их целесообразнее определять как атрибуты данной диссертации. Введение такого вида атрибутов позволяет исключить дублирование и существенно сократить объем диалога при вводе данных.

### 3. Классификация связей

Существенным отличием онтологии ЕЦПНЗ от онтологий, описываемых с помощью OWL и RDFS [20], является введение нескольких классов и типов связей между объектами или их атрибутами. Подпространство связей ЕЦПНЗ включает три класса [9]:

- универсальная связь,
- квазиуниверсальная связь,
- специфическая связь.

Каждая конкретная связь может являться «простой» или составной одного из трех родов.

Простые связи представляют собой аналоги триплетов RDF [20] и содержат указания на «субъект» и «объект» связи.

Составные связи первого рода содержат дополнительно к указаниям «субъекта» и «объекта» значение атрибута связи, приведенное в соответствующих словарях, определяемых справочником атрибутов связи. Примеры: специфическая связь персоны с научным открытием или публикацией (роль в создании), квазиуниверсальная связь научного результата с классификационной системой и т. п.

Составные связи следующих родов предусматривают иерархию значений атрибутов связи. При этом возможны два варианта – атрибуты более низкого уровня относятся ко всем значениям атрибутов предыдущего уровня (составная связь второго рода) и каждый атрибут верхнего уровня имеет свои атрибуты следующего уровня (составная связь третьего рода). Пример первого варианта: связь описывает работу сотрудника в данной организации и указывает на должность и даты начала и окончания работы в этой должности. Пример второго варианта: связь описывает роль данной персоны в данной организации, и в зависимости от этой роли выбираются атрибуты значения связи.

Информация о типах конкретных атрибутов и связей содержится в их справочниках в виде URN объекта класса «Форматы».

## 4. Структура справочников и словарей элементов ЕЦПНЗ

Структура справочников и словарей элементов ЕЦПНЗ каждого вида представлена в файле CDSSK.json в виде массива данных, каждый из которых включает ключ вида CDSSK.i (i = 1, 2, ..., n), где n – число справочников и словарей различной структуры, тип справочника или словаря с ключом «type», имя файла (или алгоритм его формирования), содержащего конкретные справочники элементов данного вида с ключом «GuideName», алгоритм формирования имен словарей с ключом «Dicname», описание структуры справочника или словаря с ключом «ref», пример соответствующего справочника или словаря с ключом «example».

В настоящее время в процессе моделирования различных составляющих ЕЦПНЗ выделено десять типов справочников. По мере развития ЕЦПНЗ может появиться необходимость добавления нового типа атрибута или связи со своей структурой. Для включения в онтологию пространства этой структуры необходимо будет сформировать ее справочник и добавить информацию о нем в файл CDSSK с ключом CDSSK. n + 1.

Ниже приведены сформированные в настоящее время элементы справочника CDSSK.

{"CDSSK.1": [{"type": "справочник подпространств", "guidename": "Subs",

"ref": "Справочник подпространства представляет собой кортеж размерности 3 с элементами:

• Title – наименование подпространства;

• PrefSp – идентификатор (два символа);

• Descr – описание (пояснительный текст).

Справочники подпространств размещаются в JSON-файле "SUBS" в виде массивов с ключами SUBS.1, SUBS.2, ..., SUBS.*n*",

"example": [{"SUBS.1": [{"Title": "Универсальное ПП", "PrefSp": "UN", "Descr": "подпространство, включающее классы объектов, не связанные непосредственно с конкретной научной тематикой, в том числе универсальные справочные данные и другие вспомогательные классы."}]]]]].

{"CDSSK.2": [{"type": "справочник классов",

"guidename": "Class",

"ref": "Справочник класса представляет собой кортеж размерности 4 с элементами:

• Title – наименование класса;

○ PrefCl – четырехсимвольный идентификатор класса, первые два символа которого совпадают с префиксом ПП, к которому относится класс, а вторые два – префикс класса – произвольные буквенно-цифровые символы, идентифицирующие класс данного вида в ЕЦПНЗ; например, класс публикации может быть определен как для универсального ПП, так и для различных тематических ПП с одним и тем же префиксом «PB». В первом случае он будет иметь идентификатор UNPB, в ПП «География» с префиксом «39» – «39PB», в ПП «Информатика» с префиксом «20» – «20 PB» и т. д.

• GuideURN – идентификатор (URN) справочника атрибутов объектов данного класса;

• Descr – описание (пояснительный текст).

Справочники классов, принадлежащих к ПП с идентификатором ij размещаются в JSON-файле "Classij" (в виде массивов с ключами Classij.1, Classij.2, ..., Classij.n",

"example": [{"ClassUN.1": [{"Title": "единицы измерения", "PrefCl": "UNMU", "GuideURN": "A\_UNMU", "Descr": "объектами класса являются стандартные единицы измерения различных физических величин – их полные и сокращенные обозначения, предметы измерения, описания"}]]]]}.

{"CDSSK.3": [{"type": "справочник атрибутов объектов",

"guidename": "URN справочника атрибутов данного класса, формируется в форме А\_префикс класса",

"ref": "Справочник атрибутов объектов представляет собой кортеж размерности 4 с элементами:

• Name – наименование атрибута;

• Format – формат представления значений атрибута (URN соответствующего элемента словаря объектов класса «Форматы данных»);

• DicURN – URN словаря значений данного атрибута;

• DicType – тип словаря значений атрибута (S – статический, D – динамический).

В зависимости от формата данного атрибута URN словаря значений может указывать на словарь значений атрибутов объектов (для простых атрибутов), на словарь объектов (для составных атрибутов) или на словарь связей (для атрибутов типа «связь»).

Справочники атрибутов объектов класса, имеющего префикс «URNa» размещаются в JSON-файле "A\_URNa" в виде массивов с ключами A\_URNa.1, A\_URNa.2, ..., A\_URNa.k", где k – количество различных атрибутов объектов данного класса",

"example": [{"A\_UNMU.1": [{"Name": "наименование единицы измерения", "Format": "UNFT.i" // данный объект класса «форматы», указывает, что атрибут текстовый, обязательный, уникальный, "DicURN": "N\_A\_UNMU.1", "DicType": "S"}]]]].

{"CDSSK.4": [{"type": "справочник универсальных связей",

"guidename": "REUN",

"ref": "Справочник универсальной связи представляет собой кортеж размерности 4 с элементами:

• Name – наименование связи;

• Format – URN объекта класса «Форматы», определяющего данную связь;

• GuideURN – URN справочника атрибутов связи (для составной связи);

• Descr – описание связи.

Справочники универсальных связей размещаются в JSON-файле "REUN" в виде массивов с ключами REUN.1, REUN.2, ..., REUN.*p*, где *p* – количество различных универсальных связей в ЕЦПНЗ",

"example": [{"REUN.2": [{"Name": "является частью, входит в состав", "Format": "UNFT. j" // простая связь, "Descr": "связь используется в случаях, когда один объект входит в состав другого объекта, без указания даты и типа вхождения, например, соотношение индексов классификационных систем, вхождение статьи в сборник и т. п."}]}, {"REUN.3": [{"Name": "временно является частью", "Format": "UNFT. k" // составная связь первого рода, "GuideURN": "A\_REUN.3", "Descr": "связь используется в случаях, когда один объект временно входил в состав другого объекта, с указанием дат вхождения"}]]}]}]. {"CDSSK.5": [{"type": "справочник квазиуниверсальных связей",

"guidename": "REQU",

"ref": "Справочник квазиуниверсальной связи представляет собой кортеж размерности 5 с элементами:

• Name – наименование связи;

• Format – URN объекта класса «Форматы», определяющего данную связь;

• OBJURN – URN класса, выступающего в роли «объекта» связи;

• GuideURN – URN справочника атрибутов связи (для составной связи);

• Descr – описание связи.

Справочники квазиуниверсальных связей размещаются в JSON-файле "REQU" в виде массивов с ключами REQU.1, REQU.2, ..., REQU.r, где r – количество различных квазиуниверсальных связей в ЕЦПНЗ",

"example": [{"REQU.1": [{"Name": "классификационный индекс объекта", "Format": "UNFT.k" // простая квазиуниверсальная связь, "OBJURN": "UNTZ" // URN класса «Тезаурусы», "Descr": "связь указывает на индекс определенной классификационной системы, представляющий собой объект класса «тезаурусы»"]]}]]}.

{"CDSSK.6": [{"type": "справочник специфических связей",

"guidename": "RESP",

"ref": "Справочник специфической связи представляет собой кортеж размерности 6 с элементами:

• Name – наименование связи;

• Format – URN объекта класса «Форматы», определяющего данную связь;

• SBJURN – URN класса, выступающего в роли «субъекта» связи (для классов конкретного ПП указывается полный четырехсимвольный URN; если «субъектом» связи могут быть объекты одинаковых классов, но входящих в разные ПП, то в качестве URN «субъекта» указываются четыре символа, первые их которых суть \*\*, а последние – префикс класса;

• OBJURN – URN класса, выступающего в роли «объекта» связи (для обозначения возможности использования в связи одинаковых классов, принадлежащих к разным ПП, используется то же обозначение, что и для «субъекта» связи);

• GuideURN – URN справочника атрибутов связи (для составной связи);

• Descr – описание связи.

Справочники специфических связей размещаются в JSON-файле "RESP" в виде массивов с ключами RESP.1, RESP.2, ..., RESP.s, где *s* – количество различных специфических связей в ЕЦПНЗ",

"example": [{"RESP.1": [{"Name": "связь публикации с персоной", "Format": "UNFT.m" // составная специфическая связь первого рода, "SBJURN": "\*\*PB", "OSBJURN": "\*\*PS" // PB и PS префиксы классов публикации и персоны соответственно, "GuideURN": "A\_RESP.1", "Descr": "связь указывает на роль персоны к подготовке публикации"}]}]]].

{"CDSSK.7": [{"type": "справочник атрибутов связей",

"GuideName": "URN справочника формируется в виде A\_URNr, где URNr – идентификатор данной связи; для составных многоуровневых связей URN справочника атрибутов *k*-го уровня (URNk) формируется в виде A\_N\_URNk-1.*n*, где URNk-1 – идентификатор справочника атрибутов предыдущего уровня, а N\_URNk-1 – URN словаря значений атрибута этого справочника под номером *n*", "ref": "Справочник атрибутов связей представляет собой кортеж размерности 6 с элементами:

• Name – наименование атрибута;

 Format – URN объекта класса «Форматы», определяющего тип данного атрибута и вид представления его значений;

• DicURN – URN словаря значений данного атрибута;

• DicType – тип словаря значений атрибута (S – статический, D – динамический);

• Levels – максимальное количество уровней вложения значений данного атрибута (для простых атрибутов указывается «0»);

• Descr – описание атрибута.

Справочники атрибутов связей размещаются в JSON-файлах с именами, аналогичными по структуре справочникам атрибутов объектов",

"example": [{"A\_RESP.1": [{"A\_RESP.1.1": "Name": "роль персоны в создании произведения", "Format": "UNFT. n" // простой текстовый атрибут, "DicURN": "N\_A\_RESP.1.1": "DicType": "S", "Levels": "0", "Descr": "указываются такие персоны, как автор, составитель, переводчик, художник"}], [{"A\_RESP.1.2": "Name": "роль персоны в воплощении произведения", "Format": "UNFT. n" // простой текстовый атрибут, "DicURN": "N\_A\_RESP.1.2": "DicType": "S", "Levels": "0", "Descr": "указываются персоны, связанные с данным воплощением произведения, такие как редактор, спонсор, автор предисловия и т. п."}]}]]].

{"CDSSK.8": [{"type": "словарь значений атрибутов объектов и связей",

"DicName": "URN словаря формируется в виде N\_URNa, где URNa – идентификатор данного атрибута; для составных атрибутов URN словаря значений атрибута уровня *n* (URN*n*) формируется в виде N\_A\_URN*n*-1, где URN*n*-1 – идентификатор словаря значений атрибутов предыдущего уровня",

"ref": "Элемент словаря значений атрибутов представляет собой кортеж размерности 2 с элементами «ключ»: «значение». В качестве ключа выступает DicName словаря с отделенным от него точкой порядковым номером элемента. В качестве «значения» может выступать литерал, URN элемента словаря другого атрибута, URN элемента словаря вспомогательного объекта или URN элемента словаря одной из связей. Вид значений каждого словаря определяется элементом «Format», указанным в справочнике данного атрибута",

"example": [{"N\_A\_UNMU": [{"N\_A\_UNMU.1": [{"N\_A\_UNMU.1.1": "метр", "N\_A\_UNMU.1.2": "секунда", "N\_A\_UNMU.1.3": "килограмм" // далее могут идти наименования других величин}]}, {"N\_A\_UNMU.2": [{"N\_A\_UNMU.2.1": "м.", "N\_A\_UNMU.2.2": "с.", "N\_A\_UNMU.2.3": "кг" // далее могут идти сокращенные наименования других величин}]}],

"example": [{"N\_A\_RESP.1": [{"N\_A\_RESP.1.1": [{"N\_A\_RESP.1.1.1": "автор", "N\_A\_RESP.1.1.2": "составитель", "N\_A\_RESP.1.1.3": "художник"}]},

{"N\_A\_RESP.1.2": [{"N\_A\_RESP.1.2.1": "редактор", "N\_A\_RESP.1.2.2": "автор предисловия", "N\_A\_RESP.1.2.3": "переводчик"}]}]}]}].

{"CDSSK.9": [{"type": "словарь связей",

"DicName": "URN словаря связи формируется в виде  $D_URNr$ , где URNr - идентификатор связи (значение ключа в ее справочнике, состоящее из префикса класса связи ичерез точку ее порядкового номера)", "ref": "Словарь связи представляет собой кортеж размерности 2, записываемый в нотации JSON, с элементами «ключ»: «значение». В качестве ключа выступает URN данной связи с отделенным от него точкой порядковым номером конкретной связи.

Значения простой связи записываются в виде:

SBJURN.*i*; OBJURN.*j*,

где SBJURN.*i* и OBJURN.*j* – идентификаторы «субъекта» и «объекта» конкретной связи. Значения составной связи первого рода записываются в виде:

SBJURN.i; OBJURN.j = URN ijk,

где URN *ijk* – идентификатор значения атрибута связи, относящегося к данной паре элементов (если связь принимает несколько значений, элемент словаря связи повторяется необходимое число раз с соответствующими значениями).

Значения составных связей второго и третьего родов записываются в виде иерархических цепочек идентификаторов соответствующих значений атрибутов связи, при этом уровни иерархии отделяются знаком «=»:

SBJURN.i; OBJURN.j = URNijk = URNijkl ....

Вид значений конкретного словаря связи определяется элементом «Format», указанным в справочнике данной связи",

"example": [{"RESP.1.1": "39PB.2; UNPS.4=N\_A\_RESP.1.1.1", "RESP.1.2": "39PB.2; UNPS.4=N\_A\_RESP.1.1.1", "RESP.1.1.1",

"RESP.1.3": "39PB.2; 39PS.8=N\_A\_RESP.1.2.1" // связь говорит о том, что автором и художником публикации под номером 2, отраженной в ПП «География», является персона, отраженная в универсальном ПП под номером 4, а редактором публикации является персона, отраженная в ПП «География» под номером 8}]]].

{"CDSSK.10": [{"type": "словарь объектов",

"DicName": "Каждому классу объектов соответствует словарь (JSON-файл) с именем D\_URNc, где URNc – идентификатор данного класса",

"ref": "Элемент словаря, представляющий собой пару «ключ – значение» в нотации JSON, содержит всю информацию, относящуюся к конкретному объекту данного класса. В качестве ключа выступает URNc с отделенным от него точкой порядковым номером объекта; в качестве «значения» – последовательность URN значений атрибутов объекта и URN значений связей, в которых участвует объект; элементы последовательности отделяются точкой с запятой",

"example": {"UNPS.4": "N A UNPS.1.3; N A UNPS.2.5; N A UNPS.3.5;

N\_A\_UNPS.6.8; RESP.1.1; RESP.1.2" // в этом примере содержится информация о фамилии, имени и отчестве персоны, имеющей идентификатор UNPS.4, представленная в соответствующих словарях (первые три элемента «значения»), и указание на связи данной персоны с публикацией (четвертый и пятый элементы); обращение к элементам связи позволяет определить, что персона является автором и художником данной публикации}}].

### Заключение

Предлагаемый язык представления онтологии ЕЦПНЗ позволяет унифицировать алгоритмы ввода и обработки разнородных объектов, связанных различными именованными связями, добавлять новые классы объектов с новыми типами атрибутов и связей, в том числе иерархических, что характерно для отражения постоянно развивающихся научных знаний. Как указано выше, в процессе исследований, связанных с формированием ЕЦПНЗ и моделированием его отдельных составляющих, была разработана версия диалогового программного комплекса, реализующего элементы предложенного языка в части формирования справочников всех элементов [9]. Программный комплекс был успешно использован при интеграции в ЕЦПНЗ коллекции Государственного биологического музея им. К.Э. Тимирязева [21], состоящей из более чем двухсот муляжей различных видов грибов в имитации природной обстановки.

Модель, реализованная на этом примере, включает атрибуты грибов как биологических объектов со ссылками на их описания в энциклопедиях, атрибуты коллекции как музейного объекта, атрибуты музея как организации, атрибуты персон, связанных с формированием коллекции, а также 3D-модели муляжей как объектов класса «мультимедиа», связи различного рода между объектами. В настоящее время ведется разработка универсального программного комплекса, обеспечивающего диалоговое формирование контента ЕЦПНЗ.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

### Литература

- 1. Антопольский А.Б., Каленов Н.Е., Серебряков В.А., Сотников А.Н. О едином цифровом пространстве научных знаний // Вестн. РАН. 2019. Т. 89, № 7. С. 728–735. https://doi.org/10.31857/S0869-5873897728-735.
- 2. Васильева М.М. Формирование единого информационного пространства России в условиях глобализации // Вестн. МГЛУ. 2013. № 24. С. 92–104.
- 3. *Вершинин А.П.* Единое российское электронное пространство знаний: вопросы права // Унив. кн. 2016. № 10. С. 31–33.
- Савин Г.И. Единое цифровое пространство научных знаний: цели и задачи // ИРР. 2020. № 5. С. 3–5. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-3-5.
- 5. *Каленов Н.Е., Серебряков В.А.* Об онтологии Единого цифрового пространства научных знаний // ИРР. 2020. № 5. С. 10–12. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-10-12.
- 6. Каленов Н.Е., Сотников А.Н. Архитектура Единого цифрового пространства научных знаний // ИРР. 2020. № 5. С. 5–8. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-5-8.
- 7. *Каленов Н.Е., Сотников А.Н.* Единое цифровое пространство научных знаний как интегратор политематических информационных ресурсов // Докл. РАН. Матем., информ., проц. управл. 2024. Т. 515, № 1. С. 114–123. https://doi.org/10.31857/S2686954324010177.
- Kalenov N.E., Sobolevskaya I.N., Sotnikov A.N. Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology structurization // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 7. P. 2738–2748. https://doi.org/10.1134/S1995080223070235.
- 9. Власова С.А., Каленов Н.Е. Диалоговый программный комплекс формирования онтологии Единого цифрового пространства научных знаний // Прогр. прод. и сист. 2024. Т. 37, № 4. С. 514–523. https://doi.org/10.15827/0236-235X.148.514-523.
- Web Ontology Language (OWL). URL: https://www.w3.org/OWL/ (дата обращения: 13.05.2025).

- 11. SWRL: A Semantic Web Rule Language Combining OWL and RuleML. URL: https://www.w3.org/Submission/SWRL/ (дата обращения: 13.05.2025).
- 12. SKOS: Simple Knowledge Organization System. URL: https://www.w3.org/TR/skos-reference/ (дата обращения: 13.05.2025).
- Марчук А.Г., Марчук П.А. Базовая онтология неспецифических сущностей ВОΝЕ и ее использование для построения информационных систем // Вестн. СибГУТИ. 2014. Т. 28, № 4. С. 118–128.
- 14. Концептуальная эталонная модель CIDOC CRM. Пер. с англ. А.Б. Антопольского, Д.Ю. Гука. М.: ИНИОН, 2024. 398 с.
- 15. *Муртазин Т.М., Назаров Т.Т.* Онтологии и семантические технологии при разработке систем диагностики неисправностей оборудования технологических производств // Автомат. проц. управл. 2024. Т. 76, № 2. С. 66–74.
- 16. Шишенков М.А., Чужинов Е.С. Онтологическое описание автоматизированных систем управления технологическим процессом // Автомат. и информ. ТЭК. 2025. Т. 618, № 1. С. 15–24.
- 17. *Напольских Д.Л.* Представление экономической концепции кластера с помощью специализированной онтологии // Прогр. прод. и сист. 2024. Т. 37, № 2. С. 155–163.
- 18. Introducing JSON. URL: https://www.json.org/json-en.html (дата обращения: 13.05.2025).
- 19. JSON Schema. URL: https://ajv.js.org/json-schema.html (дата обращения: 13.05.2025).
- 20. W3C Working Draft 24 February 2025. RDF 1.2 Schema. URL: https://www.w3.org/TR/rdf12-schema/ (дата обращения: 13.05.2025).
- Власова С.А., Каленов Н.Е., Кириллов С.А., Соболевская И.Н., Сотников А.Н. Естественнонаучные коллекции как элемент Единого Цифрового Пространства Научных Знаний // Науч. сервис в сети Интернет: тр. XXVI Всероссийск. науч. конф. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2024. С. 39–49. https://doi.org/10.20948/abrau-2024-13.

### References

- Antopolskii A.B., Kalenov N.E., Serebryakov V.A., Sotnikov A.N. Common digital space of scientific knowledge. Vestn. Ross. Akad. Nauk, 2019, vol. 89, no. 7, pp. 728–735. https://doi.org/10.31857/S0869-5873897728-735. (In Russian)
- 2. Vasil'eva M.M. The development of a common information space in Russia amid globalization. *Vestn. MGLU*, 2013, no. 24, pp. 92–104. (In Russian)
- 3. Vershinin A.P. Russia's common digital space of knowledge: Legal issues. *Univ. Kn.*, 2016, no. 10, pp. 31–33. (In Russian)
- 4. Savin G.I. Common Digital Space of Scientific Knowledge: Aims and tasks. *Inf. Resur. Ross.*, 2020, no. 5, pp. 3–5. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-3-5. (In Russian)
- Kalenov N.E., Serebryakov V.A. Ontology of the common digital space of scientific knowledge. Inf. Resur. Ross., 2020, no. 5, pp. 10–12. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-10-12. (In Russian)
- Kalenov N.E., Sotnikov A.N. The architecture of the Common Digital Space of Scientific Knowledge. Inf. Resur. Ross., 2020, no. 5, pp. 5–8. https://doi.org/10.51218/0204-3653-2020-5-5-8. (In Russian)
- Kalenov N.E., Sotnikov A.N. Common Digital Space of Scientific Knowledge as an integrator of polythematic information resources. *Dokl. Math.*, 2024, vol. 109, no. 1, pp. 93–99. https://doi.org/10.1134/S106456242470176X.
- Kalenov N.E., Sobolevskaya I.N., Sotnikov A.N. Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology structurization. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 7, pp. 2738–2748. https://doi.org/10.1134/S1995080223070235.
- Vlasova S.A., Kalenov N.E. Dialogue software complex for forming Common Digital Space of Scientific Knowledge ontology. *Program. Prod. Sist.*, 2024, vol. 37, no. 4, pp. 514–523. https://doi.org/10.15827/0236-235X.148.514-523. (In Russian)
- 10. Web Ontology Language (OWL). URL: https://www.w3.org/OWL/.
- 11. SWRL: A Semantic Web Rule Language Combining OWL and RuleML. URL: https://www.w3.org/Submission/SWRL/.
- 12. SKOS: Simple Knowledge Organization System. URL: https://www.w3.org/TR/skos-reference/.
- Marchuk A.G., Marchuk P.A. Basic ontology of non-specific entities (BONE) and its use for building information systems. *Vestn. SibGUTI*, 2014, vol. 28, no. 4, pp. 118–128. (In Russian)
- 14. Kontseptual'naya etalonnaya model' CIDOC CRM [Definition of the CIDOC Conceptual Reference Model]. Antopolskii A.B., Guk D.Yu. (Trans.). Moscow, INION, 2024. 398 p. (In Russian)
- Murtazin T.M., Nazarov T.T. Ontologies and semantic technologies in the development of fault diagnosis for industrial process equipment. Avtom. Protsessy Upr., 2024, vol. 76, no. 2, pp. 66–74. (In Russian)
- 16. Shishenkov M.A., Chuzhinov E.S. Ontology-based description for automated process control systems. Avtom. Inf. TEK, 2025, vol. 618, no. 1, pp. 15–24. (In Russian)
- 17. Napol'skikh D.L. Developing a specialized ontology to represent the economic concept of a cluster. *Program. Prod. Sist.*, 2024, vol. 37, no. 2, pp. 155–163. (In Russian)
- 18. Introducing JSON. URL: https://www.json.org/json-en.html.
- 19. JSON Schema. URL: https://ajv.js.org/json-schema.html.
- W3C Working Draft 24 February 2025. RDF 1.2 Schema. URL: https://www.w3.org/TR/rdf12-schema/.
- Vlasova S.A., Kalenov N.E., Kirillov S.A., Sobolevskaya I.N., Sotnikov A.N. Natural science collections as an element of the Common Digital Space of Scientific Knowledge. *Nauch. servis v seti Internet: tr. XXVI Vserossiisk. nauch. konf.* [Scientific Services & Internet: Proc. XXVI All-Russ. Sci. Conf.]. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha, 2024, pp. 39–49. https://doi.org/10.20948/abrau-2024-13. (In Russian)

#### Информация об авторах

**Николай Евгеньевич Каленов**, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

E-mail: nekalenov@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-5269-0988

Александр Николаевич Сотников, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

E-mail: asotnikov@jscc.ru

ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-0137-1255

## Author Information

Nikolay E. Kalenov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Chief Researcher, National Research Center "Kurchatov Institute"

 $\hbox{E-mail:} \quad nekalenov@mail.ru$ 

ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-5269-0988

Alexander N. Sotnikov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Chief Researcher, National Research Center "Kurchatov Institute"

E-mail: asotnikov@jscc.ru

ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-0137-1255

Поступила в редакцию 2.04.2025 Принята к публикации 3.06.2025 Received April 2, 2025 Accepted June 3, 2025

# ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310

# Формы потери устойчивости и разрушения тест-образцов из волокнистых композитов со структурой $[0^\circ]_s$ при испытаниях на осевое сжатие. Теория и эксперимент

В.Н. Паймушин<sup>1</sup><sup>∞</sup>, С.А. Холмогоров<sup>1</sup>, М.В. Макаров<sup>1,2</sup>, Н.В. Левшонкова<sup>1</sup>, М.А. Шишов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия

<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

⊠ vpajmushin@mail.ru

#### Аннотация

Проведен анализ построенных аналитических решений задач о макромасштабных изгибносдвиговых и чисто поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости (ФПУ) тест-образцов из волокнистых композитов со структурой  $[0^{\circ}]_{s}(s - число монослоев)$ , а также мезомасштабных поперечно-сдвиговых ФПУ их периферийных слоев при осевом сжатии. Рассмотрены материалы, которые характеризуются физически нелинейной зависимостью лишь между формирующимися поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Решения получены при использовании трех вариантов линеаризованных уравнений равновесия в возмущенном состоянии, основанных на простейшей уточненной модели С.П. Тимошенко; аппроксимации прогиба линейным законом, а осевых перемещений – кубическим полиномом по поперечной координате при предварительном удовлетворении граничным условиям по тангенциальным усилиям (первый уточненный вариант теории; модель типа Редди – Немировского) и без предварительного удовлетворения таким условиям (второй уточненный вариант теории). В использованных линеаризованных уравнениях физическая нелинейность материала учтена в соответствии с концепцией Шенли на основе рассмотрения касательного модуля поперечного сдвига. Дано сравнение теоретических результатов с экспериментальными.

**Ключевые слова:** волокнистый композит, тест-образец, сжатие, теоретическое исследование, экспериментальное исследование, форма потери устойчивости, форма разрушения

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010, введение, разделы 1, 4) и Программы стратегического академического лидерства Казанского федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030», разделы 2, 3). Для цитирования: Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В., Шишов М.А. Формы потери устойчивости и разрушения тест-образцов из волокнистых композитов со структурой [0°]<sub>s</sub> при испытаниях на осевое сжатие. Теория и эксперимент // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 282–310. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310.

## REVIEW ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310

# Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a $[0^{\circ}]_{s}$ layup under axial compression. Theory and experiment

V.N. Paimushin<sup>1</sup>, S.A. Kholmogorov<sup>1</sup>, M.V. Makarov<sup>1,2</sup>, N.V. Levshonkova<sup>1</sup>, M.A. Shishov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia <sup>2</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russia

⊠ vpajmushin@mail.ru

#### Abstract

The analytical solutions for the problems of macroscale flexural-shear and purely transverse-shear buckling modes of test specimens made of fiber-reinforced composites with a  $[0^\circ]_s$  layup (s denoting the number of laminas) were analyzed, as well as the problems of mesoscale transverse-shear buckling modes of their peripheral layers under axial compression. Composite materials characterized by a physically nonlinear relationship only between transverse tangential stresses and the corresponding shear strains were examined. The solutions were obtained using three variants of linearized equations of the equilibrium in a perturbed state: based on the simplest refined S.P. Timoshenko's model; from a linear approximation of the deflection and a cubic polynomial approximation of the axial displacements in the transverse coordinate with the preliminary satisfaction of the boundary conditions for tangential forces (the first refined version of the theory; Reddy–Nemirovsky model type); and without the preliminary satisfaction of such conditions (the second refined version of the theory). The physical nonlinearity of the material was incorporated in the linearized equations following the Shanley concept by introducing the tangential shear modulus. The theoretical data were compared with the experimental results.

**Keywords:** fiber-reinforced composite, test specimen, compression, theoretical study, experimental study, buckling mode, failure mode

Acknowledgments. This study was performed as part of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FZSU-2024-0010, Introduction, Sections 1, 4) and supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program («PRIORITY-2030», Sections 2, 3).

For citation: Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V., Shishov M.A. Buckling modes and failure of test specimens from fiber-reinforced composites with a  $[0^{\circ}]_{s}$  layup under axial compression. Theory and experiment. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 282–310. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.282-310. (In Russian)

#### Введение

Несмотря на имеющуюся теорию деформирования и разрушения композиционных материалов, развитую за последние 50 лет и, казалось бы, вполне законченную, исследованиям в области механики деформирования и разрушения волокнистых композитов вплоть до настоящего времени уделяется значительное внимание как зарубежными, так и отечественными исследователями [1–9].

Широкий круг задач о разрушении волокнистых композитных материалов описан в монографии [10]. В ней выделены основные и наиболее характерные формы разрушения типичных тест-образцов при сжатии, которые приведены на рис. 1.



**Рис. 1.** Возможные виды разрушения при сжатии композитных образцов: a) смятие по торцам, b) макровыпучивание, c) выщелкивание полоски, d) расслоение посередине, e) образование полосы сдвига

**Fig. 1.** Possible failure modes of composite specimens under compression: a) end crushing, b) macrobuckling, c) strip delamination, d) delamination in the middle, e) shear band formation

Современные общеупотребительные стандарты испытаний композиционных материалов на сжатие требуют использования специальных захватов, которые в зависимости от своей конструкции могут реализовать один из трех видов передачи нагрузки на тест-образец (см. рис. 2). В экспериментальной механике наиболее благоприятной с точки зрения отсутствия концентрации напряжений считается третья схема приложения усилий на сжатие, в которой за счет клиновых захватов и торцевого упора нагрузка на тестобразец передается через три компоненты напряжений: осевую  $\sigma_{11}^0$ , касательную  $\sigma_{13}^0$  и поперечную сжимающую  $\sigma_{33}^0$ .

Одно из направлений исследований в механике деформирования композитных волокнистых материалов связано с задачами о внутренних и поверхностных формах потери устойчивости армирующей и связующей фаз. Связано это с тем, что при разрушении слоистых композитов одной из причин разрушения является потеря устойчивости армирующей фазы, что может привести к разрушению всей структуры материала в целом. В этой области исследований опубликованы монографии [11, 12].



**Puc. 2.** Схемы нагружения образцов при испытаниях на сжатие: 1)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 = 0$  ( $\sigma_{13}^0 = 0$ ); 2)  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ),  $\sigma_{11}^0 = 0$ ; 3)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ) **Fig. 2.** Diagrams of loading modes during the compression tests: 1)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 = 0$  ( $\sigma_{13}^0 = 0$ ); 2)  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ),  $\sigma_{11}^0 = 0$ ; 3)  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  ( $\sigma_{13}^0 \neq 0$ )

Вид разрушения, связанный с потерей устойчивости армирующей фазы, описан в справочнике [13] и работе [14]. Эти результаты получили развитие в [1,15–18]. Общий анализ полученных результатов и направлений дальнейших исследований можно найти в работах обзорного характера [4,19–21]. Уточненные модели деформирования тест-образцов, сжатых вдоль волокон, предложены авторами в статьях [22,23].

#### 1. Физико-механические характеристики волокнистого композита на полимерной основе в осях ортотропии

Экспериментальное определение физико-механических характеристик композитных материалов (КМ) на основе проведения тех или иных испытаний является неотъемлемой частью технологического процесса проектирования и изготовления с их применением конструкций того или иного назначения. Для волокнистых КМ на полимерной основе в соответствии с существующими стандартами испытания проводят, как правило, на плоских тест-образцах, имеющих толщину h и ту или иную ориентацию волокон, расположенных в матрице. Наиболее простыми в реализации являются испытания на растяжение образцов со структурами [0°], и [90°], (s – число монослоев в образце) с волокнами, расположенными вдоль и поперек направления действующей нагрузки и имеющими небольшие значения *s* и толщины *h*. Для KM с углеродными волокнами характерными являются диаграммы нагружения, являющиеся линейными вплоть до разрушения образцов. Исходя из результатов таких испытаний, для монослоя композита определяют модули упругости первого рода  $E_1^+$  (в направлении волокон),  $E_2^+$  (в направлении поперек волокон) и коэффициент Пуассона  $\nu_{12}^+$ . Они связаны с другим коэффициентом Пуассона  $\nu_{21}^+$  зависимостью  $E_1^+\nu_{21}^+ = E_2^+\nu_{12}^+$ . Определяют также предельные напряжения  $\sigma_1^{+*}$  и  $\sigma_2^{+*}$  в направлениях осей ортотропии x<sub>1</sub> и x<sub>2</sub>, при достижении которых в условиях растяжения происходит разрушение образца. Заметим, что для волокнистого композитного материала, изготовленного из препрега HSE 180 REM на основе углеленты с прямолинейными волокнами, указанные характеристики, найденные в работе [24] и использованные в статьях [25, 26], равны  $E_1^+ = 133$  ГПа,  $E_2^+ = 5.9$  ГПа,  $\nu_{12}^+ = 0.29$ ,  $\nu_{21}^+ = 0.0126$ ,  $\sigma_1^{+*} = 2490$  МПа,  $\sigma_2^{+*} = 17.2~{\rm M\Pi a}.$ Более сложными в реализации являются испытания на сжатие тестобразцов со структурам<br/>и $\left[0^\circ\right]_s, \; \left[90^\circ\right]_s$ и  $\left[\pm45^\circ\right]_{2s}$ в силу возможной потери ими устойчивости по той или иной форме и наблюдаемого продольно-поперечного изгиба (хотя и

малого), особенно при выдержке тест-образца под нагрузкой в течение длительного времени. При испытаниях на сжатие до разрушения тест-образцов со структурами  $[0^{\circ}]_s$  и  $[90^{\circ}]_s$  соответствующие диаграммы деформирования  $\sigma_1^- = \sigma_1^-(\varepsilon_1)$  и  $\sigma_2^- = \sigma_2^-(\varepsilon_2)$  с больпой степенью точности допустимо считать линейными вплоть до разрушения образцов, а определяемые на их основе модули упругости  $E_1^-, E_2^-$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}^-, \nu_{21}^-$ – практически совпадающими со значениями  $E_1^+, E_2^+, \nu_{12}^+, \nu_{21}^+$ . Однако определяемое при этом предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$ , при достижении которого в условиях сжатия происходит разрушение образца, оказывается намного ниже значения  $\sigma_1^{+*}$ . В соответствии с результатами многочисленных исследований ([1–9] и др.) допустимо считать, что предельное напряжение  $\sigma_1^{-*}$  сжатия тест-образца, имеющего структуру [0°]<sub>s</sub>, соответствует потере им устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой форме, которая реализуется при значении касательного модуля поперечного сдвига  $\tilde{G}_{13}^{-*}$  материала тест-образца в плоскости  $x_1, x_3 = z$ , равном  $\tilde{G}_{13}^{-*} = \sigma_1^{-*}$ . Такой вид разрушения образца (рис. 1, е) реализуется только при соответствующих немалой его толщине h и короткой рабочей длине L между захватами приспособления, используемого при испытаниях (рис. 2).

Для определения модуля сдвига  $G_{12}$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$  проводят испытания на растяжение и сжатие тест-образцов со структурой  $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$  с четным числом монослоев 2s. Их результатом являются диаграммы деформирования, дающие зависимости  $\sigma_x^+ = \sigma_x^+ (\varepsilon_x^+)$  между нормальными напряжениями растяжения  $(\sigma_x^+)$  и сжатия  $(\sigma_x^-)$  образца и соответствующими осевыми деформациями в направлении растяжения  $(\varepsilon_x^+)$  и сжатия  $(\varepsilon_x^-)$  (рис. 3, а), а также предельные напряжения  $\sigma_x^{+*}$  и  $\sigma_x^{-*}$ , при достижении которых происходит разрушение образца. Исходя из таких диаграмм деформирования образца, при использовании выведенных в [27,28] соотношений вида

$$\sigma_{12}^{\pm} = \frac{\sigma_x^{\pm}}{2}, \qquad \gamma_{12}^{\pm} = \frac{2\left(1 + \nu_{xy}^{\pm}\right)}{2 + \varepsilon_x^{\pm}\left(1 - \nu_{xy}^{\pm}\right)} \varepsilon_x^{\pm} \approx \left(1 + \nu_{xy}^{\pm}\right) \varepsilon_x^{\pm} \tag{1}$$

можно построить диаграммы деформирования при сдвиге  $\sigma_{12}^{\pm} = \sigma_{12}^{\pm} \left( \gamma_{12}^{\pm} \right)$  (рис. 3, b), дающие зависимости между касательными напряжениями  $\sigma_{12}^{\pm}$  и соответствующими сдвиговыми деформациями  $\gamma_{12}^{\pm}$  в осях ортотропии  $x_1, x_2$  ( $a_0 = L/b$ ,  $h_0 = L/h$ ; L, b – длина и ширина образца).

Диаграммы деформирования, приведенные для указанного выше композита (рис. 3, а), позволяют установить зависимости между секущими  $(\hat{E}_x^{\pm} = \tan \hat{\varphi}^{\pm})$  и касательными  $(\tilde{E}_x^{\pm} = \tan \hat{\varphi}^{\pm})$  модулями упругости и осевыми деформациями  $|\varepsilon_x^{\pm}|$ . Они изображены для тест-образцов с указанными выше параметрами 1 и 2 (рис. 4, а и 4, b).

В соответствии с рис. 4 зависимости между  $\sigma_x^{\pm}$  и  $\varepsilon_x^{\pm}$  представим в виде

$$\sigma_x^{\pm} = \hat{E}_x^{\pm} \left( \left| \varepsilon_x^{\pm} \right| \right) \varepsilon_x^{\pm}, \tag{2}$$

а зависимости между приращениями  $\Delta \sigma_x^{\pm}$  и  $\Delta \varepsilon_x^{\pm}$  – в виде

$$\Delta \sigma_x^{\pm} = \tilde{E}_x^{\pm} \left( \left| \varepsilon_x^{\pm} \right| \right) \Delta \varepsilon_x^{\pm}. \tag{3}$$

При использовании уравнения (1) соотношение (2) преобразуем к виду

$$\sigma_{12}^{\pm} = G_{12}^{\pm} \left( \left| \tilde{\gamma}_{12}^{\pm} \right| \right) \gamma_{12}^{\pm}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{\gamma}_{12}^{\pm} = \frac{\gamma_{12}^{\pm}}{1 + \nu_{xy}^{\pm}}, \qquad \hat{G}_{12}^{\pm} \left( \left| \tilde{\gamma}_{12}^{\pm} \right| \right) = \frac{\hat{E}_x^{\pm} \left( \left| \tilde{\gamma}_{12}^{\pm} \right| \right)}{2(1 + \nu_{xy}^{\pm})}.$$
(5)



**Рис. 3.** Диаграммы деформирования (МПа): 1 – растяжение длинных образцов ( $a_0 = 4.4$ ,  $h_0 = 196$ ); 2 – сжатие коротких образцов ( $a_0 = 1$ ,  $h_0 = 5.7$ ); 3 – сжатие длинных образцов ( $a_0 = 2.8$ ,  $h_0 = 37$ )

Fig. 3. Stress-strain diagrams (MPa): 1 – tension of long specimens  $(a_0 = 4.4, h_0 = 196)$ ; 2 – compression of short specimens  $(a_0 = 1, h_0 = 5.7)$ ; 3 – compression of long specimens  $(a_0 = 2.8, h_0 = 37)$ 

Аналогичным образом вместо (3) можно получить соотношение

$$\Delta \sigma_{12}^{\pm} = \tilde{G}_{12}^{\pm} \left( \left| \tilde{\gamma}_{12}^{\pm} \right| \right) \Delta \gamma_{12}^{\pm}, \tag{6}$$

где

$$\tilde{G}_{12}^{\pm}\left(\left|\tilde{\gamma}_{12}^{\pm}\right|\right) = \frac{\tilde{E}_{x}^{\pm}\left(\left|\tilde{\gamma}_{12}^{\pm}\right|\right)}{2(1+\nu_{xy}^{\pm})}.$$
(7)

Для рассматриваемого композита со структурой  $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$ , изготовленного из препрега HSE 180 REM, построенные зависимости (6) и (7) приведены для тест-образцов 1 и 2 (рис. 5, а и 5, b).

Приведенные выше результаты свидетельствуют о том, что поведение тест-образца волокнистого композита со структурой  $[\pm 45^{\circ}]_{2s}$  при сжатии достаточно сильно отличается от его поведения в условиях растяжения. Более надежными и достоверными следует считать результаты, соответствующие растяжению, так как они получены при использовании достаточно длинных образцов, обеспечивающих однородность формирующихся параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) как по ширине, так и по длине рабочей части образца.

Такую однородность параметров НДС не удается обеспечить при испытаниях образцов на сжатие по существующим в настоящее время стандартам из-за малой рабочей длины испытываемых образцов. Отмеченное различие в результатах, в частности, обусловлено тем, что в слоях связующего материала, в которых формируется преимущественно сдвиговое НДС, а в волокнах и пучках волокон – преимущественно одноосное НДС растяжения или сжатия [27], как при нагружении, так и разгрузке конструкции происходят, как было установлено в [28], структурные изменения в композите частично из-за деградации связующего материала, а преимущественно из-за внутренних форм потери устойчивости волокон и пучков волокон на микро- и мезомасштабах [29–31].



**Рис. 4.** Зависимости между секущими  $\hat{E}_x^{\pm} = \hat{E}_x^{\pm}(|\varepsilon_x^{\pm}|)$  и касательными  $\tilde{E}_x^{\pm} = \tilde{E}_x^{\pm}(|\varepsilon_x^{\pm}|)$  модулями упругости и осевыми деформациями образца (пунктирная линия – растяжение, сплошная линия – сжатие), ГПа

**Fig. 4.** Dependencies between secant  $\hat{E}_x^{\pm} = \hat{E}_x^{\pm}(|\varepsilon_x^{\pm}|)$  and tangent  $\tilde{E}_x^{\pm} = \tilde{E}_x^{\pm}(|\varepsilon_x^{\pm}|)$  moduli of elasticity and axial strain of the specimen (dashed line – under tension, solid line – under compression), GPa



**Рис. 5.** Зависимости между секущими  $\hat{G}_{12}^{\pm} = \hat{G}_{12}^{\pm}(|\gamma_{12}^{\pm}|)$  и касательными  $\tilde{G}_{12}^{\pm} = \tilde{G}_{12}^{\pm}(|\gamma_{12}^{\pm}|)$  модулями сдвига и сдвиговыми деформациями (при растяжении – пунктирная линия, при сжатии – сплошная линия), ГПа

**Fig. 5.** Dependencies between secant  $\hat{G}_{12}^{\pm} = \hat{G}_{12}^{\pm}(|\gamma_{12}^{\pm}|)$  and tangent  $\tilde{G}_{12}^{\pm} = \tilde{G}_{12}^{\pm}(|\gamma_{12}^{\pm}|)$  shear moduli and shear strain of the specimen (dashed line – under tension, solid line – under compression), GPa

В связи с изложенным в дальнейшем при проведении расчетов будем использовать результаты, соответствующие растяжению образцов. Из рис. 5 видно, что на начальном участке нагружения при  $\gamma_{12} = 0$  касательный модуль сдвига  $\tilde{G}_{12}^+ = 4.2$  ГПа. Далее на участке до  $\gamma_{12} = 0.017$  он резко убывает и достигает практически нулевого значения ( $\tilde{G}_{12}^+ = 47$  МПа) при  $\gamma_{12} = 0.044$ . Рассмотрим на диаграмме  $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$  точки

 $(G_0, 0), (G_*, \gamma_*)$  и  $(G_p, \gamma_p)$ , имеющие координаты:  $\tilde{G}_{12}^+ = G_0, \gamma_{12} = 0, \tilde{G}_{12}^+ = G_*, \gamma_{12} = \gamma_*$ и  $\tilde{G}_{12}^+ = G_p, \gamma_{12} = \gamma_p$ . В них величина  $G_*$  соответствует найденному в [25] предельному напряжению сжатия образца, численно равному осредненному модулю поперечного сдвига композита при потере устойчивости образца по чисто поперечно-сдвиговой форме (по этому значению  $G_*$  на диаграмме можно определить соответствующее значение сдвиговой деформации  $\gamma_{12} = \gamma_*$ ), а значения  $G_p$  и  $\gamma_p$  являются на диаграмме экстремальными и соответствуют началу разрушения образца. В результате для аналитического представления функции  $\tilde{G}_{12}^+ = \tilde{G}_{12}^+(\gamma_{12})$  допустимо использование аппроксимационной формулы

$$\tilde{G}_{12}^{+} = G_0 + G^{(1)} |\gamma_{12}| + G^{(2)} \gamma_{12}^2, \tag{8}$$

где величины  $G^{(1)}$  и  $G^{(2)}$  определяются по формулам, приведенным в работе [24].

# 2. Решения задач о макро- и мезомасштабных формах потери устойчивости при сжатии тест-образца со структурой $[0^\circ]_s$ на основе уравнений простейшей уточненной теории типа С.П. Тимошенко

Рассмотрим стержень (тест-образец) из однонаправленного волокнистого композита со структурой  $[0^{\circ}]_{s}$ , для которого имеет место равенство

$$G_{13} = G_{12}(\gamma_{12}). \tag{9}$$

Стержень имеет прямоугольное поперечное сечение, толщину h, ширину b, длину Lи подвержен осевому сжатию силой P. Задача о таком изгибе по уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко [32,33] может быть описана следующими уравнениями

$$D\gamma'' - \hat{B}_{13}(w' + \gamma) = 0,$$
  

$$\left[\hat{B}_{13}(w' + \gamma)\right]' - Pw'' = 0,$$
(10)

где w – прогиб осевой линии;  $\gamma$  – угол поворота поперечного сечения x = const;  $D = E_1 h^3 / 12$  – изгибная жесткость;  $\hat{B}_{13} = k_c \hat{G}_{13} h$  – поперечная сдвиговая жесткость, в которой  $k_c$  – коэффициент поперечного сдвига;  $\hat{G}_{13} = \hat{G}_{13}(\gamma_{13})$  – секущий модуль поперечного сдвига, определяемый (исходя из диаграммы вида рис. 3, а) в предположении  $G_{13} = G_{12}$  при заданном значении P и достигнутом уровне деформации поперечного сдвига  $\gamma_{13} = w' + \gamma$ .

При возрастании внешней силы P, как было установлено в [34, 35], в окрестностях поперечных сечений стержня x = 0 и x = L будут формироваться касательные напряжения  $\sigma_{13}(x, z)$  и, как следствие, будут уменьшаться модули поперечного сдвига  $\hat{G}_{13}$  и  $\tilde{G}_{13}$ . С целью проведения качественного анализа предположим, что при некотором критическом значении нагрузки  $P = P_{cr}$ , наряду со сформированным напряженно-деформированным состоянием, возможно существование и смежного равновесного состояния, переход к которому осуществляется за счет приращений неизвестных функций  $\Delta w$  и  $\Delta \gamma$  в рамках чисто упругой модели деформирования, когда в возмущенном состоянии для приращения функций имеет место зависимость

$$\Delta \sigma_{13} = 2\tilde{G}_{13}\Delta \varepsilon_{13} = \tilde{G}_{13}(\Delta w' + \Delta \gamma), \tag{11}$$

где  $\tilde{G}_{13}$  – касательный модуль поперечного сдвига в плоскости xz, который с целью упрощения будем считать постоянным по всей длине стержня. Записав вместо уравнений равновесия (10) уравнения возмущенного равновесного состояния относительно функций  $w^* = w + \Delta w$  и  $\gamma^* = \gamma + \Delta \gamma$  и использовав уравнения (10) невозмущенного состояния, получим

$$D\Delta\gamma'' - B_{13}(\Delta w' + \Delta\gamma) = 0,$$
  

$$\tilde{B}_{13}(\Delta w'' + \Delta\gamma') - P_{cr}\Delta w'' = 0,$$
(12)

где принято предположение, что жесткость  $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$  является постоянной по всей длине образца и равна минимальной достигнутой жесткости в одном из поперечных сечений, указанных выше. Использовав во втором уравнении системы (12) зависимость  $\Delta w' = \frac{D}{\tilde{B}_{13}} \Delta \gamma'' - \Delta \gamma$ , следующую из первого уравнения, получим уравнение

$$D\left(1 - \frac{P_{cr}}{\tilde{B}_{13}}\right)\Delta\gamma''' + P_{cr}\Delta\gamma' = 0.$$
(13)

Его первый интеграл

$$D\left(1 - \frac{P_{cr}}{\tilde{B}_{13}}\right)\Delta\gamma'' + P_{cr}\Delta\gamma = c_1,\tag{14}$$

где  $c_1$  – постоянная интегрирования. При

$$P_{cr}^s = \ddot{B}_{13} = k_c \ddot{G}_{13} h \tag{15}$$

из (14) следует решение

$$\Delta \gamma = \frac{c_1}{P_{cr}^s}, \qquad \Delta w' = -\Delta \gamma = -\frac{c_1}{P_{cr}^s}, \qquad w = -\frac{c_1 x}{P_{cr}^s} + c_2$$

 $(c_2$  – постоянная интегрирования), которое соответствует реализации чисто поперечносдвиговой формы потери устойчивости стержня. Такая ФПУ может реализоваться только у достаточно коротких стержней при значении  $B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h$ , где в соответствии с результатами исследований [1–9, 14–18] допустимо принять  $\tilde{G}_{13}^* = \sigma_1^{-*}$ .

Критические значения усилия *P*, соответствующие реализации других (изгибно-сдвиговых) ФПУ стержня, зависят от условия закрепления торцевых сечений.

**2.1. Шарнирное опирание торцевых сечений.** Решения для исследуемых ФПУ стержня при шарнирном опирании торцевых сечений имеют вид

$$\Delta w = w_n \sin \lambda_n x, \qquad \Delta \gamma = \gamma_n \cos \lambda_n x, \qquad \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \dots$$
 (16)

При их подстановке в уравнения (12) из условия нетривиальности амплитудных значений  $w_n$  и  $\gamma_n$  придем к формуле

$$P_{cr} = \tilde{B}_{13} \left( 1 - \frac{1}{1 + D\lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}} \right) = \frac{D\lambda_n^2}{1 + D\lambda_n^2 / \tilde{B}_{13}},\tag{17}$$

где жесткость, определяемая по формуле  $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} h$ , должна быть больше жесткости  $B_{13}^* = k_c \tilde{G}_{13}^* h = k_c \sigma_1^{-*} h$ , так как реализация изгибно-сдвиговой ФПУ стержня возможна только при его достаточно большой длине и при  $\tilde{G}_{13} > \tilde{G}_{13}^{-*}$ .

291

Из (17) следует, что при  $\lambda_n \to \infty$  (то есть при  $n \to \infty$ ) это решение стремится к решению (15), что, вообще говоря, не поддается какой-либо физической трактовке и, повидимому, является особенностью решений рассматриваемой задачи в рамках простейшей используемой математической модели изучаемого процесса.

В формуле (17) слагаемое  $\frac{1}{1+D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}}$  достигает максимума при волновом числе n=1. При таком значении n величина  $P_{cr}$  является минимальной, и ей всегда соответствует изгибно-сдвиговая ФПУ, описываемая функциями (16).

**2.2.** Защемление торцевых сечений. Введя безразмерную независимую переменную  $\eta = x/L$ , функцию перемещений  $\Phi$  в соответствии с зависимостями

$$\Delta \gamma = -\Phi', \qquad \Delta w = \Phi - \frac{D}{\tilde{B}_{13}} \Phi'$$

и параметр усилия  $m = PL^2/D$ , вместо системы уравнений (12) получим разрешающее уравнение

$$\frac{d^4\Phi}{d\eta^4} + k^2 \frac{d^2\Phi}{d\eta^2} = 0, \tag{18}$$

где введены обозначения

$$h_0 = \frac{h}{L}, \qquad k^2 = \frac{m}{1 - mr}, \qquad r = \frac{E_1 h_0^2}{12G_{13}k_c}.$$
 (19)

Записав решение уравнения (18) в виде

$$\Phi = c_1 + c_2\eta + c_3\sin k\eta + c_4\cos k\eta,$$

найдем решение уравнений (12) (здесь и в дальнейшем для краткости – без символов приращений  $\Delta$ )

$$\gamma = -c_2 - c_3 k \cos k\eta + c_4 k \sin k\eta, \tag{20}$$

$$w = c_1 + c_2\eta + c_3\left(1 + rk^2\right)\sin k\eta + c_4\left(1 + rk^2\right)\cos k\eta.$$
 (21)

Если подчинить решение (20) условиям  $\gamma'(0) = \gamma'(1) = 0$ , имеющим место при шарнирном опирании торцевых сечений, то  $c_3 = 0$ , а из условия  $c_4 \neq 0$  найдем решение  $k = n\pi$ ,  $n = 1, 2, \ldots$ , соответствующее формуле (17).

При подчинении решений (20) и (21) условиям защемления

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) = \gamma(0) = \gamma(1) = 0$$

придем к системе алгебраических уравнений

$$c_2 + kc_3 = 0, \qquad c_2 + k(c_3 \cos k - c_4 \sin k) = 0,$$
  
$$c_1 + (1 + rk^2)c_4 = 0, \qquad c_1 + c_2 + (1 + rk^2)(c_3 \sin k + c_4 \cos k) = 0,$$

из условия нетривиальности решений которой получим характеристическое уравнение

$$\frac{k}{1+k^2r}\sin k - 2(1-\cos k) = 0.$$

Корни этого уравнения при различных значениях параметра r приведены в табл. 1.

	r	номер положительного корня									
		1	2	3	4	5					
	0.01	$2\pi$	$2.7555\pi$	$4\pi$	$4.7403\pi$	$6\pi$					
	0.1	$2\pi$	$2.3323\pi$	$4\pi$	$4.2183\pi$	$6\pi$					
	0.2	$2\pi$	$2.2014\pi$	$4\pi$	$4.1181\pi$	$6\pi$					
	0.3	$2\pi$	$2.1442\pi$	$4\pi$	$4.0807\pi$	$6\pi$					
	0.4	$2\pi$	$2.1123\pi$	$4\pi$	$4.0612\pi$	$6\pi$					
	0.5	$2\pi$	$2.0919\pi$	$4\pi$	$4.0493\pi$	$6\pi$					

**Табл. 1.** Корни характеристического уравнения при различных r **Table 1.** Roots of the characteristic equation for various values of r

Видим, что в случае защемления торцевых сечений при всех значениях r минимальному значению  $P_{cr}$  соответствует корень  $k = 2\pi$ , в то время как при шарнирном закреплении торцевых сечений  $k = \pi$ . Следовательно, в обоих случаях для определения m и  $P_{cr}$  получим формулы

$$m = \frac{k^2}{1 + rk^2}, \qquad P_{cr} = \frac{Dm}{L^2}.$$
 (22)

Примем  $k_c = 5/6$ . При фиксированных геометрических и жесткостных характеристиках тест-образца L = 25 мм, h = 4 мм,  $E_1 = 130$  ГПа по формуле (17) были проведены расчеты критического напряжения  $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$  при варьировании значений  $G_{13}$  и числа полуволн потери устойчивости. Полученные результаты представлены (рис. 6, а) в виде зависимостей  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(G_{13})$ , а их фрагменты показаны в другом масштабе при  $G_{13} < 1$  ГПа (рис. 6, b). Видим, что при всех значениях  $ilde{G}_{13}$  минимальным значениям  $\sigma_{cr}$  соответствует волновое число n=1, а по мере уменьшения  $\tilde{G}_{13}$  (рис. 6, b) наблюдается значительное сближение значений  $\sigma_{cr}$  при увеличении значения n. Следовательно, предельное значение сжимающего напряжения  $\sigma = \sigma^*$ , при достижении которого в экспериментах наблюдается разрушение образца, вполне допустимо принять за критическое напряжение  $\sigma_{cr} = \sigma_1^{-*} = G_*$ , соответствующее реализации чисто поперечно-сдвиговой  $\Phi \Pi Y$  в силу его близости к значению  $\sigma_{cr}$ , соответствующему реализации изгибно-сдвиговой ФПУ при n=1 и  $\tilde{G}_{13}=G_*$ . Заметим также, что по мере уменьшения  $\tilde{G}_{13}$  и увеличения n (рис. 6) наблюдается значительное сближение определяемых значений  $\sigma_{cr}$ , а при  $G_{13} = G_*$  определяемые значения  $\sigma_{cr}$  можно считать практически совпадающими как при шарнирном опирании, так и при защемлении торцевых сечений стержня.

Важно отметить, что в процессе нагружения стержня во всех уравнениях (10), (12)–(14), соотношении (11) и формулах (15), (17) входящие модули поперечного сдвига должны равняться модулю  $G_0$  при  $\gamma_{12}$ , входящему в аппроксимационную формулу (8). Поэтому для реализации чисто поперечно-сдвиговой ФПУ, возможной только при малых значениях  $\tilde{G}_{13}$ , нужно использовать более сложные и содержательные модели деформирования [34,35]. В реальных экспериментах сложное докритическое напряженное состояние в образцах с компонентами  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{13}^0 \neq 0$ ,  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  формируется только в зонах их закрепления в захватах (рис. 2) и на достаточно коротких участках рабочей длины L. При этом задача о нагружении стержня осевой силой P, сформулированная на основе уравнений (10) при заданных граничных условиях, накладываемых на функции w и  $\gamma$ , становится существенно нелинейной в силу наблюдаемой в экспериментах существенной физически нелинейной зависимости  $\hat{G}_{12} = \hat{G}_{12}(\gamma_{12})$  лишь в окрестности захватов приспособлений, используемых для экспериментов. Результаты качественного характера теоретических исследований этих вопросов, касающиеся формирования сложного докритического НДС в окрестности захватов приспособления, изложены, в частности, в работах [34,35]. В связи с этим укажем, что при такой более содержательной постановке рассматриваемой задачи на каждом уровне нагружения при решении линеаризованной задачи на основе уравнений (12) требуется предварительное определение величины  $\tilde{G}_{13}$  в каждом сечении стержня по накопленному значению  $\gamma_{13}$  с использованием аппроксимационной формулы (8). Такая постановка и численное решение геометрически и физически нелинейной задачи по выявлению поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости в условиях трехточечного изгиба тест-образца из волокнистого композита даны в работе [24], где приведены также результаты проведенных экспериментов.



Рис. 6. Зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  при различных значениях n Fig. 6. Dependencies  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  for different values of n

**2.3.** Мезомасштабные ФПУ периферийного слоя композита. Если тестобразец со структурой  $[0^\circ]_s$  изготовлен из *s* монослоев волокнистого композита, каждый из которых имеет толщину *t*, а между слоями расположены слои связующего материала толщиной  $t_0$ , то при его сжатии (рис. 7) возможна реализация также и мезомасштабных ФПУ периферийных слоев.

В соответствии с рис. 7 и результатами работ [22, 23] для исследования таких ФПУ могут быть использованы уравнения докритического и возмущенного равновесных состояний, записанные в приближении

$$D\gamma'' - \hat{B}_{13} \left( w' + \gamma \right) = 0, \qquad \left[ \hat{B}_{13} \left( w' + \gamma \right) \right]' - Pw'' - \frac{E_3^0}{t_0} w = 0, \tag{23}$$

$$D\Delta\gamma'' - \tilde{B}_{13}\left(\Delta w' + \Delta\gamma\right) = 0, \qquad \left[\tilde{B}_{13}\left(\Delta w' + \Delta\gamma\right)\right]' - P\Delta w'' - \frac{E_3^0}{t_0}\Delta w = 0.$$
(24)



**Рис. 7.** Расчетная схема для постановки задачи о мезомасштабных ФПУ периферийного слоя композита

Fig. 7. Computational diagram for formulating the problem of mesoscale buckling modes in the peripheral composite layer

В уравнениях (23) и (24) для вычисления изгибных и поперечно-сдвиговых жесткостных коэффициентов в рассматриваемом случае необходимо использовать формулы

$$D = \frac{E_1 t^3}{12}, \qquad \hat{B}_{13} = k_c \hat{G}_{13} t, \qquad \tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13} t, \qquad (25)$$

где  $E_3^0$  обозначает модуль упругости слоя связующего материала в направлении толщины.

Если считать, что  $\tilde{B}_{13}$  имеет постоянное значение по длине монослоя, то при подстановке функций (16) из условия нетривиальности решений уравнений (24) придем к формуле

$$P_{cr} = \frac{D\lambda_n^2}{1 + D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}} + \frac{E_3^0}{t_0\lambda_n^2} = \tilde{B}_{13}\left(1 - \frac{1}{1 + D\lambda_n^2/\tilde{B}_{13}}\right) + \frac{E_3^0}{t_0\lambda_n^2},\tag{26}$$

из которой при  $\lambda_n \to \infty$  по-прежнему следует формула

$$\sigma_{cr} = P_{cr}/t = \tilde{G}_{13}^*. \tag{27}$$

Найденное решение в виде (27) подтверждается и результатами расчетов, проведенных с использованием формулы (26) при указанных выше характеристиках композита, заданных значениях толщин t = 0.15 мм,  $t_0 = 0.1$  мм и варьировании значений n и  $E_3^0$ . Результаты, полученные при  $E_3^0 = 50$  МПа, представлены на рис. 8 (a) в виде зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$ , а результаты, соответствующие  $n \to \infty$  и полученные при различных значениях  $E_3^0$ , изображены на рис. 8 (b) в виде зависимостей  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ .

Полученные результаты показывают, что реализация исследуемых мезомасштабных  $\Phi\Pi Y$  возможна как при ослабленных ( $E_3^0 = 0.5 \ \Gamma\Pi a$ ), так и неослабленных ( $E_3^0 = 2 \ \Gamma\Pi a$ ) характеристиках слоя связующего материала, расположенного между периферийным и внутренним монослоями композита. Судя по приведенным кривым (рис. 8, b), значения  $E_3^0$  не столь значительно влияют на определяемую величину  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ .

# 3. Решения задач о макромасштабных $\Phi\Pi Y$ при сжатии тест-образца со структурой $[0^{\circ}]_s$ на основе уточненных уравнений, имеющих высокую степень точности

В данном разделе на основе уравнений, построенных в работах [34, 36] и имеющих более высокую степень точности в сравнении с использованными выше, рассмотрим линеаризованную задачу о возможных чисто сдвиговых и изгибно-сдвиговых формах потери устойчивости волокнистого композитного стрежня при сжатии. Заметим, что их реализация может привести к первому, второму и пятому видам разрушения образцов при сжатии, показанным на рис. 1. Приведенные ниже результаты следует также рассматривать как анализ качества и содержательности математических моделей, предложенных в статьях [34,36] и предназначенных для уточненного исследования механики деформирования волокнистого композита на полимерной основе.



**Рис. 8.** а) Зависимость  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$ , соответствующая мезомасштабной ФПУ при  $E_3^0 = 50$  МПа,  $\tilde{G}_{13} = 500$  МПа.

b) Зависимость  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , соответствующая мезомасштабной ФПУ при n = 200**Fig. 8.** a) Dependency  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(n)$  corresponding to mesoscale buckling mode at  $E_3^0 = 50$  MPa,  $\tilde{G}_{13} = 500$  MPa.

b) Dependency  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  corresponding to mesoscale buckling mode at n = 200

Предположим, что в пластине в общем случае сформировано начальное напряженное состояние, характеризующееся усилиями

$$P = T_{11}^0 = -h\sigma_{11}^0, \qquad T_{33}^0 = -h\sigma_{33}^0$$
(28)

и имеющее место на участках крепления тест-образцов в приспособлениях для испытаний на сжатие (рис. 2). Для постановки задач устойчивости в условиях докритического напряженного состояния (28) обратимся к уточненным уравнениям, построенным в работе [35] в двух вариантах.

**3.1.** Решение на основе первого варианта уравнений. Здесь при рассматриваемом виде нагружения стержня для поперечного касательного напряжения  $\sigma_{13}$  и перемещений  $U_3$ ,  $U_1$  имеют место представления

$$\sigma_{13} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\tau_1, \qquad U_3 = w + z\varphi,$$

$$U_1 = u_1 - z\left[(1+\varphi)w_{,1} - \hat{\tau}_1\right] - \frac{z^2}{2}(1+\varphi)\varphi_{,1} - \frac{4z^3}{3h^2}\hat{\tau}_1, \qquad \hat{\tau}_1 = \frac{\tau_1}{\hat{G}_{13}}.$$
(29)

Уравнения, линеаризованные в окрестности напряженного состояния (28), основанные на (29) [36] и составленные с учетом знаков усилий (28), в рассматриваемом случае разделятся на две системы. Одна из них имеет вид

$$f_w = \left[ M_{11,1} - T_{11}^0 w_{,1} - T_{33}^0 \left( w_{,1} - \frac{\tau_1}{\tilde{G}_{13}} \right) \right]_{,1} = 0,$$
  

$$f_\tau = N_{11,1} - M_{11,1} + T_{13} + T_{33}^0 \left( w_{,1} - \frac{\tau_1}{\tilde{G}_{13}} \right) = 0,$$
(30)

где

$$M_{11} = -D\left(w_{,11} - \frac{4}{5\tilde{G}_{13}}\tau_{1,1}\right), \quad N_{11} = -\frac{D}{5}\left(w_{,11} - \frac{16}{21\tilde{G}_{13}}\tau_{1,1}\right), \quad T_{13} = \frac{8t}{15}\tau_{1}.$$
 (31)

Используем соотношения (31) в уравнениях (30) и будем искать решения в виде

$$w = \tilde{w} \sin \lambda_n x, \qquad \tau_1 = \tau \cos \lambda_n x,$$

что позволит при услови<br/>и $\tilde{w} \neq 0, \ \tau \neq 0$  прийти к характеристическому уравнению следующего вида

$$t_{11}^0 t_{33}^0 - r_{11} t_{11}^0 - r_{33} t_{33}^0 + r_0 = 0.$$
(32)

Здесь введены обозначения

$$t_{11}^0 = \frac{T_{11}^0}{D}, \qquad t_{33}^0 = \frac{T_{33}^0}{D},$$
(33)

$$r_{11} = \frac{8t\tilde{G}_{13}}{15D} + \frac{68\lambda_n^2}{105}, \qquad r_{33} = \frac{8t\tilde{G}_{13}}{15D} + \frac{\lambda_n^2}{21}, \qquad r_0 = \frac{4\lambda_n^2}{15}\left(\frac{\lambda_n^2}{35} + \frac{2t\tilde{G}_{13}}{D}\right). \tag{34}$$

Из уравнения (32) следует, что в силу  $r_{11} > 0$ ,  $r_{33} > 0$ ,  $r_0 > 0$  при  $\sigma_{33}^0 = 0$ , когда  $\sigma_{11}^0 \neq 0$ , и при  $\sigma_{11}^0 = 0$ , когда  $\sigma_{33}^0 \neq 0$ , критические значения напряжений будут равны

$$t_{11}^* = \frac{r_0}{r_{11}}, \qquad t_{33}^* = \frac{r_0}{r_{33}}.$$
 (35)

А при $\sigma_{33}^0=\kappa\sigma_{11}^0$ для определения  $t_{11}^*$  при заданном  $\kappa\neq 0$  придем к уравнению

$$\left(t_{11}^{0}\right)^{2} - \frac{r_{11} + \kappa r_{33}}{\kappa} t_{11}^{0} + \frac{r_{0}}{\kappa} = 0,$$
(36)

имеющему корни

$$t_{11(1,2)}^* = \frac{1}{2\kappa} \left( r_{11} + \kappa r_{33} \pm \sqrt{\left( r_{11} + \kappa r_{33} \right)^2 - 4\kappa r_0} \right).$$
(37)

При принятых выше фиксированных геометрических и жесткостных характеристиках тест-образца (L = 25 мм, h = 4 мм,  $E_1 = 130$  ГПа) по формуле (17) были проведены расчеты по определению критического напряжения  $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$  при варьировании значений  $\tilde{G}_{13}$  и числа n полуволн потери устойчивости. На рис. 9 представлены зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе уравнений (30): при различных значениях n и  $\kappa = 1$ (рис. 9, а), при различных значениях  $\kappa$  и n = 1 (рис. 9, b). Видим, что минимальным значениям  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  соответствует изгибно-сдвиговая ФПУ с параметром волнообразования n = 1. По мере увеличения параметров n и  $\tilde{G}_{13}$  наблюдается существенное увеличение величины  $\sigma_{cr}$  (рис. 9, а), а при малых значениях модуля сдвига наличие поперечных напряжений  $\sigma_{33}^0 = \kappa \sigma_{11}^0$  (при  $\kappa = 0.5, \kappa = 1$ ) не сказывается на величине  $\sigma_{cr}$ (рис. 9, b). Однако при больших значениях  $\tilde{G}_{13}$  формирование напряжения  $\sigma_{33}^0$  наряду с напряжением  $\sigma_{11}^0$  вносит существенный вклад в реализацию изгибно-сдвиговой ФПУ в сторону уменьшения критического значения  $\sigma_{cr}$ .



Рис. 9. Зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе уравнений (30) при различных значениях  $\kappa$  и n

Fig. 9. Dependencies  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  based on equations (30) for different values of  $\kappa$  and n

**3.2.** Решения на основе второго варианта уравнений. Второй вариант уравнений, построенных в работе [34], основан на представлениях перемещений  $U_3$  и  $U_1$  функциями

$$U_3 = w + z\varphi, \qquad U_1 = u_1 - z\gamma_1 - \frac{z^2}{2}\psi_1 - \frac{4z^3}{3h^2}\chi_1, \tag{38}$$

в которых неизвестными являются одномерные функции  $w, \varphi, u_1, \gamma_1, \psi_1$  и  $\chi_1$ .

Уравнения, соответствующие (38) [36] и линеаризованные в окрестности напряженного состояния (28), имеют вид

$$f_w = \left(\tilde{B}_{13} - T_{11}^0\right) w_{,11} - \tilde{B}_{13}\left(\gamma_{1,1} + \frac{1}{3}\chi_{1,1}\right) = 0, \tag{39}$$

$$f_{\gamma} = \gamma_{1,11} + \frac{1}{5}\chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D}\left(w_{,1} - \frac{1}{3}\chi_{1}\right) + \frac{\left(T_{33}^{0} - \tilde{B}_{13}\right)}{D}\gamma_{1} = 0, \tag{40}$$

$$f_{\chi} = \gamma_{1,11} + \frac{5}{21}\chi_{1,11} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D} \left[\frac{5}{3}\left(w_{,1} - \gamma_{1}\right) - \chi_{1}\right] = 0.$$
(41)

Из них у уравнения (39), содержащего при критическом значении

$$T_{11}^* = B_{13} \tag{42}$$

вырождающееся первое слагаемое, имеется решение

$$\gamma_1 + \frac{\chi_1}{3} = \text{const},$$

соответствующее потере устойчивости по чисто поперечно-сдвиговой ФПУ в условиях продольного сжатия напряжением  $\sigma_{11}^0 = T_{11}^0/h$ , когда  $\sigma_{33}^0 = 0$ . В предположениях  $\sigma_{11}^0 = 0$  и  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  из уравнений (40) и (41) получим критическое

значение

$$T_{33}^* = \frac{4}{9}\tilde{B}_{13} = \frac{4hG_{13}}{9},\tag{43}$$

соответствующее существованию решения  $\gamma_1 = \text{const}, \ \chi_1 = -\frac{5\gamma_1}{3} = \text{const}$  с нулевой изменяемостью функций  $\gamma_1$  и  $\chi_1$  вдоль оси x. Оно оказалось более чем в два раза меньше значения  $T^*_{33} = h \tilde{G}_{13}$ , установленного ранее при использовании менее содержательных по точности уравнений по сдвиговой модели С.П. Тимошенко.

Другие решения уравнений (39)–(41) будем искать в виде

$$w = \tilde{w} \sin \lambda_n x, \qquad \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1 \cos \lambda_n x, \qquad \chi_1 = \tilde{\chi}_1 \cos \lambda_n x.$$

При их подстановке в (40) и (41) придем к зависимости

$$\tilde{\chi}_1 = 3\lambda_n \left(1 - \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}}\right)\tilde{w} - 3\tilde{\gamma}_1$$

а при ее использовании – к системе двух однородных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix}
a_{11} + 3\lambda_n a_{32} \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} \\
 \tilde{w} - \left( \frac{2\lambda_n^2}{5} - \frac{T_{33}^0}{D} \right) \tilde{\gamma}_1 = 0, \\
 - \left( a_{21} - 3\lambda_n a_{33} \frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} \right) \tilde{w} + a_{22} \tilde{\gamma}_1 = 0,$$
(44)

где

$$a_{11} = -\frac{3\lambda_n^3}{5}, \qquad a_{32} = \frac{\lambda_n^2}{5} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D}, \qquad a_{21} = \frac{4\lambda_n \tilde{B}_{13}}{3D} + \frac{5\lambda_n^3}{7}, a_{22} = \frac{4\tilde{B}_{13}}{3D} - \frac{2\lambda_n^2}{7}, \qquad a_{33} = \frac{5\lambda_n^2}{21} + \frac{\tilde{B}_{13}}{D}.$$
(45)

Из условия нетривиальности решений системы алгебраических уравнений (44) в рассматриваемом случае при учете (45) придем к характеристическому уравнению

$$3a_{33}\lambda_n \frac{T_{11}^0 T_{33}^0}{\tilde{B}_{13}D} - \left(3\lambda_n a_{22}a_{32} + \frac{6\lambda_n^3 a_{33}}{5}\right)\frac{T_{11}^0}{\tilde{B}_{13}} - a_{21}\frac{T_{33}^0}{D} + 4\lambda_n^3 \left(\frac{\lambda_n^2}{35} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D}\right) = 0.$$
(46)

При введении параметров (35) и связи  $t_{33}^0 = \kappa t_{11}^0$  уравнение (46) трансформируем в уравнение (36) с корнями (37), в которых в рассматриваемом случае

$$r_{0} = \frac{4\lambda_{n}^{2}\tilde{B}_{13}}{3a_{33}D} \left(\frac{\lambda_{n}^{2}}{35} + \frac{\tilde{B}_{13}}{3D}\right), \qquad r_{11} = \frac{2\lambda_{n}^{2}}{5} + \frac{a_{22}a_{32}}{a_{33}}, \qquad r_{33} = \frac{a_{21}\tilde{B}_{13}}{3Da_{33}\lambda_{n}}.$$
 (47)

Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки | 2025;167(2):282-310

При тех же исходных данных, что и принятых выше, с использованием формул (47) были проведены расчеты критического напряжения  $\sigma_{cr} = P_{cr}/h$  при варьировании значений  $\tilde{G}_{13}$  и числа *n* полуволн потери устойчивости. На рис. 10 представлены зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе уравнений (39)–(41): при различных значениях *n* и  $\kappa = 1$  (рис. 10, а), при различных значениях  $\kappa$  и n = 1 (рис. 10, b). Видно, что результаты, полученные на основе уравнений первого и второго вариантов теории, принципиально различаются лишь при  $n \to \infty$  и малых значениях  $\tilde{G}_{13}$ . Второй вариант теории при  $\tilde{G}_{13} \to 0$  и  $n \to \infty$  приводит к значениям  $\sigma_{cr} \to 0$  (рис. 10, а), в то время как первый вариант – к конечному значению  $\sigma_{cr} \neq 0$ .



Рис. 10. Зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе уравнений (39)–(41) при различных значениях  $\kappa$  и nFig. 10. Dependencies  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  based on equations (39)–(41) for different values of  $\kappa$  and n

На рис. 11 представлены зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе формулы (17) (модель Тимошенко при  $k_c = 5/6$ ), уравнения (30) (первый уточненный вариант), уравнений (39)–(41) (второй уточненный вариант) при  $\kappa = 0$  и n = 1, что соответствует реализации изгибно-сдвиговой ФПУ с минимальным значением  $\sigma_{cr}$  при различных значениях  $\tilde{G}_{13}$ . Установлено практически полное совпадение результатов, полученных на основе трех использованных вариантов теории. Однако оно имеет место только для тест-образцов средней и малой относительных толщин  $h_0 = h/L$  и при коэффициенте поперечного сдвига  $k_c = 5/6$  (в формуле  $\tilde{B}_{13} = k_c \tilde{G}_{13}h$ ), входящего в соотношения упругости по теории типа Тимошенко.

## 4. Результаты испытаний тест-образцов из композитов ЭЛУР-П и HSE 180 REM со структурами [0°]<sub>30</sub> на сжатие. Обратная задача определения касательного модуля поперечного сдвига

Для определения физико-механических характеристик волокнистых композитов на сжатие согласно методике [26] также были изготовлены образцы со структурой  $[0^{\circ}]_{30}$  из углеленты ЭЛУР-П на полимерной основе. Они имели среднюю толщину h = 4.1 мм, длину рабочей части L = 25 мм и ширину b = 9.8 мм. Их испытания проводились с использованием специального приспособления, конструкция которого приведена в существующих стандартах испытаний.

Диаграммы деформирования, полученные для определения  $E_1^-$ , частично приведены на рис. 12 (a), а на рис. 12 (b) представлены диаграммы, полученные для определения предела прочности  $\sigma_1^{-*}$ .

Результаты проведенных испытаний сведены в табл. 2.



Рис. 11. Зависимости  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$ , найденные на основе трех вариантов уравнений при значениях n = 1 и  $\kappa = 0$ 

Fig. 11. Dependencies  $\sigma_{cr} = \sigma_{cr}(\tilde{G}_{13})$  based on three variants of equations for n = 1 and  $\kappa = 0$ 



Рис. 12. а) Диаграммы деформирования для определения  $E_1^-$ . b) Диаграммы деформирования для определения  $\sigma_1^{-*}$ Fig. 12. a) Stress-strain diagrams to calculate  $E_1^-$ . b) Stress-strain diagrams to calculate  $\sigma_1^{-*}$ 

Среднее значение  $\sigma_1^{-*}$  равно  $\sigma_1^{-*} = 529.3$  МПа, что в 1.38 раза меньше найденного в [26] предела прочности на растяжение  $\sigma_1^{+*}$ . Среднее значение модуля упругости  $E_1^+ = 104.7$  ГПа, определенного при растяжении, оказалось в 1.09 раза больше модуля упругости  $E_1^- = 96.3$  ГПа, определенного при сжатии.

Некоторые результаты экспериментальных исследований, проведенных на тест-образцах, изготовленных из препрега HSE 180 REM, приведены в табл. 3 (h = 4.1 мм, L = 25 мм) и 4 (h = 8.8 мм, L = 20 мм).

Табл. 2. Результаты испытаний тест-образцов из композитов ЭЛУР-П Table 2. Test results for the ELUR-P composite specimens

Номер	b	h	$E_1^-$	$bP^*$	$\sigma_1^{-*}$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=\pi$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=2\pi$
образца	(MM)	(MM)	(ГПа)	(кН)	(МПа)	$(M\Pi a)$	$(M\Pi a)$
1	9.7	3.8	107.4	18.84	516.3	836.7 (697.2)	662.5(552.1)
2	9.8	4.1	93.3	22.46	555.7	906.1 (755.1)	714.0 (595.0)
3	9.8	4.1	99.7	20.76	513.2	801.5 (667.9)	653.7(544.8)

Табл. 3. Результаты испытаний тест-образцов HSE 180 REM (h = 4.1 мм, L = 25 мм) Table 3. Test results for the HSE 180 REM composite specimens (h = 4.1 mm, L = 25 mm)

Номер	b	h	$E_1^-$	$bP^*$	$\sigma_1^{-*}$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=\pi$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=2\pi$
образца	(мм)	(мм)	$(\Gamma\Pi a)$	(кН)	(МПа)	$(M\Pi a)$	(MПа)
1	10.0	4.1	107.2	28.71	702.42	1197.9 (998.2)	910.3 (758.6)
2	10.2	4.2	121.5	35.31	835.84	1440.4 (1200.3)	1085.4 (904.5)
3	10.0	4.1	116.6	29.76	724.49	1204.5 (1003.8)	934.4 (778.7)
4	10.0	4.1	110.0	34.59	843.80	1542.4(1285.3)	1107.7 (923.1)
5	10.0	4.2	108.5	38.64	929.16	1791.9 (1493.2)	1231.3 (1026.1)
6	10.0	4.2	114.6	31.71	762.31	1292.1 (1076.7)	986.8 (822.3)
Среднее	10.0	4.1	112.7	33.12	799.67		

Табл. 4. Результаты испытаний тест-образцов HSE 180 REM (h = 8.8 мм, L = 20 мм) Table 4. Test results for the HSE 180 REM composite specimens (h = 8.8 mm, L = 20 mm)

Номер	b	h	$E_1^-$	$bP^*$	$\sigma_1^{-*}$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=\pi$	$ ilde{G}_{13}$ при $k=2\pi$
образца	(мм)	(мм)	$(\Gamma\Pi a)$	(кН)	(МПа)	(МПа)	$(M\Pi a)$
1	9.0	9.6	122.75	41.29	477.8	585.4 (487.9)	576.3 (480.3)
2	9.0	9.5	113.84	36.63	428.8	525.4 (437.8)	517.2 (431.0)
3	8.5	9.3	156.27	37.07	471.1	575.1 (479.3)	567.8 (473.1)
Среднее	8.8	9.5	130.95	38.33	459.2	562.0 (468.3)	553.4(461.5)

Формулу (22) с учетом первой и третьей формул из (19) можно представить в виде

$$\tilde{G}_{13} = \frac{E_1 h_0 k^2 L^2 P_{cr}}{12k_c \left(Dk^2 - L^2 P_{cr}\right)},\tag{48}$$

где  $k = \pi$  при шарнирном опирании и  $k = 2\pi$  при защемлении торцевых сечений тестобразцов. Если в соответствии с данными табл. 2–4 принять значения  $P_{cr} = P^*$ ,  $E_1 = E_1^$ и  $D = \frac{E_1^- h^3}{12}$ , то при значениях h и b, приведенных в таблицах, по формуле (48) можно определить значения  $\tilde{G}_{13}$ . Найденные значения приведены в двух последних столбцах табл. 2–4. В них значения  $\tilde{G}_{13}$  в круглых скобках соответствуют коэффициенту  $k_c = 1$ , а вне скобок – коэффициенту  $k_c = 5/6$ .

Заметим, что наиболее близкое совпадение значений  $\tilde{G}_{13}$  и  $\sigma_1^{-*}$  имеет место в случае защемления торцевых сечений тест-образцов при  $k_c = 1$ . Этот вывод подтверждает использованное в статье предположение о том, что определяемое при испытаниях значение  $\sigma_1^{-*}$  с большой степенью точности может быть принято за значение касательного модуля поперечного сдвига  $\tilde{G}_{13}$ , при достижении которого в окрестности торцевого сечения тест-образца происходит его разрушение по причине реализации не чисто поперечно-сдвиговой, а близкой к ней изгибно-сдвиговой ФПУ как при большой ( $h_0 \approx 0.5$ , табл. 4), так и средней ( $h_0 \approx 0.16$ , табл. 3) относительной толщине.

Видно, что при длине образцов L = 25 мм и h = 4.1 мм для обоих рассмотренных типов композитов различие между  $\tilde{G}_{13}$  и  $\sigma_1^{-*}$  становится более существенным (но не более 7–8%). Как и следовало ожидать, проведенный анализ результатов показал, что у образцов с параметром  $h_0 = 0.16$  при шарнирном опирании торцевых сечений (не имеющем места в экспериментах) изгибно-сдвиговая ФПУ может реализоваться при значительно больших значениях  $\tilde{G}_{13}$ , чем при защемлении.

#### Основные выводы и заключение

Сформулированные выше выводы вполне объяснимы и допускают достаточно полное теоретическое обоснование. При сжатии тест-образцов из композитов рассматриваемого класса по схеме рис. 2 наиболее адекватной является расчетная схема, в которой торцевые сечения принимаются защемленными. При этом, как следует из анализа результатов, полученных в [36], уравнения, соответствующие использованию аппроксимаций (29), требуют постановки граничных условий  $\tau_1(0) = \tau_1(L) = 0$ , что соответствует переходу от модели (29) к классической модели Кирхгофа – Лява. Однако такой вид граничных условий не соответствует реальному процессу деформирования при переходе в возмущенное состояние. В то же время при использовании уравнений (39)-(41), основанных на аппроксимациях (38), в сечениях x = 0, x = L при их защемлении требуется формулировка условий  $\gamma_1(0) = \gamma_1(L) = 0$ ,  $\chi_1(0) = \chi_1(L) = 0$ . В результате их использования в решении задачи о возмущенном равновесном состоянии в окрестности защемленных сечений имеет место переход к известной и используемой в работе кинематической модели С.П. Тимошенко с уравнениями равновесия (10). В этих уравнениях при вычислении жесткостей  $\tilde{B}_{13}$  и  $\hat{B}_{13}$  коэффициент поперечного сдвига  $k_c$  близок к 1, а не к 5/6. Наиболее близким к такому напряженно-деформированному состоянию с коэффициентом  $k_c = 1$  оказалось НДС тест-образцов с параметром  $h_0 \approx 0.5$ . Для них экспериментальные значения (пятый столбец табл. 4) практически совпадают со значениями, приведенными в скобках последнего столбца. Поэтому допустимо считать, что у таких образцов в возмущенном деформированном состоянии, являющемся изгибно-сдвиговым, главной частью деформаций являются поперечно-сдвиговые составляющие.

В то же время у образцов с параметром  $h_0 \approx 0.16$  приведенные в последнем столбце табл. З значения  $\tilde{G}_{13}$  (заключенные в скобки) оказались заметно больше аналогичных значений табл. 4. Приведенные в табл. З экспериментальные значения  $\sigma_1^{-*}$  также оказались заметно больше, чем аналогичные значения табл. 4. Отсюда следует, что в формуле

$$P_{cr}^b = \frac{4\pi^2 D}{(1+4\pi^2 r) L^2}$$

параметр  $r = \frac{E_1 h_0^2}{12 \tilde{G}_{13}}$  в силу малости  $h_0$  вносит гораздо меньший вклад в значение  $P_{cr}^b$ , а реализующаяся в экспериментах форма потери устойчивости оказывается преимущественно изгибной, имеющей место при гораздо больших формирующихся в образцах значениях  $\tilde{G}_{13}$ , чем в образцах с параметром  $h_0 \approx 0.5$ .

Таким образом, проведен анализ найденных аналитических решений задач о макромасштабных изгибно-сдвиговых и чисто поперечно-сдвиговых формах потери устойчивости тест-образцов из волокнистых композитов со структурой  $[0^\circ]_s$  (s – число монослоев), а также мезомасштабных поперечно-сдвиговых ФПУ их периферийных слоев при осевом сжатии. Рассмотрены материалы, которые характеризуются физически нелинейной зависимостью лишь между формирующимися поперечными касательными напряжениями и соответствующими сдвиговыми деформациями. Решения получены при использовании трех вариантов линеаризованных уравнений равновесия в возмущенном состоянии, основанных на известной в литературе простейшей уточненной модели С.П. Тимошенко; аппроксимации прогиба линейным законом, а осевых перемещений – кубическим полиномом по поперечной координате при предварительном удовлетворении граничным условиям по тангенциальным усилиям (первый уточненный вариант; модель типа Редди – Немировского) и без предварительного удовлетворения таким условиям (второй уточненный вариант). В использованных линеаризованных уравнениях физическая нелинейность материала учтена в соответствии с концепцией Шенли на основе рассмотрения касательного модуля поперечного сдвига. В них имеются такие слагаемые с коэффициентами, вырождение которых соответствует реализации чисто поперечно-сдвиговых ФПУ при сжатии образца как в осевом (вдоль волокон), так и в поперечном (поперек волокон) направлениях. Для тест-образцов средней относительной толщины показана практически полная идентичность результатов, полученных на основе трех использованных вариантов уравнений, соответствующих реализации преимущественно изгибно-сдвиговой ФПУ при сжатии. Исходя из анализа полученных теоретических решений и экспериментальных результатов, показано, что для относительно толстых тест-образцов характерно разрушение по причине потери устойчивости по такой макромасштабной изгибно-сдвиговой форме, которая является преимущественно поперечно-сдвиговой и реализуется при осредненном по толщине сжимающем напряжении, равном по величине касательному модулю поперечного сдвига композита в окрестности торцевого сечения рабочей длины тест-образца в его невозмущенном состоянии.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

### Литература

- Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // Compos. Struct. 2010. V. 92, No 2. P. 295–305. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
- Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T. Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: In situ SEM microanalysis // Compos. Sci. Technol. 2011. V. 71, No 9. P. 1242–1249. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.009.
- Niu K., Talreja R. Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37, No 17. P. 2405–2428. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00010-4.
- Naik N.K., Kumar R.S. Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models // Compos. Struct. 1999. V. 46, No 3. P. 299–308. https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00098-7.
- Davidson P., Waas A.M. Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading // Math. Mech. of Solids. 2016. V. 21, No 6. P. 667–684. https://doi.org/10.1177/1081286514535422.
- Prabhakar P., Waas A.M. Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites // Compos. Struct. 2013. V. 98. P. 85–92. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.005.
- Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P. A micromechanical model for kink-band formation: Part I — experimental study and numerical modelling // Compos. Sci. Technol. 2009.
   V. 69, Nos 7–8. P. 948–955. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.02.010.
- Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M. Compressive splitting response of glass reinforced unidirectional composites // Compos. Sci. Technol. 2000. V. 60, No 16. P. 2957–2966. https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00159-7.
- Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C. The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales // Meccanica. 2014. V. 49, No 11. P. 2571–2586. https://doi.org/10.1007/s11012-013-9872-y.
- 10. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015. 320 с.
- 11. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Киев: Наук. думка, 1973. 270 с.
- 12. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
- 13. Справочник по композиционным материалам: в 2-х кн. Кн. 2. Под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера и др.; под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 584 с.
- Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N. The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites // Composite Materials: Testing and Design (Second Conf.). Corten H. (Ed.). ASTM Special Technical Publication 497. Philadelphia, PA: ASTM Int., 1972. P. 237–257. https://doi.org/10.1520/STP27750S.
- Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites // J. Mech. Phys. Solids. 1993.
   V. 41, No 1. P. 183–211. https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q.

- Li Xu Y., Reifsnider K.L. Micromechanical modeling of composite compressive strength // J. Compos. Mater. 1993. V. 27, No 6. P. 572–588. https://doi.org/10.1177/002199839302700602.
- Zhang G., Latour R.A., Jr. FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity // J. Thermoplast. Compos. Mater. 1993. V. 6, No 4. P. 298–311. https://doi.org/10.1177/089270579300600403.
- Zhang G., Latour R.A., Jr. An analytical and numerical study of fiber microbuckling // Compos. Sci. Technol. 1994. V. 51, No 1. P. 95–109. https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90160-0.
- 19. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Развитие общего направления в теории многослойных оболочек // Механ. композ. матер. 1988. Т. 24, № 2. С. 287–298.
- Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells // Appl. Mech. Rev. 1990. V. 43, No 4. P. 67–97. https://doi.org/10.1115/1.3119162.
- 21. *Пискунов В.Г., Рассказов А.О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механ. 2002. Т. 38, № 2. С. 22–57.
- Paimushin V.N. Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite // Mech. Compos. Mater. 2017. V. 53, No 5. P. 613–630. https://doi.org/10.1007/s11029-017-9691-7.
- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K. Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers // Mech. Compos. Mater. 2018. V. 53, No 6. P. 737–752. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9699-7.
- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from threepoint bending tests // Z. Angew. Math. Mech. 2019. V. 99, No 1. Art. e201800063. https://doi.org/10.1002/zamm.201800063.
- Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 157, кн. 4. С. 112–132.
- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // Mech. Compos. Mater. 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1.
- Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. Deformation model of [±45°]<sub>s</sub> cross-ply fiber reinforced plastics under tension // Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019). Gdoutos E. (Ed.). Ser.: Structural Integrity. Vol. 8. Cham: Spriger, 2019. P. 29–35. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\_6.
- Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Deformation features and models of [±45]<sub>2s</sub> cross-ply fiber-reinforced plastics in tension // Mech. Compos. Mater. 2019. V. 55, No 2. P. 141–154. https://doi.org/10.1007/s11029-019-09800-5.
- Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2019. V. 60, No 3. P. 548–559. https://doi.org/10.1134/S0021894419030180.

- Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics // Mech. Compos. Mater. 2018. V. 54, No 2. P. 133– 144. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9726-8.
- Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Spatial buckling modes of a fiber (fiber bundle) of composites with a [±45°]<sub>2s</sub> stacking sequence under tension and compression on test specimens // Mech. Compos. Mater. 2020. V. 55, No 6. P. 743–760. https://doi.org/10.1007/s11029-020-09855-9.
- 32. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.
- 33. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
- Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model // Mech. Compos. Mater. 2023. V. 59, No 5. P. 885–900. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8.
- 35. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens in the axial compression 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a [0]<sub>s</sub> layup // Mech. Compos. Mater. 2024. V. 59, No 6. P. 1065–1082. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10157-z.
- Paimushin V.N., Makarov M.V., Polyakova N.V., Shishov M.A., Kamalutdinov A.M., Panin S.V. Refined nonlinear deformation models of semi-infinite plates made of fiber reinforced plastics. 1. Reddy-Nemirovsky type model // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 8. P. 2257–2266. https://doi.org/10.1134/S1995080222110245.

#### References

- Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010.
- Hapke J., Gehrig F., Huber N., Schulte K., Lilleodden E.T. Compressive failure of UD-CFRP containing void defects: *In situ* SEM microanalysis. *Compos. Sci. Technol.*, 2011, vol. 71, no. 9, pp. 1242–1249. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2011.04.009.
- Niu K., Talreja R. Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites. Int. J. Solids Struct., 2000, vol. 37, no. 17, pp. 2405–2428. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00010-4.
- Naik N.K., Kumar R.S. Compressive strength of unidirectional composites: Evaluation and comparison of prediction models. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 46, no. 3, pp. 299–308. https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00098-7.
- Davidson P., Waas A.M. Mechanics of kinking in fiber-reinforced composites under compressive loading. Math. Mech. of Solids, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 667–684. https://doi.org/10.1177/1081286514535422.
- Prabhakar P., Waas A.M. Interaction between kinking and splitting in the compressive failure of unidirectional fiber reinforced laminated composites. *Compos. Struct.*, 2013, vol. 98, pp. 85–92. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.005.

- Pimenta S., Gutkin R., Pinho S.T., Robinson P. A micromechanical model for kink-band formation: Part I — experimental study and numerical modelling. *Compos. Sci. Technol.*, 2009, vol. 69, nos. 7–8, pp. 948–955. https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.02.010.
- Lee S.H., Yerramalli C.S., Waas A.M. Compressive splitting response of glass reinforced unidirectional composites. *Compos. Sci. Technol.*, 2000, vol. 60, no. 16, pp. 2957–2966. https://doi.org/10.1016/S0266-3538(00)00159-7.
- Allix O., Feld N., Baranger E., Guimard J.-M., Ha-Minh C. The compressive behaviour of composites including fiber kinking: Modelling across the scales. *Meccanica*, 2014, vol. 49, no. 11, pp. 2571–2586. https://doi.org/10.1007/s11012-013-9872-y.
- 10. Polilov A.N. *Etyudy po mekhanike kompozitov* [Studies on the Mechanics of Composites]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 320 p. (In Russian)
- 11. Guz' A.N. Ustoichivost' uprugikh tel pri konechnykh deformatsiyakh [Stability of Elastic Bodies under Finite Deformations]. Kyiv, Naukova Dumka, 1973. 270 p. (In Russian)
- 12. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruktsii* [Mechanics of Multilayer Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p. (In Russian)
- Lubin G. (Ed.) Spravochnik po kompozitsionnym materialam [Handbook of Composites]. Book 2. Geller A.B. (Trans.), Geller B.E. (Ed.). Moscow, Mashinostroenie, 1988. 584 p. (In Russian)
- Suarez J.A., Whiteside J.B., Hadcock R.N. The influence of local failure modes on the compressive strength of boron/epoxy composites. *Composite Materials: Testing and Design (Second Conf.)*. Corten H. (Ed.). ASTM Special Technical Publication 497. Philadelphia, PA, ASTM Int., 1972, pp. 237–257. https://doi.org/10.1520/STP27750S.
- Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. J. Mech. Phys. Solids, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q.
- Xu Y.L., Reifsnider K.L. Micromechanical modeling of composite compressive strength. J. Compos. Mater., 1993, vol. 27, no. 6, pp. 572–588. https://doi.org/10.1177/002199839302700602.
- Zhang G., Latour R.A., Jr. FRP composite compressive strength and its dependence upon interfacial bond strength, fiber misalignment, and matrix nonlinearity. J. Thermoplast. Compos. Mater., 1993, vol. 6, no. 4, pp. 298–311. https://doi.org/10.1177/089270579300600403.
- Zhang G., Latour R.A., Jr. An analytical and numerical study of fiber microbuckling. Compos. Sci. Technol., 1994, vol. 51, no. 1, pp. 95–109. https://doi.org/10.1016/0266-3538(94)90160-0.
- Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. General direction of development of the theory of multilayered shells. Mech. Compos. Mater., 1988, vol. 24, no. 2, pp. 231–241. https://doi.org/10.1007/BF00608158.
- Noor A.K., Burton W.S. Assessment of computational models for multilayered composite shells. Appl. Mech. Rev., 1990, vol. 43, no. 4, pp. 67–97. https://doi.org/10.1115/1.3119162.
- Piskunov V.G., Rasskazov A.O. Development of the theory of layered plates and shells. *Prikl. Mekh.*, 2002, vol. 38, no. 2, pp. 22–57. (In Russian)
- Paimushin V.N. Refined models for an analysis of internal and external buckling modes of a monolayer in a layered composite. *Mech. Compos. Mater.*, 2017, vol. 53, no. 5, pp. 613–630. https://doi.org/10.1007/s11029-017-9691-7.

- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Gazizullin R.K. Mechanics of unidirectional fiber-reinforced composites: Buckling modes and failure under compression along fibers. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 53, no. 6, pp. 737–752. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9699-7.
- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from threepoint bending tests. Z. Angew. Math. Mech., 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063. https://doi.org/10.1002/zamm.201800063.
- Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)
- Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1.
- 27. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. Deformation model of [±45°]<sub>s</sub> cross-ply fiber reinforced plastics under tension. Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics (ICTAEM 2019). Gdoutos E. (Ed.). Ser.: Structural Integrity. Vol. 8. Cham, Spriger, 2019, pp. 29–35. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\_6.
- Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Deformation features and models of [±45°]<sub>2s</sub> cross-ply fiber-reinforced plastics in tension. *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 141–154. https://doi.org/10.1007/s11029-019-09800-5.
- Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Flat internal buckling modes of fibrous composite elements under tension and compression at the mini- and microscale. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2019, vol. 60, no. 3, pp. 548–559. https://doi.org/10.1134/S0021894419030180.
- Paimushin V.N., Polykova N.V., Kholmogorov S.A., Shishov M.A. Buckling modes of structural elements of off-axis fiber-reinforced plastics. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 2, pp. 133–144. https://doi.org/10.1007/s11029-018-9726-8.
- Paimushin V.N., Gazizullin R.K., Shishov M.A. Spatial buckling modes of a fiber (fiber bundle) of composites with a [±45°]<sub>2s</sub> stacking sequence under tension and compression on test specimens. *Mech. Compos. Mater.*, 2020, vol. 55, no. 6, pp. 743–760. https://doi.org/10.1007/s11029-020-09855-9.
- 32. Rikards R.B., Teters G.A. Ustoychivost' obolochek iz kompozitnykh materialov [The Stability of Shells Made of Composite Materials]. Riga, Zinatne, 1974. 310 p. (In Russian)
- 33. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Composite Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 272 p. (In Russian)
- Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens under axial compression 1. Refined nonlinear mathematical deformation model. *Mech. Compos. Mater.*, 2023, vol. 59, no. 5, pp. 885–900. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10140-8.
- 35. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Polyakova N.V. Shear buckling mode and failure of flat fiber-reinforced specimens in the axial compression 2. Numerical method, experimental and numerical investigations of the specimens with a [0]<sub>s</sub> layup. *Mech. Compos. Mater.*, 2024, vol. 59, no. 6, pp. 1065–1082. https://doi.org/10.1007/s11029-023-10157-z.

 Paimushin V.N., Makarov M.V., Polyakova N.V., Shishov M.A., Kamalutdinov A.M., Panin S.V. Refined nonlinear deformation models of semi-infinite plates made of fiber reinforced plastics.
 Reddy-Nemirovsky type model. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2257–2266. https://doi.org/10.1134/S1995080222110245.

#### Информация об авторах

Виталий Николаевич Паймушин, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прочность конструкций», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: *vpajmushin@mail.ru* 

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4070-2579

Сергей Андреевич Холмогоров, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность конструкций», Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: hkazan@yandex.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9942-6786

**Максим Викторович Макаров**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6619-5651

Наталья Витальевна Левшонкова, ведущий инженер, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: NVPolyakova@kai.ru

Максим Александрович Шишов, ведущий инженер, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: maxim.shishov@mail.ru

#### Author Information

**Vitaly N. Paimushin**, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Department of Structural Strength, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: vpajmushin@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4070-2579

**Sergey A. Kholmogorov**, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Structural Strength, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: hkazan@yandex.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9942-6786

Maksim V. Makarov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Kazan Federal University; Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6619-5651

Natal'ya V. Levshonkova, Leading Engineer, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: NVPolyakova@kai.ru

Maksim A. Shishov, Leading Engineer, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

 $\hbox{E-mail:} \quad maxim.shishov@mail.ru$ 

Поступила в редакцию 3.02.2025 Принята к публикации 5.04.2025 Received February 3, 2025 Accepted April 5, 2025

### ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.7

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328

# Пилотная модель сети научных журналов России: анализ на основе графа пересечений

# А.А. Печников

Карельский научный центр Российской академии наук, г. Петрозаводск, Россия

pechnikov@krc.karelia.ru

#### Аннотация

Научные журналы играют важную роль в научном сообществе, являясь определяющим инструментом развития науки и обмена знаниями. Отношения между журналами многогранны и имеют разную природу, в совокупности формируя связи в сложной сети журнальной коммуникации. Разработка адекватных математических моделей подобных объектов, обладающих способностями к самоорганизации, является серьезной проблемой, требующей всестороннего изучения. В работе предложен подход к анализу сети журналов, базирующийся на новом библиографическом графе отношений между журналами, когда связь между журналами определяется наличием общих авторов, то есть фактически на бинарной операции пересечения множеств авторов журналов. Это позволяет рассмотреть два уровня взаимодействия журналов, нижний из которых представляет собой отношения на множествах журналов, объединяемых в научные тематики, а верхний – отношения между тематиками, с использованием единых приемов и методов обработки исходных данных. Названный подход продемонстрирован на пилотном примере, построенном по данным eLIBRARY.RU, и позволяет получить ряд результатов, свидетельствующих о перспективности его использования и возможностях масштабирования.

**Ключевые слова:** научный журнал, научная сеть, библиометрический граф, граф пересечений, коэффициент Жаккара

**Благодарности.** Автор приносит благодарность своим коллегам из Научной электронной библиотеки и Математического института им. В.А. Стеклова РАН за предварительную подготовку и обработку данных, использованных в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке по проекту FMEN-2024-0005 «Случайные графы, структура и информационный поиск, кооперация и конкуренция в сетях и приложения в сложных системах».

Для цитирования: *Печников А.А.* Пилотная модель сети научных журналов России: анализ на основе графа пересечений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 311–328. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328.

# **ORIGINAL ARTICLE** https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328

# A pilot model of the scientific journal network in Russia: An intersection graph analysis

## A.A. Pechnikov

Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, Russia

#### pechnikov@krc.karelia.ru

#### Abstract

Scientific journals play an important role as a key tool for advancing science and encouraging knowledge exchange during research collaboration. The relationships among them are extremely diverse and cluster together into a complex network of connections. Developing adequate mathematical models of such self-organizing systems is a serious problem that requires in-depth investigation. This article introduces an approach to analyze the journal network based on a new bibliographic graph in which the relationships among journals are defined by shared authorship, i.e., through the binary intersection of author sets. Two levels of journal interaction can be distinguished using consistent source data processing techniques and methods. At the lower level, the relationships among multiple journals are grouped by scientific topics. At the upper level, the interactions between these topics are established. The approach was validated through a pilot study of eLIBRARY.RU data. The findings demonstrate its feasibility and scalability potential.

Keywords: scientific journal, scientific network, bibliometric graph, intersection graph, Jaccard coefficient

Acknowledgments. Colleagues from the Scientific Electronic Library and the Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences are gratefully acknowledged for their contribution in preliminary preparation and processing of the data used in the work.

This study was supported by the FMEN-2024-0005 project "Random graphs, structure and information search, cooperation and competition in networks, and applications in complex systems."

For citation: Pechnikov A.A. A pilot model of the scientific journal network in Russia: An intersection graph analysis. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 311–328. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.311-328. (In Russian)

#### Введение

Наукометрия – научная дисциплина, изучающая эволюцию науки количественными методами. Ответ на вопрос «Зачем?» дан в работе [1]: «... единственный правильный ответ – для управления. Потенциально библиометрические (и даже шире – наукометрические) показатели могут и должны использоваться на всех этапах процесса управления научно-исследовательской деятельностью. ... Без решения задачи управления любая

оценка, будь то наукометрическая или экспертная, бессмысленна. Но этого мало: чтобы управлять каким-либо процессом или объектом, нужно понимать его природу и закономерности его развития».

В последние годы, особенно начиная с 2022 года, ситуация с российскими научными журналами обсуждается очень активно. В работе [2] сказано: «... проблема в том, что в настоящее время в России национальная сеть научных журналов не рассматривается как единая система. Она не выделена как особый объект государственной политики и управления. ... Действия государства в этой сфере фрагментарны и формальны, им не хватает системности, стратегичности, содержательности и конструктивности».

С этим утверждением нельзя не согласиться, но следует сказать о том, что мы пока довольно плохо себе представляем, что такое «национальная сеть научных журналов как единая система». Можно было бы привести несколько различных определений понятия «система», используемых в зависимости от контекста, области знаний и целей исследования. Опираясь на классиков, отметим, что «... система может быть определена как совокупность элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой» [3], поэтому попробуем сформулировать, из каких элементов состоит сеть научных журналов и каковы отношения между этими элементами.

Начнем с элементов, которыми, очевидно, являются научные журналы. Следуя [4], научный журнал – это «... журнал, содержащий статьи и материалы о теоретических исследованиях, а также статьи и материалы прикладного характера, предназначенные для научных работников». Журналы, являясь «носителями научных статей» [5], представляют объекты, имеющие сложную структуру и характеризующиеся многими параметрами, такими как издатель, состав редакционных коллегий, возраст, число ежегодных выпусков и статей.

Но даже на такой простой и естественный вопрос, как «Сколько научных журналов издается в России?», существует несколько вариантов ответов.

Российская государственная библиотека в разделе «Статистические показатели 2024 года» сообщает, что в 2024 году выпускалось 3383 научных издания, в том числе 3293 журнала [6]. Если же использовать поиск в каталоге журналов Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU (далее – НЭБ) [7], то на февраль 2025 года в России на русском языке издается 11725 научных журналов, причем полные тексты на eLIBRARY.RU имеют 6222 из них.

Отношения между журналами представляют задачу, требующую специального тщательного исследования. Наиболее исследованными являются отношения цитирования (собственно говоря, на отношениях цитирования построены современные рейтинги журналов), авторства, связывающие авторов и журналы, в которых они публикуются, и соавторства. Гораздо менее исследованы отношения, возникающие при наличии общих учредителей или общих членов редакционных коллегий журналов.

Отношения между журналами многогранны и имеют разную природу, в совокупности формируя связи в сложной сети журнальной коммуникации. Построение адекватных математических моделей подобных объектов возможно с использованием подходов системного анализа на основе информации, содержащейся в библиометрических базах данных. С позиций системного анализа [8] на первом этапе требуется декомпозиция системы: считая фиксированным множество ее элементов, рассматривают различные слои, соответствующие конкретным отношениям. Исследование каждого слоя также подразумевает декомпозицию, но уже по подмножествам элементов, например, по подмножествам журналов различных научных направлений. На следующем этапе математические модели подсистем, соответствующих конкретным отношениям между журналами, могут быть синтезированы в более общую «концептуальную» модель.

Как сказано в [9]: «... наука может быть описана как сложная, самоорганизующаяся и постоянно развивающаяся многомасштабная сеть». Поэтому одним из важных направлений наукометрии является изучение научных сетей во всем их многообразии с использованием математических моделей и методов.

В англоязычной литературе для обозначения сетей, построенных на цитировании и соавторстве, появился термин «библиометрические сети» (bibliometric networks) (например, [10]). В России понятие «библиометрические сети» зафиксировано, например, в названии книги [5], посвященной «... вопросам анализа библиометрических сетей, возникающих в результате процесса цитирования научных статей, проиндексированных в библиографической базе данных».

Понятия «граф» и «сеть» часто воспринимаются как синонимичные. Например, в [11] сказано, что «... сети (или графы) выступают в качестве основополагающих структур в различных областях, включая социологию, биологию, неврологию и информатику». Мы исходим из того, что графом называется математический объект, к которому применимы методы теории графов, а о сетях говорится в контексте прикладных исследований. Хотя иногда в одной и той же статье можно встретить оба термина, смысл которых следует понимать из контекста.

Можно сказать, что библиометрические сети – это сети, построенные на отношениях между публикациями и/или их авторами, которые реализуются на основе списков соавторов и библиографических (пристатейных и прикнижных) списков, исследования которых проводятся с использованием информации, накапливаемой в библиографических базах данных. Следовательно, в качестве математических моделей таких сетей применяются соответствующие библиометрические графы.

В российских (и не только) библиометрических исследованиях наиболее изученными являются отношения цитирования. Основополагающей работой по структурному анализу сетей цитирования научных журналов, определяющей основные свойства таких сетей, является [12]. В работе российских исследователей [13] «... рассматривается сеть цитирования научных журналов, моделируемая взвешенным ориентированным графом, а также модели производных сетей – коцитирования и библиографического сочетания», построенные на основе библиографической информации о цитировании, извлеченной из БД RePEc [14]. В качестве еще одного примера можно привести ряд работ, основанных на данных Общероссийского математического портала MathNet.Ru [15]. Авторы (как разработчики) имеют доступ к базе данных, что позволяет исследовать указанную проблематику в области математических и компьютерных наук в России (например, [16]).

Заметим, что сети журналов, построенные на таких отношениях, как общие учредители и общие члены редколлегий журналов, тоже можно отнести к библиометрическим сетям, поскольку соответствующая информация хранится в современных библиографических системах.

Построение «концептуальной модели» национальной системы научных журналов России выходит за рамки данной статьи, основное внимание в работе сконцентрировано на одной из подсистем, формируемой на отношениях авторства. В 2024 году сотрудниками Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Математического института им. В.А. Стеклова и Института прикладных математических исследований КарНЦ РАН было проведено совместное исследование динамики соавторства в России для пяти научных направлений, результаты которого готовятся к печати. Данные, полученные в результате этого исследования, представляют собой хорошую базу для дальнейшей обработки и проведения пилотного, но достаточно глубокого исследования отношений между российскими научными журналами на уровне авторства, связывающего авторов и журналы, в которых они публикуются. В качестве базовой модели используется граф журнальных пересечений, введенный в [17] и представляющий новый тип библио-

графического графа. Основная цель данной работы заключается в разработке подхода к анализу сети российских журналов, основанного на новом библиографическом графе отношений между журналами и демонстрируемого на реальных данных eLIBRARY.RU с очевидной возможностью масштабирования. Представляется, что полученные результаты дают более глубокое понимание структуры отношений между журналами, что, в свою очередь, является шагом на пути к единой концептуальной модели национальной сети научных журналов России.

#### 1. Графы журнальных пересечений

Пусть имеется множество журналов  $J = \{1, ..., n\}$ , где каждый журнал идентифицируется его номером  $j \in J$ . Обозначим через A(j) множество авторов, имеющих публикации в журнале j. Считаем, что A(j) является множеством без повторяющихся элементов, то есть каждый автор учитывается один раз независимо от количества его статей в этом журнале.

Пересечение  $A(i) \cap A(j)$  содержательно задает подмножество авторов, имеющих публикации как в журнале A(i), так и в A(j). Тогда граф пересечений журналов по множествам авторов – это

$$G = G(J, E),$$

где  $J = \{1, ..., n\}$  – это множество вершин, а множество ребер

$$E = \{\{i, j\} \mid A(i) \cap A(j) \neq \emptyset\}.$$

Мощности множеств авторов журналов могут значительно отличаться между собой, поэтому рассмотрим модификацию графа журнальных пересечений с использованием такой меры близости множеств, как коэффициент сходства Жаккара, введенный еще в начале прошлого века. В современной записи (например, как в [18]) для нашего случая коэффициент сходства для журналов i и j можно записать так:

$$k_{ij} = \frac{\operatorname{card}(A(i) \cap A(j))}{\operatorname{card}(A(i) \cup A(j))},\tag{1}$$

где card(M) – мощность множества M. При этом  $0 \le k_{ij} \le 1$  и  $k_{ij} = 0$  при  $A(i) \cap A(j) \ne \emptyset$ ,  $k_{ij} = 1$  при A(i) = A(j),  $i \ne j$ . По определению будем считать  $k_{ii} = 0$ . Тогда граф пересечений, построенный с использованием коэффициента Жаккара, можно определить как

$$G_{KJ} = G(J, E, K),$$

где  $K = \{k_{ij}, i, j = 1, \dots, n\}, k_{ij}$  – вес ребра (i, j).
Назовем граф  $G_{KJ}$  графом близости журналов по коэффициенту сходства Жаккара, а  $k_{ij}$  – коэффициентом близости между журналами i и j.

Заметим, что при построении описанных графов журнальных пересечений существенным фактором является временной отрезок, на котором формируются соответствующие множества авторов журналов. Вряд ли имеет смысл построение графовых конструкций на множествах авторов, относящихся к различным отрезкам времени. Чтобы не усложнять обозначения графов пересечения дополнительными символами, в начале проводимого исследования следует акцентировать внимание на выбранном временном отрезке и дальше иметь его в виду.

#### 2. Исходные данные

Источником данных является библиографическая база данных РИНЦ (Российский индекс научного цитирования). РИНЦ содержит полную информацию о публикациях в российских научных журналах, начиная с 2005 года, и публикациях до 2005 года в случаях их цитирования в более поздних работах [7]. Журналы классифицированы в РИНЦ по семидесяти двум тематикам, определяемым в РИНЦ по рубрикам верхнего уровня ГРНТИ (см. [19], пояснение к полю «Тематика»). Для пилотного исследования выбраны по двадцать журналов из различных пяти тематик с большим количеством российских журналов, выходящих в настоящее время (в скобках – количество журналов): Химия (181), История. Исторические науки (680), Математика (250), Медицина и здравоохранение (1266), Физика (239). Акцентируем внимание на том, что в дальнейшем изложении речь идет о временном отрезке T = [2008, 2020].

При отборе журналов выполнялась проверка трех обязательных условий: включение в Russian Science Citation Index (RSCI) [20], год основания не позже 2000 и наличие полностью проиндексированного архива. Журналы отбирались последовательно по рейтингу RSCI, начиная с наивысшего. При нехватке журналов по трем обязательным условиям использовались следующие дополнительные условия: присутствие в рейтинге Science Index РИНЦ [21] и включение в «Белый список» (БС) Российского центра научной информации [22].

Приведем по два журнала каждой тематики, имеющих наивысший рейтинг Science Index РИНЦ за 2023 год:

- Успехи химии, Журнал неорганической химии;
- Археология, этнография и антропология Евразии, Российская археология;
- Успехи математических наук, Математический сборник;
- Российский кардиологический журнал, Терапевтический архив;
- Успехи физических наук, Акустический журнал.

Полные списки из двадцати журналов по каждой тематике приведены в Appendix 1<sup>1</sup>. В РИНЦ уникальные авторы идентифицируются по цифровому коду автора AuthorID. Исходные данные выбирались из базы данных РИНЦ и изначально представляли собой обезличенные списки уникальных кодов публикаций РИНЦ и списка кодов идентифицированных авторов, приложенного к каждой публикации.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>https://homepage.mi-ras.ru/ tche/download/appendix1.xlsx.

При индексации архивов не всегда возможно точно идентифицировать всех авторов, иногда информация о них ограничивается только фамилией и инициалами. Проверка в случае выбранных нами журналов за исследуемый период по каждой тематике показала менее 1% неидентифицированных авторов, что не оказывает существенного влияния на результаты. Далее речь идет только об идентифицированных авторах. Сводные данные по двадцати журналам каждой тематики из базы данных РИНЦ приведены в табл. 1.

Тематика	статьи	авторы	макс. журн. у автора	макс. статей у автора
Химия	41459	29528	13	195
История	21158	8614	8	146
Математика	15196	7503	10	74
Медицина	37437	34678	11	257
Физика	44834	35114	10	160

**Табл. 1.** Сводные данные по тематикам за 2008–2020 годы **Table 1.** Aggregated data by topic area, 2008–2020

Обозначения колонок:

- \* статьи суммарное количество статей по тематике;
- \* авторы общее количество идентифицированных авторов;
- \* макс. журн. у автора наибольшее количество журналов, в которых есть статьи одного и того же автора (возможно, в соавторстве);
- \* макс. статей у автора наибольшее количество статей у одного автора (возможно, в соавторстве).

Данные табл. 1 позволяют дать примерные оценки количества ученых, занимавшихся той или иной научной тематикой в 2008–2020 годах. Не раскрывая персональных данных, отметим интересный факт: для всех пяти рассматриваемых тематик ученые, имеющие наибольшее количество публикаций, не попадают даже в первую десятку ученых, опубликовавшихся в наибольшем количестве журналов.

# 3. Построение и сравнительный анализ графов близости журналов по тематикам

Сначала кратко опишем последовательность действий по построению графа близости журналов по математике как тематике, в содержательном плане наиболее хорошо известной автору и потенциальным читателям. Построение графов для остальных тематик аналогично.

Граф  $G_{KJ}^{math} = G(J, E, K)$ , может быть задан с помощью матрицы смежности; приведем ее фрагмент:

-	AA	AL	VMU	 TMI	UMN	FAP
AA	0	0.022	0.008	 0.056	0.096	0.135
AL		0	0.021	 0.006	0.021	0.002
VMU			0	 0.050	0.047	0.014
TMI				 0	0.224	0.080
UMN					0	0.123
FAP						0

Для обозначения элементов множества журналов используем соответствующие мнемонические коды с расшифровкой по мере необходимости, например, «AA» соответствует журналу «Алгебра и анализ», а «FAP» – «Функциональному анализу и его приложениям». Элементы матрицы вычислены по формуле (1) с учетом введенных обозначений.

Поскольку граф построен на множестве высокорейтинговых журналов каждой тематики, можно было заранее ожидать, что они имеют общих авторов, то есть ребер будет много. Действительно, граф  $G_{KJ}^{math}$  содержит 183 ребра из 190 возможных, то есть его плотность равна 0.96, и состоит из одной компоненты связности. Наиболее близкими являются «Труды Математического института имени В.А. Стеклова» (*TMI*) и «Успехи математических наук» (*UMN*), соответствующее значение выделено в матрице жирным шрифтом.

Распределение значений коэффициента близости аппроксимировано дискретной степенной функцией. На рис. 1 приведена диаграмма, показывающая количество ребер, попадающих в соответствующие полуинтервалы. Треть ребер имеет вес менее 0.01, а более половины ребер – менее 0.02.





Рис. 1. Распределение количества ребер графа  $G_{KJ}^{math}$  по полуинтервалам весов Fig. 1. Edge number distribution of graph  $G_{KJ}^{math}$  by half-intervals of weights

Перейдем к сравнительному анализу графов близости по данным, которые приведены в табл. 2.

	Химия	История	Математика	Медицина	Физика
Исходные					
графы близости					
Сумма весов ребер	8.16	3.81	5.90	4.97	5.80
Кол-во ребер	190	169	183	190	190
Кол-во компонент	1	1	1	1	1
Модулярность	0.092	0.375	0.171	0.172	0.135
Кол-во сообществ	4	3	3	4	3
Графы близости:					
вес ребра $\geq 0.01$					
Кол-во ребер	175	80	124	146	123
Кол-во компонент	1	1	1	1	1
Изолир. вершин	0	0	0	0	0
Модулярность	0.097	0.441	0.181	0.192	0.146
Кол-во сообществ	4	3	3	4	3
Графы близости:					
<b>вес ребра</b> > 0.04					
Кол-во ребер	53	32	59	27	50
Кол-во компонент	1	1	1	2	1
Изолир. вершин	3	1	1	3	4
Модулярность	0.232	0.518	0.232	0.404	0.237
Кол-во сообществ	3	3	3	5	6
Графы близости:					
вес ребра $\geq 0.1$					
Кол-во ребер	13	4	13	5	10
Кол-во компонент	2	2	2	3	3
Изолир. вершин	8	14	9	13	9
Модулярность	0.520	0.339	0.340	0.552	0.438
Кол-во сообществ	4	2	4	3	5

**Табл. 2.** Сводные данные для сравнительного анализа графов **Table 2.** Aggregated data for comparative analysis of graphs

Три графа тематик являются полными, граф по истории имеет наименьшее число ребер, а про граф по математике только что сказано выше. Однако суммарный вес ребер каждого графа показывает, что распределение весов в каждом случае свое.

Графики распределения весов ребер для пяти тематик на черно-белом рисунке выглядят неубедительно, поэтому мы избрали несколько иной способ для наглядного представления. Распределим все ребра графов по четырем группам (достаточно условно в смысле «сильные – слабые»): «сильные»,  $k_{ij} \ge 0.1$ ; «средние»,  $0.1 > k_{ij} \ge 0.04$ ; «слабые»,  $0.4 > k_{ij} \ge 0.01$ ; «очень слабые»,  $k_{ij} < 0.01$ . Тогда результат сравнения тематик по распределению весов ребер можно проиллюстрировать диаграммой на рис. 2. Примечателен тот факт, что для всех тематик, кроме истории, наибольшее количество ребер входит в группу «слабые», однако в различных долях. «Сильные» ребра составляют малые доли в каждой тематике, при этом для медицины, а в особенности для истории, они совсем незначительны.



**Рис. 2.** Распределение количества ребер по тематикам и группам **Fig. 2.** Edge number distribution by topics and groups

Перейдем к сравнению структуры графов, для чего, в частности, используем такие понятия, как сообщества и модулярность. Напомним, что модулярность – это одна из мер оценивания структуры сетей и графов; графы с высокой модулярностью имеют плотные связи между узлами внутри так называемых сообществ и слабые связи между узлами в различных сообществах. Значения коэффициентов модулярности Q по Ньюману [23] для исходных графов приведены в табл. 2 и показывают невысокие тенденции графов к разбиению (разбиение считается «хорошим», если Q больше 0.7). При этом в каждом случае мы имеем по три-четыре сформированных сообщества, объединение в которые можно интерпретировать содержательно. К примеру, одно из сообществ графа по математике содержит семь журналов, пять из которых издаются Математическим институтом имени В.А. Стеклова [17].

Теперь удалим в исходных графах все ребра, имеющие вес меньше 0.01. Для редуцированных графов значения основных характеристик приведены в табл. 2 в разделе «Графы близости: вес ребра  $\geq 0.01$ ».

Несмотря на то, что количество ребер в разных графах уменьшилось весьма различным образом, структурные характеристики графов практически не изменились: во всех случаях сохранились единственная компонента связности и количество сообществ при небольшом росте модулярности и уменьшении суммарного веса ребер.

Удалим из редуцированных графов все ребра, имеющие вес, меньший или равный 0.04; результаты приведены в табл. 2 в разделе «Графы близости: вес ребра > 0.04». Теперь наблюдаются существенные изменения, графы стали терять связность: везде появились изолированные вершины, в медицинском графе образовались две компоненты связности,

существенно уменьшился суммарный вес ребер. Модулярность существенно возросла, но количество сообществ (если не считать сообществами изолированные вершины) осталось почти тем же самым.

На последнем шаге рассмотрим графы, в которых оставлены только сильные ребра, то есть имеющие вес, больший или равный 0.1. В графах сохранились по две-три небольшие компоненты связности и от двух до пяти сообществ (см. раздел табл. 2 «Графы близости: вес ребра > 0.04»).

Очевидно, что графы разных тематик ведут себя по-разному при удалении ребер. Однако можно заметить и сходство. Пусть каждый граф – это объект, описываемый набором признаков, являющихся характеристиками табл. 2. Кластеризация, например, по методу Варда [24] дает разбиение вида {(история), (математика и физика), (химия и медицина)}, что говорит об определенном сходстве структур связности журналов, входящих в одну группу и очевидном «выпадении» графа по истории.

Проблема выявления ключевых вершин в графах и сетях исследуется давно [25,26]. Показатели влиятельности вершин в графе связаны с индексами центральности, для вычисления которых существуют различные подходы и интерпретации. Очевидное ограничение этих подходов заключается в том, что центральность, подходящая для одного приложения, может быть неприемлема для другого. Отличная формальная иллюстрация этого утверждения на графе с десятью вершинами дает так называемый «воздушный змей Крэкхарда» [27]. Выбор подходящей меры центральности для графов близости журналов в перспективе будет актуальной задачей. В данной работе для сравнения структуры графов близости журналов нам достаточно такой характеристики важности вершин, как их вес. В свою очередь, вес вершины определим как сумму весов ребер, инцидентных данной вершине.

На рис. 3 приведены графики весов вершин для каждой тематики, когда вершины каждого графа упорядочены по убыванию веса.



вес вершины



Отличия между различными тематиками очевидны. Функция весов по химии является для всех остальных функций ограничением сверху. Заметим, что все функции распределения весов вершин аппроксимированы линейными функциями.

#### 4. Граф близости тематик

Перенесем описанный и использованный выше подход исследования графов близости тематик на исследование связей между тематиками. Для этого рассмотрим граф  $G_{KJ}^{th} = G(T, L, K)$ , который назовем графом близости тематик. Здесь

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\} \equiv \{chem, hist, math, med, phys\}$$

является множеством вершин графа, соответствующих исследуемым тематикам. Соответственно,  $A(chem), \ldots A(phys)$  – это множества уникальных авторов, имеющих публикации в журналах данной тематики. Процедура построения таких множеств авторов очевидна.

Множество ребер определим, как и ранее,  $L = \{\{i, j\} \mid A(t_i) \cap A(t_j) \neq \emptyset\}$ , а множество весов ребер K вычислим по формуле (1) с точностью до обозначений.

Матрица смежности графа  $G_{KI}^{th}$  задана следующим образом:

ſ	-	chem	hist	math	med	phys ]
	chem	0	0.0024	0.0056	0.0021	0.0029
	hist		0	0.0012	0.021	0.002
	math			0	0.0019	0.0255
	med				0	0.0114
	phys					0

На рис. 4 изображен граф  $G_{KJ}^{th}$ .



**Рис. 4.** Граф близости тематик **Fig. 4.** Graph of topical proximity

Около названий вершин указан их вес, вычисленный как сумма весов ребер, инцидентных данной вершине, а толщина ребер примерно соответствует их весам.

К ожидаемым результатам относится сильная близость между химией и физикой, а также математикой и физикой.

Достаточно неожиданно выглядит наличие связей между историей и всеми четырьмя другими тематиками. Была проведена выборочная проверка некоторых авторов, чтобы

подтвердить наличие таких связей в виде реальных публикаций. В статьях [28,29] можно видеть одного и того же автора, хотя первый журнал относится к тематике «Химия», а второй – к тематике «История. Исторические науки». В статьях [30,31] мы также можем увидеть одного общего автора в журналах по истории и математике.

#### Заключение

Предложен подход к анализу сети журналов с использованием библиографического графа журнальных пересечений, основанного на бинарной операции пересечения множеств. Такой подход позволяет рассмотреть два уровня взаимодействия журналов, нижний из которых представляет собой отношения на множествах журналов, объединяемых в научные тематики, а верхний – отношения между тематиками, с использованием единых приемов и методов обработки исходных данных.

Подход продемонстрирован на относительно небольшом пилотном примере, однако он позволяет получить ряд результатов, свидетельствующих о перспективности его использования и возможностях его масштабирования.

К полученным результатам относятся:

1) примерные оценки численности ученых, занятых исследованиями в определенных научных тематиках, и возможность их сопоставления;

2) структура взаимодействия журналов данной тематики, учитывающая степень взаимодействия, с возможностями выявления компонент связности и сообществ, интерпретируемых содержательно, и ранжирования журналов;

3) структура взаимодействия научных тематик, показывающая степень их взаимовлияния через отношения между научными журналами и являющаяся в каком-то смысле прототипом «карты науки».

В техническом плане возможности масштабирования понятны как с точки зрения наращивания количества журналов по уже исследуемым тематикам, так и распространения подхода на другие тематики. Очевидно, что речь идет об исследованиях, базирующихся на данных РИНЦ, поскольку в России на сегодняшний день это единственная мощная библиографическая база, содержащая данные для таких исследований.

И вот здесь мы сталкиваемся с рядом вопросов, требующих дополнительного изучения и согласования. Во-первых, такая работа невозможна без согласия и участия РИНЦ. Вовторых, нужны надежные и всеобъемлющие данные на достаточно длительном временном отрезке, который должен быть уточнен в процессе исследований как адекватный в случае значительного увеличения количества журналов и тематик. Вполне возможно также, что придется уточнять критерии отбора журналов, если мы хотим сохранить их одинаковое количество по тематикам. В-третьих, придется дополнять и развивать модель на уровне связей между тематиками, поскольку существует большое количество высокорейтинговых мульти- и междисциплинарных журналов (хороший пример – Вестник Российской академии наук).

Возвращаясь на позиции системного анализа, следовало бы попытаться определить цели национальной системы научных журналов России, но такая грандиозная задача, как было сказано ранее, выходит за рамки данной статьи.

В завершение используем цитату из [32]: «... Наука и ее коммуникационная подсистема обладают способностью самоорганизации, поэтому и вся наука, и сеть научных журналов имеют свою структуру, более сложную, чем насаждаемые извне квартили WoS или категории Перечня BAK, и принципиально отличную от них. Научная политика и управление наукой, которые не стремятся к выявлению и учету естественной структуры науки и структуры ее коммуникационной подсистемы, сформировавшихся за счет самоорганизации, а навязывают ими придуманные иерархические схемы, по сути своей базируются на ложных основаниях. Для минимизации вредного воздействия такой политики и такого управления науке приходится прилагать значительные усилия, направленные на поиск всевозможных обходных путей ...». Надеемся, что результаты, изложенные в данной работе, являются маленьким шагом к выявлению естественной структуры сети научных журналов России, способствующим формированию целей и поисков решений для их достижения.

Конфликт интересов. Результаты, опубликованные в этой работе, не содержат персональных данных, в том числе уникальных кодов, по которым можно идентифицировать авторов..

**Conflicts of Interest.** No personal data, including unique codes, that can be used to identify the authors were disclosed in the results reported in this study.

#### Литература

- 1. *Новиков Д.А.* Померяемся «Хиршами»? (Размышления о наукометрии) // Высш. обр. в России. 2015. № 2. С. 5–13.
- 2. Семенов Е.В. О возрождении национальной сети научных журналов // Управл. наукой: теор. и практ. 2023. Т. 5, № 4. С. 10–13.
- 3. Берталанфи Л. История и статус общей теории систем. В кн.: Системные исследования. Методологические проблемы. Ежегодник. М.: Наука, 1973. С. 20–37.
- 4. ГОСТ Р 7.0.60-2020. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Издания. Основные виды. Термины и определения. М.: Стандартинформ, 2020. 46 с.
- 5. *Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г.* Библиометрические сети научных статей и журналов. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2021. 334 с.
- 6. Российская государственная библиотека. Статистика печати. URL: https://www.rsl.ru/ru/rkp/gos-bbu/statistika-pechati-1i-spravochnaya-rabota.
- 7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU. URL: https://www.elibrary.ru.
- 8. Новиков А.М., Новиков Д.А. Методология. М.: Синтег, 2007. 668 с.
- Fortunato S., Bergstrom C.T., Evans J.A., Helbing D., Milojević S., Petersen A.M., Radicchi F., Sinatra R., Uzzi B., Vespignani A., Waltman L., Wang D., Barabási A.-L. Science of science // Science. 2018. V. 359, No 6379. Art. 0185. https://doi.org/10.1126/science.aa00185.
- 10. Perianes-Rodriguez A., Waltman L., van Eck N.J. Constructing bibliometric networks: A comparison between full and fractional counting // J. Inform. 2016. V. 10, No 4. P. 1178–1195.
- 11. Malliaros F.D., Vazirgiannis M. Clustering and community detection in directed networks: A survey // Phys. Rep. 2013. V. 533, No 4. P. 95–142.
- Leydesdorff L., Rafols I. Indicators of the interdisciplinarity in journals diversity, centrality and citations // J. Inform. 2011. V. 5, No 1. P. 87–100.

- 13. Бредихин С.В., Ляпунов В.М., Щербакова Н.Г. Структура сети цитирования научных журналов // Пробл. информ. 2017. № 2. С. 38–52.
- 14. RePEc. General principles. URL: http://repec.org.
- 15. Общероссийский портал Math-Net.Ru. URL: https://www.mathnet.ru.
- 16. Знаменская Е.А., Печников А.А., Чебуков Д.Е. Анализ Russian Science Citation Index с использованием данных Math-Net.ru // Электр. библ. 2023. Т. 26, № 6. С. 778–795.
- 17. Печников А.А. Граф журнального пересечения: определение, модификации и содержательный пример // УБС. 2025. Вып. 114. С. 122–137.
- Levandowsky M., Winter D. Distance between sets // Nature. 1971. V. 234, No 5323. P. 34–35. https://doi.org/10.1038/234034a0.
- 19. Каталог журналов. URL: https://www.elibrary.ru/titles.asp.
- 20. Список журналов, входящих в базу данных RSCI. URL: https://elibrary.ru/project rsci.asp.
- 21. О новом рейтинге журналов SCIENCE INDEX. URL: https://elibrary.ru/projects/science\_index/ranking\_info.asp.
- 22. «Белый список» научных журналов. URL: https://journalrank.rcsi.science/ru/.
- Newman M.E.J. Modularity and community structure in networks // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2006. V. 103, No 23. P. 8577–8582. https://doi.org/10.1073/pnas.0601602103.
- Ward J.H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function // J. Am. Stat. Assoc. 1963. V. 58, No 301. P. 236–244. https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500845.
- Bonacich P. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification // J. Math. Sociol. 1972. V. 2, No 1. P. 113–120. https://doi.org/10.1080/0022250X.1972.9989806.
- Freeman L.C. A set of measures of centrality based on betweenness // Sociometry. 1977. V. 40, No 1. P. 35–41. https://doi.org/10.2307/3033543.
- Krackhardt D. Assessing the political landscape: Structure, cognition, and power in organizations // Adm. Sci. Q. 1990. V. 35, No 2. P. 342–369. https://doi.org/10.2307/2393394.
- 28. Азарова И.Н., Кучкина А.Ю., Барам Г.И., Гольдберг Е.Л. Предсказание объемов удерживания пептидов в градиентной обращенно-фазовой ВЭЖХ // Биоорган. хим. 2008. Т. 34, № 2. С. 171–176.
- Гольдберг Е.Л., Купер К.Э., Слюсаренко И.Ю. Предварительные результаты использования метода вычислительной рентгеновской томографии для анализа археологических деревянных изделий // ПАЭАССТ. 2010. Т. 16. С. 176–180.
- Оленченко В.В., Цибизов Л.В., Осипова П.С., Чаргынов Т.Т., Виола Б.Т., Колобова К.А., Кривошапкин А.И. Особенности применения 2D-электротомографии в пещерах // АЭАЕ. 2020. Т. 48, № 4. С. 67–74.
- 31. *Мариненко А.В., Эпов М.И., Оленченко В.В.* Решение прямых задач электротомографии для сред с высокопроводящими неоднородностями сложной формы на примере кустовой площадки месторождения // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 1. С. 63–73.
- 32. Семёнов Е.В. Развитие сети научных журналов в России: стратегические, технологические и организационные вопросы // Соц. наука и соц. практ. 2023. Т. 11, № 3. С. 116–140.

#### References

- 1. Novikov D.A. Who is winning the H-index race? (Reflections on scientometrics). *Vyssh. Obraz.* Ross., 2015, no. 2, pp. 5–13. (In Russian)
- 2. Semenov E.V. On the revival of the national network of academic journals. Upr. Naukoi: Teor. Prakt., 2023, vol. 5, no. 4, pp. 10–13. (In Russian)
- Von Bertalanffy L. The history and status of general systems theory. In: Sistemnye issledovaniya. Metodologicheskie problemy. Ezhegodnik [Systemic Studies. Methodological Problems. Yearbook]. Moscow, Nauka, 1973, pp. 20–37. (In Russian)
- 4. State Standard 7.0.60-2020. System of standards on information, librarianship, and publishing. Publications. Basic types. Terms and definitions. Moscow, Standartinform, 2020. 46 p. (In Russian)
- Bredikhin S.V., Lyapunov V.M., Shcherbakova N.G. Bibliometricheskie seti nauchnykh statei i zhurnalov [Bibliometric Networks of Scientific Articles and Journals]. Novosibirsk, IVMi Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2021. 334 p. (In Russian)
- 6. Russian State Library. Printing statistics. (In Russian) URL: https://www.rsl.ru/ru/rkp/gos-bbu/statistika-pechati-1i-spravochnaya-rabota.
- 7. Scientific Electronic Library eLIBRARY. URL: https://www.elibrary.ru. (In Russian)
- 8. Novikov A.M., Novikov D.A. *Metodologiya* [Methodology]. Moscow, Sinteg, 2007. 668 p. (In Russian)
- Fortunato S., Bergstrom C.T., Evans J.A., Helbing D., Milojević S., Petersen A.M., Radicchi F., Sinatra R., Uzzi B., Vespignani A., Waltman L., Wang D., Barabási A.-L. Science of science. Science, 2018, vol. 359, no. 6379, art. eaao0185. https://doi.org/10.1126/science.aao0185.
- Perianes-Rodriguez A., Waltman L., van Eck N.J. Constructing bibliometric networks: A comparison between full and fractional counting. J. Inform., 2016, vol. 10, no. 4, pp. 1178–1195. https://doi.org/10.1016/j.joi.2016.10.006.
- Malliaros F.D., Vazirgiannis M. Clustering and community detection in directed networks: A survey. *Phys. Rep.*, 2013, vol. 533, no. 4, pp. 95–142. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2013.08.002.
- Leydesdorff L., Rafols I. Indicators of the interdisciplinarity of journals: Diversity, centrality, and citations. J. Inform., 2011, vol. 5, no. 1, pp. 87–100. https://doi.org/10.1016/j.joi.2010.09.002.
- Bredikhin S.V., Lyapunov V.M., Shcherbakova N.G. The structure of the citation network of scientific journals. *Probl. Inf.*, 2017, no. 2, pp. 38–52. (In Russian)
- 14. RePEc. General principles. URL: http://repec.org.
- 15. Math-Net.Ru: All-Russian mathematical portal. URL: https://www.mathnet.ru. (In Russian)
- Znamenskaya E.A., Pechnikov A.A., Chebukov D.E. Analysis of the Russian Science Citation Index according to Math-Net.ru data. *Electron. Bibl.*, 2023, vol. 26, no. 6, pp. 778–795. (In Russian)
- Pechnikov A.A. Journal intersection graph: Definition, modifications, and a meaningful example. UBS, 2025, no. 114. pp. 122–137. (In Russian)

- Levandowsky M., Winter D. Distance between sets. *Nature*, 1971, vol. 234, no. 5323, pp. 34–35. https://doi.org/10.1038/234034a0.
- 19. Journal Catalogue. URL: https://www.elibrary.ru/titles.asp. (In Russian)
- 20. RSCI list of journals. URL: https://elibrary.ru/project\_rsci.asp. (In Russian)
- 21. About the new journals ranking system SCIENCE INDEX. (In Russian) URL: https://elibrary.ru/projects/science\_index/ranking\_info.asp.
- 22. The "white list" of scientific journals. URL: https://journalrank.rcsi.science/ru/. (In Russian)
- Newman M.E.J. Modularity and community structure in networks. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 2006, vol. 103, no. 23, pp. 8577–8582. https://doi.org/10.1073/pnas.0601602103.
- 24. Ward J.H., Jr. Hierarchical grouping to optimize an objective function. J. Am. Stat. Assoc., 1963, vol. 58, no. 301, pp. 236–244. https://doi.org/10.1080/01621459.1963.10500845.
- Bonacich P. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. J. Math. Sociol., 1972, vol. 2, no. 1, pp. 113–120. https://doi.org/10.1080/0022250X.1972.9989806.
- Freeman L.C. A set of measures of centrality based on betweenness. Sociometry, 1977, vol. 40, no. 1, pp. 35–41. https://doi.org/10.2307/3033543.
- Krackhardt D. Assessing the political landscape: Structure, cognition, and power in organizations. Adm. Sci. Q., 1990, vol. 35, no. 2, pp. 342–369. https://doi.org/10.2307/2393394.
- Azarova I.N., Kuchkina A.Yu., Baram G.I., Goldberg E.L. Prediction of peptide retention volumes in gradient reversed phase HPLC. *Russ. J. Bioorg. Chem.*, 2008, vol. 34, no. 2, pp. 156–161. https://doi.org/10.1134/S1068162008020039.
- Goldberg E.L., Kuper K.E., Slyusarenko I.Yu. Preliminary results on the use of computational X-ray tomography for the analysis of archaeological wooden products. *PAEASST*, 2010, vol. 16, pp. 176–180. (In Russian)
- Olenchenko V.V., Tsibizov L.V., Osipova P.S., Chargynov T.T., Viola B.T., Kolobova K.A., Krivoshapkin A.I. Application of 2D electrical resistivity tomography in caves. *AEAE*, 2020, vol. 48, no. 4, pp. 67–74. (In Russian)
- Marinenko A.V., Epov M.I., Olenchenko V.V. Solving direct problems of electrical resistivity tomography for media with high-conductivity irregular-shaped heterogeneities by an example of a multiple well platform. J. Appl. Ind. Math., 2019, vol. 13. no. 1, pp. 93–102. https://doi.org/10.1134/S1990478919010113.
- 32. Semenov E.V. Developing a network of scientific journals in Russia: Strategic, technological, and organizational problems. *Sotsiol. Nauka Sots. Prakt.*, 2023, vol. 11, no. 3, pp. 116–140. (In Russian)

#### Информация об авторах

**Андрей Анатольевич Печников**, доктор технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Карельский научный центр Российской академии наук

E-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0683-0019

Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки | 2025;167(2):311-328

#### Author Information

Andrey A. Pechnikov, Dr. Sci. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, Karelian Research Centre, Russian Academy of Sciences
 E-mail: pechnikov@krc.karelia.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0683-0019

Поступила в редакцию 10.03.2025 Принята к публикации 17.04.2025 Received March 10, 2025 Accepted April 17, 2025

#### ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5: 539.3 https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350

## Нелинейный гидроупругий отклик стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью, при продольных колебаниях его противоположной стенки

### В.С. Попов<sup>1,2</sup><sup>⊠</sup>, А.А. Попова<sup>1</sup>, А.В. Черненко<sup>1</sup>, М.В. Попова<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия <sup>2</sup>Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук, г. Саратов, Россия

<sup>3</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

 $\bowtie$  vic p@bk.ru

#### Аннотация

Поставлены и решены задачи гидроупругости для математического моделирования нелинейного отклика стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью. Исследован плоский канал с параллельными жесткими стенками для случая продольных колебаний нижней стенки, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, за счет ее взаимодействия через слой жидкости в канале с противоположной вибрирующей стенкой. Динамика жидкости в канале изучена в пределах пульсирующего течения Куэтта с учетом инерции ее движения. Движение нижней стенки канала рассмотрено в рамках модели «масса на пружине», имеющей симметричную характеристику жесткости с кубической нелинейностью. Учет диссипативных свойств вязкой жидкости позволяет пренебречь влиянием начальных условий и перейти к рассмотрению краевой задачи математической физики для исследования установившихся вынужденных колебаний стенки канала. Асимптотический анализ данной задачи методом возмущений позволил свести ее к рассмотрению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, обобщающего уравнение Дуффинга. Его решение проведено методом Крылова-Боголюбова, что позволило определить нелинейный гидроупругий отклик стенки на основном резонансе в виде ее амплитудной и фазовой частотных характеристик. Указанные характеристики имеют вид неявных функций, что требует их численного исследования. Приведен пример такого исследования, который показал существенное влияние учета инерции движения жидкости и вариации толщины слоя жидкости в канале на амплитуду колебаний, резонансные частоты, а также частотный диапазон неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением амплитуд.

Ключевые слова: нелинейные гидроупругие колебания, жесткая стенка, вязкая жидкость, пульсирующее течение Куэтта, нелинейно-упругое закрепление, жесткая кубическая нелинейность, метод возмущений, метод Крылова–Боголюбова, гидроупругий отклик, математическое моделирование **Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание по теме 125020501400-6).

Для цитирования: Попов В.С., Попова А.А., Черненко А.В., Попова М.В. Нелинейный гидроупругий отклик стенки узкого канала, заполненного пульсирующей вязкой жидкостью, при продольных колебаниях его противоположной стенки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 329–350. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350.

#### ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350

## Nonlinear hydroelastic response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid due to longitudinal vibrations of its opposite wall

V.S. Popov<sup> $1,2 \bowtie$ </sup>, A.A. Popova<sup>1</sup>, A.V. Chernenko<sup>1</sup>, M.V. Popova<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia <sup>2</sup>Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences, Saratov, Russia <sup>3</sup>Saratov State University, Saratov, Russia

 $\bowtie$  vic p@bk.ru

#### Abstract

The problems of hydroelasticity that arise during the mathematical modeling of the nonlinear response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid were formulated and solved. The plane channel has parallel rigid walls, where the bottom wall with nonlinear elastic supports at the ends undergoes longitudinal vibrations due to its interaction with the opposite vibrating wall through the liquid layer. The liquid dynamics in the channel were analyzed as a pulsating Couette flow with the consideration of the liquid inertia. The movement of the bottom wall of the channel was described using the mass-on-spring model characterized by symmetric stiffness with cubic nonlinearity. With the dissipative properties of the viscous liquid taken into account, the influence of the initial conditions became negligible, making it possible to focus on the formulation of a boundary value problem of mathematical physics for steady-state forced vibrations of the channel wall. Following the asymptotic analysis by the perturbation method, the problem was reduced to a nonlinear ordinary differential equation that generalizes the Duffing equation. The equation was solved by the Krylov–Bogolyubov method, and the nonlinear hydroelastic response of the wall to the primary resonance was determined in the form of its amplitude- and phase-frequency characteristics. The nonlinear hydroelastic response characteristics were expressed as implicit functions and require further numerical investigation. An example of such an investigation was provided, demonstrating that taking into account the liquid inertia and varying thickness of the liquid layer in the channel significantly affects the amplitude of vibrations, resonant frequencies, as well as the range of unstable vibrations with sudden amplitude changes.

**Keywords:** nonlinear hydroelastic vibrations, rigid wall, viscous liquid, pulsating Couette flow, nonlinear elastic support, hardening cubic nonlinearity, perturbation method, Krylov–Bogolyubov method, hydroelastic response, mathematical modeling

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state assignment (theme no. 125020501400-6).

For citation: Popov A.A., Popova A.A., Chernenko A.V., Popova M.V. Nonlinear hydroelastic response of the wall of a narrow channel filled with pulsating viscous liquid due to longitudinal vibrations of its opposite wall. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 329–350. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.329-350. (In Russian)

#### Введение

Моделирование и расчет поведения различных конструкций связаны с рассмотрением статических и динамических проблем механики. Одно из современных ее направлений составляют задачи гидроаэроупругости, в рамках которых изучается взаимодействие твердых тел с упругим закреплением или упруго деформируемых тел с жидкостью или газом [1–3]. Ограничимся ниже кратким указанием работ, наиболее близких к тематике нашего исследования и посвященных колебаниям упругих балок и пластин, а также твердых тел, взаимодействующих с жидкостью.

В работах [4,5] в линейной постановке решены задачи о свободных колебаниях упругой круглой пластины, являющейся частью жесткой границы раздела, над которой находится безграничный объем неподвижной идеальной жидкости. Основной подход указанных работ – использование разделения переменных и задание пространственной формы колебаний пластины, соответствующей случаю ее колебаний в вакууме. В исторически первой работе [4] использован энергетический метод Рэлея для низшего тона колебаний жестко защемленной пластины, а в [5] решена связанная задача гидроупругости с учетом обертонов пластины для жесткого, шарнирного и сводного опираний ее на контуре. В [6] подход из [4] дополнен рассмотрением вязкости жидкости путем введения безразмерного параметра, который по факту является обратным значением известного параметра подобия – числа Уомерсли [7], используемого при изучении напорных пульсирующих движений вязкой жидкости. В [8] в рамках подхода, аналогичного [5], рассмотрена плоская задача собственных колебаний консольно закрепленной балки Бернулли – Эйлера, окруженной неограниченным объемом вязкой жидкости, и представлены сравнения полученного решения с экспериментом. Задача динамики жидкости решена в упрощенной постановке за счет задания экспоненциально убывающего профиля скорости в направлении изгиба балки.

Как пример исследования статической проблемы гидроупругости следует отметить работу [9], посвященную определению площади контакта элемента системы жидкостного охлаждения в виде упругой оболочки плоскоовального сечения с двумя параллельными жесткими пластинами, между которыми он заключен с начальным зазором, за счет изменения гидростатического давления внутри элемента. Моделирование выполнено в предположении плоской деформации при рассмотрении контура поперечного сечения оболочки как балки-полоски Бернулли – Эйлера. Выполнено сравнение аналитического решения с поставленным экспериментом, которое показало правомочность предложенного подхода. В [10,11] на базе конечно-элементного алгоритма численно исследованы гидроупругая устойчивость и собственные колебания пластинки, образующей верхнюю стенку канала прямоугольного сечения, взаимодействующей с потоком идеальной жидкости. Исследование [11] нацелено на изучение пассивного демпфирования колебаний посредством замыкания внешней электрической цепью из резистора и катушки индуктивности пьезоэлемента, закрепленного на внешней поверхности пластины. Отметим также пристатейные списки названных работ, содержащие актуальные источники с информацией по численному исследованию проблем гидроупругости пластин, в том числе смарт-конструкций с пьезоэлементами, для реализации активных и пассивных способов управления их колебаниями.

Среди работ о взаимодействии вибрирующих жестких тел с жидкостью выделим [12–14], посвященные исследованию волновых процессов в идеальной и вязкой жидкости. Возможность подавления амплитуд волн в безнапорном мелководном канале вблизи вибрирующего на дне жесткого штампа установлена в [12], для аналогичного канала в [13] исследовано взаимодействие нелинейных уединенных волн или группы волн с упруго закрепленной жесткой стенкой. Возбуждение и эволюция нелинейных вязких волн при продольных колебаниях жесткой пластины в вязкой жидкости аналитически исследованы в [14].

Укажем на экспериментальные исследования взаимодействия жесткого тела и окружающей его вязкой жидкости, помещенных в замкнутую полость, при продольных или вращательных колебаниях этой полости [15,16]. В данных работах обнаружен эффект вибрационной подъемной силы, возникающей в вязкой жидкости вблизи стенки вибрирующей полости.

Математическое моделирование движения вязкой жидкости за счет продольных вибраций жестких или жестких пористых стенок выполнено в [17,18]. В [19] проведено моделирование движения вязкой жидкости при вращательных колебаниях пористой жесткой сферы, помещенной в нее, а в [20,21] аналитически исследовано движение вязкой жидкости между криволинейными стенками, одна из которых пористая, при их радиальных и окружных колебаниях.

Отметим также работы [22–24], в которых рассмотрены задачи колебаний твердых тел на линейно-упругом подвесе, взаимодействующих с вязким газом. В [22] в плоской постановке исследовано взаимодействие смазочного слоя газа и стенки газодинамического подшипника. Упругая податливость стенки за счет давления учитывается в виде дополнительного изменения толщины слоя газа по линейному закону с коэффициентом пропорциональности, определяемым модулем упругости материала стенки. Численное моделирование взаимодействия вязкого газа, с учетом термодинамических процессов в нем, и затвора клапана при его открытии проведено в [23,24]. Движение затвора клапана смоделировано в рамках модели «масса на пружине», а для численного решения уравнений движения газа использован модифицированный метод Годунова. В работах [25,26] представлено аналитическое решение задач о поперечных колебаниях жесткой стенки узкого канала в виде круглой [25] или прямоугольной [26] пластины на упругом подвесе с кубической нелинейностью, взаимодействующей с пульсирующим слоем газа в канале. Рассмотрены плоская [25] и осесимметричная [26] задачи при использовании для газа модели вязкой баротропной среды в изотермическом состоянии. В [27, 28] изучены продольные колебания стенок, имеющих линейно-упругое закрепление на торцах и взаимодействующих с вязкой жидкостью. Случай возбуждения продольных колебаний пластины, закрепленной по торцам на пружинах, совершающей поперечные колебания и помещенной в поток вязкой жидкости, ограниченный жесткими стенками, рассмотрен в [27]. В работе [28] аналитически решена задача о продольных колебаниях жесткой стенки клиновидного канала, имеющей линейно-упругое закрепление на торцах. Постановка и решение задачи гидроупругих колебаний торцевой стенки узкого плоского канала в случае учета кубической нелинейности ее упругого закрепления и взаимодействия с вязкой пульсирующей жидкостью, заполняющей канал, осуществлены в [29].

Проведенный анализ опубликованных исследований показывает, что за рамками рассмотрения остались вопросы постановки и решения задачи о продольных колебаниях стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, возбуждаемых вибрацией противоположной стенки через пульсирующий слой вязкой жидкости, находящейся между ними.

#### 1. Постановка проблемы, основные положения и допущения

Рассмотрим механическую колебательную систему, состоящую из двух параллельных друг другу жестких стенок, между которыми находится жидкость (см. рис. 1). Стенки рассматриваемого канала представляют собой прямоугольные пластины со сторонами 2l и b. Полагая, что размер  $b \gg 2l$ , перейдем к рассмотрению плоской задачи. Расстояние между пластинами  $\delta \ll l$ . Законы изменения давления в сечениях канала на его торцах считаем известными, на левом торце – это  $p_{-l}$ , а на правом –  $p_{+l}$ . Верхняя стенка совершает продольные колебания по заданному закону. Нижняя (ведомая) стенка на торцах имеет нелинейно-упругое закрепление, позволяющее совершать ей только продольные перемещения за счет взаимодействия с жидкостью в канале. Для определенности считаем, что торцевое закрепление нижней стенки имеет симметричную характеристику жесткости с кубической нелинейностью, а амплитуды колебаний стенок канала существенно меньше его длины 2l. Жидкость, заполняющую канал, рассмотрим в рамках модели ньютоновской вязкой жидкости. Изменение температуры стенок канала и жидкости считаем незначительным по сравнению с быстро меняющимся колебательным процессом, т.е. положим ее постоянной в пределах достаточно большого цикла колебаний. Плотность жидкости примем постоянной, исходя из того, что скорость ее движения, как и скорость движения стенок канала, значительно меньше скорости звука в изотермическом состоянии, т.е. характерное число Маха значительно меньше единицы. В связи с рассмотрением изотермического состояния примем коэффициент кинематической вязкости жидкости постоянным, учитывая, что этот коэффициент можно считать не зависящим от давления [30, 31]. Действием силы тяжести ввиду узости канала пренебрегаем. Введем декартову систему координат Oxz, начало которой расположим в центре внутренней поверхности нижней стенки канала в невозмущенном состоянии. Учет вязкости жидкости позволяет сосредоточиться на изучении установившихся вынужденных нелинейных колебаний нижней стенки канала, так как ее свободные колебания в течение короткого времени затухают [32].

Закон движения верхней стенки считаем гармоническим:

$$x_2 = x_{2m} f_2(\omega t), \quad f_2(\omega t) = \sin(\omega t + \varphi_2), \tag{1}$$

здесь  $z_{2m}$  – амплитуда колебаний верхней стенки,  $\omega$  – частота,  $\varphi_2$  – начальная фаза, t – время.



Рис. 1. Схематичный вид колебательной системы в виде узкого плоского канала: 1 – верхняя (ведущая) стенка канала, совершающая продольные гармонические колебания; 2 – нижняя (ведомая) стенка канала, имеющая нелинейно-упругое закрепление на торцах; 3 – вязкая жидкость Fig. 1. Schematic view of the vibration system in the form of a narrow plane channel: 1 – upper (driving) wall of the channel performing longitudinal harmonic vibrations; 2 – lower (driven) wall of the channel with nonlinear elastic supports at the ends; 3 – viscous liquid

Уравнение движения нижней стенки в рамках модели «масса на нелинейно-упругой пружине» в подходе Лагранжа представим в виде

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + F(x_1) = N_f, \tag{2}$$

где  $F(x_1)$  – восстанавливающая сила нелинейно-упругого закрепления;  $N_f$  – возмущающая сила, обусловленная вибрацией верхней стенки канала и пульсацией давления на его торцах;  $m_1$  – масса нижней стенки.

Закон движения нижней стенки представим в виде  $x_1 = x_{1m} f_1(\omega_* t)$ , где  $x_{1m}$  – амплитуда нелинейных колебаний нижней стенки,  $f_1(\omega_* t)$  – функция времени,  $\omega_*$  – характерная частота нелинейных колебаний нижней стенки.

Восстанавливающая сила нелинейно-упругого закрепления на торцах имеет линейную и нелинейную составляющие. Первая пропорциональна смещению нижней стенки, а вторая пропорциональна кубу смещения нижней стенки [33,34], т.е.

$$F(x_1) = n_1 x_1 + n_3 x_1^3. aga{3}$$

Здесь  $n_1$  – коэффициент жесткости линейной составляющей,  $n_3$  – коэффициент жесткости нелинейной составляющей. Далее рассматриваем случай жесткой нелинейности, т. е. полагаем  $n_3 > 0$ .

Возмущающая сила  $N_f$  определяется напряжением сдвига вязкой жидкости  $q_{zx} = \rho \nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)$  [30,31], действующим на поверхности контакта нижней стенки с жидкостью. С учетом того, что представленное соотношение для напряжения соответствует описанию движения жидкости в подходе Эйлера [30], выражение для возмущающей силы запишем в виде

$$N_f = \int_0^b \int_{-l}^l \left( q_{zx} + x_1 \frac{\partial q_{zx}}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} dx dy = b\rho\nu \int_{-l}^l \left( 1 + x_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} dx.$$
(4)

Для определения напряжения сдвига вязкой жидкости необходимо совместно с (2)–(4) рассмотреть уравнения движения жидкости, т. е. уравнения Навье–Стокса, замыкаемые уравнением неразрывности для среды постоянной плотности. Для плоской задачи в подходе Эйлера эти уравнения во введенной системе координат можно записать следующим образом [30, 31]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$
(5)

Здесь p – давление жидкости,  $V_z$  – проекция скорости жидкости на ось Oz,  $V_x$  – проекция скорости жидкости на ось Ox,  $\rho$  и  $\nu$  – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно.

Граничные условия уравнений (5) – это условия отсутствия скольжения вязкой жидкости на поверхности ее контакта с вибрирующими стенками канала. Эти условия представляют собой совпадение скоростей жидкости и стенок канала на границах их контакта:

$$V_x + x_{1m} f_1(\omega_* t) \frac{\partial V_x}{\partial x} = x_{1m} \frac{df_1(\omega_* t)}{dt}, \quad V_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$
  

$$V_x + x_{2m} f_2(\omega t) \frac{\partial V_x}{\partial x} = x_{2m} \frac{df_2(\omega t)}{dt}, \quad V_z = 0 \quad \text{при} \quad z = \delta.$$
(6)

При записи (6) учтено, что движение жидкости рассматривается в подходе Эйлера, а движение стенок канала – в подходе Лагранжа [30,31].

Кроме того, необходимы граничные условия для давления в торцевых сечениях канала. Сформулируем их в предположении, что на торцах канал примыкает к достаточно большим торцевым полостям, заполненным той же жидкостью, давление в которых задано, т. е. пульсирует по известному закону. В этом случае давление в торцевом сечении канала совпадает с заданным давлением в соответствующей торцевой полости, т. е.

$$p = p_{-l}(\omega t)$$
 при  $x = -l$ ,  $p = p_{+l}(\omega t)$  при  $x = l$ . (7)

Изучение режима установившихся вынужденных нелинейных колебаний в рассматриваемой колебательной системе позволяет исключить из рассмотрения начальные условия, так как их влияние за счет вязкости жидкости быстро перестает сказываться. Таким образом, сформулирована краевая задача гидроупругости (1)–(7) для исследования нелинейных продольных колебаний нижней (ведомой) стенки рассматриваемого канала.

# 2. Асимптотический анализ сформулированной задачи, уравнение продольных нелинейных гидроупругих колебаний стенки канала

В рассматриваемой постановке имеют место следующие соотношения:

$$\frac{x_{2m}}{x_{1m}} \sim 1, \quad \frac{x_{2m}}{l} \ll 1, \quad \frac{\delta}{l} \ll 1.$$

Учитывая их, введем в рассмотрение два независимых малых параметра  $\psi = \delta/l \ll 1$ ,  $\lambda = x_{1m}/l \ll 1$  и следующие безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta}, \quad \tau = \omega_* t, \quad V_x = x_{1m} \omega_* U_{\xi}, \quad V_z = \psi x_{1m} \omega_* U_{\zeta},$$
$$p = \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta \psi} P, \quad p_{-l} = \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta \psi} P_{-l}, \quad p_{+l} = \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta \psi} P_{+l}.$$
(8)

В переменных (8) уравнения динамики жидкости (5), их краевые условия (6), (7) и выражение для возмущающей силы (4) примут вид

$$Wo^{2} \left[ \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \tau} + \lambda \left( U_{\xi} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + U_{\zeta} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^{2} U_{\xi}}{\partial \zeta^{2}} + \psi^{2} \frac{\partial^{2} U_{\xi}}{\partial \xi^{2}},$$
  
$$\psi^{2} Wo^{2} \left[ \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \tau} + \lambda \left( U_{\xi} \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \xi} + U_{\zeta} \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^{2} \left( \psi^{2} \frac{\partial^{2} U_{\zeta}}{\partial \xi^{2}} + \frac{\partial^{2} U_{\zeta}}{\partial \zeta^{2}} \right), \qquad (9)$$
  
$$\frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$U_{\xi} + \lambda f_1(\tau) \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau}, \quad U_{\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0,$$
(10)

$$U_{\xi} + \lambda \frac{x_{2m}}{x_{1m}} f_2(\omega \tau / \omega_*) \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{df_2(\omega \tau / \omega_*)}{d\tau}, \quad U_{\zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 1,$$

$$P = P_{-l}(\omega \tau / \omega_*)$$
 при  $\xi = -1$ ,  $P = P_{+l}(\omega \tau / \omega_*)$  при  $\xi = 1$ , (11)

$$N_f = b l \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta} \int_{-1}^1 \left( 1 + \lambda f_1(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left[ \psi^2 \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right] \Big|_{\zeta=0} d\xi.$$
(12)

Здесь выделен параметр подобия рассматриваемой задачи  $Wo^2 = \delta^2 \omega_* / \nu$  – квадрат числа Уомерсли [7,34].

Пренебрегая в (9), (12) членами при введенном в рассмотрение малом параметре  $\psi^2$ , перейдем аналогично гидродинамической теории смазки [31] к уравнениям тонкого слоя вязкой жидкости, но с удержанием локальных и конвективных членов инерции:

$$Wo^{2} \left[ \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \tau} + \lambda \left( U_{\xi} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + U_{\zeta} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^{2} U_{\xi}}{\partial \zeta^{2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} = 0,$$
(13)

а также получим следующее выражение для возмущающей силы:

$$N_f = b l \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} + \lambda f_1(\tau) \frac{\partial^2 U_{\xi}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=0} d\xi.$$
(14)

Проведем асимптотический анализ задачи (13) с граничными условиями (10), (11) методом возмущений [35,36]. Для этого рассмотрим следующие разложения искомых функций по малому параметру  $\lambda$ :

$$U_{\xi} = U_{\xi}^{(0)} + \lambda U_{\xi}^{(1)} + \dots, \quad U_{\zeta} = U_{\zeta}^{(0)} + \lambda U_{\zeta}^{(1)} + \dots, \quad P = P^{(0)} + \lambda P^{(1)} + \dots$$
(15)

Подставив (15) в (13), (14) с краевыми условиями (10), (11) и приняв во внимание, что при движении вязкой жидкости в тонкой щели имеют место регулярные возмущения [35], ограничимся первым членом разложений (15) для линеаризации уравнений гидродинамики. В результате получим следующую задачу (верхний индекс (0) в приведенных ниже уравнениях опущен):

– линеаризованные уравнения движения тонкого слоя вязкой жидкости в канале

$$Wo^{2} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^{2} U_{\xi}}{\partial \zeta^{2}}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial U_{\zeta}}{\partial \zeta} = 0, \quad (16)$$

– уравнение продольного движения нижней стенки канала

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + F(x_1) = b l \frac{\rho \nu x_{1m} \omega_*}{\delta} \int_{-1}^1 \left. \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} d\xi.$$
(17)

Граничные условия уравнений (16) – это условия для давления (11) и линеаризованные условия на границах контакта жидкости и стенок канала, которые имеют вид

$$U_{\xi} = \frac{df_1(\tau)}{d\tau}, \quad U_{\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad U_{\xi} = \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{df_2(\omega\tau/\omega_*)}{d\tau}, \quad U_{\zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 1.$$
(18)

Построим решение линеаризованных уравнений динамики тонкого слоя вязкой жидкости (16) с граничными условиями (10), (11) методом итерации [37,38]. На первой итерации положим в первом уравнении (16) Wo<sup>2</sup>  $\rightarrow$  0, т. е. исключим из рассмотрения инерцию движения жидкости, что с физической точки зрения эквивалентно рассмотрению ползущего движения вязкой жидкости в узкой щели. В результате на первой итерации получим следующее решение:

$$U_{\xi} = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi} + (1 - \zeta) \frac{df_1(\tau)}{d\tau} + \zeta \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{df_2(\omega \tau/\omega_*)}{d\tau}, \quad U_{\zeta} = 0,$$

$$P = \frac{1}{2} \bigg[ \xi \big( P_{+l}(\omega \tau/\omega_*) - P_{-l}(\omega \tau/\omega_*) \big) + \big( P_{+l}(\omega \tau/\omega_*) + P_{-l}(\omega \tau/\omega_*) \big) \bigg].$$
(19)

На второй итерации проведем уточнение полученного решения (19) учетом влияния инерции движения вязкой жидкости, положив  $Wo^2 < 1$ . Для этого используем найденную компоненту скорости  $U_{\xi}$  по (19) и подставим ее в член первого уравнения (16) при удерживаемом параметре подобия  $Wo^2$ , а затем решим полученные уравнения с граничными условиями (10), (11). В результате найдем выражение для уточненной компоненты скорости  $U_{\xi}$ , а также ее частную производную по координате  $\zeta$ , определяющую возмущающую силу (правую часть (17)) в следующем виде:

$$U_{\xi} = \frac{\left(P_{+l}(\omega\tau/\omega_{*}) - P_{-l}(\omega\tau/\omega_{*})\right)}{4} (\zeta^{2} - \zeta) + \frac{df_{1}(\tau)}{d\tau} (1 - \zeta) + \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{df_{2}(\omega\tau/\omega_{*})}{d\tau} \zeta + + \frac{Wo^{2}}{48} \left(\frac{dP_{+l}(\omega\tau/\omega_{*})}{d\tau} - \frac{dP_{-l}(\omega\tau/\omega_{*})}{d\tau}\right) (\zeta^{4} - 2\zeta^{3} + \zeta) + + \frac{Wo^{2}}{6} \left(\frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{d^{2}f_{2}(\omega\tau/\omega_{*})}{d\tau^{2}} (\zeta^{3} - \zeta) + \frac{d^{2}f_{1}(\tau)}{d\tau^{2}} (3\zeta^{2} - \zeta^{3} - 2\zeta)\right),$$
(20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{\xi}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} &= \left( \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{df_2(\omega \tau/\omega_*)}{d\tau} - \frac{df_1(\tau)}{d\tau} \right) - \frac{\left( P_{+l}(\omega \tau/\omega_*) - P_{-l}(\omega \tau/\omega_*) \right)}{4} + \\ &+ \frac{\mathrm{Wo}^2}{48} \left( \frac{dP_{+l}(\omega \tau/\omega_*)}{d\tau} - \frac{dP_{-l}(\omega \tau/\omega_*)}{d\tau} \right) - \frac{\mathrm{Wo}^2}{6} \left( \frac{x_{2m}}{x_{1m}} \frac{d^2 f_2(\omega \tau/\omega_*)}{d\tau^2} + 2\frac{d^2 f_1(\tau)}{d\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Подставляя (20) в правую часть (17) получили уравнение продольных нелинейных гидроупругих колебаний стенки в следующем виде:

$$(m_{1} + 2M)\frac{d^{2}x_{1}}{dt^{2}} + K\frac{dx_{1}}{dt} + n_{1}x_{1} + n_{3}x_{1}^{3} = K\frac{dx_{2}}{dt} - M\frac{d^{2}x_{2}}{dt^{2}} - \frac{b\delta}{2}\left(p_{+l}(\omega t) - p_{-l}(\omega t)\right) + \frac{b\delta}{2}T\left(\frac{dp_{+l}(\omega t)}{d\tau} - \frac{dp_{-l}(\omega t)}{d\tau}\right).$$
(21)

Здесь  $M = \frac{1}{3}bl\delta\rho, \ K = 2lb\rho\frac{\nu}{\delta}, \ T = \frac{1}{12}\frac{\delta^2}{\nu}.$ 

#### 3. Определение гидроупругого отклика нижней стенки канала

Уравнение (21) представляет собой обобщенное уравнение Дуффинга, которое допускает периодическое решение [39]. Проведем исследование данного уравнения для случая, когда законы пульсации давления на левом и правом торцах одинаковы, т.е.  $p_{-l} = p_{+l}$ . В этом случае в канале имеет место пульсирующее течение Куэтта, а уравнение (21) с учетом (1) принимает вид

$$(m_1 + 2M)\frac{d^2x_1}{dt^2} + K\frac{dx_1}{dt} + n_1x_1 + n_3x_1^3 = x_{2m}\omega E\sin(\omega t + \varphi_2 + \varphi), \qquad (22)$$

где tg( $\varphi$ ) =  $\frac{K}{M\omega}$ ,  $E = \sqrt{K^2 + M^2 \omega^2}$ , для определенности положим далее  $\varphi_2 = 0$ .

Множитель  $x_{2m}\omega$  в (22) представляет собой амплитуду виброскорости верхней стенки канала. Зададим ее исходя из скорости 1 м/с, т.е.  $x_{2m}\omega = k \cdot 1$  м/с, здесь k – коэффициент виброперегрузки по скорости. С учетом сделанного замечания проведем решение (22) методом Крылова – Боголюбова [33]. Для этого представим (22) в следующем виде:

$$(m_1 + 2M)\frac{d^2x_1}{dt^2} + n_1x_1 = \varepsilon f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right) + \varepsilon E_1 \sin(\omega t + \varphi), \tag{23}$$

приняв  $\varepsilon f(x_1, \frac{dx_1}{dt}) = \varepsilon f(x_1) + \varepsilon f(\frac{dx_1}{dt}) = -n_3 x_1^3 - K \frac{dx_1}{dt}$ ,  $kE = \varepsilon E_1$  и введя  $\varepsilon$  – условный малый параметр, отражающий слабую нелинейность и демпфирование в рассматриваемой колебательной системе, а также малую амплитуду возмущающей силы. Ограничимся отысканием решения на главном резонансе, когда  $\sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}} = \omega_0 \approx \omega$ . В этом случае вид искомого решения (23) представляется как [33]

$$x_1 = x_{1m}\cos(\Psi) = x_{1m}\cos(\omega t + \varphi + \phi).$$
(24)

Здесь  $\Psi$  – полная фаза,  $\phi$  – сдвиг между фазами свободных колебаний стенки и вынуждающей силы. Выражения для  $x_{1m}$  и  $\phi$  определим из уравнений [33]

$$\frac{dx_{1m}}{dt} = \varepsilon A_1(x_1, \phi) + \dots,$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 - \omega + \varepsilon \Phi_1(x_1, \phi) + \dots,$$
(25)

где  $A_1(x_1, \phi), \Phi_1(x_1, \phi)$  – это функции, определяемые как

$$A_{1}(x_{1},\phi) = -\frac{1}{(m_{1}+2M)2\pi\omega_{0}} \int_{0}^{2\pi} f\left(\frac{dx_{1}}{dt}\right) \bigg|_{x_{1}=x_{1m}\cos(\Psi)} \sin(\Psi)d\Psi - \frac{E_{1}\cos(\phi)}{(m_{1}+2M)(\omega_{0}+\omega)} = -\frac{Kx_{1m}}{2\varepsilon(m_{1}+2M)} - \frac{E_{1}\cos(\phi)}{(m_{1}+2M)(\omega_{0}+\omega)},$$

$$\Phi_{1}(x_{1},\phi) = -\frac{1}{(m_{1}+2M)2\pi x_{1m}\omega_{0}} \int_{0}^{2\pi} f(x_{1}) \bigg|_{x_{1}=x_{1m}\cos(\Psi)} \cos(\Psi)d\Psi + \frac{E_{1}\sin(\phi)}{(m_{1}+2M)x_{1m}(\omega_{0}+\omega)} = \frac{3n_{3}x_{1m}^{2}}{8\varepsilon(m_{1}+2M)\omega_{0}} + \frac{E_{1}\sin(\phi)}{(m_{1}+2M)x_{1m}(\omega_{0}+\omega)}.$$
(26)

Таким образом, в случае установившихся нелинейных колебаний из (25) с учетом (26) получим с точностью до  $\varepsilon^2$  следующую систему алгебраических уравнений:

$$Kx_{1m}\omega = -kE\sin\phi,$$

$$(m_1 + 2M)x_{1m}\left[\left(\omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0}\frac{n_3}{m_1 + 2M}\right)^2 - \omega^2\right] = -kE\cos\phi.$$
(27)

Из этой системы найдем выражения для амплитудной и фазовой характеристик нижней стенки канала, совершающей установившиеся нелинейные колебания,

$$x_{1m} = \frac{kK}{m_1 + 2M} \frac{\sqrt{1 + M^2 \omega^2 / K^2}}{\sqrt{\left[\left(\omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0} \frac{n_3}{m_1 + 2M}\right)^2 - \omega^2\right]^2 + \frac{K^2 \omega^2}{(m_1 + 2M)^2}}},$$

$$tg \phi = \frac{K}{m_1 + 2M} \frac{\omega}{\left(\omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0} \frac{n_3}{m_1 + 2M}\right)^2 - \omega^2}.$$
(28)

Заметим, что в (28), (29) можно выделить частоту  $\omega_* = \omega_0 + \frac{3x_{1m}^2}{8\omega_0} \frac{n_3}{m_1+2M}$ , которая представляет собой частоту колебаний консервативной нелинейной системы с жесткой нелинейностью (характерная частота нелинейных колебаний нижней стенки). Данная частота определяет скелетную характеристику, задающую изменение собственных частот консервативной нелинейной колебательной системы с жесткой нелинейностью  $\omega_*^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{x_{1m}^2 n_3}{m_1+2M}$ .

вативной нелинейной колебательной системы с жесткой нелинейностью  $\omega_*^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \frac{x_{1m}^2 n_3}{m_1 + 2M}$ . Вводя в рассмотрение безразмерную частоту  $\eta^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \omega^2 \frac{m_1 + 2M}{n_1}$ , скелетную характеристику для данной частоты  $\eta_*^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{x_{1m}^2 n_3}{n_1}$  и обозначение  $D = \frac{K}{\sqrt{n_1(m_1 + 2M)}}$ , представляем (28), (29) как

$$x_{1m} = \frac{kK}{n_1} \frac{\sqrt{1 + \frac{M^2}{K^2} \frac{n_1}{m_1 + 2M} \eta^2}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + D^2 \eta^2}},$$
(30)

$$tg(\phi) = \frac{D\eta}{\eta_*^2 - \eta^2}.$$
(31)

Таким образом, выражения (28), (29) или (30), (31) определяют основной гидроупругий отклик нижней стенки рассматриваемого канала, т.е. отклик на основном резонансе.

## 4. Численное моделирование основного гидроупругого отклика стенки канала при пульсирующем течении Куэтта

Найденные характеристики (30), (31) представляют собой неявные функции, что требует их численного исследования. Заметим, что данные выражения допускают следующие частные случаи: M = 0 – исключение из рассмотрения инерции движения жидкости, что эквивалентно полаганию в уравнениях динамики пульсирующего слоя вязкой жидкости (16) Wo<sup>2</sup>  $\rightarrow$  0;  $n_3 = 0$  – переход к рассмотрению стенки, имеющей линейно-упругое закрепление на торцах. В последнем случае (30), (31) представляют собой явные функции, допускающие непосредственное вычисление амплитуды и фазы колебаний стенки по заданной частоте возмущающей силы.

Для примера реализации численного моделирования рассмотрим канал со следующими параметрами: l = 0.15 м,  $\delta = 10^{-3}$  м, b = 8l,  $m_1 = 3$  кг,  $\rho = 1.84 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 2.53 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $n_1 = 5 \cdot 10^4$  H/м,  $n_3 = 5 \cdot 10^8$  H/м<sup>3</sup>. При моделировании было проведено численное построение характеристик (30), (31) для следующих случаев:

1) взаимодействие стенки со слоем жидкости при учете инерции пульсирующего течения Куэтта для различных значений коэффициента виброперегрузки по скорости;

2) взаимодействие стенки со слоем жидкости без учета инерции последней (ползущее течение Куэтта, т.е. когда в (30), (31) положим M = 0) при различных значениях коэффициента виброперегрузки по скорости;

3) взаимодействие пластины с пульсирующим слоем жидкости при учете инерции его движения при варьировании значений коэффициента виброперегрузки по скорости и толщины слоя жидкости;

4) взаимодействие пластины с пульсирующим слоем жидкости для случая ползущего течения Куэтта при варьировании толщины слоя жидкости. Результаты расчетов представлены ниже на рис. 2–5.

Заметим, что при исключении из рассмотрения нелинейности упругого закрепления стенки канала на торцах, т. е. при полагании в (30) и (31)  $n_3 = 0$ , имеют место известные кривые амплитудных и фазовых частотных характеристик, соответствующих гармоническому осциллятору [32].

#### Выводы и заключение

В работе поставлена и решена задача гидроупругости для исследования продольных колебаний абсолютно жесткой стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах. Рассмотрен случай вынужденных установившихся колебаний стенки за счет ее взаимодействия с противоположной вибрирующей стенкой через пульсирующий слой вязкой жидкости, заполняющей канал. Учет диссипативных свойств вязкой жидкости в узком канале дает возможность исключить из рассмотрения в исследуемой колебательной системе начальные условия, так как их влияние быстро перестает сказываться, и ограничиться постановкой краевой задачи математической физики (2)–(7). Проведенный асимптотический анализ поставленной задачи позволил показать, что исходная задача может быть сведена к рассмотрению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (21), обобщающего уравнение Дуффинга. Решение этого уравнения для случая пульсирующего течения Куэтта с учетом инерции движения вязкой жидкости в узком канале выполнено с использованием метода Крылова – Боголюбова. На базе полученного решения определен гидроупругий отклик стенки канала в виде нелинейных амплитудной (30) и фазовой (31) частотных характеристик, представляющих собой неявные функции от амплитуды и частоты колебаний. Анализ данных характеристик и численное моделирование их поведения позволили сделать следующие выводы.

Вязкость жидкости, а также геометрические размеры канала полностью определяют значение коэффициента демпфирования в (21), т.е. демпфирующие свойства в рассматриваемой колебательной системе. Кроме того, учет инерции движения жидкости обуславливает увеличение инерционных свойств нелинейной колебательной системы, что проявляется в возникновении дополнительных членов в уравнении нелинейных гидроупругих колебаний (21) и дополнительной, так называемой присоединенной массы M. Данная масса также определяется физическими свойствами жидкости и геометрическими размерами канала.

Результаты моделирования, представленные на рис. 2–5, указывают на важность принятия во внимание инерции пульсирующего течения Куэтта при исследовании нелинейных колебаний нижней стенки рассматриваемого канала. А именно, сравнив характеристики на рис. 3 и 4, пришли к выводу, что при ползущем течении Куэтта (рис. 4), когда в (30), (31) принято M = 0, т.е. инерция жидкости исключена из рассмотрения, наблюдается снижение амплитуд колебаний и уменьшение значений резонансных частот. В результате этого имеем менее интенсивный изгиб характеристик кривых (30), (31) вправо. Известно [39], [40], что в области изгиба амплитудных характеристик нелинейных колебательных систем с кубической нелинейностью наблюдается скачкообразное изменение амплитуд колебаний. Следовательно, исключение инерции движения жидкости приводит к занижению границ области частот, на которых возможно возникновение неустойчивых колебаний со скачкообразным изменением амплитуд, а также заниженным оценкам амплитуд колебаний стенки. Увеличение коэффициента виброперегрузки по скорости приводит к росту как амплитуд колебаний, так и резонансных частот, и, как следствие, увеличению изгиба амплитудных и фазовых характеристик, как в случае учета инерции жидкости, так и при исключении инерции движения жидкости из рассмотрения.

Кроме того, моделирование показало существенное влияние толщины слоя жидкости на нелинейные колебания стенки. Например (см. рис. 4), при учете инерции движения жидкости увеличение толщины слоя жидкости при фиксированных значениях амплитуды виброскорости противоположной стенки ведет к существенному росту амплитуд колебаний нижней стенки канала. С другой стороны (см. рис. 5), при исключении из рассмотрения инерции движения жидкости и фиксации коэффициента виброперегрузки по скорости, уменьшение толщины слоя жидкости приводит к расширению резонансной области (увеличению добротности), что непосредственно следует из аналитических выражений для (30), (31).

Сформулированная в работе новая математическая модель и представленные результаты численного моделирования гидроупругого отклика стенки узкого канала, имеющей нелинейно-упругое закрепление на торцах, за счет взаимодействия со слоем вязкой жидкости при пульсирующем течении Куэтта, могут быть использованы для анализа работы элементов гидроприводов и динамических гидропередач, а также найти применение в технологиях неразрушающей вибрационной диагностики различных изделий современного машиностроения.



Рис. 2. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.3; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.6; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 1.2; 4 – скелетная кривая  $\eta_*$ ; здесь безразмерной частоте  $\eta_* = 1$  соответствует размерная частота  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1 + 2M}}$ 

Fig. 2. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.3; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.6; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.6; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 1.2; 4 – backbone curve  $\eta_*$ ; the dimensionless frequency  $\eta_* = 1$  corresponds to the dimensional frequency  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$ 



Рис. 3. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.3; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.6; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 1.2; 4 – скелетная кривая  $\eta_*$ ; здесь безразмерной частоте  $\eta_* = 1$  соответствует размерная частота  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$ 

Fig. 3. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.3; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.6; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.6; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 1.2; 4 – backbone curve  $\eta_*$ ; the dimensionless frequency  $\eta_* = 1$  corresponds to the dimensional frequency  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$ 



Рис. 4. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при учете инерции пульсирующего течения Куэтта: 1 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.3 и толщина слоя жидкости  $2\delta$ ; 2 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 0.6 и толщина слоя жидкости  $1.5\delta$ ; 3 – коэффициент виброперегрузки по скорости k = 1.2 и толщина слоя жидкости  $\delta$ ; 4 – скелетная кривая  $\eta_*$ ; здесь безразмерной частоте  $\eta_* = 1$  соответствует размерная частота  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$ 

Fig. 4. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) considering the inertia of the pulsating Couette flow: 1 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.3 and the liquid layer thickness  $2\delta$ ; 2 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 0.6 and the liquid layer thickness  $1.5\delta$ ; 3 – the coefficient determining vibration overload by speed k = 1.2 and the liquid layer thickness  $\delta$ ; 4 – backbone curve  $\eta_*$ ; the dimensionless frequency  $\eta_* = 1$  corresponds to the dimensional frequency  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1+2M}}$ 



Рис. 5. Гидроупругий отклик стенки канала, амплитудная характеристика (а) и фазовый сдвиг (б) при ползущем пульсирующем течении Куэтта и коэффициенте виброперегрузки по скорости k = 1.5: 1 – толщина слоя жидкости  $2\delta$ ; 2 – толщина слоя жидкости  $1.5\delta$ ; 3 – толщина слоя жидкости  $\delta$ ; 4 – скелетная кривая  $\eta_*$ ; здесь безразмерной частоте  $\eta_* = 1$  соответствует размерная частота  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$ 

Fig. 5. Hydroelastic response of the channel wall, amplitude characteristic (a) and phase shift (b) under the creeping pulsating Couette flow with the coefficient determining vibration overload by speed k = 1.5: 1 – liquid layer thickness  $2\delta$ ; 2 – liquid layer thickness  $1.5\delta$ ; 3 – liquid layer thickness  $\delta$ ; 4 – backbone curve  $\eta_*$ ; the dimensionless frequency  $\eta_* = 1$  corresponds to the dimensional frequency  $\omega_* = \omega_0 = \sqrt{\frac{n_1}{m_1}}$ 

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

#### Литература

- 1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
- 2. *Païdoussis M.P.* Fluid-Structure Interactions. V. 2: Slender structures and axial flow. London: Acad. Press, 2016. xviii, 924 p. https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4.
- 3. *Païdoussis M.P., Price S.J., de Langre E.* Fluid-Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities. New York, NY: Cambridge Univ. Press, 2011. x, 402 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760792.
- 4. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. R. Soc. A. 1920. V. 98, No 690. P. 205–216. https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064.
- 5. *Amabili M., Kwak M.K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. V. 10, No 7. P. 743–761. https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051.
- Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model // J. Sound Vib. 2009. V. 326, Nos 1–2. P. 332–339. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031.
- 7. Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // J. Physiol. 1955. V. 127, No 3. P. 553–563. http://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276.
- 8. Faria C. T., Inman D. J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid // Mech. Syst. Signal Process. 2014. V. 45, No 2. P. 317–329. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003.
- Lomakin E., Rabinskiy L., Radchenko V., Solyaev Y., Zhavoronok S., Babaytsev A. Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates // Meccanica. 2018. V. 53, No 15. P. 3831–3838. https://doi.org/10.1007/s11012-018-0919-y.
- Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеенко В.П. Гидроупругая устойчивость прямоугольной пластины, взаимодействующей со слоем текущей идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 6. С. 108–120. https://doi.org/10.7868/S0568528116060049.
- 11. Лекомцев С.В., Матвеенко В.П., Сенин А.Н. Собственные колебания и гидроупругая устойчивость пластины с пьезоэлементом, подключенным к внешней RL-цепи // Вестн. ПНИПУ. Механ. 2023. № 3. С. 97–113. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.09.
- Indeitsev D.A., Osipova E.V. Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Tech. Phys. 2000. V. 45, No 12. P. 1513–1517. https://doi.org/10.1134/1.1333186.
- Akrish G., Rabinovitch O., Agnon Y. Hydroelasticity and nonlinearity in the interaction between water waves and an elastic wall // J. Fluid Mech. 2018. V. 845. P. 293–320. https://doi.org/10.1017/jfm.2018.207.

- 14. Павлов В.А., Павловский А.С., Семенова Н.Г. Нелинейные эффекты в поле вязких волн, возбужденном пластиной конечных размеров // ЖТФ. 2019. Т. 89, № 10. С. 1500–1505. https://doi.org/10.21883/JTF.2019.10.48164.2147.
- Schipitsyn V.D., Kozlov V.G. Oscillatory and steady dynamics of a cylindrical body near the border of vibrating cavity filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2018. V. 30, No 1. P. 103–112. https://doi.org/10.1007/s12217-017-9583-4.
- 16. Щипицын В.Д. Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 15. С. 43–46. https://doi.org/10.21883/PJTF.2020.15.49749.18349.
- Tsarenko S.N., Kostenko A.V., Ignatkina E.L., Ponamareva E.A. Simulating interaction of liquid steel with gate wall at harmonic motion // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2022. V. 988. Art. 052013. https://doi.org/10.1088/1755-1315/988/5/052013.
- Taktarov N.G., Runova O.A., Khramova N.A. Mathematical model of the viscous fluid motion caused by the oscillation of a flat porous surface // ARPN J. Eng. Appl. Sci. 2018. V. 13, No 24. P. 9715–9721.
- Базаркина О.А., Тактаров Н.Г. Вращательные колебания пористой сферической оболочки в вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 6. С. 98–105. https://doi.org/10.31857/S0568528120060043.
- Сенницкий В.Л. О движении вязкой жидкости со свободной границей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 166, № 1. С. 99–110. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110.
- Сенницкий В.Л. Эффекты вращательного движения жидкости между криволинейными стенками // Изв. вузов. ПНД. 2025. Т. 33, вып. 2. С. 219–232. https://doi.org/10.18500/0869-6632-003155.
- 22. *Турчак Л.И., Шидловский В.П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 2. С. 329–348.
- 23. *Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А.* Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана // Вестн. ТГУ. Матем. и механ. 2020. № 68. С. 141–157. https://doi.org/10.17223/19988621/68/13.
- 24. Королева М.Р., Мищенкова О.В., Редер Т., Тененев В.А., Чернова А.А. Численное моделирование процесса срабатывания предохранительного клапана // Комп. исслед. и моделир. 2018. Т. 10, № 4. С. 495–509. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-4-495-509.
- Popov V.S., Popova A.A. Mathematical modeling of the aeroelastic response of a disk having a nonlinear elastic suspension and interacting with a layer of viscous gas // J. Mach. Manuf. Reliab. 2024. V. 53, No 4. P. 370–378. https://doi.org/10.1134/S1052618824700249.
- 26. Попов В.С., Попова А.А. Нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала, заполненного вязким газом и установленного на вибрирующем основании // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 166, № 2. С. 220–237. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237.
- 27. Kurzin V.B. Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2011. V. 52, No 3. P. 459–463. https://doi.org/10.1134/S0021894411030163.

- Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration // Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng. 2016. V. 12, No 4. P. 9–17.
- Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. 2022. V. 10, No 20. Art. 3844. https://doi.org/10.3390/math10203844.
- 30. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.
- 31. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- 32. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
- Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
- Womersley J.R. XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube–I: The linear approximation for long waves // London, Edinburgh, Dublin, Philos. Mag. J. Sci. Ser. 7. 1955. V. 46, No 373. P. 199–221. http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564.
- 35. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.
- 36. Nayfeh A.H. Problems in Perturbations. New York, NY: Wiley, 1985. 556 p.
- Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Nonlinear oscillations of a plate resting on a nonlinear elastic foundation and forming the bottom of a plane channel filled with a viscous gas // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2024. V. 20, No 4. P. 581–599. https://doi.org/10.20537/nd241101.
- 38. Попов В.С., Попова А.А. Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору // Комп. исслед. и моделир. 2022. Т. 14. № 1. С. 79–92. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92.
- 39. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York, NY: Wiley, 1979. xiv, 704 p.
- Brennan M.J., Kovacic I., Carrella A., Waters T.P. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator // J. Sound Vib. 2008. V. 318, Nos 4–5. P. 1250–1261. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.032.

#### References

- Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. Aerogidrouprugost' konstruktsii [Aeroelasticity of Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 592 p. (In Russian)
- Païdoussis M.P. Fluid-Structure Interactions. Vol. 2: Slender structures and axial flow. London, Acad. Press, 2016. xviii, 924 p. https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4.
- Païdoussis M.P., Price S.J., de Langre E. Fluid-Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities. New York, NY, Cambridge Univ. Press, 2011. x, 402 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511760792.
- Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. Proc. R. Soc. A, 1920, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064.

- Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem. J. Fluids Struct., 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051.
- Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. J. Sound Vib., 2009, vol. 326, nos. 1–2, pp. 332–339. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031.
- 7. Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. J. Physiol., 1955, vol. 127, no. 3, pp. 553–563. http://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276.
- Faria C.T., Inman D.J. Modeling energy transport in a cantilevered Euler–Bernoulli beam actively vibrating in Newtonian fluid. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2014, vol. 45, no. 2, pp. 317–329. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.12.003.
- Lomakin E., Rabinskiy L., Radchenko V., Solyaev Y., Zhavoronok S., Babaytsev A. Analytical estimates of the contact zone area for a pressurized flat-oval cylindrical shell placed between two parallel rigid plates. *Meccanica*, 2018, vol. 53, no. 15, pp. 3831–3838. https://doi.org/10.1007/s11012-018-0919-y.
- Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydroelastic stability of a rectangular plate interacting with a layer of ideal flowing fluid. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, no. 6, pp. 821–833. https://doi.org/10.1134/S0015462816060132.
- Lekomtsev S.V., Matveenko V.P., Senin A.N. Natural vibrations and hydroelastic stability of a plate with a piezoelectric element connected to an external RL circuit. Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh., 2023, no. 3, pp. 97–113. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.09. (In Russian)
- Indeitsev D.A., Osipova E.V. Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water. *Tech. Phys.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 1513–1517. https://doi.org/10.1134/1.1333186.
- Akrish G., Rabinovitch O., Agnon Y. Hydroelasticity and nonlinearity in the interaction between water waves and an elastic wall. J. Fluid Mech., 2018, vol. 845, pp. 293–320. https://doi.org/10.1017/jfm.2018.207.
- Pavlov V.A., Pavlovskii A.S., Semenova N.G. Nonlinear effects in a viscous wave field excited by a finite-size plate. *Tech. Phys.*, 2019, vol. 64, no. 10, pp. 1418–1423. https://doi.org/10.1134/S1063784219100165.
- Schipitsyn V.D., Kozlov V.G. Oscillatory and steady dynamics of a cylindrical body near the border of vibrating cavity filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.*, 2018, vol. 30, no. 1, pp. 103–112. https://doi.org/10.1007/s12217-017-9583-4.
- Schipitsyn V.D. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, no. 8, pp. 771–774. https://doi.org/10.1134/S1063785020080143.
- Tsarenko S.N., Kostenko A.V., Ignatkina E.L., Ponamareva E.A. Simulating interaction of liquid steel with gate wall at harmonic motion. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2022, vol. 988, art. 052013. https://doi.org/10.1088/1755-1315/988/5/052013.

- Taktarov N.G., Runova O.A., Khramova N.A. Mathematical model of the viscous fluid motion caused by the oscillation of a flat porous surface. *ARPN J. Eng. Appl. Sci.*, 2018, vol. 13, no. 24, pp. 9715–9721.
- Bazarkina O.A., Taktarov N.G. Rotational oscillations of a porous spherical shell in viscous fluid. Fluid Dyn., 2020, vol. 55, no. 6, pp. 817–824. https://doi.org/10.1134/S001546282006004X.
- 20. Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110. (In Russian)
- Sennitskii V.L. Effects of a rotational motion of a liquid between curvilinear walls. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelineinaya Din., 2025, vol. 33, no. 2, pp. 219–232. https://doi.org/10.18500/0869-6632-003155. (In Russian)
- Turchak L.I., Shidlovskii V.P. Mathematical modeling of gas lubrication problems. Comput. Math. Math. Phys., 2011, vol. 51, no. 2, pp. 308–325. https://doi.org/10.1134/S0965542511020151.
- Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2020, no. 68, pp. 141–157. https://doi.org/10.17223/19988621/68/13. (In Russian)
- Koroleva M.R., Mishchenkova O.V., Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of safety valve activation process. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 495–509. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2018-10-4-495-509. (In Russian)
- Popov V.S., Popova A.A. Mathematical modeling of the aeroelastic response of a disk having a nonlinear elastic suspension and interacting with a layer of viscous gas. J. Mach. Manuf. Reliab., 2024, vol. 53, no. 4, pp. 370–378. https://doi.org/10.1134/S1052618824700249.
- 26. Popov V.S., Popova A.A. Nonlinear aeroelastic oscillations in the wall of a flat channel filled with viscous gas and resting on a vibrating foundation. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 220–237. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.20-237. (In Russian)
- Kurzin V.B. Streamwise vibrations of a plate in a viscous fluid flow in a channel, induced by forced transverse vibrations of the plate. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2011, vol. 52, no. 3, pp. 459–463. https://doi.org/10.1134/S0021894411030163.
- Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N. Mathematical modeling of elastically fixed wall longitudinal oscillations of wedge-shaped channel under foundation vibration. *Int. J. Comput. Civ. Struct. Eng.*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 9–17.
- 29. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. https://doi.org/10.3390/math10203844.
- Vallander S.V. Lektsii po gidroaeromekhanike [Lectures on Hydroaeromechanics]. Leningrad, LGU, 1978. 296 p. (In Russian)
- Loitsyanskiy Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
- 32. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhnicheskikh kolebanii [An Introduction to the Theory of Mechanical Oscillation]. Moscow, Nauka, 1991. 256 p. (In Russian)

- Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebanii [Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations]. Moscow, Nauka, 1974. 504 p. (In Russian)
- Womersley J.R. XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube–I: The linear approximation for long waves. London, Edinburgh, Dublin, Philos. Mag. J. Sci. Ser. 7, 1955, vol. 46, no. 373, pp. 199–221. http://dx.doi.org/10.1080/14786440208520564.
- 35. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, CA, The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.
- 36. Nayfeh A.H. Problems in Perturbations. New York, NY, Wiley, 1985. 556 p.
- 37. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Nonlinear oscillations of a plate resting on a nonlinear elastic foundation and forming the bottom of a plane channel filled with a viscous gas. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2024, vol. 20, no. 4, pp. 581–599. https://doi.org/10.20537/nd241101.
- Popov V.S., Popova A. Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92. (In Russian)
- 39. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York, NY, Wiley, 1979. xiv, 704 p.
- Brennan M.J., Kovacic I., Carrella A., Waters T.P. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator. J. Sound Vib., 2008, vol. 318, nos. 4–5, pp. 1250-1261. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.032.

#### Информация об авторах

Виктор Сергеевич Попов, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.; главный научный сотрудник, Институт проблем точной механики и управления Российской академии наук

E-mail:  $vic_p@bk.ru$ 

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9582-7195

Анна Александровна Попова, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail:  $anay_p@bk.ru$ 

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7786-1680

Александр Викторович Черненко, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры «Прикладная математика и системный анализ», Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: 3chav@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9146-2379

Мария Викторовна Попова, студент факультета «Фундаментальная медицина и медицинские технологии», Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

E-mail: mari.popova.2004@internet.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1460-7172

#### Author Information

Victor S. Popov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov; Chief Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences

E-mail: *vic\_p@bk.ru* 

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9582-7195

Anna A. Popova, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: anay\_p@bk.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7786-1680

Aleksandr V. Chernenko, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov

E-mail: 3chav@mail.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9146-2379

Maria V. Popova, Student, Faculty of Fundamental Medicine and Medical Technologies, Saratov State University

E-mail: mari.popova.2004@internet.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1460-7172

Поступила в редакцию 26.04.2025 Принята к публикации 10.05.2025 Received April 26, 2025 Accepted May 10, 2025

#### ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 621.391

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.351-366

### Применение теории сетевого исчисления для анализа задержек трафика радиоинтерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G

### А.В. Росляков <sup>⊠</sup>, В.В. Герасимов

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия

 $\boxtimes$  a.roslyakov@psuti.ru

#### Аннотация

Математический аппарат теории сетевого исчисления (Network calculus) позволяет определить граничные оценки задержек в сетевых моделях и в отличие от теории массового обслуживания оперирует не функциями распределения случайных величин, а достаточно простыми детерминированными параметрами, описывающими характеристики входного потока и обслуживающего устройства. Предложено использовать подходы теории сетевого исчисления для получения численных оценок верхних границ задержки различных видов трафика интерфейса eCPRI в транспортном сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G.

Ключевые слова: сетевое исчисление Network calculus, кривая поступления, кривая обслуживания, мобильные сети 4G/5G, сегмент Fronthaul, радио интерфейс eCPRI, анализ задержек

Для цитирования: Росляков А.В., Герасимов В.В. Применение теории сетевого исчисления для анализа задержек трафика радиоинтерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 351–366. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.351-366.
#### ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.351-366

# Application of network calculus to analyze eCPRI traffic delays in 4G/5G fronthaul mobile networks

## A.V. Roslyakov <sup>⊠</sup>, V.V. Gerasimov

Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

 $\boxtimes$  a.roslyakov@psuti.ru

#### Abstract

Network calculus provides a mathematical framework for determining the delay bounds in network models and, unlike the queueing theory which relies on the distribution functions of random variables, uses simple deterministic parameters describing the characteristics of traffic arrivals and the service device. In this study, network calculus was applied to calculate the upper delay bounds for various types of eCPRI traffic in the fronthaul segment of 4G/5G mobile networks.

Keywords: network calculus, arrival curve, service curve, 4G/5G mobile networks, fronthaul segment, eCPRI, delay analysis

For citation: Roslyakov A.V., Gerasimov V.V. Application of network calculus to analyze eCPRI traffic delays in 4G/5G fronthaul mobile networks. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 351–366. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.351-366. (In Russian)

#### Введение

В сетях мобильной связи поколений 4G/5G наиболее перспективной технологией радиодоступа является централизованная сеть радиодоступа C-RAN (Centralized Radio Access Network). Она реализуется с помощью удаленных радиоблоков RRH (Remote Radio Head) и набора (пула) централизованных блоков обработки основной полосы частот BBU (BaseBand Unit), которые соединены через передний транспортный сегмент, называемый Fronthaul. Такое разделение позволяет значительно улучшить гибкость и масштабируемость сети мобильной связи 4G/5G, а также существенно сократить затраты на капитальные и эксплуатационные расходы. Однако такой подход к построению сети радиодоступа приводит к проблеме обеспечения гарантий качества передачи разнородного трафика путем распределения доступной полосы пропускания сегмента Fronthaul. Такое распределения с помощью введения разных приоритетов обслуживания для соответствующего трафика радиоинтерфейса eCPRI. При этом необходимо учитывать, что в сетях 4G/5G ограничения на задержку в сегменте Fronthaul ovenь строгие и для большей части трафика не должны превышать 100 мкс [1].

Для получения верхних граничных оценок задержек заявок в системе массового обслуживания (СМО), моделирующей работу сегмента Fronthaul, необходимо знание функций распределения интервалов времени между пакетами в потоках разнородного трафика интерфейса eCPRI и длительностей обслуживания этих потоков в сегменте. Чаще всего такие распределения имеют сложный характер, получить их аналитическое описание весьма затруднительно, при этом анализ характеристик СМО общего вида G/G/1 возможен только аппроксимационными методами с получением лишь средних значений времени ожидания заявок [2].

Для определения граничных оценок задержек в любых СМО с ожиданием в наибольшей степени подходит теория сетевого исчисления (Network Calculus), которая оперирует детерминированными параметрами входного потока заявок и исследуемой СМО и позволяет достаточно просто получить граничные оценки качества функционирования сетевой модели [3]. Для практического применения сетевого исчисления необходимо знать функции, описывающие входной поток трафика и обслуживающее устройство, называемые кривыми поступления и обслуживания соответственно. В работе эти кривые построены для модели транспортного сегмента Fronthaul мобильных сетей 4G/5G и на их основе получены аналитические выражения для определения верхних граничных оценок задержек трафика интерфейса eCPRI трех приоритетов: высшего, среднего и низшего. При этом использованы только две детерминированные метрики трафика – средняя скорость поступления и максимальный выброс (пачечность) трафика, которые можно легко получить на практике из временных трассировок данных трафика. Полученные верхние границы могут напрямую использоваться при проектировании и обслуживании сетей 4G/5G для определения требуемой пропускной способности транспортного сегмента Fronthaul.

#### 1. Сегмент Fronthaul сетей 4G/5G и его модель

Рассмотрим централизованную архитектуру сети радиодоступа C-RAN (Centralized Radio Access Network) в мобильных сетях 4G/5G и построим модель передачи трафика в ней. Для упрощения анализа будем рассматривать трафик только в одном направлении. C-RAN реализуется в виде территориально-распределенного набора так называемых радиоголовок RRH (Remote Radio Head), которые обеспечивают беспроводную связь с терминалами пользователей в зоне своего покрытия и реализуют первичную обработку радиосигналов. Информация, поступающая от всех RRH, агрегируется в переднем транспортном сегменте Fronthaul и передается в централизованный пул блоков обработки базовых частот BBU (BaseBand Unit), где выполняется основная обработка информации (рис. 1). В сегменте Fronthaul сетей 4G/5G может передаваться трафик радиоинтерфейсов CPRI и eCPRI, однако в дальнейшем будем рассматривать трафик только интерфейса eCPRI, т. к. он использует пакетную передачу информации, которая более перспективна за счет своей эффективности, гибкости и масштабируемости.

В радиоинтерфейсе eCPRI передаются информационные потоки трех видов:

1) пользовательский трафик между терминалом пользователя и мобильной сетью, управляющая информация, относящаяся к пользовательскому трафику, а также другие данные eCPRI: поддержка плоскости пользователя, удаленная перезагрузка и т. д., требующие передачи в реальном масштабе времени;

2) контрольная и управляющая информация, которая не является информацией реального времени;

3) данные синхронизации.



**Рис. 1.** Архитектура централизованной сети радиодоступа в мобильных сетях 4G/5G **Fig. 1.** Centralized-RAN architecture for 4G/5G mobile networks

Требования к сквозной задержке трафика eCPRI первого и второго видов в сегменте Fronthaul строго нормируются (табл. 1) [4].

Табл.	1.	Требования к ск	возной задержке	трафик	a eCPRI	в сегменте ]	Fronthaul
Table	1.	End-to-end delay	requirements for	eCPRI t	raffic in t	the fronthaul	segment

Данные eCPRI									
	Пользователя	Контроля и	Синхронизации						
		управления							
Сквозная	100 мкс (высший	1 мс (средний	Не нормируется						
задержка	приоритет)	приоритет)							
	1 мс (средний	100 мс (низший							
	приоритет)	приоритет)							

Таким образом, особенностью интерфейса eCPRI является наличие в нем трафика трех приоритетов – высшего (ВП), среднего (СП) и низшего (НП), что необходимо учитывать при распределении полосы пропускания в сегменте Fronthaul между потоками с разными данными. С учетом этого модель сегмента Fronthaul в виде СМО можно представить как одноканальное обслуживающее устройство, на вход которого поступают агрегированные потоки трафика от радиоголовок RRH трех приоритетов – ВП, СП и НП (рис. 2).

Более высокий приоритет трафика означает, что соответствующему потоку требуется меньшая задержка для удовлетворения требований качества обслуживания. Передача пакетов (кадров) одного приоритета в сегменте Fronthaul осуществляется по правилу «первым пришел – первым вышел» (FIFO). Однако, когда поступает запрос на передачу трафика потока с более высоким приоритетом, передача текущего потока с более низким приоритетом прерывается. Будем считать, что передача агрегированного трафика интерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul осуществляется с постоянной скоростью R, бит/с. Для реализации интерфейса eCPRI, как правило, используют пакетные технологии семейства хЕthernet или чувствительных ко времени сетей TSN Ethernet [5], работающие чаще всего по оптоволоконному физическому каналу и имеющие скорости  $n \times 10$  Гбит/с.



Рис. 2. Модель сегмента Fronthaul сетей 4G/5G с тремя типами потоков трафика Fig. 2. Fronthaul segment model for 4G/5G mobile networks with three traffic types

Для получения аналитических выражений максимальных задержек потоков трафика разного приоритета в полученной СМО будем использовать математический аппарат теории сетевого исчисления (Network Calculus), для чего определим необходимые характеристики СМО.

#### 2. Основы теории сетевого исчисления

Ввиду ограниченного освещения в отечественной литературе теории сетевого исчислений (Network Calculus) в данном разделе приведем краткие сведения из этой области знаний в виде нескольких определений и утверждений, которые необходимы для дальнейшего анализа сквозных задержек в сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G на основе названной теории. Более подробную информацию про сетевое исчисление можно найти в [6–8].

Базовые принципы теории сетевого исчисления были сформулированы Р. Крузом в 1991 году в двух его работах [9, 10]. Математически сетевое исчисление основано на идемпотентной (min, +)-алгебре [11], в которой операция идемпотентного сложения (обозначим ее  $\land$ ) заменяется вычислением инфимума  $a \land b := \inf(a, b)$  (или минимума  $a \land b := \min(a, b)$ , если он существует), в то время как операция идемпотентного умножения превращается в классическую операцию сложения  $a \times b := a + b$ . Основными операциями в (min, +)-алгебре являются (min, +)-свертка и (min, +)-обратная свертка. Приведем ряд определений, необходимых для пояснения основных положений теории сетевого исчисления.

**Определение 1** ((Min,+)-свертка). Пусть x и y – две функции, возрастающие в широком смысле. (Min,+)-свертка этих функций равна

$$(x \otimes y)(t) = \inf_{0 \le \tau \le t} \left\{ x \left( t - \tau \right) + y \left( \tau \right) \right\},\tag{1}$$

где inf обозначает инфимум (нижнюю границу) функции.

Определение 2 ((Min,+)-обратная свертка). Пусть x и y – две функции, возрастающие в широком смысле. (Min,+)-обратная свертка этих функций равна

$$x(t) \oslash y(t) = \sup_{\tau > 0} \left\{ x(t+\tau) - y(\tau) \right\},$$

где sup означает супремум (верхнюю границу) соответствующей функции.

В сетевом исчислении используют понятия кривой поступления и кривой обслуживания для описания характеристик входного потока трафика и обслуживающего устройства соответственно.

Определение 3 (Кривая поступления). Для возрастающей в широком смысле функции  $\alpha(t), t \ge 0$ , говорят, что поток A(t) ограничен сверху функцией  $\alpha(t)$  тогда и только тогда, когда для всех  $\tau \le t$ 

$$A(t) - A(\tau) \le \alpha (t - \tau).$$
<sup>(2)</sup>

Говорят, что поток A(t) имеет кривую поступления  $\alpha(t)$  (рис. 3).



Рис. 3. Кривая поступления  $\alpha(t)$  для функции входящего потока A(t)Fig. 3. Arrival curve  $\alpha(t)$  for the input traffic function A(t)

Определение 4 (Кривая обслуживания). Пусть A(t) и D(t) – возрастающие в широком смысле функция объема входного потока с кривой поступления  $\alpha(t)$  и функция объема потока на выходе этого устройства соответственно (рис. 4). Говорят, что обслуживающее устройство реализует для входящего потока A(t) кривую обслуживания  $\beta(t)$ , если  $\beta(t)$  является возрастающей в широком смысле функцией и  $D(t) \ge A(t) \otimes \beta(t)$ .



**Рис. 4.** К определению кривой обслуживания **Fig. 4.** Illustration of the service curve

Одним из главных результатов теории сетевого исчисления является возможность определения верхних границ задержки потоков трафика. В [3, 6] доказано, что граница задержки w(t) в системе массового обслуживания с кривой поступления  $\alpha(t)$  и кривой обслуживания  $\beta(t)$  определяется как

$$w(t) = \sup_{t \ge 0} \left\{ \inf \left\{ \tau \ge 0 : \alpha(t) < \beta(t+\tau) \right\} \right\}.$$
 (3)

При графическом изображении кривых поступления и обслуживания (рис. 5) горизонтальное расстояние между этими кривыми определяет значение задержки потока w(t)согласно (3), в то время как вертикальное расстояние q(t) показывает загрузку СМО (число заявок в очереди и обслуживающем устройстве) в момент времени t. Следовательно, максимальные расстояния между кривыми дают верхние границы задержки и загрузки.



**Рис. 5.** Определение задержки передачи трафика и загрузки системы обслуживания **Fig. 5.** Illustration of the traffic transmission delay and service system load

#### 3. Кривые поступления трафика интерфейса eCPRI

Избегая использования вероятностных распределений для описания потоков трафика интерфейса eCPRI в транспортном сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G, будем использовать теорию сетевого исчисления и детерминированные метрики трафика, которые легко получить на практике. В качестве таких метрик чаще всего используют среднюю скорость поступления трафика  $\rho$  – количество пакетов (кадров), поступающих в потоке в среднем за единицу времени, и пачечность (берстность) трафика  $\sigma$  – количество пакетов (кадров), которые могут поступить одновременно в потоке. Следовательно, кривая поступления для потока трафика *i*-го типа интерфейса eCPRI определяется выражением  $\alpha_i(t) = \rho_i t + \sigma_i$ , где  $\rho_i$  – средние скорости потоков трафика *i*-го типов,  $i \in (h, m, l)$ , которые соответствуют высшему, среднему и низшему приоритетам соответственно, а  $\sigma_i$  – пачечность этих потоков.

Во избежание бесконечной длины очередей трафика интерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul ограничим скорость поступления трафика при заданной пропускной способности сегмента R согласно следующему предположению.

**Предположение.** Если скорость передачи (пропускная способность) сегмента Fronthaul равна R, то суммарная скорость передачи потоков трафика интерфейса eCPRI всех трех приоритетов  $\rho_h + \rho_m + \rho_l \leq R$ . В противном случае загрузка сегмента будет стремиться к бесконечности.

Действительно, если  $\rho_h + \rho_m + \rho_l > R$ , то вертикальный разрыв между кривыми поступления и обслуживания, т. е. полная загрузка сегмента Fronthaul потоками трех приоритетов трафика, увеличивается до бесконечности (рис. 6).



**Рис. 6.** Пример перегрузки сегмента Fronthaul**Fig. 6.** Example of the fronthaul segment congestion

#### 4. Кривые обслуживания трафика интерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul

Зная кривые поступления потоков трафика интерфейса eCPRI разных приоритетов и задав скорость обслуживания трафика в транспортном сегменте Fronthaul сетей 4G/5G постоянной и равной R, с использованием базовых положений теории сетевого исчисления можно получить выражения для кривых обслуживания трафика каждого приоритета в виде следующих трех теорем.

**Теорема 1.** Кривая обслуживания потока трафика интерфейса eCPRI низшего приоритета  $A_l(t)$  определяется выражением

$$\beta_l(t) = (R - \rho_h - \rho_m) \left( t - \frac{\sigma_h + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m} \right)^+$$

 $\textit{rde }\forall x\in \pmb{R}$ 

$$(x)^+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & u \text{ where.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть до момента времени  $\tau$  система была пуста, и в этом момент начинается очередной период загрузки системы. Поскольку поток  $A_l$  имеет низший приоритет, то его трафик будет обслуживаться только после обслуживания потоков более высоких приоритетов. Таким образом, для любого момента времени  $t, t > \tau$ , объем обслуженного трафика потока  $A_l$  за интервал времени  $(\tau, t]$  может быть определен как

$$D_l(t) - D_l(\tau) = R(t - \tau) - (D_h(t) - D_h(\tau)) - (D_m(t) - D_m(\tau)).$$
(4)

Так как в момент времени au обслуживается только поток  $A_l$ , то потоки с более высокими приоритетами  $A_m$  и  $A_h$  отсутствуют и для них справедливы следующие равенства

$$A_h(t) - D_h(\tau) = 0, \quad A_m(t) - D_m(\tau) = 0.$$

Поэтому в момент времени au для потока высшего приоритета объем трафика на выходе будет равен объему поступившего трафика:

$$D_h(t) - D_h(\tau) = D_h(t) - A_h(\tau).$$
 (5)

Однако для любого момента времени  $t, t > \tau$ , справедливо неравенство  $D_h(t) \le A_h(t)$ . Поэтому (5) можно переписать в виде неравенства

$$D_h(t) - D_h(\tau) \le A_h(t) - A_h(\tau).$$
(6)

С учетом определения кривой поступления (2) правую часть (6) можно записать в виде

$$D_h(t) - D_h(\tau) \le \alpha_h(t - \tau). \tag{7}$$

Аналогичное неравенство можно записать и для потока среднего приоритета  $A_m$ :

$$D_m(t) - D_m(\tau) \le \alpha_m(t - \tau).$$
(8)

Подставив (7) и (8) в (4), получим

$$D_l(t) - D_l(\tau) \ge (R(t-\tau) - \alpha_h(t-\tau) - \alpha_m(t-\tau))^+.$$
(9)

Определим правую часть этого неравенства как функцию  $\beta_l(t-\tau)$ , тогда (9) можем переписать как

$$D_l(t) - D_l(\tau) \ge \beta_l(t - \tau). \tag{10}$$

Для произвольного момента времени t неравенство (10) можно привести к виду

$$D_l(t) \ge D_l(\tau) + \beta_l(t-\tau), \quad D_l(t) \ge \inf_{0 \le \tau \le t} (D_l(\tau) + \beta_l(t-\tau)).$$
 (11)

С учетом определения (min, +)-свертки (1) соотношение (11) можно записать в виде  $D_l(t) = A_l(t) \otimes \beta_l(t)$ .

Ранее было определено, что  $R \ge \rho_h + \rho_m + \rho_l$ , поэтому функция  $\beta_l(t)$  возрастающая в широком смысле. Согласно выражению (3) можно утверждать, что функция  $\beta_l(t)$  является кривой обслуживания потока  $A_l$ . Следовательно, имеем

$$\beta_l(t) = \left[Rt - \alpha_h(t) - \alpha_m(t)\right]^+ = \left[Rt - (\rho_h \times t + \sigma_h) - (\rho_m \times t + \sigma_m)\right]^+,$$
$$\beta_l(t) = \left(R - \rho_h - \rho_m\right) \left(t - \frac{\sigma_h + \sigma_m}{R - \rho_h - \rho_m}\right)^+.$$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Кривая обслуживания потока трафика интерфейса eCPRI среднего приоритета  $A_m(t)$  определяется выражением

$$\beta_m(t) = (R - \rho_h) \left( t - \frac{\sigma_h}{R - \rho_h} \right)^+.$$
(12)

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 будем предполагать, что в момент времени  $\tau$  система начинает обслуживать поток среднего приоритета  $A_m$ , т. е. в этот момент в системе нет трафика потока высшего приоритета  $A_h$ , а поток  $A_l$  не может обслуживаться из-за более низкого приоритета. Поэтому имеет место следующее уравнение:

$$D_m(t) - D_m(\tau) = R(t - \tau) - (D_h(t) - D_h(\tau)).$$
(13)

Поскольку трафик потока  $A_h$  отсутствует, неравенство (7) также выполняется. Подставив его в (13), получим

$$D_m(t) - D_m(\tau) \ge (R(t - \tau) - \alpha_h(t - \tau))^+.$$
 (14)

Обозначив правую часть неравенства (14) через  $\beta_m(t-\tau)$ , получим

$$D_m(t) - D_m(\tau) \ge \beta_h(t - \tau)$$

Отсюда следует

$$D_m(t) \ge D_m(\tau) + \beta_m(t-\tau),$$
  

$$D_m(t) \ge \inf_{0 \le \tau \le t} (D_m(\tau) + \beta_m(t-\tau)),$$
  

$$D_m(t) = A_m(t) \otimes \beta_m(t).$$

Так как  $\beta_m(t-\tau)$  является функцией, возрастающей в широком смысле, можно утверждать, что она является кривой обслуживания потока  $A_m$ . Использовав правую часть уравнения (14) и подставив выражение для кривой поступления потока  $A_h$ , получим для  $\beta_m(t)$  формулу (12). Теорема доказана.

**Теорема 3.** Кривая обслуживания потока трафика интерфейса eCPRI высшего приоритета  $A_h(t)$  определяется выражением  $\beta_h(t) = R(t-0)^+$ .

Доказательство. Поскольку поток  $A_h$  имеет высший приоритет, система прекратит обслуживание текущего потока более низкого приоритета, если поступит трафик потока  $A_h$ . Предположим, что обслуживание системой потока  $A_h$  начинается в момент времени  $\tau$ . В течение интервала времени  $(\tau, t]$  при входном потоке  $A_h$  выходной поток системы будет равен

$$D_h(t) - D_h(\tau) = R(t - \tau).$$
 (15)

Обозначив правую часть (15) через  $\beta_h(t)$ , можно записать

$$D_{h}(t) = D_{h}(\tau) + \beta_{h}(t - \tau),$$
  

$$D_{h}(t) \ge \inf_{0 \le \tau \le t} (D_{h}(\tau) + \beta_{h}(t - \tau)),$$
  

$$D_{h}(t) = A_{h}(t) \otimes \beta_{h}(t).$$
(16)

Для  $\beta_h(t)$  справедлива формула  $\beta_h(t) = R(t-0)^+$ . Эта функция является возрастающей в широком смысле, поэтому с учетом неравенства (16) можно утверждать, что она является кривой обслуживания потока  $A_h$ . Теорема доказана.

#### 5. Верхние границы задержек трафика интерфейса eCPRI

На основе полученных выражений для кривых поступления и кривых обслуживания для каждого потока трафика интерфейса eCPRI соответствующего приоритета обслуживания можно получить верхние границы задержки потоков в сегменте Fronthaul на основе следующих теорем.

**Теорема 4.** Верхняя граница задержки потока с низшим приоритетом  $A_l$  определяется выражением

$$w_l = \frac{\sigma_h + \sigma_m + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m}.$$

Доказательство. Согласно (3) задержка потока  $A_l$  в наихудшем случае – это верхний предел горизонтального отклонения между кривой поступления  $\alpha_l(t)$  и кривой обслуживания  $\beta_l(t)$ :

$$w_{l} = \sup_{t \ge 0} \left\{ \inf \left\{ w \ge 0 : \alpha_{l}(t) \le \beta_{l}(t+w) \right\} \right\}.$$
(17)

Для  $a_l(t) \leq \beta_l(t+w)$ , использовав кривую поступления потока (2) и кривую обслуживания, согласно теореме 1 получим

$$\rho_l t + \sigma_l \le (R - \rho_h - \rho_m) \left( t + w - \frac{\sigma_h + \sigma_m}{R - \rho_h - \rho_m} \right)^+.$$
(18)

После преобразований (18) можно переписать в виде

$$w \ge \frac{\rho_l t + \sigma_l + \sigma_h + \sigma_m}{R - \rho_h - \rho_m} - t,$$
$$w \ge \frac{(\rho_l + \rho_h + \rho_m - R)t + \sigma_l + \sigma_h + \sigma_m}{R - \rho_h - \rho_m}.$$

Теперь (17) можно представить как

$$w_l = \sup_{t \ge 0} \left\{ \inf \left\{ w \ge 0 : w \ge \frac{(\rho_h + \rho_m + \rho_l - R)t + \sigma_h + \sigma_m + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m} \right\} \right\}.$$

Так как  $\rho_h + \rho_m + \rho_l < R$ , то функция

$$\frac{(\rho_h + \rho_m + \rho_l - R)t + \sigma_h + \sigma_m + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m}$$

строго уменьшается с увеличением  $t\geq 0,$ достигая максимального значения при t=0. Из этого следует, что

$$w_l = \inf\left\{w \ge 0 : w \ge \frac{\sigma_h + \sigma_m + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m} = \frac{\sigma_h + \sigma_m + \sigma_l}{R - \rho_h - \rho_m}\right\}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.** Верхняя граница задержки потока со средним приоритетом  $A_m$  определяется выражением

$$w_m = \frac{\sigma_h + \sigma_m}{R - \rho_h}.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4 имеем

$$w_{m} = \sup_{t \ge 0} \left\{ \inf \left\{ w \ge 0 : \alpha_{m}(t) \le \beta_{m}(t+w) \right\} \right\} = \inf \left\{ w \ge 0 : \alpha_{m}(0) \le \beta_{m}(w) \right\},$$
$$w_{m} = \inf \left\{ w \ge 0 : \sigma_{m} \le (R-\rho_{h})w - \sigma_{h} \right\} = \inf \left\{ w \ge 0 : w \ge \frac{\sigma_{h} + \sigma_{m}}{R - \rho_{h}} \right\}.$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.** Верхняя граница задержки потока с высшим приоритетом  $A_h$  определяется выражением

$$w_h = \sigma_h / R. \tag{19}$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 4 имеем

$$w_{h} = \sup_{t \ge 0} \left\{ \inf \left\{ w \ge 0 : \alpha_{h}(t) \le \beta_{h}(t+w) \right\} \right\} = \inf \left\{ w \ge 0 : \alpha_{h}(0) \le \beta_{h}(w) \right\},\$$
$$w_{h} = \inf \left\{ w \ge 0 : \sigma_{h} \le Rw \right\} = \inf \left\{ w \ge 0 : w \ge \frac{\sigma_{h}}{R} \right\}.$$

Теорема доказана.

#### 6. Численное моделирование

С использованием полученных аналитических результатов было проведено численное моделирование верхних границ задержек передачи трафика интерфейса eCPRI в сегменте Fronthaul мобильных сетей 4G/5G. Предположим, что для реализации сегмента Fronthaul используется технология 10G TSN Ethernet со скоростью передачи 10 Гбит/с, тогда с учетом максимального размера кадра Ethernet в 1522 байта скорость передачи трафика интерфейса eCPRI составит R = 9.852 Гбит/с. Рассмотрим случаи подключения к данному сегменту Fronthaul трех, шести или девяти радиоголовок. Согласно (19) максимальная задержка трафика высшего приоритета при фиксированной скорости сегмента Fronthaul зависит только от пачечности этого трафика. Следовательно, при допустимой задержке трафика высшего приоритета в 0.1 мс (см. табл. 1) пачечность данного трафика не должна превышать 128 Кбайт, что хорошо согласуется с технологией Ethernet, в которой максимальный размер полезной нагрузки в кадре не превышает 1.522 Кбайт. Были проведены расчеты верхних границ задержек трафика интерфейса eCPRI разных приоритетов в зависимости от числа радиоголовок RRH, подключенных к сегменту Fronthaul. При расчетах принималось, что пачечность трафика всех трех приоритетов одинакова ( $\sigma_h = \sigma_m = \sigma_l$ ) и равна максимальному размеру кадра Ethernet 1.522 Кбайт.

Результаты моделирования показали, что верхние границы задержек трафика высшего приоритета значительно меньше нормируемой допустимой задержки в 100 мкс даже при подключении девяти радиоголовок (рис. 7).



Число радиоголовок RRH, подключенных к сегменту Fronthaul

**Рис.** 7. Результаты расчетов задержек трафика высшего приоритета **Fig.** 7. Delay bounds for high-priority traffic

Результаты моделирования максимальных задержек трафика среднего приоритета, приведенные на рис. 8, показали, что они больше задержек высокоприоритетных потоков, но даже при девяти подключенных радиоголовках не превышают нормируемой допустимой задержки в 1 мс при условии, что каждая радиоголовка создает трафик высшего приоритета, занимающий 10 % полосы пропускания сегмента Fronthaul.

Полученные результаты расчетов верхних границ задержки потоков трафика низшего приоритета (рис. 9) свидетельствуют о том, что такой трафик имеет задержки больше,

чем трафик высшего и среднего приоритетов. Но эти задержки также не превышают максимально допустимой величины в 100 мс.



**Рис. 8.** Результаты расчетов задержек трафика среднего приоритета **Fig. 8.** Delay bounds for medium-priority traffic



Число радиоголовок RRH, подключенных к сегменту Fronthaul

**Рис. 9.** Результаты расчетов задержек трафика низшего приоритета **Fig. 9.** Delay bounds for low-priority traffic

Следует отметить, что все приведенные выше расчеты относились к задержкам кадров Ethernet в очередях потоков разных приоритетов трафика и не учитывали времени передачи сигналов интерфейса eCPRI в физическом канале связи. В мобильных сетях 4G/5G транспортный сегмент Fronthaul на физическом уровне чаще всего реализуется с использованием оптоволоконных кабелей, в которых 1 км оптического волокна вносит задержку распространения света около 5 мкс. Поэтому к полученным выше значениям верхних границ задержки потоков трафика интерфейса eCPRI разных приоритетов необходимо добавить фиксированную задержку, зависящую от физической длины оптоволоконного кабеля.

Так, если эта длина кабеля равна 10 км, то дополнительная фиксированная задержка будет 50 мкс, что составляет 50 % от максимальной допустимой задержки потоков трафика высшего приоритета.

Предложенная методика расчетов задержек передачи трафика интерфейса eCPRI различных приоритетов в сегменте Fronthaul на практике может быть использована и для решения обратной задачи – при заданных величинах трафика и норм на его максимальные задержки можно определить необходимую скорость (пропускную способность) транспортного сегмента Fronthaul мобильных сетей 4G/5G и выбрать необходимую технологию его реализации.

#### Заключение

Использование математического аппарата теории сетевого исчисления позволило достаточно просто построить аналитическую модель транспортного сегмента Fronthaul в мобильных сетях 4G/5G и определить с ее помощью верхние граничные оценки задержек различного вида трафика интерфейса eCPRI. Эти теоретические результаты позволяют на практике рассчитать минимальную требуемую пропускную способность транспортного сегмента Fronthaul в сетях 4G/5G. Результаты вычислительных экспериментов показывают, что получаемые границы задержки трафика интерфейса eCPRI с различным приоритетом в сегменте Fronthaul обладают большим потенциалом для помощи оператору мобильной сети при развертывании и эксплуатации отечественных сетей 4G/5G.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

#### Литература

- 1. Росляков А.В., Герасимов В.В. Анализ сквозной задержки в транспортном сегменте Fronthaul сетей 4G/5G на базе технологии TSN // Тр. учебн. завед. связи. 2024. Т. 10, № 1. С. 73–84. https://doi.org/10.31854/1813-324X-2024-10-1-73-84.
- 2. *Караулова О.А., Киреева Н.В., Чупахина Л.Р.* Анализ времени ожидания в G/G/1 очереди // ИКТ. 2018. Т. 16, № 4. С. 393–399. https://doi.org/10.18469/ikt.2018.16.4.05.
- 3. Le Boudec J.-Y., Thiran P. (Eds.) Network Calculus: A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 2050. Springer, 2001. xx, 276 p. https://doi.org/10.1007/3-540-45318-0.
- 4. Common public radio interface: Requirements for the eCPRI transport network. eCPRI Transport Network Requirements Specification. Ver. 1.1. Ericsson AB, Huawei Technologies Co. Ltd, NEC Corp., Nokia, 2018. 14 p.
- Росляков А.В., Герасимов В.В. Реализация сегмента Fronthaul сетей 4G/5G на базе технологии TSN // Перв. миля. 2024. № 3. С. 42–50. https://doi.org/10.22184/2070-8963.2024.119.3.42.50.

- 6. Росляков А.В., Лысиков А.А. Сетевое исчисление (Network Calculus) и его применение для оценки сетевых характеристик. Самара: ПГУТИ, 2019. 222 с.
- 7. *Кудрявцева Е.Н., Росляков А.В.* Базовые принципы и перспективы использования теории сетевого исчисления (Network Calculus) // ИКТ. 2013. Т. 11, № 3. С. 34–39.
- 8. Росляков А.В., Лысиков А.А., Витевский В.Д. Сетевое исчисление (Network Calculus). Часть 1. Теоретические основы // ИКТ. 2018. Т. 16, № 1. С. 19–33.
- Cruz R.L. A calculus for network delay, part I: Network elements in isolation // IEEE Trans. Inf. Theory. 1991. V. 37, No 1. P. 114–131. https://doi.org/10.1109/18.61109.
- Cruz R.L. A calculus for network delay, part II: Network analysis // IEEE Trans. Inf. Theory. 1991. V. 37, No 1. P. 132–141. https://doi.org/10.1109/18.61110.
- 11. *Кривулин Н.К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 256 с.

#### References

- Roslyakov A.V., Gerasimov V.V. Analysis of end-to-end delay in the transport segment of Fronthaul 4G/5G networks based on TSN technology. *Tr. Uchebn. Zaved. Svyazi*, 2024, vol. 10, no. 1, pp. 73–84. https://doi.org/10.31854/1813-324X-2024-10-1-73-84. (In Russian)
- Karaulova O.A., Kireeva N.V., Chupakhina L.R. Analysis of the waiting time in a G/G/1 queue. Infokommun. Tekhnol., 2018, vol. 16, no. 4, pp. 393–399. https://doi.org/10.18469/ikt.2018.16.4.05. (In Russian)
- 3. Le Boudec J.-Y., Thiran P. (Eds.) Network Calculus: A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 2050. Springer, 2001. xx, 276 p. https://doi.org/10.1007/3-540-45318-0.
- 4. Common public radio interface: Requirements for the eCPRI transport network. eCPRI Transport Network Requirements Specification. Ver. 1.1. Ericsson AB, Huawei Technologies Co. Ltd, NEC Corp., Nokia, 2018. 14 p.
- Roslyakov A.V., Gerasimov V.V. Realisation of the Fronthaul segment of 4G/5G networks based on TSN technology. *Pervaya Milya*, 2024, no. 3, pp. 42–50. https://doi.org/10.22184/2070-8963.2024.119.3.42.50.
- 6. Roslyakov A.V., Lysikov A.A. Setevoe ischislenie (Network Calculus) i ego primenenie dlya otsenki setevykh kharakteristik [Network Calculus and Its Application for Network Performance Evaluation]. Samara, PGUTI, 2019. 222 p. (In Russian)
- 7. Kudryavtseva E.N., Roslyakov A.V. Basic principles and perspectives of Network Calculus application. *Infokommun. Tekhnol.*, 2013, vol. 11, no. 3, pp. 34–39. (In Russian)
- Roslyakov A.V., Lysikov A.A., Vitevskiy V.D. Network Calculus. Part 1. Theoretical foundations. Infokommun. Tekhnol., 2018, vol. 16, no. 1, pp. 19–33. (In Russian)
- Cruz R.L. A calculus for network delay, part I: Network elements in isolation. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1991, vol. 37, no. 1, pp. 114–131. https://doi.org/10.1109/18.61109.
- Cruz R.L. A calculus for network delay, part II: Network analysis. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1991, vol. 37, no. 1, pp. 132–141. https://doi.org/10.1109/18.61110.

11. Krivulin N.K. Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem [Methods of Idempotent Algebra for Solving Problems in Modeling and Analysis of Complex Systems]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 2009. 256 p. (In Russian)

#### Информация об авторах

**Александр Владимирович Росляков**, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой сетей и систем связи, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

E-mail: a.roslyakov@psuti.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3130-8262

Вячеслав Васильевич Герасимов, старший преподаватель кафедры сетей и систем связи, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

E-mail: v.gerasimov@psuti.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0004-7791-7981

#### Author Information

Aleksandr V. Roslyakov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Head of Department of Networks and Communication Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics E-mail: a.roslyakov@psuti.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3130-8262

**Vyacheslav V. Gerasimov**, Senior Lecturer, Department of Networks and Communication Systems, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics

E-mail: v.gerasimov@psuti.ru

ORCID: https://orcid.org/0009-0004-7791-7981

Поступила в редакцию 29.10.2024 Принята к публикации 20.03.2025 Received October 29, 2024 Accepted March 20, 2025

## ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.62

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.367-383

## Верификация интеграции данных в интегрированной системе баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов

## С.А. Ступников

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, г. Москва, Россия

sstupniukov@ipiran.ru

#### Аннотация

С ростом неоднородности моделей и схем данных в современном мире все более необходимой становится интеграция данных. Системы интеграции данных создаются в различных предметных областях, например, в астрономии, управлении землепользованием и материаловедении. Программы интеграции данных могут быть очень сложными, а потому становятся важными вопросы формальной верификации их корректности.

В настоящей работе рассмотрен подход к верификации корректности интеграции данных в интегрированной системе баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов Института металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН. Интеграция данных в этой системе проводится в два этапа: на первом этапе данные из источников, помеченные на удаление, изменение или добавление, преобразуются в промежуточное XML-представление; на втором этапе для элементов XML-представления вызываются процедуры целевой интегрированной базы данных, удаляющие, изменяющие или добавляющие в нее соответствующие записи. Реализация программ интеграции данных осуществлена с использованием композиции императивного языка программирования и декларативного языка реляционных баз данных. Подход к верификации основан на определении семантики схем данных и программ интеграции данных в формальном языке спецификаций и последующем доказательстве корректности интеграции данных с использованием автоматизированных средств доказательства.

**Ключевые слова:** интеграция данных, верификация, семантика программ, доказательство корректности

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках темы государственного задания ФИЦ ИУ РАН. Автор благодарит Виктора Дударева (Ruhr University Bochum, ИМЕТ РАН) за ценные замечания к работе.

Для цитирования: *Ступников С.А.* Верификация интеграции данных в интегрированной системе баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 367–383. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.367-383.

## **ORIGINAL ARTICLE** https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.367-383

## Verification of data integration in an integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials

## S.A. Stupnikov

Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

sstupniukov@ipiran.ru

#### Abstract

Due to the increasing heterogeneity of data models and schemas in the modern world, robust data integration is a high-priority issue. Data integration systems have been extensively deployed across various domains, including astronomy, land use management, and materials science. However, data integration programs can be very complicated. Thus, formal verification of their correctness has emerged as an important task.

In this article, an approach to verify the correctness of data integration in an integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials is considered. The system, developed at the A.A. Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science of the Russian Academy of Sciences, employs a two-stage data integration process: during the first stage, the source data marked for deletion, modification, or insertion are converted into an intermediate XML representation; in the second stage, the system invokes the corresponding procedures for XML elements in the target integrated database and updates it accordingly. The data integration programs are implemented by combining an imperative programming language with a declarative language of relational databases. Verification is performed by defining the semantics of the data schemas and data integration programs in a formal specification language and proving the correctness of data integration using automated provers.

Keywords: data integration, verification, program semantics, proof of correctness

Acknowledgments. This study was carried out as part of the state assignment to the Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences. Sincere thanks are due to Victor Dudarev (Ruhr University Bochum, A.A. Baikov Institute of Metallurgy and Materials Science of the Russian Academy of Sciences) for his valuable comments.

For citation: Stupnikov S.A. Verification of data integration in an integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 367–383. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.367-383. (In Russian)

#### Введение

В современном мире в науке и промышленности быстро растет число неоднородных источников данных. Каждый такой источник разработан на основе удобных его пользователям модели данных и системы управления базами данных (СУБД), а схема базы данных определена из соображений конкретной предметной области. Для преодоления неоднородности моделей и схем данных системы интеграции данных [1] создаются в различных предметных областях, например, в астрономии [2], управлении землепользованием [3] и материаловедении [4].

Программы интеграции данных в разрабатываемых системах могут быть очень сложными, а потому возникают вопросы формальной верификации корректности интеграции данных. Формальная верификация программ также достаточно сложна, однако ее применение при разработке программных систем оправдано, поскольку стоимость исправления ошибки после выпуска системы в производство может превышать стоимость исправления ошибки на этапе разработки системы в десятки и сотни раз [5].

Вопросы верификации интеграции данных исследуются достаточно активно. Обычно основная идея подходов к верификации состоит в том, чтобы сообщить программам интеграции данных семантику в некотором формальном языке. Свойства программ, подлежащие проверке, представляются в виде выражений этого языка. Затем с использованием формальных средств доказательства спецификация, выражающая семантику конкретной программы интеграции данных, проверяется на соответствие необходимым свойствам. Например, известны работы по определению формальной семантики самой распространенной в мире модели данных – языка SQL (например, [6]). Отдельное крупное направление образуют работы по верификации трансформаций моделей, основанной на движимой моделями инженерии (MDE) [7].

В направлении собственно интеграции данных в качестве языка определения формальной семантики моделей данных хорошо зарекомендовала себя «Нотация абстрактных машин» (AMN) [8] – язык, основанный на логике первого порядка и теории множеств. Язык AMN поддержан промышленным инструментарием, направленным на автоматизированную проверку корректности спецификаций Atelier [9]. Накоплен более чем двадцатилетний мировой опыт применения языка AMN и средств его инструментальной поддержки при разработке промышленных программных систем [10]. Методы верификации интеграции данных с использованием AMN предложены, в частности, в [11] и [12]. В работе [11] определена формальная семантика языка разрешения сущностей и слияния данных HIL в языке AMN для верификации потоков работ интеграции данных. В [12] разработан метод верификации корректности виртуальной интеграции данных в модели RDF. Корректность доказывается путем отображения схем предметной области, схем источников данных и запросов в язык AMN и последующего применения автоматизированных средств доказательства.

Настоящая работа имеет практическую направленность – верификацию интеграции данных в интегрированной базе данных Института металлургии и материаловедения (ИМЕТ) им. А.А. Байкова РАН [13], [14]. Рассмотрена интеграция данных из базы данных Bandgap [15], содержащей данные о ширине *запрещенной зоны* основных классов неорганических веществ. «Ширина запрещенной зоны является фундаментальным параметром конденсированных фаз, который характеризует природу химической связи в материале. По величине запрещенной зоны можно судить о типе химической связи, доминирующей в соединении, устойчивости соединения в определенном интервале изменений состава и внешних параметров, типе электронной проводимости в образцах, склонности материала к ионной проводимости, а также основных термодинамических характеристиках соединения» $^1$ .

Интеграция данных в системе проводится в два этапа: на первом этапе данные из базы данных Bandgap, помеченные на удаление, изменение или добавление, преобразуются в промежуточное XML-представление; на втором этапе для элементов XML-представления вызываются процедуры целевой интегрированной базы данных, удаляющие, изменяющие или добавляющие в нее соответствующие записи. Реализация программ интеграции данных проводится с использованием композиции императивного языка программирования (VBScript) и декларативного языка реляционных баз данных (SQL).

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приведены структура схем данных и программ интеграции данных в интегрированной базе данных ИМЕТ и общая структура спецификаций языка AMN, выражающие формальную семантику программ интеграции данных. Определение формальной семантики схемы источника данных, схемы промежуточного представления данных, схемы интегрированной базы данных, программы извлечения данных из источников и преобразования в промежуточное представление, процедуры загрузки (обновления) данных в интегрированную базу данных продемонстрировано на примерах интеграции базы данных Bandgap. В разделе 2 проиллюстрирована верификация программ интеграции данных.

#### 1. Формальная семантика программ интеграции данных

Структура схем данных и программ интеграции данных в интегрированной базе данных ИМЕТ РАН [14] включает следующие компоненты:

- реляционные схемы источников данных;
- схема промежуточного представления данных на языке XML Schema;
- программы извлечения данных из источников и преобразования в промежуточное XML-представление (композиция императивного языка программирования VBScript и декларативного языка реляционных баз данных SQL);
- реляционная схема интегрированной базы данных;
- процедуры загрузки (обновления) данных в интегрированную базу данных.

Программы интеграции данных запускают с установленной периодичностью (обычно ежедневно), извлекают накопившиеся изменения в источниках данных, формируют файлы промежуточного XML-представления, а затем для каждого из элементов XML-файлов запускают процедуры обновления данных в интегрированной базе данных.

Определение формальной семантики схем данных и программ интеграции данных, а также их дальнейшая верификация осуществляются для каждого источника данных независимо. Структура семантических спецификаций для отдельного источника данных включает следующие компоненты:

• AMN-спецификация вида MACHINE [8], определяющая семантику реляционной схемы источника данных и операций извлечения данных из источника;

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>https://bg.imet-db.ru/default.asp?lang=ru.

- AMN-спецификация вида MACHINE, определяющая семантику схемы промежуточного XML-представления и операций создания элементов XML-документа;
- AMN-спецификация вида MACHINE, определяющая семантику реляционной схемы интегрированной базы данных и процедур обновления данных в интегрированной базе данных;
- AMN-спецификация вида REFINEMENT [8], определяющая семантику императивной программы интеграции данных, последовательно вызывающей операции извлечения данных из источника, преобразования данных в промежуточное представление, обновления данных в интегрированной базе данных.

Ниже в данном разделе формальная семантика программ интеграции данных проиллюстрирована на примере базы данных Bandgap. Все упомянутые файлы схем, программ и AMN-спецификаций опубликованы в репозитории GitHub<sup>2</sup>.

**1.1.** Семантика реляционной схемы источника данных и операций извлечения данных из источника. Фрагмент реляционной схемы базы данных Bandgap приведен в файле *Bandgap-ver.sql*. Пример определения таблицы свойств веществ выглядит следующим образом<sup>3</sup>:

```
CREATE DATABASE [BandGap]

CREATE TABLE [dbo].[_PropertiesConv](

[NOMPROP] [int] NOT NULL,

[UpdateStatus] [int] NOT NULL,

[NAZVPROP] [varchar](128) NOT NULL,

[HTML] [varchar](128) NOT NULL,

CONSTRAINT [PK___PropertiesConv] PRIMARY KEY ([NOMPROP])

)
```

Соответствующий фрагмент AMN-спецификации Bandgap, выражающий семантику реляционной схемы, выглядит следующим образом:

```
MACHINE Bandgap

DEFINITIONS

PropertiesConv_struct == struct(

NOMPROP: INT,

UpdateStatus: INT,

NAZVPROP: seq(0..255),

HTML: seq(0..255)

);

ABSTRACT_VARIABLES

PropertiesConv

INVARIANT
```

 $^{2} https://github.com/sstupnikov/DataTransformation/tree/main/Bandgap.$ 

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Строго говоря, рассматриваемые таблицы не являются непосредственно источником данных. Их наполнение происходит за счет использования триггеров на таблицах исходной базы данных. В настоящей работе этот аспект не рассмотрен для сокращения изложения, поскольку он добавляет не методологическую, а техническую сложность.

```
PropertiesConv: FIN(PropertiesConv_struct) &
  !(prop1, prop2).(
     prop1: PropertiesConv & prop2: PropertiesConv &
     prop1 'NOMPROP = prop2 'NOMPROP =>
     prop1 = prop2)
INITIALISATION
PropertiesConv:= {}
```

Определяются структура данных PropertiesConv\_struct и переменная PropertiesConv, выражающие семантику таблицы \_PropertiesConv. Переменная типизируется в разделе INVARIANT (ограничение первичного ключа выражается соответствующей формулой) и инициализируется пустым множеством.

Семантика SQL-операции извлечения обновленных данных из источника

SELECT \* FROM PropertiesConv WHERE UpdateStatus>0

выражается операцией машины Bandgap:

**OPERATIONS** 

```
result <--- select_PropertiesConv =
result := { rcrd | rcrd: PropertiesConv & rcrd 'UpdateStatus > 0 }
END
```

**1.2.** Семантика схемы промежуточного XML-представления и операций создания элементов XML-документа. Фрагмент схемы промежуточного представления приведен в файле *MUService-ver.xsd*. Пример определения XML-элемента PropertiesInfo, задающего свойства вещества, выглядит следующим образом:

```
<xs:schema targetNamespace="http://meta.imet-db.ru/MUService.xsd"
xmlns:xs="http://www.w3.org/2001/XMLSchema">
<xs:element name="MetaBase" type="MetaBaseType" />
<xs:complexType name="MetaBaseType">
 <xs:sequence>
  < xs: element name="PropertiesInfo" minOccurs="0" maxOccurs="1">
   <xs:complexType><xs:sequence>
    < xs: element name = "PropertiesInfoItem" minOccurs = "1" >
     <xs:complexType> <xs:sequence>
       <xs:element name="PropID" type="xs:integer"</pre>
          minOccurs="1" maxOccurs="1" />
       <xs:element name="Name" type="xs:string"</pre>
          minOccurs="1" maxOccurs="1" />
       <xs:element name="Description" type="xs:string"</pre>
          minOccurs="1" maxOccurs="1" />
       <xs:element name="WWWTemplatePage" type="xs:string"</pre>
          minOccurs="1" maxOccurs="1" />
       <xs:element name="UpdateStatus" type="xs:integer"</pre>
          minOccurs="1" maxOccurs="1" />
      </xs: sequence> </xs: complexType>
  </\mathrm{xs:element}>
```

```
</\mathrm{xs}:\mathrm{sequence}>
</\mathrm{xs}:\mathrm{complexType}>
</\mathrm{xs}:\mathrm{element}>
</\mathrm{xs}:\mathrm{schema}>
```

Соответствующий фрагмент AMN-спецификации MUService, выражающей семантику XSD-схемы, выглядит следующим образом:

```
MACHINE
         MUService
DEFINITIONS
    PropertiesInfoItem == struct(
        PropID: INT,
        Name: seq(0..255),
        Description: seq(0..255),
        WWWTemplatePage: seq (0..255),
        UpdateStatus: INT
    );
ABSTRACT VARIABLES
    MetaBase
INVARIANT
    MetaBase: struct(
       PropertiesInfo: FIN(PropertiesInfoItem)
    )
```

Определяются структура данных PropertiesInfoItem, выражающая семантику одноименного XML-элемента, и переменная MetaBase, также выражающая семантику одноименного XML-элемента. Переменная типизируется в разделе INVARIANT. Можно видеть, что конструктор типов complexType представляется в AMN конструкцией структуры struct, а конструктор sequence – типизацией элемента множества конечных подмножеств FIN.

Семантика операции createNode (заданной для объектов типа Msxml2.DOMDocument) создания элемента PropertiesInfoItem выражается соответствующей операцией машины MUService:

```
createNodePropertiesInfoItem(value) =
PRE value: PropertiesInfoItem
THEN
MetaBase'PropertiesInfo := MetaBase'PropertiesInfo \/ {value}
END;
```

**1.3.** Семантика реляционной схемы интегрированной базы данных и процедур обновления данных в интегрированной базе данных. Фрагмент реляционной схемы интегрированной базы данных Metabase приведен в файле *Metabase-ver.sql*. Пример определения таблицы свойств веществ выглядит следующим образом:

```
CREATE DATABASE [Metabase]
CREATE TABLE [dbo].[PropertiesInfo](
[DBID] [int] NOT NULL,
[PropID] [int] NOT NULL,
```

```
[Name] [varchar](256) NOT NULL,
[Description] [text] NOT NULL,
[WWWTemplatePage] [varchar](256) NOT NULL,
[UpdateStatus] [int] NOT NULL,
CONSTRAINT [PK_PropertiesInfo] PRIMARY KEY ([DBID],[PropID])
```

Соответствующий фрагмент AMN-спецификации Metabase, выражающий семантику реляционной схемы интегрированной базы данных, выглядит следующим образом:

```
MACHINE Metabase
DEFINITIONS
  PropertiesInfo struct = struct(
        DBID: INT,
        PropID: INT,
        Name: seq(0..255),
        Description: seq(0..255),
        WWWTemplatePage: seq (0..255),
        UpdateStatus: INT
  )
ABSTRACT VARIABLES
  PropertiesInfo
INVARIANT
  PropertiesInfo: FIN(PropertiesInfo struct) &
  !(prop1, prop2).(
     prop1: PropertiesInfo & prop2: PropertiesInfo &
     prop1 'DBID = prop2 'DBID & prop1 'PropID = prop2 'PropID =>
     prop1 = prop2) &
INITIALISATION
  PropertiesInfo:= {}
OPERATIONS
result <--- getNewSystemID(adbid) =
PRE adbid: INT
THEN
    IF card({ system | system: SystemInfo &
                        system 'DBID = adbid \} = 0
    THEN
        result := 1
    ELSE
        result := max({ systemid | systemid: INT &
            #(system).(system: SystemInfo &
                        system 'DBID = adbid &
                        system 'SystemID = systemid ) \} + 1
    END
END
```

Можно видеть, что семантика целевой реляционной схемы определяется аналогично семантике реляционной схемы источника (раздел 1.1). Отметим, что в таблицах целевой

базы данных присутствует ключевой атрибут DBID. Генерация значений этого атрибута производится веб-сервисом, вызывающим процедуры целевой базы данных. Семантика генерации значений выражается операцией getNewSystemID спецификации Metabase.

Для обновления данных в интегрированной базе данных определены процедуры. Например, процедура обновления свойств веществ выглядит следующим образом:

```
CREATE PROCEDURE [dbo].[UpdatePropertiesInfo]
@DBID int, @PropID int, @Name varchar(256), @Description text,
@WWWTemplatePage varchar(256), @UpdateStatus int
AS
IF @UpdateStatus=2
BEGIN
 DELETE FROM PropertiesInfo WHERE DBID=@DBID AND PropID=@PropID
END
ELSE
BEGIN
  IF EXISTS (SELECT DBID FROM PropertiesInfo
             WHERE DBID=@DBID AND PropID=@PropID)
    UPDATE PropertiesInfo
    SET [Name]=@Name, [Description]=@Description,
        WWWTemplatePage=@WWWTemplatePage, UpdateStatus=1
   WHERE DBID=@DBID AND PropID=@PropID
 ELSE
    INSERT INTO PropertiesInfo (DBID, PropID, [Name],
        [Description], WWWTemplatePage, UpdateStatus)
    VALUES (@DBID, @PropID, @Name, @Description,
            @WWWTemplatePage, 1)
 END
```

RETURN 0

Статус обновления записи (UpdateStatus), равный 2, означает, что запись должна быть удалена. Если запись уже существует в интегрированной базе данных (это определяется по значениям ключевых атрибутов DBID, PropID), то обновляются значения ее атрибутов. В противном случае запись добавляется в базу данных. Семантика этой процедуры выражается операцией машины Metabase:

```
UpdatePropertiesInfo(adbid, apropid, aname, adescription,
                     awwwtemplatepage, anupdatestatus) =
```

```
PRE
```

```
adbid: INT &
    apropid: INT &
    aname: seq(0..255) &
    adescription: seq(0..255) &
    awwwtemplatepage: seq(0..255) &
    anupdatestatus: INT
THEN
    IF anupdatestatus = 2
    THEN
```

```
PropertiesInfo := PropertiesInfo -
    { rcrd | rcrd: PropertiesInfo & rcrd 'DBID = adbid &
              rcrd 'PropID = apropid \}
ELSE
   IF #(rcrd).(rcrd: PropertiesInfo & rcrd'DBID = adbid &
                rcrd 'PropID = apropid)
   THEN // Update
       PropertiesInfo :=
       (PropertiesInfo - { rcrd | rcrd: PropertiesInfo &
          rcrd 'DBID = adbid \& rcrd 'PropID = apropid \}) //
       {rec(DBID: adbid, PropID: apropid, Name: aname,
             Description: adescription,
            WWWTemplatePage: awwwtemplatepage,
             UpdateStatus: 1)}
   ELSE // Insert
       PropertiesInfo := PropertiesInfo \backslash/
       {rec(DBID: adbid, PropID: apropid, Name: aname,
             Description: adescription,
            WWWTemplatePage: awwwtemplatepage,
             UpdateStatus: 1)}
   END
END
```

END;

Здесь семантика операции DELETE выражается операцией разности множеств «—», семантика SELECT – операцией выделения множества «{ | }», семантика операции UPDATE – композицией операций разности и объединения множеств («\/»), семантика INSERT – операцией объединения множеств, семантика EXISTS – формулой с квантором существования «#».

**1.4.** Семантика императивной программы интеграции данных. Фрагмент программы интеграции данных из базы данных Bandgap в интегрированной базе данных ИМЕТ приведен в файле *UpdateBandGapMeta-ver.vbs*. В настоящем разделе мы ограничимся обсуждением операции манипулирования данными о свойствах вещества (как в разделах 1.1, 1.2 и 1.3).

Для загрузки обновлений данных о свойствах веществ из источника и их преобразования в промежуточное представление служит функция ProcessPropertiesInfo (приведен фрагмент функции):

```
function ProcessPropertiesInfo(objRootElement)
Dim tmp, tmpLink, tmpLink2, theDate
Dim NOMPROP, UpdateStatus, NAZVPROP, HTML
    RSN.Open "SELECT * FROM _ PropertiesConv WHERE UpdateStatus>0"
    if NOT RSN.EOF Then
        Set tmp = objXML.createNode(1, "PropertiesInfo", "")
        objRootElement.appendChild(tmp)
    end if
```

```
Do while NOT RSN.EOF
NOMPROP = RSN("NOMPROP")
...
Set tmpLink = objXML.createNode(1, "PropertiesInfoItem", "")
Set tmpLink2 = objXML.createNode(1, "PropID", "")
tmpLink2.text = NOMPROP
tmpLink.appendChild(tmpLink2)
...
tmp.appendChild(tmpLink)
RSN.MoveNext
Loop
ad function
```

end function

Эта функция извлекает обновленные данные из таблицы \_PropertiesConv, для каждой записи извлеченных данных в цикле создает элемент PropertiesInfoItem и присваивает его свойствам (например, PropID) соответствующие значения из записи (например, NOMPROP).

Семантика программы интеграции данных выражается AMN-спецификацией Bandgap2MetabaseRef, включающей (INCLUDES [8]) семантические спецификации схем источника, промежуточного представления и интегрированной базы данных:

```
REFINEMENT Bandgap2MetabaseRef
INCLUDES Bandgap, MUService, Metabase
```

Управление последовательностью исполнения операций трансформации данных осуществляется при помощи переменной state, принимающей значения из множества TRANSFORMATION\_PERFORMED:

#### SETS

```
TRANSFORMATION_PERFORMED = {
	READY_TO_TRANSFORM,
	TRANSFORM_PROPERTIESCONV,
	TRANSFORM_PROPERTIESCONV_RECORD,
	TRANSFORM_PROPERTIES_INFO,
	TRANSFORM_PROPERTIES_INFO,
```

} ABSTRACT\_VARIABLES state INVARIANT state: TRANSFORMATION PERFORMED

INITIALISATION

. . .

state := READY TO TRANSFORM

Так, например, состояние TRANSFORM\_PROPERTIESCONV означает, что происходит трансформация записей таблицы PropertiesConv в промежуточное представление, а состояние TRANSFORM\_PROPERTIES\_INFO – что происходит загрузка данных из XML-элементов PropertiesInfoItem в целевую базу данных.

Определяются вспомогательные переменные, соответствующие множествам еще не обработанных записей или элементов:

```
ABSTRACT_VARIABLES

RSN_PropertiesConv,

propertiesInfo

INVARIANT

RSN_PropertiesConv: FIN(PropertiesConv_struct) &

propertiesInfo: FIN(PropertiesInfoItem)

INITIALISATION

RSN_PropertiesConv:= {} ||

propertiesInfo:= {}
```

Семантика операций трансформации отдельных записей или XML-элементов выражается операциями AMN (ниже приведен пример одной из операций, соответствующей преобразованию записи из таблицы PropertiesConv вышеприведенной функцией ProcessPropertiesInfo):

```
ProcessPropertiesInfoItem =
SELECT state = TRANSFORM PROPERTIESCONV RECORD
THEN
 VAR NOMPROP, UpdateStatus, NAZVPROP, HTML, tmpLink IN
    IF RSN_PropertiesConv = \{\} THEN
      ANY rcrd WHERE rcrd: RSN PropertiesConv THEN
        NOMPROP := rcrd 'NOMPROP;
        UpdateStatus := rcrd 'UpdateStatus;
        NAZVPROP := rcrd 'NAZVPROP;
        HTML := rcrd 'HTML;
        tmpLink := rec(PropID: NOMPROP, Name: NAZVPROP,
          Description: [0], WWWTemplatePage: HTML,
          UpdateStatus: UpdateStatus);
        createNodePropertiesInfoItem(tmpLink);
        RSN PropertiesConv = RSN PropertiesConv - {rcrd}
      END
    ELSE
      state:= TRANSFORM DBCONTENT
    END
 END
END;
```

### 2. Верификация программ интеграции данных

Свойства корректности программ интеграции данных, подлежащих верификации, определяются экспертом вручную в виде формул, конъюнктивно присоединяемых в раздел INVARIANT. Например, свойство корректности интеграции данных, относящихся к свойствам веществ, выглядит следующим образом:

```
state = READY_TO_TRANSFORM &
MetaBase /= MetaBaseConst &
(MetaBase'SystemInfo /= {} or MetaBase'PropertiesInfo /= {} or
MetaBase'DBContent /= {}) =>
```

```
!(record).(record: PropertiesConv & record 'UpdateStatus = 2 =>
not(#(prop).(prop: PropertiesInfo &
record 'NOMPROP = prop'PropID)) ) &
!(record).(record: PropertiesConv & record 'UpdateStatus > 0 &
record 'UpdateStatus /= 2 =>
#(prop).(prop: PropertiesInfo &
record 'NOMPROP = prop'PropID &
record 'NAZVPROP = prop'Name &
record 'HTML = prop'WWWTemplatePage))
```

Формула утверждает, что после выполнения всех операций трансформации данных в целевой базе данных нет записей о свойствах веществ, помеченных на удаление в исходной базе данных, и есть записи о всех свойствах веществ, помеченных на обновление или вставку в исходной базе данных.

Полная формула, выражающая корректность интеграции исходных данных базы Bandgap в целевую интегрированную базу данных ИМЕТ, была добавлена в раздел INVARIANT спецификации Bandgap2MetabaseRef.

Спецификации Bandgap.mch, MUService.mch, Metabase.mch, Bandgap2Metabase.ref были загружены в проект инструментария Atelier B, автоматически были сгенерированы теоремы корректности спецификаций, применены средства автоматического и интерактивного доказательств с участием эксперта. Статистика доказательств приведена в табл. 1.

Спецификация	Количество	Количество автоматически доказанных				
	сгенерированных	теорем при режиме доказательства				
	теорем	Automatic				
		Force Fast	Force 0	Force 1	Force 2	
Bandgap.mch	6	3	6			
MUService.mch	8				2	
Metabase.mch	33	5	22	23		
Bandgap2Metabase.ref	320	8	267	272		

**Табл. 1.** Количество сгенерированных и автоматически доказанных теорем **Table 1.** Number of generated and automatically proven theorems

#### Заключение

Рассмотрен подход к верификации корректности интеграции данных в интегрированной системе баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов Института металлургии и материаловедения им. А.А. Байкова РАН. Интеграция данных из исходных реляционных баз данных проводится в системе в два этапа с использованием промежуточного XML-представления. Программы интеграции данных выражаются с использованием композиции императивного языка программирования Visual Basic и декларативного языка реляционных баз данных SQL. Программы интеграции предназначены для регулярного обновления данных из источников в интегрированной системе. Разработанный подход основан на выражении семантики схем источников данных, промежуточного представления, целевой базы данных, а также программ интеграции данных в формальном языке спецификаций AMN, основанном на логике предикатов первого порядка и теории множеств. Подход проиллюстрирован на примере интеграции в системе базы данных о ширине *запрещенной зоны* (характеризует природу химической связи в материале) основных классов неорганических веществ. Автоматизированные средства доказательства применены для автоматической генерации и доказательства теорем корректности интеграции данных.

Отметим, что на текущем этапе исследований AMN-спецификации, выражающие семантику схем данных и программ интеграции данных, создаются экспертом вручную. Для повышения автоматизации и применимости подхода генерацию AMN-спецификаций следует автоматизировать (это является наиболее важным направлением будущей работы). На основании опыта автора по разработке автоматизированных средств определения формальной семантики моделей данных это можно сделать с использованием технологий движимой моделями инженерии (MDE). При этом синтаксис моделей данных и языков описания программ интеграции данных представляется в метамодели Ecore [16], а генерация семантических AMN-спецификаций реализуется на языке трансформации моделей ATL [17]. Вычислительная сложность генерации AMN-спецификаций при этом обычно линейна от размера исходных схем и программ интеграции даже в тех случаях, когда схемы содержат множество взаимосвязанных типов сущностей. Однако при этом основные временные затраты на верификацию приходятся не на работу автоматических средств генерации или доказательства, а на ручную работу эксперта по формулировке свойств программ интеграции, подлежащих проверке, и интерактивному доказательству теорем корректности, оставшихся недоказанными после применения автоматических средств доказательства. Такие издержки характерны при применении формальной верификации сложных систем, но они значительно меньше издержек на исправление ошибок в программах, выпущенных в производство [5].

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

#### Литература

- Masmoudi M., Ben Abdallah Ben Lamine S., Karray M.H., Archimede B., Zghal H.B. Semantic data integration and querying: A survey and challenges // ACM Comput. Surv. 2024. V. 56, No 8. Art. 209. https://doi.org/10.1145/3653317.
- 2. The Binary Star Database. ИНИСАН, 2025. https://bdb.inasan.ru/.
- 3. Крупный научный проект фундаментальных исследований «Актуальные научные задачи стратегии адаптации потенциала землепользования России в современных условиях беспрецедентных вызовов (экономический кризис, изменения климата, кризис глобальных тенденций природопользования)». Почвенный институт им. В.В. Докучаева, 2023. https://www.esoil.ru/activities/projects\_programs/minobr/knp\_2020/.
- 4. Интегрированная система баз данных по свойствам неорганических веществ и материалов. ИМЕТ РАН, 2025. https://imet-db.ru/.

- 5. White N., Matthews S., Chapman R. Formal verification: Will the seedling ever flower? // Phil. Trans. R. Soc. A. 2017. V. 375, No 2104. Art. 20150402. https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0402.
- Guagliardo P., Libkin L. A formal semantics of SQL queries, its validation, and applications // Proc. VLDB Endowment (PVLDB). 2017. V. 11, No 1. P. 27–39. https://doi.org/10.14778/3151113.3151116.
- Rahim L.Ab., Whittle J. A survey of approaches for verifying model transformations // Software Syst. Model. 2015. V. 14, No 2. P. 1003–1028. https://doi.org/10.1007/s10270-013-0358-0.
- 8. Abrial J.-R. The B-Book: Assigning Programs to Meanings. New York, NY: Cambridge Univ. Press, 1996. xxxiv, 779 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511624162.
- 9. Atelier B: The industrial tool to efficiently deploy the B Method. 2025. http://www.atelierb.eu/.
- Butler M., Körner P., Krings S., Lecomte T., Leuschel M., Mejia L.-F., Voisin L. The first twenty-five years of industrial use of the B-Method // ter Beek M.H., Ničković D. (Eds.) Formal Methods for Industrial Critical Systems (FMICS 2020). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 12327. Cham: Springer, 2020. P. 189–209. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58298-2 8.
- Stupnikov S. Semantics and verification of entity resolution and data fusion operations via transformation into a formal notation // Kalinichenko L., Kuznetsov S., Manolopoulos Y. (Eds.) Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016). Ser.: Communications in Computer and Information Science. V. 706. Cham: Springer, 2017. P. 145–162. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5\_11.
- Stupnikov S.A. Query-driven verification of data integration in the RDF data model // Lobachevskii. J. Math. 2023. V. 44, No 1. P. 205–218. https://doi.org/10.1134/S1995080223010389.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Zemskov V.S. Computer information resources of inorganic chemistry and materials science // Russ. Chem. Rev. 2010. V. 79, No 2. P. 145–166. https://doi.org/10.1070/RC2010v079n02ABEH004104.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Stolyarenko A.V. Integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials // High Temp. 2016. V. 54, No 2. P. 215–222. https://doi.org/10.1134/S0018151X16020085.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Korzhuyev M.A. Database on the bandgap of inorganic substances and materials // Inorg. Mater.: Appl. Res. 2016. V. 7, No 1. P. 34–39. https://doi.org/10.1134/S2075113316010093.
- 16. Steinberg D., Budinsky F., Paternostro M., Merks E. EMF: Eclipse Modeling Framework. The Eclipse Ser. Addison-Wesley, 2008. 744 p.
- 17. ATL a model transformation technology. 2025. https://eclipse.org/atl/.

#### References

- Masmoudi M., Ben Abdallah Ben Lamine S., Karray M.H., Archimede B., Zghal H.B. Semantic data integration and querying: A survey and challenges. ACM Comput. Surv., 2024, vol. 56, no. 8, art. 209. https://doi.org/10.1145/3653317.
- 2. The Binary Star Database. INASAN, 2025. https://bdb.inasan.ru/.

- 3. Major Basic Research Project. Current scientific tasks in adapting Russia's land use potential to unprecedented global challenges (economic crisis, climate change, and crisis in global natural resource management). V.V. Dokuchaev Soil Sci. Inst., 2023. https://www.esoil.ru/activities/projects\_programs/minobr/knp\_2020/. (In Russian)
- 4. Integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials. A.A. Baikov Inst. Metall. Mater. Sci., Russ. Acad. Sci., 2005. https://imet-db.ru/. (In Russian)
- White N., Matthews S., Chapman R. Formal verification: Will the seedling ever flower? *Philos.* Trans. R. Soc. A, 2017, vol. 375, no. 2104, art. 20150402. https://doi.org/10.1098/rsta.2015.0402.
- Guagliardo P., Libkin L. A formal semantics of SQL queries, its validation, and applications. Proc. VLDB Endowment (PVLDB), 2017, vol. 11, no. 1, pp. 27–39. https://doi.org/10.14778/3151113.3151116.
- Rahim L.Ab., Whittle J. A survey of approaches for verifying model transformations. Software Syst. Model., 2015, vol. 14, no. 2, pp. 1003–1028. https://doi.org/10.1007/s10270-013-0358-0.
- 8. Abrial J.-R. *The B-Book: Assigning Programs to Meanings*. New York, NY, Cambridge Univ. Press, 1996. xxxiv, 779 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511624162.
- 9. Atelier B: The industrial tool to efficiently deploy the B Method. 2025. http://www.atelierb.eu/.
- Butler M., Körner P., Krings S., Lecomte T., Leuschel M., Mejia L.-F., Voisin L. The first twenty-five years of industrial use of the B-Method. In: ter Beek M.H., Ničković D. (Eds.) Formal Methods for Industrial Critical Systems (FMICS 2020). Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 12327. Cham, Springer, 2020, pp. 189–209. https://doi.org/10.1007/978-3-030-58298-2\_8.
- Stupnikov S. Semantics and verification of entity resolution and data fusion operations via transformation into a formal notation. In: Kalinichenko L., Kuznetsov S., Manolopoulos Y. (Eds.) Data Analytics and Management in Data Intensive Domains (DAMDID/RCDL 2016). Ser.: Communications in Computer and Information Science. Vol. 706. Cham, Springer, 2017, pp. 145–162. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57135-5 11.
- Stupnikov S.A. Query-driven verification of data integration in the RDF data model. Lobachevskii. J. Math., 2023, vol. 44, no. 1, pp. 205–218. https://doi.org/10.1134/S1995080223010389.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Zemskov V.S. Computer information resources of inorganic chemistry and materials science. *Russ. Chem. Rev.*, 2010, vol. 79, no. 2, pp. 145–166. https://doi.org/10.1070/RC2010v079n02ABEH004104.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Stolyarenko A.V. Integrated system of databases on the properties of inorganic substances and materials. *High Temp.*, 2016, vol. 54, no. 2, pp. 215–222. https://doi.org/10.1134/S0018151X16020085.
- Kiselyova N.N., Dudarev V.A., Korzhuyev M.A. Database on the bandgap of inorganic substances and materials. *Inorg. Mater.: Appl. Res.*, 2016, vol. 7, no. 1, pp. 34–39. https://doi.org/10.1134/S2075113316010093.
- Steinberg D., Budinsky F., Paternostro M., Merks E. *EMF: Eclipse Modeling Framework*. The Eclipse Ser. Addison-Wesley, 2008. 744 p.
- 17. ATL a model transformation technology. 2025. https://eclipse.org/atl/.

#### Информация об авторах

Сергей Александрович Ступников, ведущий научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

E-mail: sstupniukov@ipiran.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4720-8215

## Author Information

Sergey A. Stupnikov, Leading Researcher, Federal Research Center "Computer Science and Control", Russian Academy of Sciences

E-mail: sstupniukov@ipiran.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4720-8215

Поступила в редакцию 1.03.2025 Принята к публикации 23.03.2025 Received March 1, 2025 Accepted March 23, 2025

### ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.983: 517.986

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396

# Один метод построения идемпотентов в унитальной алгебре

## М. Хадур

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

mahmoud.khadour.991@gmail.com

#### Аннотация

Предложен метод построения идемпотентов в унитальной алгебре  $\mathcal{A}$  с использованием n произвольных идемпотентов  $P_1, \ldots, P_n$  из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов  $P = P(P_1, \ldots, P_n)$ ; для n = 2 и n = 3 получен явный вид этих идемпотентов  $A(P_1, P_2)$ и  $B(P_1, P_2, P_3)$  соответственно. Показано, что отображения

 $P_2\mapsto A(P_1,P_2),\ f(P_2)=A(P_1,P_2)\quad \text{if}\quad P_3\mapsto B(P_1,P_2,P_3),\ g(P_3)=B(P_1,P_2,P_3)$ 

сохраняют дополнения  $^{\perp}$  и являются мультипликативными на широких классах пар идемпотентов. Для конечного следа  $\varphi$  на унитальной  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  имеем  $\varphi(P(P_1, \ldots, P_n)) = \varphi(P_n)$ . Для проекторов  $P_1, \ldots, P_n$  из алгебры фон Неймана  $\mathcal{A}$  предложенный метод дает новый проектор и позволяет построить некоторые частичные изометрии.

**Ключевые слова:** унитальная алгебра, *C*\*-алгебра, идемпотент, симметрия, проектор, частичная изометрия, след

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научнообразовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

Для цитирования: *Хадур М.* Один метод построения идемпотентов в унитальной алгебре // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 384–396. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396.

#### ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396

## A method for constructing idempotents in a unital algebra

## M. Khadour

Kazan Federal University, Kazan, Russia

mahmoud.khadour.991@gmail.com

#### Abstract

A method is proposed for constructing idempotents in a unital algebra  $\mathcal{A}$  using n arbitrary idempotents  $P_1, \ldots, P_n$  from this algebra. The properties of the resulting idempotents  $P = P(P_1, \ldots, P_n)$  are investigated; for n = 2 and n = 3, explicit forms of the idempotents are obtained:  $A(P_1, P_2)$  and  $B(P_1, P_2, P_3)$ , respectively. It is shown that the mappings

$$P_2 \mapsto A(P_1, P_2), f(P_2) = A(P_1, P_2)$$
 and  $P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$ 

preserve the complements  $\perp$  and are multiplicative on wide classes of idempotent pairs. For a finite trace  $\varphi$  on a unital  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$ ,  $\varphi(P(P_1, \ldots, P_n)) = \varphi(P_n)$ . For the projections  $P_1, \ldots, P_n$  from the von Neumann algebra  $\mathcal{A}$ , the method yields a new projection and enables the construction of some partial isometries.

Keywords: unital algebra,  $C^*$ -algebra, idempotent, symmetry, projection, partial isometry, trace

Acknowledgments. This study was carried out as a part of the Program for Development of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District (agreement no. 075-02-2024-1438).

For citation: Khadour M. A method for constructing idempotents in a unital algebra. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 384–396. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.384-396. (In Russian)

#### Введение

В теории операторных алгебр большую роль играют комбинации операторов специального вида. Так, в [1, предложение 7] доказано, что каждый фактор фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  алгебраически порождается своими проекторами. В [2, следствие 1] аналогичный результат установлен для всех бесконечных факторов фон Неймана  $\mathcal{M}$ , т.е. показано, что

$$\mathcal{M} = \operatorname{Lin}_{\mathbb{C}} \{ P_1 P_2 P_3 P_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{M}^{\operatorname{pr}} \}.$$

В [3, с. 334] доказано, что алгебра фон Неймана алгебраически порождается своими проекторами тогда и только тогда, когда она не имеет прямого бесконечномерного абелева слагаемого. В частности, в [3, следствие 1] было показано, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \operatorname{Lin}_{\mathbb{C}} \{ P_1 P_2 : P_1, P_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\operatorname{pr}} \}.$$

В [4] доказано, что каждый оператор в сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве является суммой восьми идемпотентов. С использованием этого факта в [5] показано, что каждый оператор в сепарабельном пространстве является суммой шестидесяти четырех операторов с нулевыми квадратами (т. е. нильпотентов второго порядка). Там же доказано, что каждый оператор является линейной комбинацией двухсот пятидесяти семи проекторов. В [6] для необязательно сепарабельного случая показано, что каждый оператор является суммой пяти идемпотентов, и доказано, что каждый эрмитов оператор является суммой пяти идемпотентов, и доказано, что каждый эрмитов оператор является вещественной линейной комбинацией двухсот шестидесяти восьми проекторов. В сепарабельном случае в [7] это число уменьшено до пяти проекторов и показано, что каждый эрмитов оператор является целочисленной комбинацией шести проекторов. Когда  $\mathcal{H}$  сепарабельно и бесконечномерно, в [8] единым методом для  $\Lambda = \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{H}$  показано, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \operatorname{Lin}_{\mathbb{R}} \{ P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 : P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\operatorname{pr}} \}.$$

Простой модификацией доказательства [8] число сомножителей можно уменьшить до пяти. В [3, с. 336] доказано, что для собственно бесконечной алгебры фон Неймана  $\mathcal{M}$  выполняется равенство

$$\mathcal{M} = \operatorname{Lin}_{\mathbb{R}} \{ P_1 P_2 P_3 P_4 : P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathcal{M}^{\operatorname{pr}} \}.$$

Из теоремы 6 работы [6] следует, что собственно бесконечная алгебра фон Неймана  $\mathcal{M} = \operatorname{Lin}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}^{\operatorname{pr}}$ . В [9] показано, что произвольная алгебра фон Неймана  $\mathcal{M}$  совпадает со множеством всех линейных комбинаций проекторов с коэффициентами из ее центра  $Z(\mathcal{M})$ . В [10, теорема 4.7] доказано, что каждая бесконечная простая  $C^*$ -алгебра  $\mathcal{A} = \operatorname{Lin}_{\mathbb{C}} \mathcal{A}^{\operatorname{pr}}$ . Если  $C^*$ -алгебра  $\mathcal{A}$  допускает некоторую (3 × 3)-матричную декомпозицию, то каждый коммутатор в  $\mathcal{A}$  может быть записан в виде линейной комбинации из не более чем восьмидесяти четырех проекторов из  $\mathcal{A}$  [11]. В работах [12–16] исследована задача о представлении произвольных элементов алгебры фон Неймана  $\mathcal{M}$  без прямого абелева слагаемого в виде конечных сумм произведений проекторов из  $\mathcal{M}$ . В [17] и [18] аналогичный вопрос рассмотрен в контексте  $C^*$ -алгебр со свойством унитарной факторизации.

В настоящей статье предложен метод построения идемпотентов в унитальной алгебре  $\mathcal{A}$  с использованием n произвольных идемпотентов  $P_1, \ldots, P_n$  из этой алгебры. Исследованы свойства полученных идемпотентов  $P = P(P_1, \ldots, P_n)$  (теорема 2), для n = 2 и n = 3 получен явный вид получаемых идемпотентов  $A(P_1, P_2)$  и  $B(P_1, P_2, P_3)$  соответственно (теоремы 3 и 5). Отображения

$$P_2 \mapsto A(P_1, P_2), \ f(P_2) = A(P_1, P_2) \ \text{ is } \ P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), \ g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$$

сохраняют дополнения  $\perp$  (следствия 4 и 7) и являются мультипликативными на широких классах идемпотентов (следствия 3 и 6). Для конечного следа  $\varphi$  на унитальной  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  имеем  $\varphi(P(P_1, \ldots, P_n)) = \varphi(P_n)$ . Для проекторов  $P_1, \ldots, P_n$  из алгебры фон Неймана  $\mathcal{A}$  метод дает новый проектор и позволяет построить некоторые частичные изометрии (следствия 5 и 8). Предложенный метод опирается на следующий хорошо известный факт: **Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра. Формула  $S_P := 2P - I \ (P \in \mathcal{A}^{id})$  устанавливает биекцию между множествами  $\mathcal{A}^{id}$  и  $\mathcal{A}^{sym}$ .

От произвольного набора  $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}^{\text{id}}$  мы перейдем по лемме 1 к ассоциированным симметриям  $S_{P_1}, \ldots, S_{P_n} \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ , затем построим произведение специального вида из этих симметрий, которое также является симметрией, а потом из новой симметрии по лемме 1 получим искомый идемпотент (см. пп. (i) и (ii) теоремы 2).

#### 1. Обозначения и определения

Для унитальной алгебры  $\mathcal{A}$  с единицей I введем следующие обозначения:

- $\mathcal{A}^{\mathrm{id}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = A\}$  множество всех идемпотентов из  $\mathcal{A}$ ;
- $\mathcal{A}^{\text{sym}} = \{A \in \mathcal{A} : A^2 = I\}$  множество всех симметрий из  $\mathcal{A}$ .

Если  $A \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ , то  $A^{\perp} := I - A \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ .

 $C^*$ -алгеброй называется такая комплексная банахова \*-алгебра  $\mathcal{A}$ , что  $||A^*A|| = ||A||^2$ для всех  $A \in \mathcal{A}$ . Для  $C^*$ -алгебры  $\mathcal{A}$  через  $\mathcal{A}^{\text{sa}}$  и  $\mathcal{A}^+$  будем обозначать ее подмножества эрмитовых ( $A^* = A$ ) элементов и положительных элементов соответственно. Любую  $C^*$ -алгебру можно реализовать как  $C^*$ -подалгебру в  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  для некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  (Гельфанд–Наймарк; см. [19, теорема 3.4.1]). При dim  $\mathcal{H} < +\infty$  алгебра  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  отождествляется с полной матричной алгеброй  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

Конечным следом на  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  называется такое отображение  $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0, +\infty)$ , что имеют место равенства

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y), \quad \varphi(\lambda X) = \lambda \varphi(X)$$
для всех  $X, Y \in \mathcal{A}^+, \ \lambda > 0$ 

(при этом  $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$ ) и  $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$  для всех  $Z \in \mathcal{A}$ .

Коммутантом множества  $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется множество

$$\mathcal{X}' = \{ Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XY = YX$$
для всех  $X \in \mathcal{X} \}.$ 

Алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , называется \*-подалгебра  $\mathcal{A}$  алгебры  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ , для которой  $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ . Для алгебры фон Неймана  $\mathcal{A}$  через  $\mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$  будем обозначать ее решетку проекторов ( $A^2 = A = A^*$ ). Если  $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ , то их точная нижняя грань определяется равенством ( $\wedge_{k=1}^n P_k$ ) $\mathcal{H} = \bigcap_{k=1}^n P_k \mathcal{H}$ , а точная верхняя грань есть  $\bigvee_{k=1}^n P_k = (\wedge_{k=1}^n P_k^{\perp})^{\perp}$ .

Оператор  $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  называется частичной изометрией, если  $U^*U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\mathrm{pr}}$ ; при этом  $U^*U\mathcal{H}$  является начальным подпространством частичной изометрии U.

#### 2. Основные результаты

Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра и  $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ . Определим новую симметрию в  $\mathcal{A}$  по формуле

$$S = S_1 \cdot \cdots \cdot S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdot \cdots \cdot S_1.$$

Сначала рассмотрим один частный случай такого произведения.
**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра и  $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$  такие, что  $P_k P_j = 0$ при  $k \neq j, \ k, j = 1, \ldots, n$ . Тогда  $P := \sum_{k=1}^n P_k \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$  и  $S_P = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^n S_{P_k}$ ; все симметрии  $S_{P_k}, \ k = 1, \ldots, n$ , попарно коммутируют.

Доказательство. Имеем

$$\prod_{k=1}^{n} S_{P_k} = (2P_1 - I)(2P_2 - I) \cdots (2P_n - I) = (-1)^{n-1}(2(P_1 + P_2 + \dots + P_n) - I) = (-1)^{n-1}S_P.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 имеем

$$S_{P_1}S_{P_2}\cdots S_{P_{n-1}}S_{P_n}S_{P_{n-1}}\cdots S_{P_2}S_{P_1} = S_{P_n}.$$
(1)

Заметим, что для произвольного набора попарно коммутирующих идемпотентов  $P_1, \ldots, P_n$  равенство (1) также выполнено. Геометрический смысл перестановочности проекторов P и Q состоит в том, что подпространства  $P\mathcal{H} \ominus (P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H})$  и  $Q\mathcal{H} \ominus (P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H})$  ортогональны; при этом  $PQ = P \land Q$ .

Из теоремы 1 и из теоремы об определителе произведения матриц вытекает

Следствие 2. Для  $\mathcal{A} := \mathbb{M}_m(\mathbb{C})$  в условиях теоремы 1 получим

$$\det(S_P) = (-1)^{mn-n} \prod_{k=1}^n \det S_{P_k}$$

Теорема 2. Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра с единицей I и  $S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ .

- (i) Имеем  $S = S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ .
- (ii) Для  $P_k := \frac{S_k + I}{2} \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}, \ k = 1, \dots, n, \ u$ меем  $P := P(P_1, \dots, P_n) = \frac{S + I}{2} \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}.$
- (iii) Если  $\varphi$  конечный след на унитальной  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то  $\varphi(S) = \varphi(S_n) \in \mathbb{R}$  и  $\varphi(P) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$ .
- (iv) *ECAU*  $\mathcal{A} = B(\mathcal{H}) \ c \ \dim \mathcal{H} < \infty, \ mo \ \det(S) = \det(S_n).$

Доказательство. (i), (ii). Поскольку  $S_k^2 = I$  для всех k = 1, ..., n, имеем  $S^2 = I$  и  $S \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$ . Тогда  $P := \frac{S+I}{2} \in \mathcal{A}^{\text{id}}$  в силу леммы 1. Очевидно,

$$S_1 = \ldots = S_n \iff P_1 = \ldots = P_n,$$

при этом  $P := P(P_1, \ldots, P_1) = P_1$ .

(iii). Заметим, что для конечного следа  $\varphi$  на  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$  и произвольного идемпотента  $Q \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$  имеем  $\varphi(Q) \in \mathbb{R}^+$ . Далее,

$$\varphi(S) = \varphi(S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1) = \varphi(S_2 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1 S_1) =$$
$$= \varphi(S_2 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_2) = \varphi(S_3 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_2 S_2) = \cdots = \varphi(S_n)$$

в силу равенства  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$  для всех  $A, B \in \mathcal{A}$  (см. [19, с. 222]). Поэтому

$$\varphi(P) = \varphi\left(\frac{S+I}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi(S) + \frac{1}{2}\varphi(I) = \frac{1}{2}\varphi(S_n) + \frac{1}{2}\varphi(I) = \varphi(P_n) \in \mathbb{R}^+$$

(см. [21, теорема 3.6]) и  $\varphi(S) = \varphi(S_n) = 2\varphi(P_n) - \varphi(I) \in \mathbb{R}$ .

(iv). Если  $\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$  с dim  $\mathcal{H} < \infty$ , то det $(T) \in \{-1, 1\}$  для всех  $T \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$  и

$$\det(S) = \det(S_1 \cdots S_{n-1} S_n S_{n-1} \cdots S_1) = \det(S_1) \cdots \det(S_{n-1}) \det(S_n) \det(S_{n-1}) \cdots \det(S_1) = \\ = (\det(S_1))^2 \cdots (\det(S_{n-1}))^2 \det(S_n) = \det(S_n)$$

в силу теоремы об определителе произведения матриц.

**Теорема 3.** Пусть  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}$ . Тогда

- (i)  $A(P_1, P_2) = P_2 2P_2P_1 2P_1P_2 + 4P_1P_2P_1 \in \mathcal{A}^{id};$
- (ii)  $A(P_1^{\perp}, P_2) = A(P_1, P_2);$
- (iii)  $A(P_1, P_2^{\perp}) = A(P_1, P_2)^{\perp};$
- $({\rm iv}) \ A(P_1^{\bot},P_2^{\bot}) = A(P_1,P_2^{\bot}) = A(P_1,P_2)^{\bot};$
- (v) если  $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ , то  $A(P_1, P_2) = P_2$ ;
- (vi)  $A(P_1, P_1^{\perp}) = P_1^{\perp}; A(P_1, P_1) = P_1;$
- (vii) если  $P_1P_2P_1 = P_1$ , то  $A(P_1, P_2) = (2P_1 P_2)^2$ ;
- (viii) *если*  $P_1P_2 = P_2P_1 \in \{P_1, P_2\}, mo A(P_1, P_2) = P_2;$ 
  - (ix)  $A(P_1, P_2) = (P_2 2P_1P_2)(P_2 2P_2P_1);$

(x) если  $\varphi$  – конечный след на унитальной  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то  $\varphi(A(P_1, P_2)) = \varphi(P_2) \in \mathbb{R}^+$ .

**Доказательство.** (i). Непосредственными вычислениями получаем равенство  $A(P_1, P_2)^2 = A(P_1, P_2)$ . Так как  $T := S_{P_1}S_{P_2}S_{P_1}$  лежит в  $\mathcal{A}^{\text{sym}}$  и формула  $S_P := 2P - I$  задает биекцию между множествами  $\mathcal{A}^{\text{id}}$  и  $\mathcal{A}^{\text{sym}}$  (см. лемму 1), имеем  $T := 2A(P_1, P_2) - I$ , и поэтому  $A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ .

(ii) и (iii). Проверяются вычислениями.

(iv). Вытекает из (ii) и (iii).

(v). Проверяется вычислениями.

(vi). Равенство  $A(P_1, P_1^{\perp}) = P_1^{\perp}$  есть частный случай (v); равенство  $A(P_1, P_1) = P_1$  очевидно.

(vii). Равенство очевидно.

(viii). Проверяется вычислениями.

(ix). Легко видеть, что

$$(P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1) = P_2 - 2P_2P_1 - 2P_1P_2 + 4P_1P_2P_1 = A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}.$$

(х). Следует из п. (ііі) теоремы 2.

**Следствие 3.** Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра и  $P_1 \in \mathcal{A}^{id}$ . Тогда отображение  $P_2 \mapsto \mathcal{A}(P_1, P_2), f(P_2) = \mathcal{A}(P_1, P_2),$ удовлетворяет соотношению f(P)f(Q) = f(PQ) для всех  $P, Q \in \mathcal{A}^{id}$  с  $PQ \in \mathcal{A}^{id},$ т.е. f является мультипликативным отображением на таких идемпотентах.

#### Доказательство. Имеем

$$f(P) = P - 2PP_1 - 2P_1P + 4P_1PP_1, \quad f(Q) = Q - 2QP_1 - 2P_1Q + 4P_1QP_1.$$

Тогда

$$\begin{split} f(P)f(Q) &= PQ - 2PQP_1 - 2PP_1Q + 4PP_1QP_1 - 2PP_1Q + 4PP_1QP_1 + \\ &+ 4PP_1Q - 8PP_1QP_1 - 2P_1PQ + 4P_1PQP_1 + 4P_1PP_1Q - 8P_1PP_1QP_1 + \\ &+ 4P_1PP_1Q - 8P_1PP_1QP_1 - 8P_1PP_1Q + 16P_1PP_1QP_1 = \\ &= PQ - 2PQP_1 - 2P_1PQ + 4P_1PQP_1 = f(PQ), \end{split}$$

и утверждение доказано.

Из пп. (iii) и (x) теоремы 1 вытекает

**Следствие 4.** Отображение  $P_2 \mapsto A(P_1, P_2), f(P_2) = A(P_1, P_2),$  сохраняет дополнения <sup>⊥</sup>. Если  $\mathcal{A}$  – унитальная C<sup>\*</sup>-алгебра, то f сохраняет и конечные следы.

**Теорема 4.** Если  $\mathcal{A}$  – алгебра фон Неймана, то  $A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$  для всех  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ , и выполнены соотношения:

- (i)  $P_1 \wedge P_2 \leq A(P_1, P_2) \leq P_1 \vee P_2$  dra beex  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ ;
- (ii) если  $P_2 \leq P_1$ , то  $A(P_1, P_2) = P_2 = P_1 \wedge P_2$  для всех  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ ;
- (iii) если  $P_1 \leq P_2$ , то  $A(P_1, P_2) = P_2 = P_1 \lor P_2$  для всех  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ ;

(iv)  $|P_2 - 2P_2P_1| \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$  dis over  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ .

Доказательство. (i). Легко видеть, что

$$P_1 \wedge P_2 \cdot A(P_1, P_2) = P_1 \wedge P_2, \qquad A(P_1, P_2) \cdot P_1 \vee P_2 = A(P_1, P_2).$$

(iv). Имеем

$$|P_2 - 2P_2P_1|^2 = (P_2 - 2P_1P_2)(P_2 - 2P_2P_1) = A(P_1, P_2) \in \mathcal{A}^{\text{pr}},$$

поэтому  $|P_2 - 2P_2P_1| = A(P_1, P_2).$ 

**Пример 1.** Для  $2 \times 2$ -идемпотентных матриц

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

имеем  $P_1P_2P_1 = P_1$  и  $P_2P_1P_2 = P_2$ .

Из следствия 1 к задаче 98 [22] получим

Следствие 5. Если  $\mathcal{A}$  – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ , то оператор  $U := P_2 - 2P_2P_1$  является частичной изометрией с начальным пространством  $A(P_1, P_2)\mathcal{H}$ . Если еще  $P_1P_2P_1 = P_1$ , то оператор  $V := 2P_1 - P_2$  является самосопряженной частичной изометрией с  $V^2 := A(P_1, P_2)$ .

Легко проверить, что  $UU^* = P_2$ , т.е. конечным пространством частичной изометрии U является  $P_2\mathcal{H}$ .

Теорема 5. Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра с единицей I и  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{id}$ . Тогда

(i) имеем

$$\begin{split} B(P_1,P_2,P_3) &= 16P_1P_2P_3P_2P_1 - 8P_1P_2P_3P_2 - 8P_1P_2P_3P_1 - 8P_1P_3P_2P_1 - \\ &\quad - 8P_2P_3P_2P_1 + 4P_1P_2P_3 + 4P_1P_3P_2 + 4P_1P_3P_1 + 4P_2P_3P_2 + 4P_2P_3P_1 + \\ &\quad + 4P_3P_2P_1 - 2P_1P_3 - 2P_2P_3 - 2P_3P_2 - 2P_3P_1 + P_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}; \end{split}$$

- (ii)  $B(P_1^{\perp}, P_2, P_3) = B(P_1, P_2^{\perp}, P_3) = B(P_1, P_2, P_3); B(P_1^{\perp}, P_2^{\perp}, P_3) = B(P_1, P_2, P_3);$
- (iii)  $B(P_1, P_2, P_3^{\perp}) = B(P_1, P_2, P_3)^{\perp};$
- (iv)  $B(P_1^{\perp}, P_2^{\perp}, P_3^{\perp}) = B(P_1, P_2, P_3)^{\perp};$
- (v) если  $P_1P_3 = P_3P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 = 0$ , то  $B(P_1, P_2, P_3) = P_3$ ;
- (vi)  $B(P_1, P_1, P_1^{\perp}) = P_1^{\perp}, \ B(P_1, P_1, P_1) = P_1;$
- (vii) если  $P_2P_3P_2 = P_2, P_1P_3P_1 = P_1, mo$

$$B(P_1, P_2, P_3) = (2P_1 - I)(2P_2 - I)P_3(2P_2 - I)(2P_1 - I);$$

- (viii) *если*  $P_1P_3 = P_3P_2 = P_2P_3 = P_3P_1 \in \{P_1, P_2, P_3\}, mo B(P_1, P_2, P_3) = P_3;$ 
  - (ix)  $B(P_1, P_2, P_3) = (4P_1P_2 2P_2 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 2P_2 2P_1 + P_3);$
  - (x) если  $\varphi$  конечный след на унитальной  $C^*$ -алгебре  $\mathcal{A}$ , то выполняется равенство  $\varphi(B(P_1, P_2, P_3)) = \varphi(P_3) \in \mathbb{R}^+$ .

Доказательство. (i). Непосредственными вычислениями проверяется равенство  $B(P_1, P_2, P_3)^2 = B(P_1, P_2, P_3).$ 

Так как  $T := S_{P_1}S_{P_2}S_{P_3}S_{P_2}S_{P_1} \in \mathcal{A}^{\text{sym}}$  и формула  $S_P := 2P - I$  задает биекцию между множествами  $\mathcal{A}^{\text{id}}$  и  $\mathcal{A}^{\text{sym}}$  (см. лемму 1), имеем  $T := 2B(P_1, P_2, P_3) - I$ , и поэтому  $B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\text{id}}$ .

(ii) и (iii). Проверяются вычислениями.

(iv). Вытекает из (ii) и (iii).

(v). Проверяется вычислениями.

(vi). Равенство  $B(P_1, P_1, P_1^{\perp}) = P_1^{\perp}$  есть частный случай утверждения (v); равенство  $B(P_1, P_1, P_1) = P_1$  очевидно.

(vii). Равенство очевидно.

(viii). Проверяется вычислениями.

(ix). Легко видеть, что

$$(4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\mathrm{id}}.$$

(х). Следует из п. (ііі) теоремы 2.

Теорема доказана.

**Следствие 6.** Пусть  $\mathcal{A}$  – унитальная алгебра и  $P_1, P_2 \in \mathcal{A}^{id}$ . Тогда отображение  $P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3), g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3), удовлетворяет для всех <math>R_1, R_2 \in \mathcal{A}^{id}$  с  $R_1R_2 \in \mathcal{A}^{id}$  соотношению  $g(R_1)g(R_2) = g(R_1R_2), m. e. g$  является мультипликативным отображением на таких идемпотентах.

Доказательство. Имеем

$$g(R_1) = 16P_1P_2R_1P_2P_1 - 8P_1P_2R_1P_2 - 8P_1P_2R_1P_1 - 8P_1R_1P_2P_1 - 8P_2R_1P_2P_1 + 4P_1P_2R_1 + 4P_1R_1P_2 + 4P_1R_1P_1 + 4P_2R_1P_2 + 4P_2R_1P_1 + 4R_1P_2P_1 - 2P_1R_1 - 2P_2R_1 - 2R_1P_2 - 2R_1P_1 + R_1,$$

$$\begin{split} g(R_2) &= 16P_1P_2R_2P_2P_1 - 8P_1P_2R_2P_2 - 8P_1P_2R_2P_1 - 8P_1R_2P_2P_1 - 8P_2R_2P_2P_1 + \\ &+ 4P_1P_2R_2 + 4P_1R_2P_2 + 4P_1R_2P_1 + 4P_2R_2P_2 + 4P_2R_2P_1 + 4R_2P_2P_1 - \\ &- 2P_1R_2 - 2P_2R_2 - 2R_2P_2 - 2R_2P_1 + R_2. \end{split}$$

Тогда следующее соотношение проверяется прямыми вычислениями:

$$\begin{split} g(R_1)g(R_2) &= 16P_1P_2R_1R_2P_2P_1 - 8P_1P_2R_1R_2P_2 - 8P_1P_2R_1R_2P_1 - 8P_1R_1R_2P_2P_1 - \\ &\quad - 8P_2R_1R_2P_2P_1 + 4P_1P_2R_1R_2 + 4P_1R_1R_2P_2 + 4P_1R_1R_2P_1 + \\ &\quad + 4P_2R_1R_2P_2 + 4P_2R_1R_2P_1 + 4R_1R_2P_2P_1 - 2P_1R_1R_2 - 2P_2R_1R_2 - \\ &\quad - 2R_1R_2P_2 - 2R_1R_2P_1 + R_1R_2 = g(R_1R_2). \end{split}$$

Утверждение доказано.

Из пп. (iii) и (x) теоремы 3 вытекает

**Следствие 7.** Отображение  $P_3 \mapsto B(P_1, P_2, P_3)$ ,  $g(P_3) = B(P_1, P_2, P_3)$ , сохраняет дополнения  $^{\perp}$ . Если  $\mathcal{A}$  – унитальная  $C^*$ -алгебра, то она сохраняет и конечные следы.

**Теорема 6.** Если  $\mathcal{A}$  – алгебра фон Неймана, то  $B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$  для любых  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ , и выполнены соотношения:

(i)  $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \leq B(P_1, P_2, P_3) \leq P_1 \vee P_2 \vee P_3$  dis ocer  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ ;

(ii) 
$$|P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)| \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$$
 discrete  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ .

Доказательство. (i). Легко видеть, что

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \cdot B(P_1, P_2, P_3) = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3, \quad B(P_1, P_2, P_3) \cdot P_1 \vee P_2 \vee P_3 = B(P_1, P_2, P_3).$$

(іі). Имеем

$$\begin{aligned} |P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)|^2 &= \\ &= (4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3^2(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = \\ &= (4P_1P_2 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3) = \\ &= B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}, \end{aligned}$$

поэтому  $|P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)| = B(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}.$ 

Следствие 8. Если  $\mathcal{A}$  – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  и  $P_1, P_2, P_3 \in \mathcal{A}^{\mathrm{pr}}$ , то оператор  $U := P_3(4P_2P_1 - 2P_2 - 2P_1 + P_3)$  является частичной изометрией с начальным пространством  $B(P_1, P_2, P_3)\mathcal{H}$ .

Легко проверить, что  $UU^* = P_3$ , т.е. конечным пространством частичной изометрии U является  $P_3\mathcal{H}$ .

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

#### Литература

- Dixmier J. Position relative de deux variétés linéares fermées dans un espace de Hilbert // Rev. Sci. 1948. V. 86. P. 387–399.
- Broise M. Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur // J. Math. Pures Appl. Sér. 9. 1967. V. 46, No 3. P. 299–312.
- 3. *Fillmore P.A.* On products of symmetries // Can. J. Math. 1966. V. 18, No 5. P. 897–900. https://doi.org/10.4153/CJM-1966-090-5.
- 4. *Stampfli J.G.* Sums of projections // Duke Math. J. 1964. V. 31, No 3. P. 455–461. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03144-8.
- Fillmore P.A. Sums of operators with square zero // Acta Sci. Math. 1967. V. 28, Nos 3–4. P. 285–288.
- Pearcy C., Topping D. Sums of small numbers of idempotents // Mich. Math. J. 1967. V. 14, No 4. P. 453–465. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999848.
- Matsumoto K. Self-adjoint operators as a real span of 5 projections // Math. Jpn. 1984. V. 29, No 2. P. 291–294.
- Holland S.S., Jr. Projections algebraically generate the bounded operators on real or quaternionic Hilbert space // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, No 11. P. 3361–3362. https://doi.org/10.2307/2161078.
- Goldstein S., Paszkiewicz A. Linear combinations of projections in von Neumann algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1992. V. 116, No 1. P. 175–183. https://doi.org/10.2307/2159311.
- Marcoux L.W., Murphy G.J. Unitarily-invariant linear spaces in C\*-algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1998. V. 126, No 12. P. 3597–3605. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04934-X.

- 11. Marcoux L.W. On the linear span of the projections in certain simple C<sup>\*</sup>-algebras // Indiana Univ. Math. J. 2002. V. 51, No 3. P. 753–771.
- 12. Бикчентаев А.М. О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 444–447.
- 13. Бикчентаев А.М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 32–45.
- Bikchentaev A.M. Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II // Proc. Int. Conf. Operator Theory 20. Ser.: Theta Series in Advanced Mathematics. V. 6. Bucharest: Theta Found., 2006. P. 15–23.
- Бикчентаев А.М. О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C\*-алгебрах // Матем. сб. 2008. Т. 199, № 4. С. 3–20.
- Komisarski A., Paszkiewicz A. Sums of compositions of pairs of projections // J. Oper. Theory. 2015. V. 74, No 2. P. 307–317. http://dx.doi.org/10.7900/jot.2014jun17.2056.
- 17. Бикчентаев А.М., Шерстнев А.Н. Проекторно-выпуклые комбинации в C<sup>\*</sup>-алгебрах со свойством унитарной факторизации // Матем. заметки. 2004. Т. 76, № 4. С. 625–628.
- 18. Бикчентаев А.М. Проекторно-выпуклые комбинации в C<sup>\*</sup>-алгебрах и проблема инвариантного подпространства. I // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 2. С. 311–315.
- 19. Мёрфи Дж. С\*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997. 336 с.
- 20. Шерстнев А.Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. М.: Физматлит, 2008. 264 с.
- 21. Бикчентаев А.М. К теории *τ*-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Матем. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337–348.
- 22. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970. 352 с.

#### References

- Dixmier J. Position relative de deux variétés linéares fermées dans un espace de Hilbert. *Rev. Sci.*, 1948, vol. 86, pp. 387–399. (In French)
- 2. Broise M. Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur. J. Math. Pures Appl. Sér. 9, 1967, vol. 46, no. 3, pp. 299–312. (In French)
- 3. Fillmore P.A. On products of symmetries. *Can. J. Math.*, 1966, vol. 18, no. 5, pp. 897–900. https://doi.org/10.4153/CJM-1966-090-5.
- 4. Stampfli J.G. Sums of projections. *Duke Math. J.*, 1964, vol. 31, no. 3, pp. 455–461. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-64-03144-8.
- 5. Fillmore P.A. Sums of operators with square zero. Acta Sci. Math., 1967, vol. 28, nos. 3–4, pp. 285–288.
- Pearcy C., Topping D. Sums of small numbers of idempotents. *Mich. Math. J.*, 1967, vol. 14, no. 4, pp. 453–465. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999848.

- Matsumoto K. Self-adjoint operators as a real span of 5 projections. Math. Jpn., 1984, vol. 29, no. 2, pp. 291–294.
- Holland S.S., Jr. Projections algebraically generate the bounded operators on real or quaternionic Hilbert space. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1995, vol. 123, no. 11, pp. 3361–3362. https://doi.org/10.2307/2161078.
- Goldstein S., Paszkiewicz A. Linear combinations of projections in von Neumann algebras. Proc. Am. Math. Soc., 1992, vol. 116, no. 1, pp. 175–183. https://doi.org/10.2307/2159311.
- Marcoux L.W., Murphy G.J. Unitarily-invariant linear spaces in C\*-algebras. Proc. Am. Math. Soc., 1998, vol. 126, no. 12, pp. 3597–3605. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04934-X.
- Marcoux L.W. On the linear span of the projections in certain simple C\*-algebras. Indiana Univ. Math. J., 2002, vol. 51, no. 3, pp. 753–771.
- Bikchentaev A.M. Representation of linear operators in a Hilbert space in the form of finite sums of products of projectors. *Dokl. Math.*, 2003, vol. 68, no. 3, pp. 376–379.
- Bikchentaev A.M. On representation of elements of a von Neumann algebra in the form of finite sums of products of projections. *Sib. Math. J.*, 2005, vol. 46, no. 1, pp. 24–34. https://doi.org/10.1007/s11202-005-0003-4.
- Bikchentaev A.M. Representation of elements of von Neumann algebras in the form of finite sums of products of projections. II. Proc. Int. Conf. Operator Theory 20. Ser.: Theta Series in Advanced Mathematics. Vol. 6. Bucharest, Theta Found., 2006, pp. 15–23.
- Bikchentaev A.M. On the representation of elements of a von Neumann algebra in the form of finite sums of products of projections. III. Commutators in C\*-algebras. Sb.: Math., 2008, vol. 199, no. 4, pp. 477–493. https://doi.org/10.1070/SM2008v199n04ABEH003929.
- Komisarski A., Paszkiewicz A. Sums of compositions of pairs of projections. J. Oper. Theory, 2015, vol. 74, no. 2, pp. 307–317. http://dx.doi.org/10.7900/jot.2014jun17.2056.
- Bikchentaev A.M., Sherstnev A.N. Projective convex combinations in C\*-algebras with the unitary factorization property. *Math. Notes*, 2004, vol. 76, no. 4, pp. 578–581. https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000043487.24773.04.
- Bikchentaev A.M. Projection-convex combinations in C\*-algebras and the invariant subspace problem, I. Math. Notes, 2006, vol. 79, no. 2, pp. 285–290. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0032-8.
- Murphy G.J. C<sup>\*</sup>-algebry i teoriya operatorov [C<sup>\*</sup>-Algebras and Operator Theory]. Moscow, Faktorial, 1997. 336 p. (In Russian)
- Sherstnev A.N. Metody bilineinykh form v nekommutativnoi teorii mery i integrala [Methods of Bilinear Forms in Noncommutative Measure and Integral Theory]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 264 p. (In Russian)
- Bikchentaev A.M. Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. Math. Notes, 2015, vol. 98, no. 3, pp. 382–391. https://doi.org/10.1134/S0001434615090035.
- 22. Halmos P.R. *Gil'bertovo prostranstvo v zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book]. Moscow, Mir, 1970. 352 p. (In Russian)

## Информация об авторах

**Махмуд Хадур**, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет E-mail: *mahmoud.khadour.991@gmail.com* 

# Author Information

Mahmoud Khadour, Postgraduate Student, Kazan Federal University E-mail: mahmoud.khadour.991@gmail.com

Поступила в редакцию 18.12.2024 Принята к публикации 10.02.2025

Received December 18, 2024 Accepted February 10, 2025

# ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 537.9

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.397-408

# Влияние термического отжига на магнитные свойства сплава Hastelloy C-276 с промежуточными буферными слоями Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub>

# И.В. Янилкин<sup>1</sup><sup>∞</sup>, А.И. Гумаров<sup>1</sup>, Д.С. Увин<sup>1</sup>, А.Г. Киямов<sup>1</sup>, С.А. Хохорин<sup>2</sup>, Р.Г. Батулин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия <sup>2</sup>Национальный исследовательский университет ИТМО, г. Санкт-Петербург, Россия

 $\bowtie$  yanilkin-igor@yandex.ru

#### Аннотация

Представлены результаты экспериментального исследования морфологии поверхности, элементного состава и магнитных свойств подложек Хастеллой C-276 с промежуточными буферными слоями  $Al_2O_3/Y_2O_3/MgO/LaMnO_3$  и напылённым сверхпроводником  $MgB_2$ . Исследование проведено в интервале магнитных полей от -5 Тл до 5 Тл и температурном диапазоне 5–15 К при различных температурах отжига лент в интервале 623–923 К. Вакуумный отжиг оказывает значительное влияние на магнитные характеристики подложки, изменение величины удельного магнитного момента в зависимости от температуры отжига составляет 20% в интервале температур 5–15 К.

**Ключевые слова:** Хастеллой С-276, термический отжиг, магнетизм, сверхпроводимость, диборид магния, вибрационная магнитометрия

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-10088, https://rscf.ru/project/22-72-10088/.

Для цитирования: Янилкин И.В., Гумаров А.И., Увин Д.С., Киямов А.Г., Хохорин С.А., Батулин Р.Г. Влияние термического отжига на магнитные свойства сплава Hastelloy C-276 с промежуточными буферными слоями Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 2. С. 397–408. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.397-408.

## ORIGINAL ARTICLE

https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.397-408

# Effect of thermal annealing on the magnetic properties of Hastelloy C-276 alloy with intermediate $Al_2O_3/Y_2O_3/MgO/LaMnO_3$ buffer layers

# I.V. Yanilkin<sup>1</sup><sup>∞</sup>, A.I. Gumarov<sup>1</sup>, D.S. Uvin<sup>1</sup>, A.G. Kiiamov<sup>1</sup>, S.A. Khokhorin<sup>2</sup>, R.G. Batulin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Kazan Federal University, Kazan, Russia
<sup>2</sup>ITMO University, St. Petersburg, Russia

 $\bowtie$  yanilkin-igor@yandex.ru

#### Abstract

This article presents the results of an experimental study on the surface morphology, elemental composition, and magnetic properties of Hastelloy C-276 substrates with intermediate  $Al_2O_3/Y_2O_3/MgO/LaMnO_3$  buffer layers and a deposited MgB<sub>2</sub> superconductor. Measurements were carried out at a magnetic field from -5 to 5 T and in the temperature interval from 5 to 15 K, with the annealing temperatures of the tapes in the range from 623 to 923 K. Vacuum annealing had a significant effect on the magnetic characteristics of the substrates, and the specific magnetic moment varied up to 20 % depending on the annealing temperature in the temperature interval from 5 to 15 K.

**Keywords:** Hastelloy C-276, thermal annealing, magnetism, superconductivity, magnesium diboride, vibration magnetometry

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-72-10088, https://rscf.ru/project/22-72-10088/).

For citation: Yanilkin I.V., Gumarov A.I., Uvin D.S., Kiiamov A.G., Khokhorin S.A., Batulin R.G. Effect of thermal annealing on the magnetic properties of Hastelloy C-276 alloy with intermediate Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> buffer layers. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 2025, vol. 167, no. 2, pp. 397–408. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.2.397-408. (In Russian)

#### Введение

Хастеллой С-276 (англ. Hastelloy C-276) – это сплав, который состоит из следующих основных химических элементов: никель (Ni, ~57 вес. %), молибден (Mo, ~15 вес. %), хром (Cr, ~15 вес. %), вольфрам (W, ~4.5 вес. %), железо (Fe, ~5 вес. %) и небольших добавок углерода (C), марганца (Mn) и кремния (Si) [1,2]. Он обладает высокой коррозионной стойкостью в агрессивных средах, сохраняет свои механические свойства при

высоких температурах, хорошо поддаётся сварке, механической обработке и формованию. Благодаря этим свойствам Хастеллой С-276 широко используется в различных отраслях промышленности.

Кроме того, сплав служит металлической подложкой при производстве высокотемпературных сверхпроводящих лент второго поколения, которые применяются в качестве подложек для сверхпроводящих соединений, таких как ReBCO [3–7] и MgB<sub>2</sub> [8–10]. Эти соединения используются для производства сверхпроводящих магнитов, в том числе для установок класса мегасайенс.

Несмотря на большое количество работ, посвящённых исследованию термического отжига и его влияния на свойства Хастеллой С-276, практически все они сосредоточены на изучении механических и антикоррозионных свойств сплава [11–13]. Влияние температуры на магнитные свойства сплава на сегодняшний день систематически не изучено. Также известно, что в процессе осаждения буферных слоёв или сверхпроводящих плёнок на ленту из Хастеллой С-276 присутствуют технологические стадии осаждения при повышенной температуре. Это может существенно сказаться на магнитных характеристиках сверхпроводящего провода. Знания о магнитных свойствах исходного сплава Хастеллой С-276 и сплава с нанесёнными буферными слоями во внешнем магнитном поле необходимы при проектировании и намотке сверхпроводящих магнитов.

Таким образом, цель данного исследования – установить, как вакуумный отжиг при разной температуре влияет на магнитные свойства ленты Хастеллой С-276 с нанесёнными на неё буферными слоями и сверхпроводящим слоем диборида магния (MgB<sub>2</sub>).

#### 1. Материалы и методы

В настоящей работе в качестве подложки была использована коммерчески доступная лента из материала Хастеллой С-276 (производства ООО «С-Инновации»), покрытая буферными слоями Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> (рис. 1, а) [3]. Толщина ленты Хастеллой С-276 составляла 42.7 мкм, буферных слоев Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 30–50 нм, Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – 5–10 нм, MgO – 60–150 нм и LaMnO<sub>3</sub> – 30–50 нм. Методом одновременного магнетронного распыления мишеней магния и бора на верхний буферный слой напылялась сверхпроводящая плёнка MgB<sub>2</sub>. Температура подложки при напылении MgB<sub>2</sub> составляла 555 К. Далее напылялась защитная плёнка кремния. Подробное описание технологии синтеза сверхпроводящей ленты опубликовано в работе [14].

Отжиг образцов проводился в высоком вакууме (не хуже  $5 \cdot 10^{-8}$  мбар) в диапазоне температур 623–923 К в течение одного часа. Морфология поверхности подложки и пленки исследовалась сканирующим электронным микроскопом JAMP-9500F, элементный состав изучался с помощью рентгеновской фотоэлектронной спектроскопии (РФЭС) на спектрометре SPECS, оснащенном полусферическим энергоанализатором Phoibos 150. Исходные и отожжённые образцы были исследованы на рентгеновском дифрактометре D8 Advance (Bruker AXS). Магнитные свойства измерялись методом вибрационной магнитометрии в диапазоне магнитных полей от -5 Tл до +5 Tл. Измерения проводились на установке PPMS-9 (Quantum Design) с установленной опцией VSM.

#### 2. Результаты

Изначально лента Хастеллой C-276 с буферными слоями представляет собой гибкую фольгу с достаточно гладкой поверхностью (рис. 1, б). После напыления плёнки диборида

магния поверхность становится сильно развитой (рис. 1, в), что связано с ростом шероховатой пленки MgB<sub>2</sub>. На рис. 2 показаны PФЭ-спектры поверхностей ленты Хастеллой С-276, верхнего буферного слоя LaMnO<sub>3</sub> и плёнки MgB<sub>2</sub>. В поверхностном слое ленты Хастеллой С-276 обнаружены элементы Ni, Cr и Mo в относительном содержании 29.7, 35.2 и 35.1 вес. % соответственно, а также кислород и немного углерода. Данный состав отличается от состава, полученного нами ранее методом энергодисперсионной рентгеновской спектрометрии (ЭДС), в котором было гораздо больше никеля и меньше хрома [1]. Это связано с тем, что метод ЭДС является объёмным методом, а РФЭС – поверхностным. Положение пика Cr  $2p_{3/2}$  576.7 эВ указывает на то, что атомы хрома находятся в окисленном состоянии, а положение и форма пика Ni  $2p_{3/2}$  852.8 эВ указывают, что атомы никеля находятся в металлическом состоянии. По-видимому, хром диффундирует к поверхности, образуя защитную плёнку оксида хрома и тем самым обеспечивая высокую коррозионную стойкость.



**Рис. 1.** Образцы ленты Хастеллой С-276 с различными нанесёнными слоями от исходной (a-1), затем буферные слои (a-2) и с нанесённым сверхпроводящим слоем MgB<sub>2</sub> (a-3); расшифровка структуры по слоям и толщина каждого отдельного слоя схематически показаны справа. Морфология поверхности (изображения СЭМ) исходной ленты Хастеллой С-276 с буферными слоями (б) и напылённым слоем MgB<sub>2</sub> поверх буферных слоев (в)

Fig. 1. Hastelloy C-276 tape samples with different layers: the original tape (a-1), with buffer layers (a-2), and with a deposited superconducting MgB<sub>2</sub> layer (a-3); a schematic of the layer-by-layer structure and the thickness of each individual layer are shown on the right. Surface morphology (SEM images) of the original Hastelloy C-276 tape with buffer layers (b) and with a deposited MgB<sub>2</sub> layer on top of buffer layers (c)

Плёнка верхнего буферного слоя LaMnO<sub>3</sub> состоит из элементов La, Mn и O, а плёнка MgB<sub>2</sub> – из элементов Mg и B (рис. 2). Никаких других элементов не обнаружено. Проведенный анализ состава необходим, чтобы понять природу интегральных магнитных свойств образцов. Рентгеноструктурный анализ подложки Хастеллой С-276 с буферными слоями показал наличие пиков двух типов, из которых первые соответствуют поликристаллической фазе сплава Хастеллоя С-276, вторые – упорядоченной (текстурированной) фазе LaMnO<sub>3</sub> (рис. 3). Другие буферные слои на дифрактограмме не определены, по-видимому, вследствие их малой упорядоченности. После напыления плёнки MgB<sub>2</sub> и отжига образца при 923 К дифракционные рефлексы от LaMnO<sub>3</sub> исчезли, что указывает на взаимодействие MgB<sub>2</sub> и LaMnO<sub>3</sub> (рис. 3). Это подтверждается исследованием Оже-электронов с профилированием, показавшим образование после отжига фазы MgO в интерфейсе MgB<sub>2</sub> и LaMnO<sub>3</sub> [14]. Отметим, что после отжига рефлексы сплава Хастеллоя C-276 практически не изменились, только их ширина стала меньше на 6%. Это может указывать на увеличение размера кристаллитов или уменьшение дефектов и напряжений в них.

Магнитные измерения были проведены в магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости ленты. На рис. 4 показаны магнитополевые зависимости магнитного момента, приведённого на единицу площади, различных образцов: отдельной ленты Хастеллой С-276, ленты с буферными слоями, с плёнкой MgB<sub>2</sub> без вакуумного отжига и с ним. Как видно, большинство образцов проявляют парамагнитные зависимости. Однако образец с плёнкой диборида магния, отожжённый при температуре 673 K, проявляет более сложную зависимость. А именно, помимо безгистерезисной парамагнитной зависимости появляется гистерезисная часть, связанная с пиннингом вихрей Абрикосова в сверхпроводящем слое. Влияние отжига на свойства сверхпроводящей плёнки MgB<sub>2</sub> было детально изучено в работе [14]. Температура сверхпроводящего перехода ( $T_c$ ) до вакуумного отжига составляла  $\approx 15$  K, после отжига она увеличивалась до  $\approx 22$  K. В настоящей работе интегрально представлено влияние отжига на магнитные свойства всей системы.



**Рис. 2.** РФЭ-спектры поверхностей ленты Хастеллой С-276, верхнего буферного слоя LaMnO<sub>3</sub> и плёнки MgB<sub>2</sub>

Fig. 2. XPS spectra of the Hastelloy C-276 tape surfaces, upper LaMnO<sub>3</sub> buffer layer, and MgB<sub>2</sub> film



Рис. 3.  $\theta - 2\theta$ -дифрактограммы исходной подложки Хастеллой С-276 с буферными слоями и после напыления пленки MgB<sub>2</sub> с отжигом при 923 К

Fig. 3.  $\theta - 2\theta$  diffraction patterns of the initial Hastelloy C-276 substrate with buffer layers and after the MgB<sub>2</sub> film deposition with annealing at 923 K



**Рис. 4.** Магнитополевые зависимости магнитного момента, приведённого на единицу площади, различных образцов: отдельной ленты Хастеллой С-276, ленты с буферными слоями, с пленкой MgB<sub>2</sub> без и вакуумным отжигом, снятые при температуре 5 K (a) и 15 K (б)

Fig. 4. Magnetic field dependencies of the magnetic moment per unit area for different samples: separate Hastelloy C-276 tape, the tape with buffer layers, with MgB<sub>2</sub> film applied without and with vacuum annealing, all data obtained at a temperature of 5 K (a) and 15 K (b)

#### 3. Обсуждение

Чтобы понимать природу изменения магнитных свойств многослойного образца Хастеллой С-276 с буферными слоями и пленкой MgB<sub>2</sub> при вакуумном отжиге, необходимо знать, какими свойствами обладает каждый слой. Хастеллой С-276 – парамагнетик,  $Al_2O_3$  и MgO – диамагнетики, LaMnO<sub>3</sub> – антиферромагнетик, MgB<sub>2</sub> – сверхпроводник. Однако тонкие пленки MgO и LaMnO<sub>3</sub> могут давать ферромагнитный отклик, связанный с дефектами в пленочной структуре [15–17]. Оценка наибольшего вклада от данных слоев с учетом их реальных толщин в образце дает удельную величину магнитного момента около 0.03 A в поле насыщения 0.5 Тл. Это составляет 3 % от общей величины магнитного момента, что существенно ниже интегрального эффекта от отжига. Кроме того, величины магнитного поля насыщения ферромагнитных петель MgO и LaMnO<sub>3</sub> [15–17] гораздо ниже наблюдаемых в эксперименте. Все это указывает на то, что в изменении магнитного отклика могут участвовать либо Хастеллой C-276, либо MgB<sub>2</sub>. Диборид магния, как мы видим, даже несмотря на малую толщину, может давать существенный вклад в общий магнитный момент. Однако этот вклад имеет гистерезисную природу и легко отделяется от парамагнитного вклада сплава Хастеллой C-276.

Сравнение удельных магнитных моментов ленты Хастеллой С-276 и этой же ленты с буферными слоями указывает на существенное уменьшение (на 16%) величины магнитного момента (рис. 5), что было указано в работе [1] и было связано с влиянием буферных слоев. Однако наши новые исследования указывают на то, что понижение магнитного момента ленты Хастеллой С-276 после нанесения буферных слоев, вероятно, связано с вакуумным отжигом. Дело в том, что при напылении LaMnO<sub>3</sub> подложка нагревается до 973–1173 К для достижения нужного качества кристаллической структуры [3]. Напыление диборида магния при температуре 555 К не изменяет магнитополевые зависимости удельного магнитного момента. Однако дальнейший отжиг приводит сначала (623–673 K) к повышению, а затем (723–923 K) к уменьшению величины магнитного момента. Причины такого немонотонного поведения магнитных свойств остаются неизвестными. Отметим, что в указанной области температур (до 923 K) фазовых переходов у Хастеллой С-276 нет [18].

Результаты исследования позволяют лучше понять механизмы изменения магнитных свойств материалов под воздействием термической обработки. Это, в свою очередь, открывает новые возможности для разработки более надёжных и эффективных сверхпроводящих систем.

#### Заключение

В рамках исследования было изучено, как вакуумный отжиг влияет на магнитные свойства ленты из сплава Хастеллой С-276 с промежуточными буферными слоями Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> и напылённой сверхпроводящей плёнкой MgB<sub>2</sub>. Выяснилось, что отжиг при высоких температурах (723–1173 K) приводит к уменьшению магнитного момента парамагнитного сплава Хастеллой С-276. При средних температурах (623–673 K), напротив, происходит увеличение магнитного момента. Изменение величины удельного магнитного момента в зависимости от температуры отжига составляет 20 % в интервале температур 5–15 К. Полученные результаты могут быть полезны для оптимизации процессов отжига и повышения эффективности работы сверхпроводящих устройств и имеют важное значение для восстановления обмоток сверхпроводящих магнитов в ускорителях, которые могли деградировать в процессе эксплуатации.



**Рис. 5.** Зависимость приведенного на единицу площади удельного момента при магнитном поле 5 Тл ленты Хастеллой С-276 с буферными слоями и плёнкой MgB<sub>2</sub> от температуры отжига. Пустые кружки – данные для ленты Хастеллой С-276 без буферных слоёв **Fig. 5.** Annealing temperature dependence of the specific moment per unit area at a magnetic field of 5 T of Hastelloy C-276 tape with buffer layers and MgB<sub>2</sub> film. Data on Hastelloy C-276 tape without buffer layers are shown as open circles

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов. Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

### Литература

- Batulin R., Cherosov M., Kiiamov A., Rudnev I., Khokhorin S., Uvin D., Rogov A., Tayurskii D. The physical properties of Hastelloy<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> and Hastelloy<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> with Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> buffer layers down to cryogenic temperatures for applications in superconducting magnets // Cryogenics. 2023. V. 137. Art. 103776. https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2023.103776.
- Lu J., Choi E.S., Zhou H.D. Physical properties of Hastelloy<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> at cryogenic temperatures // J. Appl. Phys. 2008. V. 103, No 6. Art. 064908. https://doi.org/10.1063/1.2899058.
- Lee S., Petrykin V., Molodyk A., Samoilenkov S., Kaul A., Vavilov A., Vysotsky V., Fetisov S. Development and production of second generation high T<sub>c</sub> superconducting tapes at SuperOx and first tests of model cables // Supercond. Sci. Technol. 2014. V. 27, No 4. Art. 044022. https://doi.org/10.1088/0953-2048/27/4/044022.
- Zhao Y., Zhu J.-M., Jiang G.-Y., Chen C.-S., Wu W., Zhang Z.-W., Chen S.-K., Hong Y.M., Hong Z.-Y., Jin Z.-J. Progress in fabrication of second generation high temperature superconducting tape at Shanghai Superconductor Technology // Supercond. Sci. Technol. 2019. V. 32, No 4. Art. 044004. https://doi.org/10.1088/1361-6668/aafea5.

- Wang K., Dong H., Huang D., Shang H., Xie B., Zou Q., Zhang L., Feng C., Gu H., Ding F. Advances in second-generation high-temperature superconducting tapes and their applications in high-field magnets // Soft Sci. 2022. V. 2, No 3. Art. 12. https://doi.org/10.20517/ss.2022.10.
- Rudnev I., Abin D., Pokrovskii S., Anishchenko I., Starikovskii A., Osipov M. Influence of ion irradiation on critical characteristics of second-generation HTSC tapes // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2022. V. 32, No 4. Art. 8000905. https://doi.org/10.1109/TASC.2022.3164629.
- Chen Z., Calvi M., Durrell J., Boffo C., Wei D., Zhang K., Zhao Z. Recent progress in high-temperature superconducting undulators // Superconductivity. 2024. V. 12. Art. 100134. https://doi.org/10.1016/j.supcon.2024.100134.
- Hata S., Sosiati H., Kuwano N., Tomokiyo Y., Matsumoto A., Fukutomi M., Kitaguchi H., Komori K., Kumakura H. Effects of heat treatments on microstructure formation in MgB<sub>2</sub>/YSZ/Hastelloy film // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2005. V. 15, No 2. P. 3238–3241. https://doi.org/10.1109/TASC.2005.848834.
- Putri W.B.K., Kang B., Van Duong P., Kang W.N. Reducing delamination in MgB<sub>2</sub> films deposited on Hastelloy tapes by applying SiC buffer layers // Thin Solid Films. 2015. V. 590. P. 80–83. https://doi.org/10.1016/j.tsf.2015.07.057.
- Kang B., Putri W.B.K., Kang W.N. Effect of SiC buffer layer on flux pinning property of MgB<sub>2</sub> tapes // Curr. Appl. Phys. 2019. V. 19, No 6. P. 670–674. https://doi.org/10.1016/j.cap.2019.03.012.
- Zhang X.Y., Zhong J., Guo S., Zhao J. Control of deformation and annealing process to produce incoherent Σ3 boundaries in Hastelloy C-276 alloy // Nucl. Mater. Energy. 2021. V. 27. Art. 100944. https://doi.org/10.1016/j.nme.2021.100944.
- Kumar G.S., Sivamaran V., Lokanadham R., Raju C., Mandal T.K. Influence of heat treatment on microstructure and mechanical properties of pulsed Nd:YAG laser welded dissimilar sheets of Hastelloy C-276 and monel 400 // Phys. Scr. 2023. V. 98, No 9. Art. 095933. https://doi.org/10.1088/1402-4896/aceb3b.
- Zhang C., Zhang L., Cui Y., Feng Q., Cheng C. Effects of high-temperature aging on precipitation and corrosion behavior of a Ni-Cr-Mo-based Hastelloy C276 superalloy // J. Mater. Eng. Perform. 2020. V. 29, No 3. P. 2026–2034. https://doi.org/10.1007/s11665-020-04723-y.
- Yanilkin I.V., Gumarov A.I., Rudnev I.A., Fatikhova L.R., Kiiamov A.G., Denisov A.E., Khokhorin S.A., Tayurskii D.A., Batulin R.G. Synthesis of MgB<sub>2</sub> films on Hastelloy-C276 tape with Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> buffer layers by magnetron sputtering in co-evaporation mode // Supercond. Sci. Technol. 2024. V. 37, No 8. Art. 085015. https://doi.org/10.1088/1361-6668/ad5c09.
- Balcells L., Beltrán J.I., Martínez-Boubeta C., Konstantinović Z., Arbiol J., Martínez B. Aging of magnetic properties in MgO films // Appl. Phys. Lett. 2010. V. 97, No 25. Art. 252503. https://doi.org/10.1063/1.3527963.
- 16. Yufeng C., Wang G., Zhengfeng S., Shenggao W., Yangwu M., Quanrong D., Jingjing Y. Magnetic characteristics of LaMnO<sub>3+δ</sub> thin films deposited by RF magnetron sputtering in an O<sub>2</sub>/Ar mixture gas // Mater. Res. Express. 2021. V. 8, No 1. Art. 016101. https://doi.org/10.1088/2053-1591/abd6a3.

- Kim H.S., Christen H.M. Controlling the magnetic properties of LaMnO<sub>3</sub> thin films on SrTiO<sub>3</sub>(100) by deposition in a O<sub>2</sub>/Ar gas mixture // J. Phys.: Condens. Matter. 2010. V. 22, No 14. Art. 146007. https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/14/146007.
- Atamert S., Bhadeshia H.K.D.H. Nickel based hardfacing alloys for high temperature applications // Mater. Sci. Technol. 1989. V. 5, No 12. P. 1220–1228. https://doi.org/10.1179/mst.1989.5.12.1220.

#### References

- Batulin R., Cherosov M., Kiiamov A., Rudnev I., Khokhorin S., Uvin D., Rogov A., Tayurskii D. The physical properties of Hastelloy<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> and Hastelloy<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> with Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> buffer layers down to cryogenic temperatures for applications in superconducting magnets. *Cryogenics*, 2023, vol. 137, art. 103776. https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2023.103776.
- Lu J., Choi E.S., Zhou H.D. Physical properties of Hastellov<sup>®</sup> C-276<sup>TM</sup> at cryogenic temperatures. J. Appl. Phys., 2008, vol. 103, no. 6, art. 064908. https://doi.org/10.1063/1.2899058.
- Lee S., Petrykin V., Molodyk A., Samoilenkov S., Kaul A., Vavilov A., Vysotsky V., Fetisov S. Development and production of second generation high T<sub>c</sub> superconducting tapes at SuperOx and first tests of model cables. *Supercond. Sci. Technol.*, 2014, vol. 27, no. 4, art. 044022. https://doi.org/10.1088/0953-2048/27/4/044022.
- Zhao Y., Zhu J.-M., Jiang G.-Y., Chen C.-S., Wu W., Zhang Z.-W., Chen S.-K., Hong Y.M., Hong Z.-Y., Jin Z.-J. Progress in fabrication of second generation high temperature superconducting tape at Shanghai Superconductor Technology. *Supercond. Sci. Technol.*, 2019, vol. 32, no. 4, art. 044004. https://doi.org/10.1088/1361-6668/aafea5.
- Wang K., Dong H., Huang D., Shang H., Xie B., Zou Q., Zhang L., Feng C., Gu H., Ding F. Advances in second-generation high-temperature superconducting tapes and their applications in high-field magnets. *Soft Sci.*, 2022, vol. 2, no. 3, art. 12. https://doi.org/10.20517/ss.2022.10.
- Rudnev I., Abin D., Pokrovskii S., Anishchenko I., Starikovskii A., Osipov M. Influence of ion irradiation on critical characteristics of second-generation HTSC tapes. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 2022, vol. 32, no. 4, art. 8000905. https://doi.org/10.1109/TASC.2022.3164629.
- Chen Z., Calvi M., Durrell J., Boffo C., Wei D., Zhang K., Zhao Z. Recent progress in high-temperature superconducting undulators. *Superconductivity*, 2024, vol. 12, art. 100134. https://doi.org/10.1016/j.supcon.2024.100134.
- Hata S., Sosiati H., Kuwano N., Tomokiyo Y., Matsumoto A., Fukutomi M., Kitaguchi H., Komori K., Kumakura H. Effects of heat treatments on microstructure formation in MgB<sub>2</sub>/YSZ/Hastelloy film. *IEEE Trans. Appl. Supercond.*, 2005, vol. 15, no. 2, pp. 3238–3241. https://doi.org/10.1109/TASC.2005.848834.
- Putri W.B.K., Kang B., Van Duong P., Kang W.N. Reducing delamination in MgB<sub>2</sub> films deposited on Hastelloy tapes by applying SiC buffer layers. *Thin Solid Films*, 2015, vol. 590, pp. 80–83. https://doi.org/10.1016/j.tsf.2015.07.057.
- Kang B., Putri W.B.K., Kang W.N. Effect of SiC buffer layer on flux pinning property of MgB<sub>2</sub> tapes. *Curr. Appl. Phys.*, 2019, vol. 19, no. 6, pp. 670–674. https://doi.org/10.1016/j.cap.2019.03.012.

- Zhang X.Y., Zhong J., Guo S., Zhao J. Control of deformation and annealing process to produce incoherent Σ3 boundaries in Hastelloy C-276 alloy. *Nucl. Mater. Energy*, 2021, vol. 27, art. 100944. https://doi.org/10.1016/j.nme.2021.100944.
- Kumar G.S., Sivamaran V., Lokanadham R., Raju C., Mandal T.K. Influence of heat treatment on microstructure and mechanical properties of pulsed Nd:YAG laser welded dissimilar sheets of Hastelloy C-276 and monel 400. *Phys. Scr.*, 2023, vol. 98, no. 9, art. 095933. https://doi.org/10.1088/1402-4896/aceb3b.
- Zhang C., Zhang L., Cui Y., Feng Q., Cheng C. Effects of high-temperature aging on precipitation and corrosion behavior of a Ni-Cr-Mo-based Hastelloy C276 superalloy. J. Mater. Eng. Perform., 2020, vol. 29, no. 3, pp. 2026–2034. https://doi.org/10.1007/s11665-020-04723-y.
- Yanilkin I.V., Gumarov A.I., Rudnev I.A., Fatikhova L.R., Kiiamov A.G., Denisov A.E., Khokhorin S.A., Tayurskii D.A., Batulin R.G. Synthesis of MgB<sub>2</sub> films on Hastelloy-C276 tape with Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/MgO/LaMnO<sub>3</sub> buffer layers by magnetron sputtering in co-evaporation mode. *Supercond. Sci. Technol.*, 2024, vol. 37, no. 8, art. 085015. https://doi.org/10.1088/1361-6668/ad5c09.
- Balcells L., Beltrán J.I., Martínez-Boubeta C., Konstantinović Z., Arbiol J., Martínez B. Aging of magnetic properties in MgO films. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, vol. 97, no. 25, art. 252503. https://doi.org/10.1063/1.3527963.
- 16. Yufeng C., Wang G., Zhengfeng S., Shenggao W., Yangwu M., Quanrong D., Jingjing Y. Magnetic characteristics of LaMnO<sub>3+δ</sub> thin films deposited by RF magnetron sputtering in an O<sub>2</sub>/Ar mixture gas. *Mater. Res. Express*, 2021, vol. 8, no. 1, art. 016101. https://doi.org/10.1088/2053-1591/abd6a3.
- 17. Kim H.S., Christen H.M. Controlling the magnetic properties of LaMnO<sub>3</sub> thin films on SrTiO<sub>3</sub>(100) by deposition in a O<sub>2</sub>/Ar gas mixture. J. Phys.: Condens. Matter, 2010, vol. 22, no. 14, art. 146007. https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/14/146007.
- Atamert S., Bhadeshia H.K.D.H. Nickel based hardfacing alloys for high temperature applications. Mater. Sci. Technol., 1989, vol. 5, no. 12, pp. 1220–1228. https://doi.org/10.1179/mst.1989.5.12.1220.

### Информация об авторах

**Игорь Витальевич Янилкин**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: yanilkin-igor@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8879-8904

**Амир Илдусович Гумаров**, старший научный сотрудник, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: amir@gumarov.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7250-4377

**Денис Сергеевич Увин**, младший научный сотрудник, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: den.uvin2002@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0009-0003-5970-9559

**Айрат Газинурович Киямов**, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

 $\mbox{E-mail:} \quad airatphd@kazanfederaluniversity.ru$ 

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5376-7000

**Савелий Артемович Хохорин**, студент, Национальный исследовательский университет ИТМО

ORCID: https://orcid.org/0009-0002-5947-2531

**Руслан Германович Батулин**, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт физики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: tokamak@yandex.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0184-6580

#### Author Information

Igor V. Yanilkin, Cand. Sci. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Physics, Kazan Federal University

E-mail: yanilkin-igor@yandex.ru

ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8879-8904

**Amir I. Gumarov**, Senior Researcher, Institute of Physics, Kazan Federal University E-mail: *amir@qumarov.ru* 

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7250-4377

**Denis S. Uvin**, Junior Researcher, Institute of Physics, Kazan Federal University E-mail: den.uvin2002@gmail.com

ORCID: https://orcid.org/0009-0003-5970-9559

Airat G. Kiiamov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Institute of Physics, Kazan Federal University

E-mail: *airatphd@kazanfederaluniversity.ru* 

ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5376-7000

Savely A. Khokhorin, Student, ITMO University ORCID: https://orcid.org/0009-0002-5947-2531

Ruslan G. Batulin, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Institute of Physics,

Kazan Federal University

E-mail: tokamak@yandex.ru

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0184-6580

Поступила в редакцию 17.02.2025 Принята к публикации 19.03.2025 Received February 17, 2025 Accepted March 19, 2025

