



ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Казанского университета

серия

ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Uchenye Zapiski
Kazanskogo Universiteta

Seriya Fiziko-Matematicheskie
Nauki

2025

Том 167

Книга 1

Volume 167

Issue 1

Ученые записки Казанского университета.
Серия Физико-математические науки
рецензируемый научный журнал

2025
Т. 167, кн. 1

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ОСНОВАНЫ В 1834 ГОДУ

Редакционная коллегия

Главный редактор

Д.А. Таюрский – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Члены редколлегии

А.М. Елизаров (зам. гл. редактора) – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

И.С. Александрова (секретарь) – Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.М. Арсланов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Е. Бенюва – д-р наук, Софийский университет, г. София, Болгария

Р.З. Даутов – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Э. Лайтинен – д-р наук, Университет Оулу, г. Оулу, Финляндия

Р.Х. Латыпов – д-р техн. наук, проф., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

А.Г. Мельников – доцент, Школа математики и статистики, Университет Виктории в Веллингтоне, г. Веллингтон, Новая Зеландия

С.Р. Насыров – д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-кор. Академии наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

В.Н. Паймушин – д-р физ.-мат. наук, проф., Казанский национальный технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

М.Х. Салахов – д-р физ.-мат. наук, проф., д. чл. Академии наук Республики Татарстан, Академия наук Республики Татарстан, Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.Г. Смирнов – д-р физ.-мат. наук, проф., Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

В.Ф. Тишкин – д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

О.Н. Шерстюков – д-р физ.-мат. наук, доц., Казанский федеральный университет, г. Казань, Россия

Ю.В. Шестопалов – д-р физ.-мат. наук, проф., МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

М. Шнейдер – д-р наук, Принстонский университет, г. Принстон, США

Ю.И. Шокин – д-р физ.-мат. наук, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Редактор английского текста *А.О. Кармазина*

Учредитель и издатель: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-41875 от 27 августа 2010 г.

Журнал реферируется/индексируется в Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat, КиберЛенинка

Подписной индекс 19423. Цена свободная

Адрес издателя и редакции «Ученые записки Казанского университета»:
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18
Телефон: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; сайт: <http://kpfu.ru/uz-rus/phm>

Дата выхода в свет 28.03.2025. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 17,03.
Уч.-изд. л. 12,94. Тираж 300 экз. Заказ 123/3

Отпечатано в типографии Издательства Казанского университета
420008, Российская Федерация, Республика Татарстан,
г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta.

Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki

Proceedings of Kazan University.

Physics and Mathematics Series

Peer-Reviewed Scientific Journal

2025

Vol. 167, No. 1

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA FOUNDED IN 1834

Editorial Board

Editor-in-Chief

Dmitrii A. Tayurskii – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Members of Editorial Board

Alexander M. Elizarov (Deputy Editor-in-Chief) – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Irina S. Aleksandrova (Secretary) – Kazan Federal University, Kazan, Russia

Marat M. Arslanov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Evgenia Benova – Doctor of Science, Sofia University, Sofia, Bulgaria

Rafail Z. Dautov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Erkki Laitinen – Doctor of Science, University of Oulu, Oulu, Finland

Rustam Kh. Latypov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Alexander G. Melnikov – Associate Professor, School of Mathematics and Statistics, Victoria University of Wellington, New Zealand

Semen R. Nasyrov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Corresponding Member of Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Vitalii N. Paimushin – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University – KAI, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Myakzyum Kh. Salakhov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Full Member of Tatarstan Academy of Sciences, Tatarstan Academy of Sciences, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury G. Smirnov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Penza State University, Penza, Russia

Vladimir F. Tishkin – Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Oleg N. Sherstyukov – Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Kazan Federal University, Kazan, Russia

Yury V. Shestopalov – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

Mikhail Shneider – Doctor of Science, Princeton University, Princeton, USA

Yury I. Shokin – Doctor of Physics and Mathematics, Member of Russian Academy of Sciences, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

English Editor: *A.O. Karmazina*

Founder and Publisher: Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “Kazan (Volga Region) Federal University”

The journal is registered with the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technologies and Mass Media

Registration certificate PI No. FS77-41875 dated August 27, 2010

The journal is abstracted and/or indexed in Scopus, DOAJ, EBSCO, eLIBRARY.RU, Emerging Sources Citation Index, Google Scholar, Mathematical Reviews, Math-Net.Ru, ZbMath, Cyberleninka, Ulrich's Periodicals Directory, WorldCat

Subscription index: 19423. Free price

Contacts: Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, ul. Kremlevskaya 18, Kazan, Republic of Tatarstan, 420008 Russia

Phone: (843) 233-73-01; e-mail: uz.ku@kpfu.ru; website: <http://kpfu.ru/uz-eng/phm>

Date of publication: March 28, 2025. Page size: 60×84/8.

Offset printing. Conventional printing sheet: 17.03.

Publisher's signature: 12.94. Circulation: 300 copies. Order: 123/3

Printed in KFU Publishing House

ul. Prof. Nuzhina 1/37, Kazan,

Republic of Tatarstan, 420008 Russia

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю.</i> Приближения решений одного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений	5
<i>Губайдуллин А.А., Пяткова А.В.</i> Влияние коэффициента теплоотдачи на теплообмен в цилиндрической вибрирующей полости	16
<i>Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D.</i> On the efficiency of Mg/Nb diboride solid solution in enhancing the thermal stability of MgB_2 superconductor	30
<i>Nekarov I.A., Safin R.N., Tsoy T.G., Sulaiman S., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A.</i> ROS-based navigation in unknown environment using the InsertBug algorithm: Issues of practical usage	38
<i>Нуриев А.Н., Зайцева О.Н., Жучкова О.С.</i> Об исследованиях колебательного движения тел в жидкости	54
<i>Рятина Е.П., Марчевский И.К., Колганова А.О., Кобзарь Д.Ю.</i> Реализация быстрых алгоритмов при моделировании двумерных течений вихревыми методами	99
<i>Салихова Н.М.</i> Квантовый поиск в словаре на основе функции отпечатков	115
<i>Сенницкий В.Л.</i> О движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических воздействиях	125
<i>Сорокина М.В., Морщинкина Ю.Д.</i> Инвариантная почти контактная структура на вещественном расширении сферы	140
<i>Терсенов А.С., Сафаров Р.Ч.</i> Радиально-симметричные решения задачи Неймана для уравнения с p -лапласианом	150
<i>Чекмарев Д.Т., Глазова Е.Г., Седова Д.В.</i> Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости	169
<i>Шубин А.В.</i> Прототипирование видеоигр на основе нечеткой логики	181
<i>Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Мухамедова И.З., Тазюков Б.Ф.</i> Модель циклической оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности	196

CONTENTS

<i>Agachev J.R., Pershagin M.Yu.</i> Approximations of solutions for a class of conditionally well-posed integro-differential equations	5
<i>Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V.</i> Influence of the heat transfer coefficient on heat transfer in a vibrating cylindrical cavity	16
<i>Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D.</i> On the efficiency of Mg/Nb diboride solid solution in enhancing the thermal stability of MgB_2 superconductor	30
<i>Nekеров I.A., Safin R.N., Tsoy T.G., Sulaiman S., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A.</i> ROS-based navigation in unknown environment using the InsertBug algorithm: Issues of practical usage	38
<i>Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Zhuchkova O.S.</i> On the study of oscillatory motion of bodies in fluid	54
<i>Ryatina E.P., Marchevsky I.K., Kolganova A.O., Kobzar D.Yu.</i> Implementation of fast algorithms for 2D flow simulation using vortex particle methods	99
<i>Salikhova N.M.</i> Quantum search in a dictionary using fingerprinting function	115
<i>Sennitskii V.L.</i> On the motion of a hydro-mechanical system with a viscous liquid under periodic influences	125
<i>Sorokina M.V., Morshchinkina Y.D.</i> Invariant almost contact structure on the real extension of a sphere	140
<i>Tersenov Ar.S., Safarov R.C.</i> On radially symmetric solutions of the Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation	150
<i>Chekmarev D.T., Glazova E.G., Sedova D.V.</i> Implicit rare mesh scheme for solving 3D elasticity problems	169
<i>Shubin A.V.</i> Video game prototyping using fuzzy logic	181
<i>Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F.</i> Modeling of a cyclic shell with a local deepening on the inner surface	196

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.51: 517.968.7: 519.642.2

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>**Приближения решений одного класса условно
корректных интегро-дифференциальных уравнений****Ю.Р. Агачев, М.Ю. Першагин** ✉*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*✉ Michael.Pershagin@kpfu.ru**Аннотация**

Для одного частного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре весовых пространств Соболева предложен другой способ построения приближений (в частности, конечномерных приближений) к решению соответствующей краевой задачи и дано теоретическое обоснование вычислительной схемы при минимальных дифференциальных свойствах коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: весовое пространство Соболева, интегро-дифференциальное уравнение, прямой метод, проекционный метод, сходимость

Для цитирования: Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Приближения решений одного класса условно корректных интегро-дифференциальных уравнений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 5–15. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>

Approximations of solutions for a class of conditionally well-posed integro-differential equations

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin ✉

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ Michael.Pershagin@kpfu.ru

Abstract

In this article, for a specific class of conditionally well-posed integro-differential equations in a novel pair of weighted Sobolev spaces, an alternative method for constructing approximations (particularly finite-dimensional ones) to the solution of the corresponding boundary value problem is proposed, and its theoretical justification is provided for minimal differential properties of the coefficients of the equation.

Keywords: weighted Sobolev space, integro-differential equation, direct method, projection method, convergence

For citation: Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Approximations of solutions for a class of conditionally well-posed integro-differential equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 5–15.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.5-15>. (In Russian)

Пусть $\rho(t)$ – такая весовая функция на интервале $[-1, 1]$, что $1/\rho(t)$ также является весовой, а $m + 1$ и p – натуральные числа, причем $p > m$. Обозначим через $y(t)$ и $h(t, s)$ известные функции, заданные на интервалах $[-1, 1]$ и $[-1, 1]^2$ соответственно. Рассмотрим задачу нахождения решения интегро-дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \int_{-1}^1 h(t, s)x^{(p)}(s) ds = y(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

при краевых условиях¹

$$l_i(x) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}, \quad (2)$$

где l_i , $i = \overline{0, m-1}$, – линейно независимые функционалы, определенные на пространстве $C^{(m-1)}[-1, 1]$ функций, $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$.

Пусть $W^r L_{2,\rho}[-1, 1] \equiv W_{2,\rho}^r$ ($r \geq 1$) есть пространство Соболева функций, абсолютно непрерывных на $[-1, 1]$ и имеющих производную порядка r из пространства Лебега

¹При $m = 0$ краевые условия отсутствуют.

$L_{2,\rho}(-1,1)$ функций, квадратично-суммируемых с весом $\rho(t)$ на интервале $(-1,1)$. Обозначим через $q(t) = (1 - t^2)^{p-m-1/2}$ вес Гегенбауэра, и пусть $W^r L_{2,q}[-1,1] = W_{2,q}^r$ есть соответствующее пространство Соболева с весом $q(t)$.

Задача (1) и (2) при $p > m \geq 0$ является некорректно поставленной (по Адамару) на парах функциональных пространств X искомых элементов и Y правых частей, традиционных для дифференциальных уравнений. Вместе с тем в работе [1] задачи для интегро-дифференциальных уравнений в случае, когда порядок внутреннего дифференциального оператора выше порядка соответствующего внешнего дифференциального оператора (следовательно, для уравнения (1)), отнесены к классу условно корректных с учетом возможности их корректной постановки за счет специального выбора пары пространств X и Y (про условно корректные уравнения см. монографию [2]). В работе [3] (см. также [4]) доказано, что в качестве такой пары может быть выбрана пара пространств $X = \overset{\circ}{W}_{2,q}^p$ функций из $W_{2,q}^p$, удовлетворяющих краевым условиям (2), и $Y = W_{2,q}^{p-m}$. При этом нормы в этих пространствах являются согласованными, а именно:

$$\|y\|_Y = \sqrt{\sum_{k=0}^{p-m} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{k-1/2} |y^{(k)}(t)|^2 dt}, \quad y \in Y,$$

$$\|x\|_X = \sqrt{\sum_{k=0}^{p-m} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{k-1/2} |x^{(m+k)}(t)|^2 dt}, \quad x \in X.$$

В этом случае для нахождения решения задачи можно применить тот или иной прямой метод, что позволит построить вычислительные схемы, более простые по сравнению с известными методами для чисто некорректных задач. В работе [3] (см. также [4]) при некоторых предположениях относительно функций h и y в уравнении (1) нами дано обоснование общего полиномиального проекционного метода, построенного на основе оператора проектирования, обладающего определенными свойствами. В частности, доказана сходимость полиномиального метода Галеркина².

Специальный вид уравнения (1) позволяет применить другой подход к построению приближений к решению задачи (1) и (2) путем выбора других пар пространств (X, Y) для корректной постановки задачи.

Рассмотрим *новую* пару пространств (X, Y) функций, определенных на $[-1, 1]$, где $Y = W_{2,\rho}^{p-m}$ – пространство функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $p - m - 1$ и производную порядка $p - m$ из пространства $L_{2,\rho}$, $X = \overset{\circ}{W}_{2,\rho}^p$ – пространство функций, удовлетворяющих краевым условиям (2). Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + \|y^{(p-m)}\|_{2,\rho}, \quad y \in Y,$$

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_C + \|x^{(p)}\|_{2,\rho}, \quad x \in X.$$

Всюду далее запись $h \in Y \times L_{2,1/\rho}$ означает, что функция $h(t, s)$, определенная на $[-1, 1]^2$, по переменной t принадлежит пространству Y равномерно относительно s , а по s

²В названной работе эти результаты получены для более общего интегро-дифференциального уравнения.

равномерно относительно переменной t принадлежит пространству $L_{2,1/\rho}$. При этом норму $\|h\|_{Y \times L_{2,1/\rho}}$ введем по формуле

$$\|h\|_{Y \times L_{2,1/\rho}} = \| \|h(t, \cdot)\|_{2,1/\rho} \|_Y.$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть $y \in Y$, $h \in Y \times L_{2,1/\rho}$. Тогда задача (1) и (2) на паре (X, Y) является условно корректной.

Отметим, что лемма очевидным образом следует из согласованности норм в пространствах X и Y и неравенства Гёльдера. При этом заметим, что пространство $W_{2,\rho}^r$ при $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ непрерывно вложено в пространство W_{2,q_r}^r , где $q_r(t) = (1-t^2)^{r-1/2}$.³

Продифференцируем уравнение (1) $(p-m-1)$ раз и рассмотрим функцию $z(t) \equiv x^{(p-1)}(t)$. Тогда для $z(t)$ получим уравнение

$$K_1 z \equiv z(t) + \int_{-1}^1 \tilde{h}(t, s) z'(s) ds = \tilde{y}(t), \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где функции

$$\tilde{h}(t, s) = \frac{\partial^{p-m-1}}{\partial t^{p-m-1}} h(t, s), \quad \tilde{y}(t) = y^{(p-m-1)}(t)$$

являются абсолютно непрерывными на $[-1, 1]$ по переменной t .

Введем пространство $Z \equiv W_{2,\rho}^1[-1, 1] \equiv W_{2,\rho}^1$ с нормой

$$\|z\|_Z = \|z\|_C + \|z'\|_{2,\rho}, \quad z \in Z.$$

Заметим, что эта норма эквивалентна норме

$$\|z\| = \|z\|_{2,1/\rho} + \|z'\|_{2,\rho},$$

поскольку

$$z(t) = \int_{\xi}^t z'(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z(\tau) d\tau,$$

где точка $\xi \in (-1, 1)$ выбрана из условия

$$z(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 z(\tau) d\tau.$$

Уравнение (3) в пространстве Z запишем в операторной форме:

$$K_1 z \equiv z + \tilde{H} z = \tilde{y} \quad (z, \tilde{y} \in Z), \quad (4)$$

³Другими словами, в этом частном случае веса $\rho(t)$ имеем пару более узких весовых пространств Соболева.

где оператор $\tilde{H}$ задан формулой

$$\tilde{H}z \equiv H\tilde{h}z \equiv \int_{-1}^1 \tilde{h}(t, s)z'(s) ds.$$

Пусть $Z_n \subset Z$ – конечномерное подпространство размерности N , $\tilde{y}_n \in Z_n$, $\tilde{H}_n$ – линейный оператор, действующий в подпространстве Z_n , и $P_n : Z \rightarrow Z_n$ – произвольный линейный оператор проектирования. Будем искать приближение к решению уравнения (4) в виде точного решения уравнения

$$K_{1,n}z_n \equiv z_n + \tilde{H}_nz_n = \tilde{y}_n \quad (z_n, \tilde{y}_n \in Z_n), \quad (5)$$

задающего некоторый прямой метод решения уравнения (4).

При построении приближений к решению общей задачи (1) и (2) учтем, что задача (1) и (2) может быть сведена к эквивалентной задаче Коши для уравнения (1) с новыми известными функциями $h(t, s)$ и $y(t)$ (см., например, [5]). Поэтому для определенности и без ограничения общности далее будем считать, что общие краевые условия являются начальными:

$$l_i(x) \equiv x^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (2')$$

Предположим, что уравнение (5) имеет единственное решение z_n^* хотя бы при всех n , начиная с некоторого натурального n_0 . Тогда приближения к решению задачи (1), (2') можно построить по формуле

$$\begin{aligned} x_n^*(t) &= \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} x_n^{*(m)}(t_1) dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m = \\ &= \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} [y(t_1) - (Hh z_n^*)(t_1)] dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что x_n^* является функцией из основного пространства X .

Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены предположения:

- 1) $y \in W_{2,\rho}^{p-m}$, $h \in W_{2,\rho}^{p-m} \times L_{2,1/\rho}$;
- 2) задача (1), (2') имеет единственное решение при любой правой части из $W_{2,\rho}^{p-m}$;
- 3) однородное уравнение, соответствующее уравнению (4), имеет лишь тривиальное решение;
- 4) правая часть $\tilde{y}_n$ и оператор $\tilde{H}_n : Z_n \rightarrow Z_n$ в уравнении (5) обладают свойствами

$$\|\tilde{y} - \tilde{y}_n\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\|\tilde{H}z_n - \tilde{H}_nz_n\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall z_n \in Z_n.$$

Тогда при всех натуральных n , начиная с некоторого, однозначно определены приближения $x_n^* \in X$, сходящиеся к точному решению x^* задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|\tilde{y} - \tilde{y}_n\|_Z + \|\tilde{H} - \tilde{H}_n\|_{Z_n \rightarrow Z_n}\}.$$

В наиболее важном частном случае уравнения (5), задающего проекционный метод решения уравнения (4), а именно, уравнения

$$K_{2,n}z_n \equiv z_n + P_n\tilde{H}z_n = P_n\tilde{y} \quad (z_n \in Z_n) \quad (5')$$

имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1)–3) теоремы 1 и, кроме того, операторы $P_n : Z \rightarrow Z_n$ в уравнении (5') обладают свойством

$$\|z - P_n z\|_Z \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall z \in Z.$$

Тогда при всех n , начиная с некоторого натурального n_0 , однозначно определены приближения $x_n^* \in X$, сходящиеся к точному решению x^* со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{\|\tilde{h} - P_n^t \tilde{h}\|_{Z \times L_{2,1/\rho}} + \|\tilde{y} - P_n \tilde{y}\|_Z\}.$$

Сформулированные теоремы, с учетом полной непрерывности в пространстве Z оператора $\tilde{H}$, очевидным образом следуют из теоремы 7 главы 1 монографии [1].

Применим теперь эти теоремы для построения приближений к решению задачи Коши (1), (2'), используя методы коллокации и механических квадратур нахождения функций $z_n(t)$.

Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ – вес Чебышева второго рода, X, Y и Z – соответствующие весовые пространства Соболева. Обозначим через L_n полиномиальный оператор Лагранжа, построенный по узлам Чебышева первого рода

$$t_k = \cos\{(2k+1)\pi/(2n+2)\}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Зафиксируем также квадратурную формулу Эрмита – Чебышева

$$\int_{-1}^1 \frac{z(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \approx \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n z(t_k),$$

сходящуюся на всем пространстве функций, непрерывных на интервале $[-1, 1]$.

Приближения к решению уравнения (4) построим в виде

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(t), \quad (8)$$

где $T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ – полином Чебышева первого рода степени k , а $\{c_k\}$ – неизвестные коэффициенты. Определим их из системы

$$\sum_{k=0}^n \alpha_{jk} c_k = \tilde{y}(t_j), \quad j = \overline{0, n}, \quad (9)$$

где коэффициенты $\{\alpha_{jk}\}$ найдем по одной из формул:

$$\alpha_{jk} = T_k(t_j) + k \int_{-1}^1 \tilde{h}(t_j, s) U_{k-1}(s) ds \quad (10)$$

в случае метода коллокации;

$$\alpha_{jk} = T_k(t_j) + \frac{\pi k}{n+1} \sum_{i=0}^n \tilde{h}(t_j, t_i) \sqrt{1 - t_i^2} U_{k-1}(t_i) \quad (11)$$

в случае метода квадратур. В формулах (10) и (11)

$$U_{k-1}(s) = \sin(k \arccos s) / \sqrt{1 - s^2}$$

есть полином Чебышева второго рода степени $k - 1$.

Если система (9) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$, то по формуле (8) будут однозначно определены приближения $z_n^*(t) = \sum_{k=0}^n c_k^* T_k(t)$. В свою очередь, через эти приближения по формуле (6) будут построены функции $x_n^*(t)$, являющиеся приближениями решения задачи (1), (2').

Имеют место следующие результаты.

Теорема 3. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$ и выполнены предположения 1)–3) теоремы 1.

Тогда система уравнений (9), (10) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех натуральных n , начиная с некоторого. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме пространства X к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n^t(\partial^{p-m} h / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}.$$

Теорема 4. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1 - t^2}$ и выполнены предположения 1)–3) теоремы 1. Пусть, кроме того, частная производная порядка $p - m$ функции $\bar{h}(t, s) \equiv h(t, s) \cdot \sqrt{1 - s^2}$ непрерывна по переменной s равномерно относительно t .

Тогда система уравнений (9), (11) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех n , начиная с некоторого натурального. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (6), сходятся по норме пространства X к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n^t(\partial^{p-m} h / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n^s(\partial^{p-m} \bar{h} / \partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times C} + E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}.$$

В теоремах 3 и 4 $E_n(f)_{L_{2,\rho}}$ есть наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\rho}$ алгебраическими полиномами степени не выше n . Для функций двух переменных $f(t, s) \in L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}$ под $E_n^t(f)_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}$ понимаем частное наилучшее приближение по переменной t алгебраическими полиномами степени не выше n в метрике соответствующего пространства двух переменных; аналогично понимаем для $f(t, s) \in L_{2,\rho} \times C$ величину $E_n^s(f)_{L_{2,\rho} \times C}$.

Теорема 3 следует из теоремы 2, так как оператор P_n метода коллокации является полиномиальным оператором Лагранжа по узлам Чебышева первого рода и из работы [6] вытекает, что

$$\|z - P_n z\|_Z = O\{E_n(z)_Z\} = O\{E_n(z')_{L_{2,\rho}}\}, \quad \forall z \in Z.$$

При доказательстве теоремы 4 достаточно воспользоваться свойством наивысшей алгебраической степени точности квадратурной формулы Эрмита–Чебышева и результатами работы [7].

Если требуется построить конечномерные приближения к решению задачи (1), (2') из некоторого конечномерного подпространства $X_n \subset X$, то их можно определить по формуле

$$x_n^*(t) = \int_{-1}^t \int_{-1}^{t_m} \dots \int_{-1}^{t_2} Q_n[y(t_1) - (Hh z_n^*)(t_1)] dt_1 \dots dt_{m-1} dt_m, \quad (12)$$

где $Q_n : W_{2,\rho}^{p-m} \rightarrow Y_n$ – произвольно зафиксированный линейный оператор проектирования в конечномерное подпространство Y_n пространства $W_{2,\rho}^{p-m}$, размерность которого на m единиц меньше размерности X_n . В этом случае справедливы следующие результаты.

Теорема 5. Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$, X_n – подпространство алгебраических полиномов степени не выше $n+m$, удовлетворяющих начальным условиям (2'), и пусть выполнены предположения:

- 1) $y \in W_{2,\rho}^{p-m}$;
- 2) $h \in W_{2,\rho}^{p-m} \times L_{2,1/\rho}$;
- 3) условие 3) теоремы 1.

Если оператор Q_n есть полиномиальный оператор Лагранжа L_n , построенный по узлам (7), то приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (12), сходятся по норме пространства $W_{2,\rho}^m$ к точному решению задачи (1), (2'). При этом имеет место оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Доказательство. Очевидно, имеем соотношения

$$x^{*(m)}(t) = y(t) - Hhz^{*'}(t),$$

$$x_n^{*(m)}(t) = Q_n[y(t) - Hhz_n^{*'}(t)].$$

Поэтому последовательно найдем

$$\begin{aligned} \|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_{L_{2,\rho}} &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|Hhz^{*'} - Q_n Hhz_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} \cdot \|z^{*'}\|_{L_{2,\rho}} + \|Q_n Hh(z^{*'} - z_n^{*'})\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ &\leq \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + c_1 \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + c_2 \|h\|_{C \times L_{2,1/\rho}} \cdot \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}} = \\ &= O\{\|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}}\}, \end{aligned}$$

где c_1, c_2 – вполне определенные положительные постоянные. Отсюда непосредственно вытекает порядковая оценка

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{\|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} + \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + \|z^{*'} - z_n^{*'}\|_{L_{2,\rho}}\}. \quad (13)$$

В условиях теоремы 5 оператор Q_n есть оператор Лагранжа, построенный по узлам Чебышева первого рода. Поэтому из известных результатов теории приближений следует, что

$$\begin{aligned} \|y - Q_n y\|_{L_{2,\rho}} &= O\{E_n(y)_C\} = O\{E_n(y^{(p-m-1)})_C/n^{p-m-1}\} = \\ &= O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}/n^{p-m-1/2}\} = o\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}}\}; \\ \|h - Q_n^t h\|_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} &= o\{E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\|z^* - z_n^*\|_{W_{2,\rho}^1} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Последние три порядковые оценки вместе с оценкой (13) доказывают справедливость утверждения теоремы 5. $\square$

Теорема 6. Пусть выполнены предположения теоремы 5. Пусть, кроме того, частная производная порядка $p - m - 1$ по переменной t функции $\bar{h}(t, s) \equiv h(t, s) \cdot \sqrt{1 - s^2}$ непрерывна по переменной s равномерно относительно t .

Тогда система уравнений (9), (11) имеет единственное решение $\{c_k^*\}$ при всех n , начиная с некоторого натурального. Приближения $x_n^*(t)$, построенные по формуле (12), сходятся по норме пространства $W_{2,\rho}^m$ к точному решению задачи (1), (2') со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_{2,\rho}^m} = O\{E_n(y^{(p-m)})_{L_{2,\rho}} + E_n^t(\partial^{p-m}h/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}} + E_n^s(\partial^{p-m}\bar{h}/\partial t^{p-m})_{L_{2,\rho} \times L_{2,1/\rho}}\}.$$

Утверждение теоремы 6 следует из известного факта о том, что метод квадратур представляет собой возмущение метода коллокации вполне непрерывным слагаемым.

Замечание 1. Полученные результаты по методам коллокации и механических квадратур сохраняются в случае узлов, являющихся экстремальными точками полинома Чебышева первого рода. Этот результат вытекает из работы [10] по исследованию асимптотических свойств полиномиального оператора Лагранжа, построенного по указанным узлам в первом весовом пространстве Соболева.

Замечание 2. В случае $m = 0$, $p = 1$, т.е. для уравнения (3), в работе [6] доказана оптимальность по порядку точности в первом весовом пространстве Соболева методов Галеркина, моментов и наименьших квадратов.

Замечание 3. В работах [8, 9] для уравнения (3) дано обоснование методов коллокации, подобластей и механических квадратур, построенных по узлам Чебышева первого рода.

Замечание 4. В работе [1] при достаточно жестких предположениях относительно коэффициентов уравнения по внешней переменной (переменной t) в пространстве функций, имеющих p непрерывных производных, обоснован метод механических квадратур решения краевых задач для более общих уравнений вида (2) при $m = 0$. В ней в пространстве p раз непрерывно дифференцируемых функций дано обоснование метода механических квадратур, основанного на квадратурной формуле Эрмита – Чебышева. Однако сходимости метода доказана при жестком условии принадлежности коэффициентов уравнения классу $2p$ раз непрерывно дифференцируемых функций.

Таким образом, предложенный нами способ построения приближений к решению задачи (1) и (2) позволил получить сходимости построенных приближений при естественных требованиях принадлежности коэффициентов уравнения (1) классу $W_{2,\rho}^{p-m}$ по внешней переменной. В случае полиномиальных приближений сходимость удалось показать по норме пространства Соболева $W_{2,\rho}^m$.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Некоторые вопросы теории приближенных методов, II // Изв. вузов. Матем. 1968, № 10. С. 21–29.
2. Кабанikhин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
3. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка и полиномиальные приближения решений краевых задач для условно корректных интегро-дифференциальных уравнений // Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. Обз. М.: ВИНТИ РАН, 2020. Т. 175. С. 69–78.
4. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка и решение краевых задач для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Матер. междуна. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань: Казан. ун-т, изд-во АН РТ, 2016. С. 82–83.
5. Агачев Ю.Р., Першагин М.Ю. Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева // Изв. вузов. Матем. 2017. № 8. С. 80–85.
6. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Оптимизация прямых методов решения одного класса интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. 2003. № 12. С. 31–40.
7. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполяционные полиномы Лагранжа в пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем. 1997. № 5. С. 7–19.
8. Ермолаева Л.Б. О решении некоторых интегродифференциальных уравнений // ММТТ. 2022. № 4. С. 11–15. <https://doi.org/10.52348/2712-8873-ММТТ-2022-4-11>.
9. Ермолаева Л.Б. Решение некоторого интегродифференциального уравнения // Вестн. НГПУ. 2021. № 4 (29). С. 45–48.
10. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. Интерполирование по экстремальным точкам многочленов Чебышева и его применения // Изв. вузов. Матем. 2005. № 5. С. 22–41.

References

1. Gabdulkhaev B.G. Some questions of the theory of approximate methods, II. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1968, no. 10, pp. 21–29. (In Russian)
2. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems]. Novosibirsk, Sib. Nauchn. Izd., 2009. 457 p. (In Russian)
3. Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Well-posedness of boundary-value problems for conditionally well-posed integro-differential equations and polynomial approximations of their solutions. *Itohi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Ee Prilozh. Temat. Obz.*, 2020, vol. 175, pp. 69–78. (In Russian)
4. Agachev J.R., Pershagin M.Yu. Well-posedness and solution of boundary value problems for one class of integro-differential equations. *Mater. Mezhdun. konf. po algebre, analizu i geometrii*. [Proc. Int. Conf. on Algebra, Analysis, and Geometry]. Kazan, Kazan. Univ., Izd. Akad. Nauk RT, 2016, pp. 82–83. (In Russian)
5. Agachev Y.R., Pershagin M.Y. Well-posed integro-differential equations in a new pair of weight-free Sobolev spaces. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 8, pp. 71–75. <https://doi.org/10.3103/S1066369X17080084>.

6. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. Optimization of direct solution methods for a class of integro-differential equations. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 12, pp. 28–37.
7. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. The Lagrange interpolation polynomials in Sobolev spaces. *Russ. Math.*, 1997, vol. 41, no. 5, pp. 4–16.
8. Ermolaeva L.B. On the solution of some integro-differential equations. *MMTT*, 2022, no. 4, pp. 11–15. <https://doi.org/10.52348/2712-8873-MMTT-2022-4-11>. (In Russian)
9. Ermolaeva L.B. Solution of some integro-differential equation. *Vestn. NGPU*, 2021, no. 4 (29), pp. 45–48. (In Russian)
10. Gabdulkhaev B.G., Ermolaeva L.B. Interpolation over extreme points of Chebyshev polynomials and its applications. *Russ. Math.*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 19–37.

Информация об авторах

Юрий Романович Агачев, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Juriy.Agachev@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6640-2721>

Михаил Юрьевич Першагин, старший преподаватель кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Michael.Pershagin@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8473-8851>

Author Information

Juriy R. Agachev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: Juriy.Agachev@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6640-2721>

Mikhail Yu. Pershagin, Senior Lecturer, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: Michael.Pershagin@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8473-8851>

Поступила в редакцию 18.09.2024

Принята к публикации 24.12.2024

Received September 18, 2024

Accepted December 24, 2024

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 533.6.011.7

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.16-29>**Влияние коэффициента теплоотдачи на теплообмен
в цилиндрической вибрирующей полости****А.А. Губайдуллин , А.В. Пяткова***Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Тюмень, Россия**Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Россия* *a.a.gubaidullin@yandex.ru***Аннотация**

Численно исследован теплоперенос в вибрирующей цилиндрической воздушной полости, на стенках которой задан тепловой поток по закону Ньютона – Рихмана. Для описания процесса в осесимметричной постановке использована полная система уравнений Навье – Стокса с постоянными значениями коэффициентов вязкости и теплопроводности. Рассмотрены три характерные частоты вибрации. Определено влияние коэффициента теплоотдачи на распределение температуры в полости. Показано, что при наличии теплообмена через стенки полости вибрация может привести к понижению средней за период температуры в центральной части полости. Для каждой из рассмотренных частот вибрации определены значения коэффициента теплоотдачи, при которых приращение температуры в среднем за период во всей области положительно. Изучено также влияние коэффициента теплоотдачи на направление теплового потока через боковую поверхность полости при разных частотах вибрации.

Ключевые слова: частота вибрации, амплитуда вибрации, цилиндрическая полость, коэффициент теплоотдачи, средняя за период температура, средний за период тепловой поток

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021500017-5).

Для цитирования: Губайдуллин А.А., Пяткова А.В. Влияние коэффициента теплоотдачи на теплообмен в цилиндрической вибрирующей полости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 16–29. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.16-29>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.16-29>

Influence of the heat transfer coefficient on heat transfer in a vibrating cylindrical cavity

A.A. Gubaidullin , A.V. Pyatkova

*Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Tyumen, Russia*

University of Tyumen, Tyumen, Russia

 a.a.gubaidullin@yandex.ru

Abstract

Heat transfer in a vibrating cylindrical air-filled cavity, where the heat flux on the walls is defined by the Newton–Richmann law, was studied numerically. To describe the process in an axisymmetric formulation, the full system of Navier–Stokes equations with constant values of the viscosity and thermal conductivity coefficients was used. Three characteristic vibration frequencies were considered. The influence of the heat transfer coefficient on the temperature distribution in the cavity was investigated. The findings show that when the heat transfer occurs through the cavity walls, vibration can reduce the period average temperature in the central part of the cavity. For each of the considered vibration frequencies, the values of the heat transfer coefficient were determined at which the overall average temperature in the cavity increases. The influence of the heat transfer coefficient on the direction of the heat flux through the side surface of the cavity at different vibration frequencies was analyzed.

Keywords: vibration frequency, vibration amplitude, cylindrical cavity, heat transfer coefficient, period average temperature, period average heat flux

Acknowledgments. This study was carried out as part of state assignment no. 124021500017-5.

For citation: Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V. Influence of the heat transfer coefficient on heat transfer in a vibrating cylindrical cavity. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 16–29.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.16-29>. (In Russian)

Введение

Как известно, вследствие вибрации внутри полости, заполненной сжимаемой средой, создаются вынужденные колебания определенной частоты, которые отражаются в изменении таких характеристик газа, как давление, температура, плотность и скорость. С течением времени процесс выходит на режим установившихся колебаний, при котором собственные колебания, которые наблюдаются в начальной стадии процесса, затухают [1]. Термические граничные условия на стенках полости могут оказывать существенное влияние на волновой процесс. Например, в работе [2] показано влияние учета теплопроводности

сти и зависимости вязкости от температуры при сопоставлении результатов с работой [3]. В свою очередь, вибрация может привести к усилению теплопереноса [4–7]. В [8] описан способ увеличения теплопереноса для случая одиночной трубы или массива труб при помощи акустических волн. В работе [9] выявлены параметры, приводящие к увеличению теплопереноса для случая цилиндрической полости, заполненной воздухом, на одном торце которой находится нагревательный элемент, а другой торец (или часть торца) осуществляет вибрационное движение.

В случае теплоизолированных стенок полости наблюдается нагрев газа в среднем за период времени, что происходит за счёт вязкой диссипации, так как отвод тепла через стенки полости в этом случае отсутствует [10–12]. Если на стенках полости заданы изотермические граничные условия, то распределение средней за период температуры в области может стать неравномерным. В этом случае в центральной части полости находится область пониженной температуры, а вблизи вертикальных стенок (торцов), напротив, происходит повышение средней за период температуры по сравнению с начальной [13–16]. В работе [14] также рассмотрен случай «неконтролируемых» граничных условий, когда на границе задан тепловой поток по закону Ньютона–Рихмана, то есть известны коэффициент теплоотдачи и температура окружающей среды. Отмечены охлаждение горизонтальной стенки полости в центральной части и нагрев вблизи торцов, объяснено влияние термических граничных условий на структуру акустического течения. В работе [17] описано поведение акустического течения при изменении коэффициента теплоотдачи.

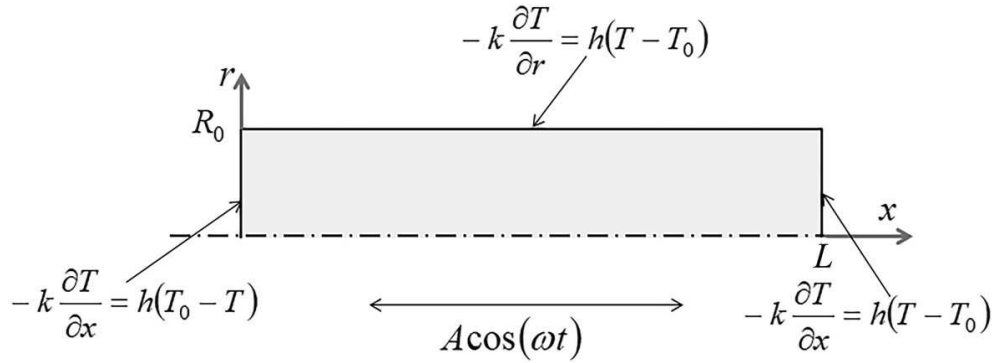
Настоящая работа восполняет пробел в предыдущих исследованиях, а именно, в ней изучен теплоперенос в цилиндрической полости, на стенках которой задан тепловой поток через конвективный теплообмен, то есть известны коэффициент теплоотдачи и температура окружающей среды. Для трех характерных частот вибрации определено влияние коэффициента теплоотдачи на среднюю за период температуру в полости и на тепловой поток через боковую поверхность полости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим полость (рис. 1), представляющую собой цилиндр, закрытый с двух сторон непроницаемыми торцами и подверженный вибрационному воздействию $A \cos(\omega t)$ с постоянной частотой ω и амплитудой A . Пусть внутри полости находится воздух при постоянных давлении p_0 и температуре T_0 , длина цилиндра равна L , а радиус равен R_0 . На всех стенках полости зададим условие прилипания, а термические граничные условия – через закон Ньютона–Рихмана, то есть известны коэффициент теплоотдачи h и температура окружающей среды T_0 .

Задачу будем решать в осесимметричной постановке. Движение сжимаемого газа опишем системой уравнений Навье–Стокса. Уравнения запишем в системе координат, связанной с вибрирующей полостью:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u v}{\partial r} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + \\ &+ \frac{\mu}{3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) + \rho A \omega^2 \cos(\omega t), \end{aligned}$$

**Рис. 1.** Исследуемая область**Fig. 1.** Domain under study

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho v v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) + \\ + \frac{\mu}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) - \frac{4}{3} \frac{\mu v}{r^2}, \\ c_v \frac{\partial \rho T}{\partial t} + c_v \frac{\partial \rho u T}{\partial x} + \frac{c_v}{r} \frac{\partial r \rho v T}{\partial r} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) - \\ - p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r v}{\partial r} \right)^2 + \\ + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{v^2}{r^2} \right), \\ p = \rho R_g T. \end{aligned}$$

Начальные условия:

$$t = 0 : u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_0, \quad p = p_0, \quad \rho = \frac{p_0}{R_g T_0} = \rho_0.$$

Граничные условия:

$$x = 0 : u = 0, \quad v = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T_0 - T),$$

$$x = L : u = 0, \quad v = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = h(T - T_0),$$

$$r = R_0 : u = 0, \quad v = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial r} = h(T - T_0).$$

Здесь t – время, x и r – пространственные координаты, u и v – осевая и радиальная компоненты скорости, p – давление, T – температура, ρ – плотность, μ – коэффициент динамической вязкости, k – коэффициент теплопроводности, R_g – газовая постоянная, h – коэффициент теплоотдачи, c_v – удельная теплоёмкость при постоянном объёме.

Перейдем к безразмерным переменным: $X = \frac{x}{L}$, $R = \frac{r}{L}$ – безразмерные координаты, $\tau = \frac{tc_0}{L}$ – безразмерное время (где c_0 – скорость звука), $\Theta = \frac{T-T_0}{T_0}$ – безразмерная температура, $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ – безразмерная плотность, $P = \frac{p}{\gamma p_0}$ – безразмерное давление, $U = \frac{u}{c_0}$ – безразмерная осевая составляющая скорости, $V = \frac{v}{c_0}$ – безразмерная радиальная составляющая скорости, $\Omega = \frac{\omega L}{c_0}$ – безразмерная частота вибрации, $\tilde{A} = \frac{A}{L}$ – безразмерная амплитуда вибрации, $H = \frac{hL}{k}$ – безразмерный коэффициент теплоотдачи, $\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{L}$ – безразмерный радиус полости, γ – показатель адиабаты, а $\Gamma = \frac{k}{\rho_0 c_0 c_v L}$ – безразмерный коэффициент теплопроводности.

2. Численная реализация и параметры расчетов

Для дискретизации системы уравнений применим метод контрольного объёма и неявную численную схему. Для аппроксимации конвективно-диффузионных потоков возьмем схему со степенным законом [18]. Используем смещенную (шахматную) расчетную сетку, в которой компоненты скорости U и V вычислим на гранях основных контрольных объемов. В расчетных точках, расположенных в центре основных контрольных объемов, рассчитаем температуру Θ , плотность $\tilde{\rho}$ и давление P . Пример расчетной сетки приведен на рис. 2, где крестиками обозначены расчетные точки для компонент скорости. Компоненты потока массы $\tilde{\rho}U$ и $\tilde{\rho}V$ вычислены также в узлах смещенной расчетной сетки. Более подробно алгоритм и методика расчета описаны в работе [15].

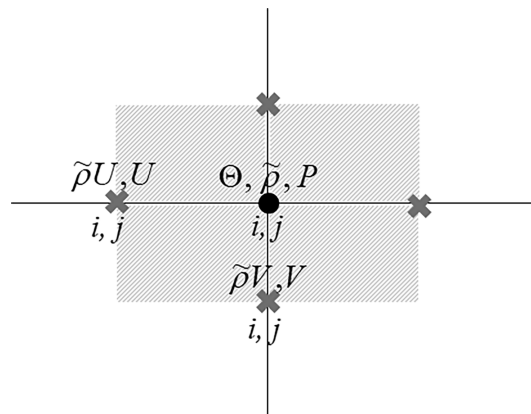


Рис. 2. Пример расчетной сетки

Fig. 2. Example of the computational grid

В приведенных ниже расчетах теплофизические характеристики соответствуют свойствам воздуха при температуре 300 К, при этом размерная длина полости составляет 0.005 м. Рассмотрим следующие частоты вибрации $\Omega = 0.5, 1, 2$, они соответствуют разной степени проявления нелинейности процесса. Безразмерная резонансная частота системы Ω_0 приближенно равна π . Зададим амплитуду вибрации $\tilde{A} = 0.01$, а радиус полости $\tilde{R}_0 = 0.02$. Значения коэффициента теплоотдачи возьмём следующими: $H = 0, 1, 5, 10, 20, 50, 100, 500, 10000$ для $\Omega = 0.5$; $H = 0, 1, 10, 30, 40, 50, 100, 500, 10000$ для $\Omega = 1$; $H = 0, 1, 50, 100, 170, 200, 300, 500, 10000$ для $\Omega = 2$. Расчетная сетка состоит из 1002×32 расчетных точек, при этом шаг по времени рассчитан как $\Delta\tau = 0.2\Delta X$.

3. Анализ полученных результатов

После начала движения полости в газе происходит сложное волновое движение, при котором присутствуют как свободные колебания, так и вынужденные колебания с частотой внешнего воздействия. С течением времени происходит выход на режим установившихся колебаний. При таком режиме картина течения будет повторяться с периодом, равным периоду внешнего воздействия на полость. При этом в моменты наибольшего отклонения полости от центрального положения происходит увеличение давления, плотности и температуры у одного торца (более удаленного от центрального положения полости) и уменьшение у противоположного торца. В центре полости значения данных характеристик изменяются за период внешнего воздействия гораздо менее заметно. Продольная составляющая скорости, напротив, достигает максимальных по модулю значений в центральной части полости, а на стенках сохраняются нулевые значения за счет условия прилипания, так как система координат связана с полостью. На рис. 3 показаны поля температуры в момент наибольшего отклонения полости вправо в режиме установившихся колебаний на примере частоты $\Omega = 1$. При малом коэффициенте теплоотдачи $H = 1$ распределение температуры близко к случаю адиабатических граничных условий ($H = 0$), и она практически постоянна в каждом радиальном сечении. При увеличении коэффициента теплоотдачи изолинии температуры изменяются. При максимальном из рассмотренных коэффициентов теплоотдачи $H = 10000$ поле температуры близко к изотермическому случаю, когда на стенках полости задана постоянная температура.

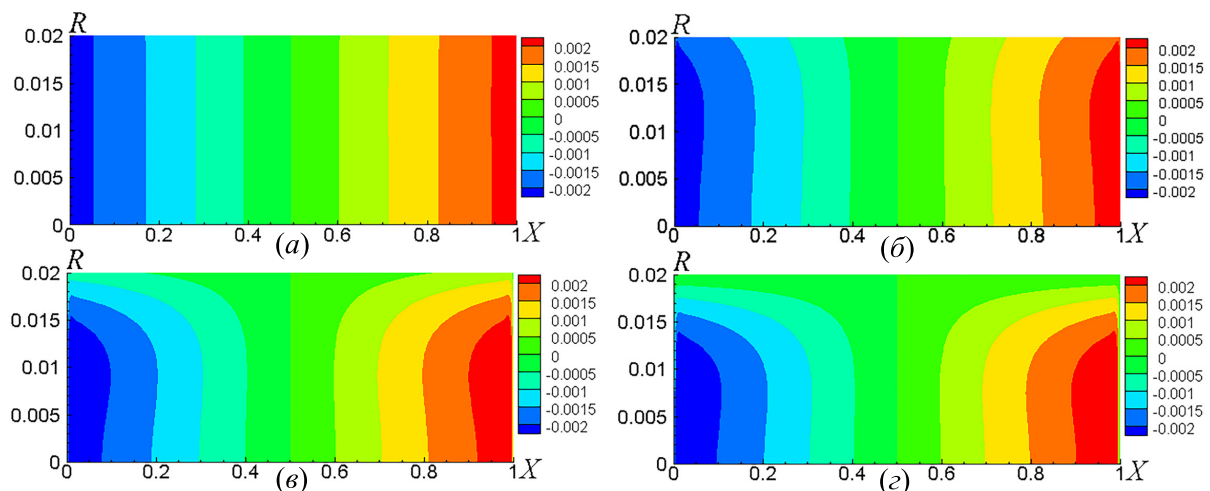


Рис. 3. Распределение температуры в момент наибольшего отклонения полости вправо при $\Omega = 1$ и $H = 1$ (а), $H = 50$ (б), $H = 500$ (в), $H = 10000$ (г)

Fig. 3. Temperature distribution at the moment of the maximum displacement of the cavity to the right at $\Omega = 1$ and $H = 1$ (a), $H = 50$ (b), $H = 500$ (c), $H = 10000$ (d)

В случае большого коэффициента теплоотдачи $H = 10000$ (близком к случаю изотермических граничных условий) можно провести сопоставление результатов с приближенным аналитическим решением [2], которое справедливо в случае, когда нет сильного проявления нелинейных эффектов. Возьмем для сравнения распределение температуры вдоль радиуса при $X = 0.9$ в момент наибольшего отклонения полости вправо. На рис. 4 видно, что численное решение хорошо согласуется с аналитическим на примере частот

вибрации $\Omega = 0.5$ и $\Omega = 2$. Отметим, что если при меньшей частоте $\Omega = 0.5$ максимальное значение температуры наблюдалось на оси симметрии полости, то при частоте $\Omega = 2$ максимальное значение температуры в данном сечении находится ближе к боковой поверхности. Также на данном рисунке показано изменение распределения температуры вдоль радиуса при уменьшении коэффициента теплоотдачи. Можно увидеть, что уменьшение коэффициента теплоотдачи приводит к уменьшению перепада температур вдоль радиуса таким образом, что температура вблизи боковой поверхности полости увеличивается, а температура в центральной части полости уменьшается, что более заметно в случае $\Omega = 0.5$.

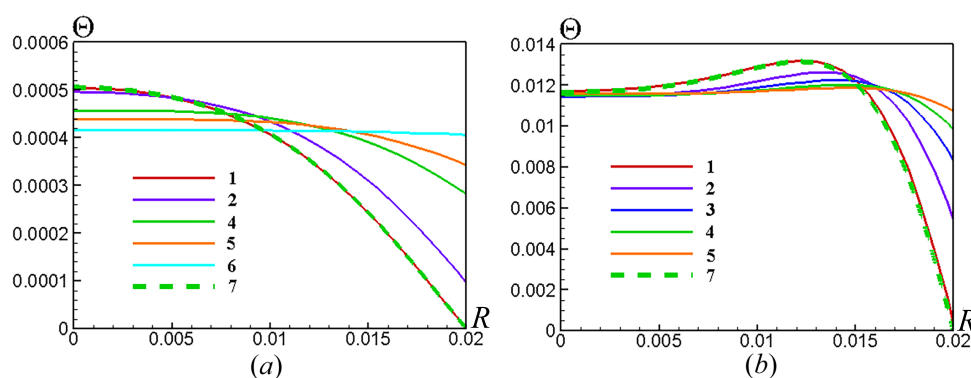


Рис. 4. Распределение температуры вдоль радиальной координаты при $X = 0.9$ и $\Omega = 0.5$ (а), $\Omega = 2$ (б); 1 – $H = 10000$, 2 – $H = 500$, 3 – $H = 200$, 4 – $H = 100$, 5 – $H = 50$, 6 – $H = 20$, 7 – аналитическое решение [2]

Fig. 4. Temperature distribution along the radial coordinate at $X = 0.9$ and $\Omega = 0.5$ (a), $\Omega = 2$ (b); 1 – $H = 10000$, 2 – $H = 500$, 3 – $H = 200$, 4 – $H = 100$, 5 – $H = 50$, 6 – $H = 20$, 7 – analytical solution [2]

Вибрация полости приводит к нагреву газа внутри нее, что объясняется наличием вязкой диссипации. Если коэффициент теплоотдачи $H = 0$, то тепло не может покинуть полость через стенки, и происходит нагрев газа в среднем за период, что показано на рис. 5 для разных частот вибрации на примере изменения температуры с течением времени в центре полости. При увеличении коэффициента теплоотдачи до $H = 1$ средняя за период температура продолжает увеличиваться с течением времени, но с меньшей скоростью, поскольку частично тепло в этом случае выходит через границы. Так как воздействие на полость является более интенсивным при большей частоте вибрации, то и более выражен нагрев газа. На рис. 5 для каждой частоты вибрации подобраны случаи, когда не происходит неограниченного повышения средней за период температуры. Если для $\Omega = 0.5$ достаточно увеличить коэффициент теплоотдачи до $H = 3$, то для $\Omega = 1$ нагрев будет компенсироваться при тепловом потоке на границах при $H = 10$, а для $\Omega = 2$ – при $H = 50$. Можно также заметить, что при таких значениях коэффициента теплоотдачи среднее за период значение температуры в центре области в режиме установившихся колебаний превышает начальную температуру газа.

Рассмотрим поля средней за период температуры на примере частоты $\Omega = 2$ (рис. 6). При большом коэффициенте теплоотдачи $H = 10000$, близком к случаю изотермических граничных условий, в центре полости образуется область, где температура в среднем за период становится ниже начальной температуры, наоборот, вблизи торцов виден нагрев

газа в среднем за период. При уменьшении коэффициента теплоотдачи область отрицательной безразмерной температуры уменьшается в размерах, также снижается значение максимальной средней за период температуры в области. При $H = 170$ область отрицательной температуры исчезает совсем, во всей расчетной области температура в среднем за период больше либо равна начальной температуре. При дальнейшем уменьшении коэффициента теплоотдачи средняя за период температура в полости всё более выравнивается, а при $H = 50$ средняя за период температура в центральной части полости уже становится больше, чем средняя за период температура вблизи торцов. И для других исследуемых частот вибрации были установлены значения коэффициента теплоотдачи, начиная с которых при дальнейшем их уменьшении средняя за период температура в полости становится положительной. Так, для частоты $\Omega = 1$ получено значение коэффициента теплоотдачи $H = 30$, а для $\Omega = 0.5$ – $H = 5$.

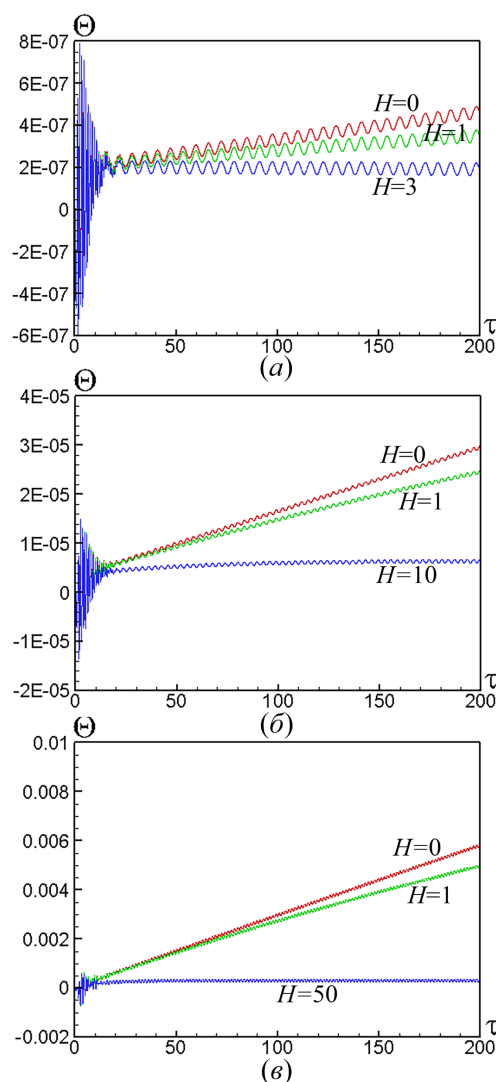


Рис. 5. Изменение температуры с течением времени в центре полости при $X = 0.5$, $R = 0$ и $\Omega = 0.5$ (a), $\Omega = 1$ (б), $\Omega = 2$ (в)

Fig. 5. Temperature variations over time in the central part of the cavity at $X = 0.5$, $R = 0$, and $\Omega = 0.5$ (a), $\Omega = 1$ (b), $\Omega = 2$ (c)

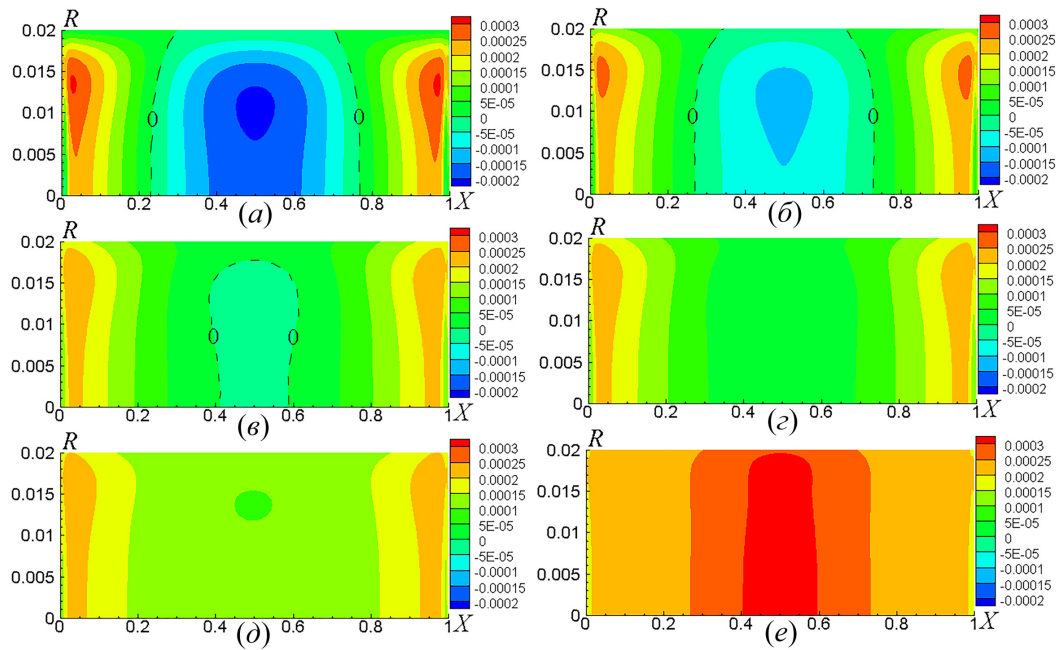


Рис. 6. Распределение средней за период температуры при $\Omega = 2$ и $H = 10000$ (а), $H = 500$ (б), $H = 200$ (в), $H = 170$ (г), $H = 100$ (д), $H = 50$ (е)

Fig. 6. Period average temperature distribution at $\Omega = 2$ and $H = 10000$ (a), $H = 500$ (b), $H = 200$ (c), $H = 170$ (d), $H = 100$ (e), $H = 50$ (f)

Проанализировав особенности распределения в полости средней за период температуры, можно заключить, что при больших значениях коэффициента теплоотдачи в центральной части боковой поверхности полости присутствует область, в которой тепловой поток в среднем за период отрицательный, то есть тепло в среднем за период поступает внутрь полости. Для подтверждения этого вывода рассмотрим поведение теплового потока, используя следующую формулу для его вычисления:

$$Q = -\Gamma \frac{\partial \Theta}{\partial R} \Big|_{R=\tilde{R}_0}.$$

Результаты вычислений представлены на рис. 7, где приведены зависимости теплового потока, среднего по временному периоду $\frac{2\pi}{\Omega}$, от продольной координаты для различных значений частоты и коэффициента теплоотдачи. Видно, что для всех трех частот на боковой поверхности есть область, где тепловой поток отрицательный. Размер этой области зависит от частоты и коэффициента теплоотдачи. Но для каждой частоты вибрации можно подобрать такое значение коэффициента теплоотдачи, что при его дальнейшем уменьшении тепловой поток будет положительным на всей боковой поверхности полости, то есть тепло будет выходить из полости наружу. Это может быть полезно, например, если требуется увеличить перенос тепла в среднем за период по всей боковой поверхности, а не в среднем по поверхности, хотя нужно учитывать, что при малых значениях коэффициента теплоотдачи тепловой поток становится малым. Установлено, что при частотах вибрации $\Omega = 0.5$ и $\Omega = 1$ характерные значения коэффициента теплоотдачи равны $H = 5$ и $H = 30$ соответственно. При $\Omega = 2$ такое значение коэффициента теплоотдачи составляет $H = 200$. В отличие от двух других частот в этом случае в центральной части области

температура может быть ниже начальной, но тепловой поток через боковую поверхность цилиндра при этом положителен.

Заметим (рис. 7), что для каждой частоты вибрации на боковой поверхности есть две точки, в которых значение теплового потока положительно и остается постоянным при изменении H . Этот эффект требует дальнейших исследований.

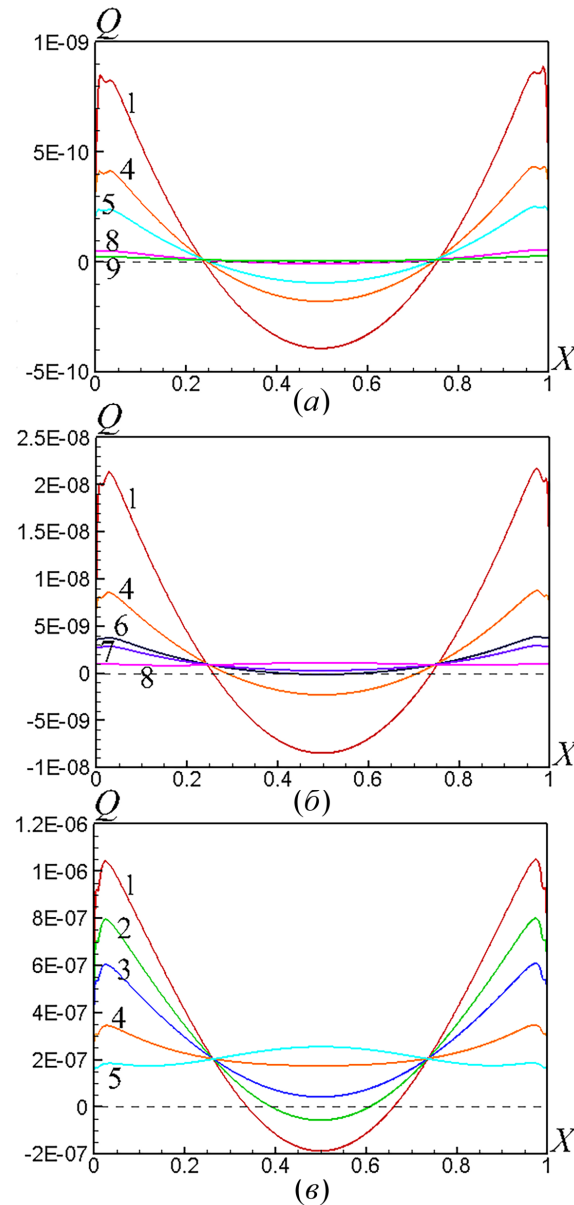


Рис. 7. Средний за период тепловой поток через боковую поверхность полости при $\Omega = 0.5$ (а), $\Omega = 1$ (б), $\Omega = 2$ (в); 1 – $H = 500$, 2 – $H = 300$, 3 – $H = 200$, 4 – $H = 100$, 5 – $H = 50$, 6 – $H = 40$, 7 – $H = 30$, 8 – $H = 10$, 9 – $H = 5$

Fig. 7. Period average heat flux through the side surface of the cavity at $\Omega = 0.5$ (a), $\Omega = 1$ (b), $\Omega = 2$ (c); 1 – $H = 500$, 2 – $H = 300$, 3 – $H = 200$, 4 – $H = 100$, 5 – $H = 50$, 6 – $H = 40$, 7 – $H = 30$, 8 – $H = 10$, 9 – $H = 5$

Заключение

Исследована задача определения влияния коэффициента теплоотдачи на теплоперенос в вибрирующей цилиндрической полости при трёх характерных частотах вибрации. Выявлены значения коэффициента теплоотдачи, при которых средняя за период температура в режиме установившихся колебаний во всей полости выше начальной. Также установлены значения коэффициента теплоотдачи, при которых в режиме установившихся колебаний в среднем за период тепло выходит из полости по всей ее боковой поверхности.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
2. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Thermal effects on acoustic streaming in standing waves // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 114, No 6. P. 3092–3101. <https://doi.org/10.1121/1.1618752>.
3. *Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A.* Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No 1. P. 153–160. <https://doi.org/10.1121/1.1528928>.
4. *Fu W.S., Shieh W.J.* A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration // Int. J. Heat Mass Transfer. 1992. V. 35, No 7. P. 1695–1710. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(92\)90140-N](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90140-N).
5. *Aktas M.K., Ozgumus T.* The effects of acoustic streaming on thermal convection in an enclosure with differentially heated horizontal walls // Int. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53, Nos 23–24. P. 5289–5297. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.028>.
6. *Kim K.H., Hyan J.M., Kwak H.S.* Buoyant convection in a side-heated cavity under gravity and oscillations // Int. J. Heat Mass Transfer. 2001. V. 44, No 4. P. 857–861. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00142-3](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00142-3).
7. *Lafta H.D., Mohammed D.O.* Experimental investigation of heat transfer enhancement in a double pipe heat exchanger using compound technique of transverse vibration and inclination angle // J. Eng. 2023. V. 29, No 5. P. 90–105. <https://doi.org/10.31026/j.eng.2023.05.07>.
8. *Liu Y., Jiang G., Yang Y., Kong Q., Jiang Y.* Numerical simulation on acoustic streaming characteristics in boiler tube array // Int. J. Heat Mass Transfer. 2022. V. 193. Art. 122834. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122834>.
9. *Talebi M., Setareh M., Saffar-Avval M., Abardeh R.H.* Numerical investigation of natural convection heat transfer in a cylindrical enclosure due to ultrasonic vibrations // Ultrasonics. 2017. V. 76. P. 52–62. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.12.010>.
10. *Gubaidullin A.A., Yakovenko A.V.* Effects of heat exchange and nonlinearity on acoustic streaming in a vibrating cylindrical cavity // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 137, No 6. P. 3281–3287. <https://doi.org/10.1121/1.4921292>.
11. *Pyatkova A.V., Gubaidullin A.A.* Acoustic streaming and temperature field in the cavity with isothermal and adiabatic boundary conditions at the ends // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, No 11. P. 1994–1999. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110234>.

12. *Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T.* Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube // *J. Sound Vib.* 1996. V. 195, No 3. P. 359–374. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0431>.
13. *Daru V., Baltean-Carlès D., Weisman C., Debesse P., Gandikota G.* Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves // *Wave Motion*. 2013. V. 50, No 5. P. 955–963. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.03.004>.
14. *Daru V., Weisman C., Baltean-Carlès D., Bailliet H.* Acoustically induced thermal effects on Rayleigh streaming // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 911. Art. A7. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.996>.
15. *Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V.* The effects of heat transfer through the ends of a cylindrical cavity on acoustic streaming and gas temperature // *Mathematics*. 2023. V. 11, No 8. Art. 1840. <https://doi.org/10.3390/math11081840>.
16. *Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V.* Specificities of heat transfer in a vibrating cylindrical cavity at the transition of the exposure frequency through resonance // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 5. P. 1069–1075. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080121>.
17. *Губайдуллин А.А., Пяткова А.В.* Акустическое течение при термических граничных условиях 3-го рода // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64, № 3. С. 289–295.
18. *Patankar S.V.* Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Ser. in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences / Ed. by W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow. Washington, DC, New York, NY, London: Hemisphere, 1980. xiii, 197 p.

References

1. Isakovich M.A. *Obshchaya akustika* [General Acoustics]. Moscow, Nauka, 1973. 496 p. (In Russian)
2. Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A. Thermal effects on acoustic streaming in standing waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 114, no. 6, pp. 3092–3101. <https://doi.org/10.1121/1.1618752>.
3. Hamilton M.F., Ilinskii Y.A., Zabolotskaya E.A. Acoustic streaming generated by standing waves in two-dimensional channels of arbitrary width. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 113, no. 1, pp. 153–160. <https://doi.org/10.1121/1.1528928>.
4. Fu W.S., Shieh W.J. A study of thermal convection in an enclosure induced simultaneously by gravity and vibration. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1992, vol. 35, no. 7, pp. 1695–1710. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(92\)90140-N](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90140-N).
5. Aktas M.K., Ozgumus T. The effects of acoustic streaming on thermal convection in an enclosure with differentially heated horizontal walls. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2010, vol. 53, nos. 23–24, pp. 5289–5297. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.028>.
6. Kim K.H., Hyan J.M., Kwak H.S. Buoyant convection in a side-heated cavity under gravity and oscillations. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2001, vol. 44, no. 4, pp. 857–861. [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00142-3](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00142-3).
7. Lafta H.D., Mohammed D.O. Experimental investigation of heat transfer enhancement in a double pipe heat exchanger using compound technique of transverse vibration and inclination angle. *J. Eng.*, 2023, vol. 29, no. 5, pp. 90–105. <https://doi.org/10.31026/j.eng.2023.05.07>.

8. Liu Y., Jiang G., Yang Y., Kong Q., Jiang Y. Numerical simulation on acoustic streaming characteristics in boiler tube array. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2022, vol. 193, art. 122834. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.122834>.
9. Talebi M., Setareh M., Saffar-Avval M., Abardeh R.H. Numerical investigation of natural convection heat transfer in a cylindrical enclosure due to ultrasonic vibrations. *Ultrasonics*, 2017, vol. 76, pp. 52–62. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2016.12.010>.
10. Gubaidullin A.A., Yakovenko A.V. Effects of heat exchange and nonlinearity on acoustic streaming in a vibrating cylindrical cavity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2015, vol. 137, no. 6, pp. 3281–3287. <https://doi.org/10.1121/1.4921292>.
11. Pyatkova A.V., Gubaidullin A.A. Acoustic streaming and temperature field in the cavity with isothermal and adiabatic boundary conditions at the ends. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1994–1999. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110234>.
12. Aganin A.A., Ilgamov M.A., Smirnova E.T. Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube. *J. Sound Vib.*, 1996, vol. 195, no. 3, pp. 359–374. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0431>.
13. Daru V., Baltean-Carlès D., Weisman C., Debesse P., Gandikota G. Two-dimensional numerical simulations of nonlinear acoustic streaming in standing waves. *Wave Motion*, 2013, vol. 50, no. 5, pp. 955–963. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2013.03.004>.
14. Daru V., Weisman C., Baltean-Carlès D., Bailliet H. Acoustically induced thermal effects on Rayleigh streaming. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 911, art. A7. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.996>.
15. Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V. The effects of heat transfer through the ends of a cylindrical cavity on acoustic streaming and gas temperature. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 8, art. 1840. <https://doi.org/10.3390/math11081840>.
16. Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V. Specificities of heat transfer in a vibrating cylindrical cavity at the transition of the exposure frequency through resonance. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1069–1075. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080121>.
17. Gubaidullin A.A., Pyatkova A.V. Acoustic streaming under thermal boundary conditions of the third kind. *Acoust. Phys.*, 2018, vol. 64, no. 3, pp. 280–286. <https://doi.org/10.1134/S1063771018030077>.
18. Patankar S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Ser. in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Minkowycz W.J., Sparrow E.M. (Eds.). Washington, DC, New York, NY, London, Hemisphere, 1980. xiii, 197 p.

Информация об авторах

Амир Анварович Губайдуллин, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук; профессор кафедры прикладной и технической физики, Тюменский государственный университет

E-mail: a.a.gubaidullin@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6231-6508>

Анна Владимировна Пяткова, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича Сибирского отделения Российской академии наук; доцент кафедры фундаментальной математики и механики, Тюменский государственный университет

E-mail: annyakovenko@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2515-8501>

Author Information

Amir A. Gubaidullin, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Leading Researcher, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences; Full Professor, Department of Applied and Technical Physics, University of Tyumen

E-mail: a.a.gubaidullin@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6231-6508>

Anna V. Pyatkova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Researcher, Tyumen Branch of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences; Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics and Mechanics, University of Tyumen

E-mail: annyakovenko@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2515-8501>

Поступила в редакцию 16.06.2024

Принята к публикации 28.07.2024

Received June 16, 2024

Accepted July 28, 2024

ORIGINAL ARTICLE

UDC 535.371

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.30-37>

This article is dedicated to the memory of Chief Warrant Officer Gazinur Z. Kiiamov (1954–2024), Head of the Fuel and Lubricants Service Unit at the Plesetsk Cosmodrome.

On the efficiency of Mg/Nb diboride solid solution in enhancing the thermal stability of MgB_2 superconductor

A.G. Kiiamov ✉, M.D. Kuznetsov

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ airatphd@kazanfederaluniversity.ru

Abstract

A comparative analysis of the thermal stability of Mg/Nb diboride solid solution and pure MgB_2 was carried out. The specific heat capacity of these materials below the critical temperature of MgB_2 , which is an essential characteristic for assessing their thermal stability, was evaluated. Based on the *ab initio* calculations of the phonon density of states for both compounds, it was demonstrated that $MgNbB_4$ is characterized by a higher phonon density of states in the frequency range of 5–7.5 THz compared with MgB_2 . $MgNbB_4$ was also found to exhibit a higher heat absorbing capacity at low temperatures. The specific heat capacity of $MgNbB_4$ at low temperatures exceeds that of MgB_2 by 50 %, thus indicating its better thermal stability. The potential of $MgNbB_4$ solid solution for practical application in superconducting wires made of MgB_2 was outlined.

Keywords: superconductivity, magnesium diboride, phonon

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-72-10088).

For citation: Kiiamov A.G., Kuznetsov M.D. On the efficiency of Mg/Nb diboride solid solution in enhancing the thermal stability of MgB_2 superconductor. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 30–37. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.30-37>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 535.371

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.30-37>

Настоящая статья посвящена памяти
начальника подразделения службы
горюче-смазочных материалов космодрома
Плесецк — старшего прапорщика
Газинура Загировича Киямова (1954–2024).

Об эффективности твердого раствора диборида Mg/Nb в обеспечении термической стабильности сверхпроводника MgB_2

А.Г. Киямов , М.Д. Кузнецов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

 airatphd@kazanfederaluniversity.ru

Аннотация

Представлен сравнительный анализ термической стабильности твёрдого раствора диборида магния-ниобия (Mg/Nb) и типичного MgB_2 . Исследована удельная теплоёмкость этих материалов ниже критической температуры MgB_2 , которая является важным параметром при оценке их термической стабильности в сверхпроводящем режиме. На основе *ab initio* расчётов колебательных свойств и теплоёмкости для обоих соединений показано, что $MgNbB_4$ имеет более высокую плотность фононных состояний в диапазоне частот 5–7.5 ТГц по сравнению с MgB_2 , что свидетельствует о его повышенной теплоёмкости при низких температурах. Установлено, что при низких температурах удельная теплоёмкость $MgNbB_4$ превышает таковую для чистого MgB_2 на 50 %, благодаря чему твёрдый раствор проявляет более высокую термическую стабильность. Отмечается высокий потенциал твёрдого раствора $MgNbB_4$ для практического применения, например, в составе сверхпроводящих проводников на базе MgB_2 .

Ключевые слова: сверхпроводимость, диборид магния, фонон

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-72-10088).

Для цитирования: Киямов А.Г., Кузнецов М.Д. Об эффективности твердого раствора диборида Mg/Nb в обеспечении термической стабильности сверхпроводника MgB_2 // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 30–37.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.30-37>.

Introduction

The discovery of superconductivity in magnesium diboride (MgB_2) marked a major breakthrough in condensed matter physics [1]. Since its identification as a superconductor in 2001 [2], this simple binary compound has attracted much attention due to its high critical temperature ($T_c=39$ K) making it one of the most promising candidates for practical application in superconducting technology [3].

Searching for materials with tailored properties is a fundamental task of modern solid-state physics, which is driven by the need to deepen our understanding of matter. This also involves the modification and enhancement of existing materials.

The performance of superconductors is largely determined by the critical temperature of phase transition, i.e., superconductivity is temperature-dependent. Superconductors requiring higher temperatures are more practical. Therefore, most research efforts in superconductivity focus on finding materials that become superconductive at increasingly higher temperatures. However, while the pursuit of higher transition temperatures remains a central objective, and a challenge as well, it is important to emphasize that the practical applicability of superconductors is not exclusively defined by this property. Instead, researchers have gradually become more active in developing materials that are both technologically viable and easily accessible, ensuring that they possess a combination of properties optimal for real-world applications. These initiatives have arisen from the awareness that, for many practical purposes, a modest increase in the transition temperature may not justify sacrificing other beneficial characteristics, such as thermal stability, mechanical robustness, ease of fabrication, or accessibility. A reduction in one property, such as the transition temperature, can be acceptable and reasonable if it leads to a significant improvement in other critical characteristics. Hence, a more complex perspective is needed to comprehensively evaluate superconductors in terms of their potential use. It would bring substantial progress in the field, advancing the frontiers of superconducting technology. Prioritizing the utility and practical viability of superconducting materials over striving for higher transition temperatures opens the way for transformative advancements in materials science and the application of superconductors in industry.

When exposed to varying temperatures in the superconducting regime, Mg/Nb diboride solid solutions exhibit high thermal stability, which explains their efficiency as superconducting candidates. The thermal stability of a material is defined by its specific heat capacity, which is the energy demand of a substance as the temperature rises. Materials with a higher specific heat capacity absorb more thermal energy with minimal temperature fluctuations under the impact of heat and are thus more resistant to thermal variations. Ensuring the thermal stability of superconductors is an important aspect of their successful application. The temperature should be maintained below its critical point value. Otherwise, a superconductor may lose its superconducting properties: temperature fluctuations can degrade the performance of superconductors or even destroy the superconducting state. A higher specific heat capacity below the critical temperature enhances the thermal inertia of a superconductor. This effect can be interpreted as an expansion of the thermal reservoir, providing an additional mechanism to improve the thermal stability of a superconductor.

Most superconductors are non-magnetic compounds. Their specific heat capacity at low temperatures is affected by atomic oscillations, commonly described in terms of phonon quasi-particles. The dependence of the specific heat capacity on temperature can be manipulated by changing the phonon density of states.

When phonon frequencies shift to lower values, the specific heat capacity of a superconductor at lower temperatures increases. It absorbs more heat before the critical point is reached at which it stops being superconducting. As a result, the superconductor becomes more thermally stable, and the risk of accidental quench (a sudden loss of superconductivity) is reduced because it can handle more unexpected heat loads without failing.

$MgNbB_4$ is considered here to be a promising candidate for developing a MgB_2 analog with higher specific heat values below the critical temperature. Both compounds have a similar crystal structure with nearly identical lattice symmetry and close lattice constant values [4].

MgB_2 and NbB_2 have different critical temperature values, and the exact critical temperature of $MgNbB_4$ solid solution is unknown. However, even if the critical temperature of $MgNbB_4$ solid solution is extremely low, it can still be used as an extra layer on the MgB_2 tape or in any other configuration, such as in a checkerboard-type pattern of long bars. Since these compounds have nearly identical lattice constants, creating such composites seems feasible. The structural similarities of $MgNbB_4$ and MgB_2 also suggest that high-quality interfaces can be achieved on the surface of that compound.

The purpose of this study is to explore the thermal stability of Mg/Nb diboride solid solution and MgB_2 and identify the potential for practical application of $MgNbB_4$ solid solution, such as in superconducting wires.

1. Methods

The vibrational properties of MgB_2 and $MgNbB_4$ were determined by *ab initio* calculations of the phonon density of states (DOS). The density functional theory calculations were performed using the *Vienna ab initio simulation package* (VASP) within the *MedeA* software [5]. The phonon DOS was analyzed through a *direct approach* of harmonic approximation. The *direct approach* to studying the lattice dynamics was based on the *ab initio* evaluation of the forces acting on all atoms through a set of finite displacements of a few atoms within an otherwise perfect crystal [6].

The exchange and correlation effects were described by the generalized gradient approximation as parameterized by Perdew, Burke, and Ernzerhof. The Kohn–Sham equations were solved using projector-augmented wave potentials and wave functions. The plane-wave cutoff was set to 500 eV. The energy tolerance for the self-consistency loop was equal to 10^{-7} eV. The Brillouin zone was sampled on Monkhorst-Pack grids with 0.25 points per Å. Equilibrium geometry was obtained after several rounds of full structural relaxation including atomic positions, cell shape, and cell volume.

2. Results and Discussion

Fig. 1. shows the calculated phonon DOS for MgB_2 and $MgNbB_4$. Both compounds exhibit a complex structure with multiple peaks. In terms of partial atomic contributions, the PDOS can be divided into two distinct regions. Low-energy oscillations (up to 10 THz) are induced by the *Mg* and *Nb* modes in both pure MgB_2 and $MgNbB_4$. In $MgNbB_4$, the first phonon DOS peak (up to 7.5 THz) originates from *Nb* ions, while the next peaks (from 7.5 to 10 THz) correspond entirely to the *Mg* modes. High-energy oscillations (from 10 to 27 THz) for both compounds consist only of the *B* modes. This study is focused on the low-temperature thermal behavior of MgB_2 and $MgNbB_4$, so the changes in the high-frequency range are not relevant to us.

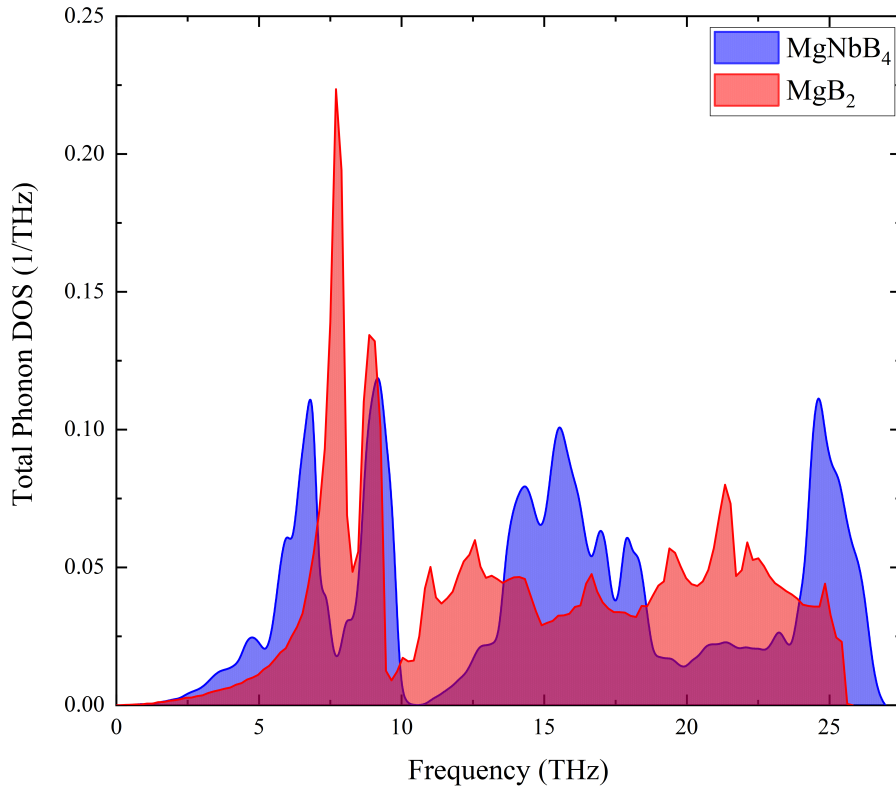


Fig. 1. Calculated phonon density of states as a function of frequency. Red color – pure MgB_2 , blue color – $MgNbB_4$

A side-by-side comparison of the low-frequency regions for MgB_2 and $MgNbB_4$ reveals that the first peak in the phonon DOS of $MgNbB_4$ occurs at frequencies lower than those of MgB_2 . This observation suggests that $MgNbB_4$ is likely to have a higher heat absorbing capacity at low temperatures compared with MgB_2 .

To test this hypothesis, the lattice term for the specific heat of MgB_2 and $MgNbB_4$ was determined using the calculated phonon DOS, as expressed in the following equation:

$$C = Dk_B \int g(\omega) \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right)^2 \frac{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)^2} d\omega,$$

where D stands for the degrees of freedom in a unit cell, $g(\omega)$ is the phonon DOS. See [7] for more details. The calculated lattice specific heat C_v^L for MgB_2 and $MgNbB_4$ is given in Fig. 2.

Fig. 2 illustrates that, in the low-temperature range, the lattice contribution to specific heat follows a cubic trend in temperature, as predicted by the Debye theory, for both MgB_2 and $MgNbB_4$.

Due to the higher phonon DOS of the $MgNbB_4$ in the low-frequency range (Fig. 1), its specific heat capacity at low temperatures is higher than that of pure MgB_2 (Fig. 2, blue region). This trend continues up to 100 K, where the two curves intersect. With further increase in temperature, the heat capacity of pure MgB_2 exceeds that of $MgNbB_4$. The integration of $C_v^L(T)$ from 0 to 39 K (the critical temperature of MgB_2) yields the heat values of

$\Delta Q_{MgB_2}^L = 3.2 \text{ J/mol}$ and $\Delta Q_{MgNbB_4}^L = 4.8 \text{ J/mol}$ for MgB_2 and $MgNbB_4$, respectively. Taking in account the molar weights and densities of both compounds, the heat values ΔQ can also be expressed per volume unit (the density of $MgNbB_4$ was estimated as an arithmetic mean of MgB_2 and NbB_2 densities). Thus, $\Delta Q_{MgB_2}^L = 0.18 \text{ J/cm}^3$ and $\Delta Q_{MgNbB_4}^L = 0.27 \text{ J/cm}^3$ for MgB_2 and $MgNbB_4$, respectively.

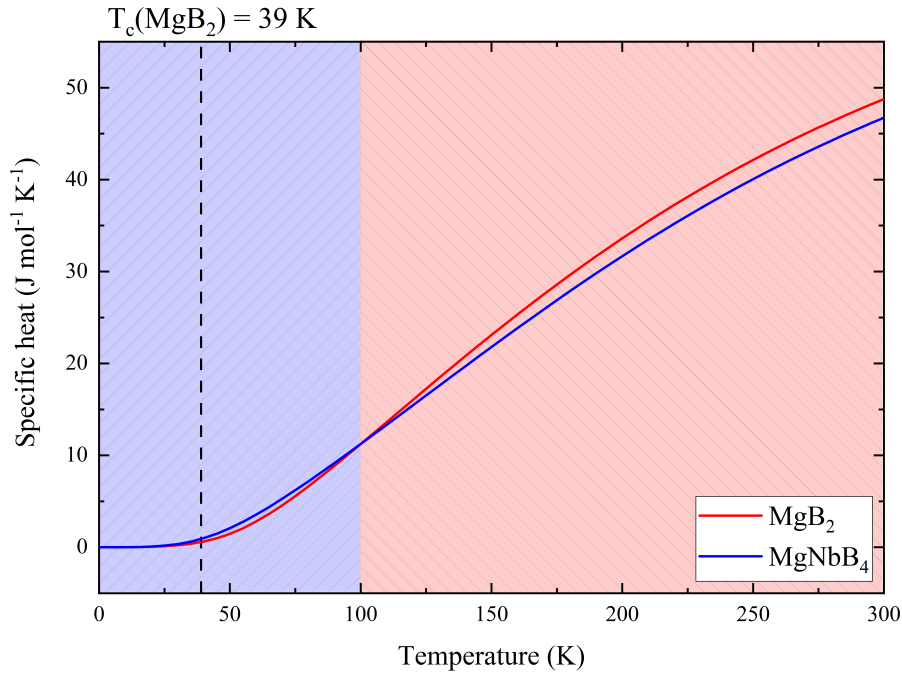


Fig. 2. Temperature dependencies of the calculated lattice specific heats $C_v^L(T)$ for MgB_2 and $MgNbB_4$

Therefore, the ability of $MgNbB_4$ to function as a heat reservoir before reaching its superconducting phase transition temperature is 50 % greater compared to MgB_2 in equal volume.

Conclusions

A comparative analysis of the thermal properties exhibited by $MgNbB_4$ and MgB_2 was performed. The results reveal that $MgNbB_4$ is characterized by a significantly higher phonon DOS than MgB_2 in the frequency range of 0–7.5 THz, which corresponds to the temperatures of 0–360 K.

$MgNbB_4$ solid solution has a stronger potential for use in superconducting wires because of how its crystal lattices vibrate compared with MgB_2 . These differences in the vibrational properties affect their specific heat capacity at lower temperatures. The lattice contribution into the specific heat capacity is higher in $MgNbB_4$ than in MgB_2 throughout the entire superconducting temperature range of MgB_2 (0–39 K) and then up to 100 K. It means that $MgNbB_4$ can absorb more heat before reaching the critical temperature where superconductivity is lost. The thermal reservoir capacity of this compound is about 50 % greater than that of MgB_2 in the same volume: $\Delta Q_{MgNbB_4}^L = 0.27 \text{ J/cm}^3$ and $\Delta Q_{MgB_2}^L = 0.18 \text{ J/cm}^3$, respectively.

Therefore, $MgNbB_4$ solid solution may be successfully applied to improve the thermal stability of MgB_2 by synthesizing them into composites of various geometry, multilayered hetero-interfaces of these compounds. The qualitative and quantitative similarities between the crystal structures of both compounds make it feasible to produce such solids [4]. One must consider that the superconducting properties of Mg/Nb diboride solid solutions are still not completely understood. In this study, $MgNdB_4$ was assumed to be a non-superconducting material, and, if it does exhibit superconductivity, its potential for practical application is even higher.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Bianconi A., Di Castro D., Agrestini S., Campi G., Saini N.L., Saccone A., De Negri S., Giovannini M. A superconductor made by a metal heterostructure at the atomic limit tuned at the ‘shape resonance’: MgB_2 . *J. Phys.: Condens. Matter*, 2001, vol. 13, no. 33, art. 7383. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/13/33/318>.
2. Buzea C., Yamashita T. Review of the superconducting properties of MgB_2 . *Supercond. Sci. Technol.*, 2001, vol. 14, no. 11, art. R115. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/14/11/201>.
3. de Castro Sene F.C. Review on the state-of-the-art and challenges in the MgB_2 component manufacturing for superconducting applications. *Superconductivity*, 2024, vol. 9, art. 100083. <https://doi.org/10.1016/j.supcon.2023.100083>.
4. Choi H.J., Roundy D., Sun H., Cohen M.L., Louie S.G. The origin of the anomalous superconducting properties of MgB_2 . *Nature*, 2002, vol. 418, no. 6899, pp. 758–760. <https://doi.org/10.1038/nature00898>.
5. Wimmer E., Christensen M., Eyert V., Wolf W., Reith D., Rozanska X., Freeman C., Saxe P. Computational materials engineering: Recent applications of VASP in the MedeA software environment. *J. Korean Ceram. Soc.*, 2016, vol. 53, no. 3, pp. 263–272. <https://doi.org/10.4191/kcers.2016.53.3.263>.
6. Parlinski K., Li Z.Q., Kawazoe Y. First-principles determination of the soft mode in cubic ZrO_2 . *Phys. Rev. Lett.*, 1997, vol. 78, no. 21, pp. 4063–4066. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4063>.
7. Kiiamov A.G., Lysogorskiy Y.V., Vagizov F.G., Tagirov L.R., Tayurskii D.A., Seidov Z., Krug Von Nidda H.-A., Tsurkan V., Croitoro D., Günther A., Mayr F., Loidl A. Vibrational properties and magnetic specific heat of the covalent chain antiferromagnet. *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 98, no. 21, art. 214411. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.214411>.

Author Information

Airat G. Kiiamov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Kazan Federal University

E-mail: airatphd@kazanfederaluniversity.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5376-7000>

Maksim D. Kuznetsov, Postgraduate Student, Kazan Federal University

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0413-7519>

Информация об авторах

Айрат Газинурович Киямов, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: airatphd@kazanfederaluniversity.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5376-7000>

Максим Дмитриевич Кузнецов, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0413-7519>

Received February 20, 2025

Accepted March 3, 2025

Поступила в редакцию 20.02.2025

Принята к публикации 3.03.2025

ORIGINAL ARTICLE

UDC 004.93

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.38-53>

ROS-based navigation in unknown environment using the InsertBug algorithm: Issues of practical usage

I.A. Nekerov¹, R.N. Safin², T.G. Tsoy², S. Sulaiman^{3,2},
E.A. Martinez-Garcia⁴, E.A. Magid^{2,1} ✉

¹*HSE University, Moscow, Russia*

²*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

³*University of Naples Federico II, Napoli, Italy*

⁴*Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Zona PRONAF, Chihuahua, Ciudad Juárez, Mexico*

✉ magid@it.kfu.ru

Abstract

BUG algorithms are effective strategies for local path planning in unknown environments. This article presents a practical implementation of the InsertBug algorithm using the Robot Operating System (ROS) and highlights its challenges. The algorithm relies on laser sensor and odometry data to construct a locally optimal path in an unknown terrain. Its evaluation was performed in the Gazebo 3D virtual environment, employing the TurtleBot 3 Burger robot. The evaluation spanned three types of environments: mazes, settings with simple convex and concave obstacles, and office spaces. The algorithm was assessed based on the robot's overall traveled distance and accumulated turns in yaw rotations measured in radians. The findings demonstrate the effectiveness of the algorithm in diverse layouts. The implementation serves as a valuable resource to further advance autonomous navigation systems.

Keywords: robotics, control, algorithm, path planning, obstacle avoidance, robot navigation, InsertBug, TangentBug

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

For citation: Nekerov I.A., Safin R.N., Tsoy T.G., Sulaiman S., Martinez-Garcia E.A., Magid E.A. ROS-based navigation in unknown environment using the InsertBug algorithm: Issues of practical usage. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 38–53. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.38-53>.

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 004.93

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.38-53>

ROS-навигация в неизвестной среде на базе алгоритма InsertBug: проблемы практического применения

Я.А. Некеров¹, Р.Н. Сафин², Т.Г. Цой², Ш. Сулайман^{3,2},
Э.А. Мартинез-Гарсия⁴, Е.А. Магид^{2,1} ✉¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия³Неаполитанский университет имени Фридриха II, г. Неаполь, Италия⁴Автономный университет Сьюдад-Хуарес, зона PRONAF, Чичуауа, г. Сьюдад-Хуарес, Мексика✉ magid@it.kfu.ru

Аннотация

BUG-алгоритмы являются эффективным решением для локальной навигации роботов в неизвестных средах. В статье рассмотрены особенности и сложности практической реализации алгоритма InsertBug на базе робототехнической операционной системы ROS, который использует данные лазерного дальномера и одометрии для построения локально оптимального пути в неизвестной среде. Апробация разработанного алгоритма проводилась на роботе TurtleBot 3 Burger в виртуальной среде Gazebo. Эффективность алгоритма оценивалась в лабиринтах, средах с простыми выпуклыми и вогнутыми препятствиями, а также в условиях, имитирующих офисные помещения. Критериями оценки служили пройденное роботом расстояние и сумма угловых вращений. Полученные результаты подтверждают высокую эффективность алгоритма в различных средах и демонстрируют существенный вклад, который вносит представленная реализация в дальнейшее развитие и совершенствование систем автономной навигации роботов.

Ключевые слова: робототехника, управление, алгоритм, планирование пути, избегание препятствий, навигация робота, InsertBug, TangentBug

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Для цитирования: Некеров Я.А., Сафин Р.Н., Цой Т.Г., Сулайман Ш., Мартинез-Гарсия Э.А., Магид Е.А. ROS-навигация в неизвестной среде на базе алгоритма InsertBug: проблемы практического применения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 38–53. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.38-53>.

Introduction

Optimal path planning is a fundamental task in robotics, which can be solved using two different approaches: global and local path planning. Global path planning is based on a priori known parameters and obstacles of an environment and requires a robot to navigate through a predetermined space. In local path planning, a robot moves in an unknown environment and adjusts its path relying solely on sensory data [1].

The BUG family of algorithms employs local path planning and the power of laser rangefinders (LRF) and odometry data for robot localization and navigation. Since a robot has no prior knowledge of the environment, it decides its path in real time. BUG algorithms enable a robot to plan the path in two modes: following the boundary of an obstacle and moving towards a goal.

In the available studies on this topic, BUG algorithms have primarily been described mathematically, often with no details on how to implement them. For example, in [2], the motion of a robot viewed as a material point was analyzed, and the path planning simulation took place in a 2D world. Most BUG algorithms have been implemented in a similar manner, i.e., using conceptual tools such as Matlab or custom tools developed exclusively for individual algorithms, thus making it difficult to replicate virtual experiments or adapt such algorithms to fit other algorithms of the family. In [3], the authors compared eleven BUG algorithm variations against each other on the EyeSim simulation platform. In [4–6], the effectiveness of BUG algorithms for navigation in simulated environments was examined, considering scenarios with multi-robot path planning. In [7], the CautiousBug algorithm was proposed for safe and reliable sensory-based navigation, and its performance was evaluated through the theoretical analysis supported by mathematical proofs and virtual testing of a custom Linux application developed for the TangentBug [6] and CautiousBug algorithms. In contrast, this article presents an implementation of the InsertBug algorithm in a 3D virtual environment using the open-source Gazebo simulator, which has become a de facto standard in mobile robotics simulation. The applicability of our implementation outside of Gazebo in real-world scenarios, when integrated into a real robot control system, is shown.

1. Previous Research Overview

1.1. Comparison with other algorithms. Previous research highlights that, despite sharing many similarities, BUG algorithms differ in the conditions and/or sensors they require for the path planning process. For example, the Bug1 and Bug2 algorithms use tactile sensors rather than LRF. Tactile sensors help a robot identify the presence (or absence) of an occluding obstacle in its path [1]. Yet, they are often considered a last-resort option due to their limited detection range and lower resolution compared to other types of sensors.

More advanced algorithms, such as Alg1 and Alg2, analyze the traveled path and enable a robot to visit the waypoints more than once [8]. The VisBug21 and VisBug22 algorithms [9], among the first to incorporate an LRF, extend the Bug2 algorithm. A robot equipped with LRF makes more informed and safe decisions while navigating, as it can identify obstacles from a distance and plan its path accordingly. In [10], the path lengths generated by the Boundary Following Fast Matching Method (BF-FMM) were compared with those created using the Bug1 and Bug2 algorithms to quantitatively determine the impact of environmental uncertainty on path length.

The DistBug algorithm [11] uses refined concepts that enhance its performance in complex environments with convex obstacles and mazes. The TangentBug algorithm [6] and all its derivatives (including CautiousBug [7], WedgeBug [12], and InsertBug [13]) utilize a model of the surrounding environment derived by processing data about obstacles and representing them as points. In [14], a virtual planning technique inspired by the BUG algorithm was proposed to quickly calculate paths in an obstacle-rich environment, facilitating the identification of the shortest path to the goal.

The above navigation algorithms optimize a robot's movements towards a target position, making the task of maneuvering around obstacles less critical. Comparative studies of various algorithms, such as the one conducted by Ng and Bräunl [3], provide valuable insights into their effectiveness in different environments. However, in [3], the conceptual implementation of the algorithm was presented without practical details, with the resulting code being more theoretical and having limited applicability. This comparative analysis shows that Bug1-type algorithms [1] have longer paths than TangentBug-type algorithms. Additionally, in [13], it was demonstrated that InsertBug is faster than TangentBug in route construction. Sensor fusion in robots can further improve the robustness and accuracy of BUG algorithms [15].

1.2. Application of BUG algorithms. The application of BUG algorithms has been widely studied in various contexts of autonomous navigation. In [16], an improved obstacle avoidance and navigation algorithm was introduced for autonomous mobile robots in indoor environments based on the Bug-2 algorithm. The results obtained confirm the effectiveness of applying these algorithms in real-world confined spaces.

Another study, [17], proposes a method of autonomous navigation that takes into account the kinematic constraints of a robot and uses a combination of the Dubins path and the BUG algorithm for safe and efficient path planning. The simulation based on the developed method shows the flexibility of BUG algorithms when adapted to specific robot constraints.

In [18], the use of BUG algorithms for robot motion planning in an unknown environment with danger zones was discussed, and the capability of BUG algorithms to handle navigation tasks in complex and hazardous conditions was validated.

In [19], the performance of path planning algorithms, including BUG algorithms, in dynamic environments for omnidirectional robots was explored. It was found that BUG algorithms can be effectively used even in conditions that require high maneuverability and adaptability.

Furthermore, in [20], a broad analysis of various path planning algorithms, such as BUG algorithms, and their application in complex environments was carried out. This review helps to broaden the context of BUG algorithm applications, highlighting their significance and capabilities in various challenging scenarios.

2. InsertBug Overview

The algorithms of the BUG family were developed for navigating a material point in an unknown space filled with polygonal obstacles. More advanced algorithms, such as TangentBug and InsertBug, utilize LRF to avoid obstacles and construct routes. In the InsertBug algorithm, the sensor enables a robot to identify points in space that are close to the target point and free of obstacles. The robot uses these points as temporary targets or waypoints. Upon reaching each waypoint, it verifies its proximity to the final, user-defined target point. Selecting optimal points during the path planning is crucial to minimize a travel distance, find a collision-free path, and ensure the algorithm's completeness. We use the following notations:

- (a) Target (T) – the final target point, which the robot is tasked to reach.
- (b) Locally optimal direction – the direction of the shortest path to the target.
- (c) $d(\omega, T)$ – the Euclidean distance from a point ω , located within a free space, to T .
- (d) $d_{\min}(T)$ – the shortest Euclidean distance for the robot moving along the boundary of an obstacle to the target.
- (e) Local minimum – the basin of attraction of a local minimum of $d(\omega, T)$.

The robot starts from a user-defined initial point and moves to its target (goal point), sensing the environment and navigating through the surroundings. The algorithm's outline is given in Fig. 1:

- (a) **Build an initial set of path vectors:** scan the entire space to identify circular obstacles. Use sensor data to detect these obstacles and represent them as vectors from the robot's position to the centers of the identified obstacles.
- (b) **Obstacle detection and path adjustment:** determine if there are obstacles blocking the current path vector. If an obstacle is detected, calculate the intermediate waypoint to bypass it and insert the coordinates of the point into the current set of path vectors.
- (c) **Path recalculation:** adjust the path vectors to navigate around the detected obstacles. Update the set of path vectors by inserting intermediate waypoints where necessary to avoid obstacles.

(d) **Navigation steps:**

Step 1. Move towards the goal T .

- If the goal is reached, stop.
- If a local minimum is detected, proceed to **Step 2**.

Step 2. Navigate around obstacles. Choose the direction to follow along the boundary of the obstacle. Insert an intermediate waypoint to divert the path around the obstacle. Move towards the intermediate waypoint while maintaining $d_{\min}(T)$:

- If the goal is reached, stop.
- If an intermediate point outside the obstacle is found and $d(\omega, T) < d_{\min}(T)$, proceed to **Step 3**.
- If the robot completes its detour around the obstacle and determines the goal is unreachable, stop.

Step 3. Transition phase. Move directly towards ω until the point Z : $d(Z, T) < d_{\min}(T)$ is reached. Then proceed to **Step 1**.

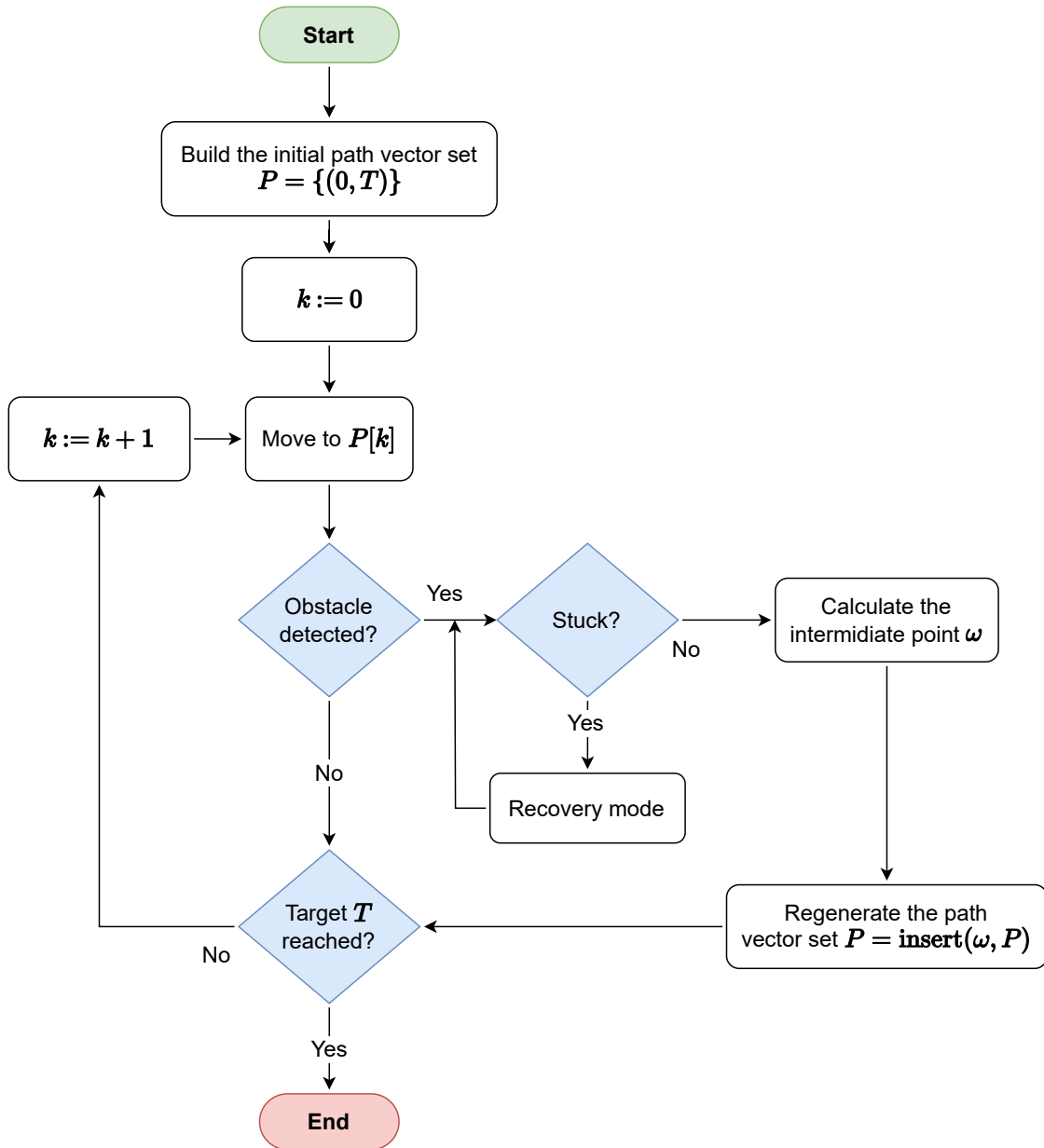


Fig. 1. Flowchart of the InsertBug algorithm

3. System Setup

The algorithm was implemented in ROS Noetic Ninjemys using C++ [21]. Interaction with the robot occurred via the ROS topics. The algorithm's implementation was tested in the Gazebo simulation environment, with 30 different maps generated to simulate conditions and scenarios that the robot might encounter. Gazebo made it possible to detect and correct errors that appeared while implementing the algorithm, as well as evaluate its accuracy under conditions that mimic real-world scenarios. This approach aligns with other ROS-based simulations in complex environments, which provide accurate modeling and visualization of a robot's behavior before deployment in real-world settings [22, 23]. The tests were conducted using the LRF-equipped Turtlebot 3 Burger robot (Fig. 2) that detects obstacles and plans its path in accordance with the InsertBug algorithm.

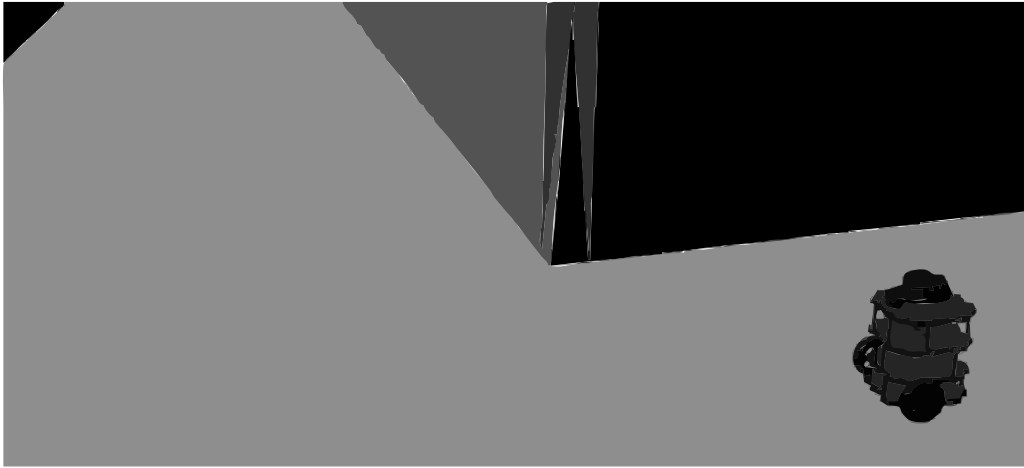


Fig. 2. TurtleBot 3 Burger robot in the Gazebo environment

4. Validation

The proposed algorithm was tested and validated experimentally using the Gazebo simulator. The tests were performed with three types of maps:

- **Concave and convex obstacles (C&CO):** environments with basic geometric obstacles (Fig. 3).
- **Mazes:** complex configurations designed to challenge the robot's path-finding capabilities (Fig. 4).
- **Office spaces:** simulated indoor settings resembling real-world environments (Fig. 5).

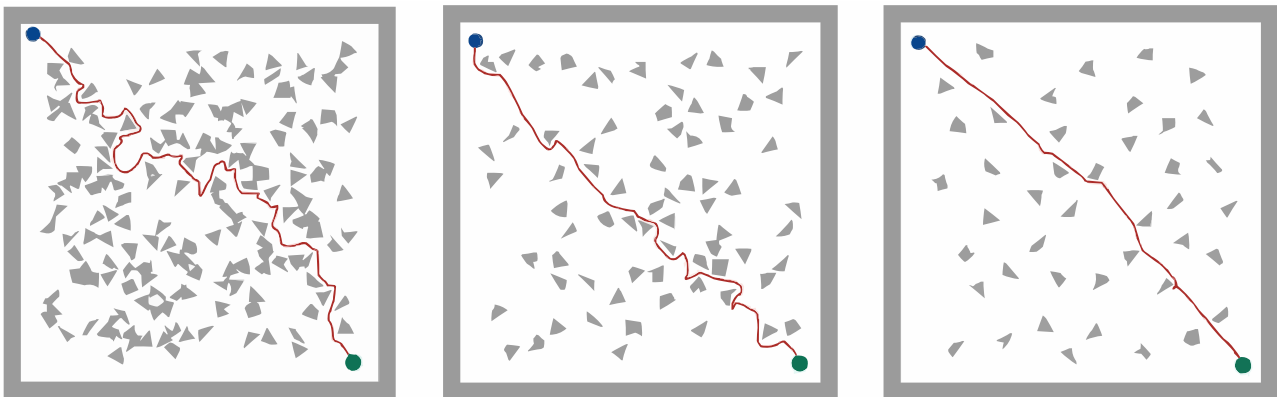


Fig. 3. Traversed path in a C&CO environment with different obstacle density levels: (a) close (CCO1), (b) medium (CCO2), and (c) distant (CCO3). The green dot shows the starting position of the robot on the map, while the blue dot is the target position

The maps (20×20 m) were generated using the Gazebo Worlds Construction Tool [24]. For each map, 10 pairs of starting and target points were randomly generated, with a minimum distance of 1 m and not exceeding the diagonal length of the square formed by these points. The points were placed so that they did not overlap with the obstacles. To ensure the algorithm's reliability, each map was tested in two trials.

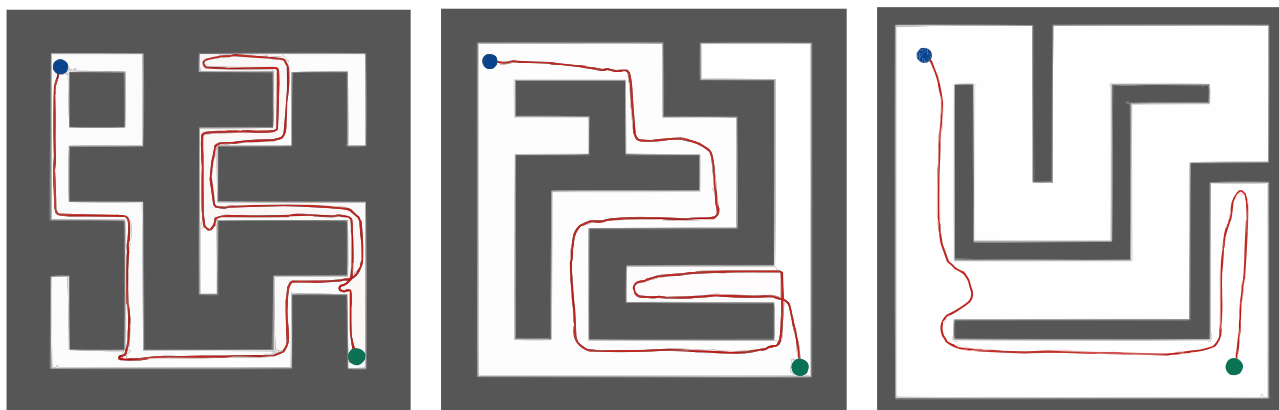


Fig. 4. Traversed path in a maze environment with different wall thickness levels: (a) thick (Maze1), (b) medium (Maze2), and (c) thin (Maze3). The green dot shows the starting position of the robot on the map, while the blue dot is the target position

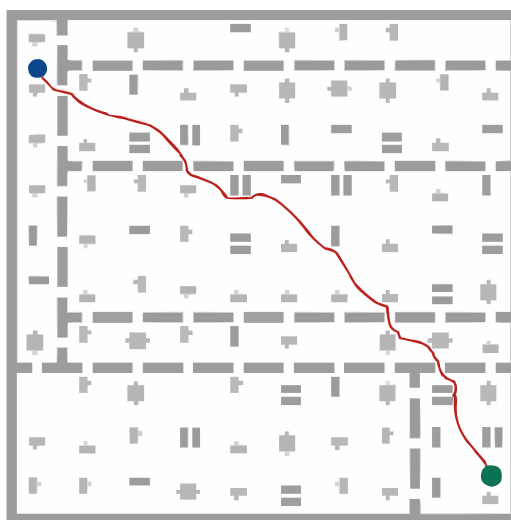


Fig. 5. Traversed path in an office space environment (OFFICE1). The green dot shows the starting position of the robot on the map, while the blue dot is the target position

4.1. Concave and convex obstacles. The concave and convex settings in the simulation represent various obstacle shapes. The convex obstacles appeared as bumps, while the concave obstacles were like dents or hollows. Both obstacle types are shown in black. White areas indicate spaces without obstacles. These settings were used to test the robot's ability to navigate around bumps and hollows in order to reach its target points effectively. The density of obstacles on the map could be adjusted by choosing one of the following three options (Fig. 3):

- **Close:** high obstacle density.
- **Medium:** medium obstacle density.
- **Distant:** low obstacle density.

The obstacles were evenly distributed and adequately spaced across the map. The total number of obstacles is proportional to the map area. In the figures, the green and blue dots on the map indicate the initial and target positions of the robot, respectively.

4.2. Mazes. The maze settings in the simulation represent confined spaces designed to challenge the algorithm's navigation capabilities. Obstacles are shown as black regions, while white areas indicate free spaces. The intricate layouts of the mazes were used to simulate complex environments where the robot must navigate through narrow passages and around obstacles to reach its target points. The maze walls had the following thickness (Fig. 4):

- **Thick:** 300 px.
- **Medium:** 200 px.
- **Thin:** 100 px.

These parameters define how wall thickness in the maze influenced the complexity of navigation. Accessibility between all free space points was ensured using an algorithm similar to depth-first graph traversal. The figures show a map where the green and blue dots indicate the initial and target positions of the robot, respectively.

4.3. Office space maps. The office space settings in the simulation represent realistic indoor environments. Obstacles such as walls, furniture, and other fixtures are shown as black regions, while white regions are free spaces. The layout mimics typical office designs, providing a mix of open areas and confined spaces that challenge the robot's ability to maneuver around common indoor obstacles to reach its target points. In (Fig. 5), office desks (40×80 px) are evenly distributed, ensuring adequate spacing between obstacles.

4.4. Robot parameters. The following parameters were set for the robot's optimal performance across the experiments:

- **Maximum translational velocity:** the robot's maximum speed when moving in a straight line is set to 0.22 m/s, determined empirically to ensure smooth linear motion.
- **Maximum rotational velocity:** the robot's maximum speed when rotating is set to 2.75 rad/s, determined empirically to ensure smooth angular motion.
- **Goal tolerance parameters:**
 - **Cartesian goal tolerance:** the tolerance for the robot's position in the XY plane is set to 0.05 m.
 - **Yaw goal tolerance:** the tolerance for the robot's orientation (yaw) is determined experimentally and set to 0.17 rad.

Limiting the translational velocity prevents the robot from moving too quickly, reducing the risk of overshooting the target points or losing control, especially in environments with tight spaces or numerous obstacles. Controlling the rotational velocity is crucial for maintaining stability and precision when changing directions. High rotational speeds could cause the robot to become unstable or make inaccurate turns, negatively affecting its ability to navigate in complex environments. Goal tolerance parameters define how close the robot needs to get to the target position and orientation before considering the goal to be reached. Tight tolerance ensures precise navigation, reducing errors in positioning that could accumulate over long distances.

4.5. Experimental results. The experiments addressed two main problems. First, inaccuracies in the robot's odometry may affect obstacle traversal assessments due to the robot's physical dimensions. Second, the robot may get stuck at an obstacle's boundaries during its mission, which requires recovery strategies.

Tables 1, 2, and 3 present the test results for various map settings. Each table has eight columns: (1) test number, (2) map name, (3) total distance traveled by the robot (in meters), (4) sum of the angles turned by the robot (including the angles turned during the recovery mode when the robot was stuck), (5) absolute difference in distance traveled between the first and second trials (in meters), (6) absolute difference in angles turned between the first and second trials (in radians), (7) normalized difference in distance traveled relative to the first trial, calculated by dividing the difference by the total distance traveled by the robot in the first trial, and (8) normalized difference in angles turned, calculated similarly to the normalized difference in distance traveled.

In some cases, the robot changed the direction multiple times when it detected it was moving away from an obstacle. A significant deviation from the planned trajectory was observed in test no. 7 (Maze 4), where the robot got stuck near the obstacle corners due to odometry drift. The recovery mode was activated, causing the robot to spin in order to escape the obstacle boundary. As a result, the absolute normalized yaw difference in this case was 18.5 %, compared to an average of 4.24 % for this map type.

In contrast, the C&CO maps yielded better results. The distances traveled were close to the shortest possible straight-line paths, as the robot relied less on boundary following and more on optimized local routing. These results confirm the algorithm's ability to build shorter paths on maps with convex and concave obstacles.

The tests in the office environments produced varying results. On maps such as OFFICE1, OFFICE2, and OFFICE5, the robot followed relatively efficient trajectories. However, on maps like OFFICE3, OFFICE4, and OFFICE7, the robot got stuck more frequently and activated the recovery mode, leading to higher absolute normalized yaw difference values. In particular, OFFICE7 showed a significant absolute normalized deviation from the course (45.01 %) due to the accumulated errors triggering the recovery mode. The absolute normalized difference in the path length generally remained within acceptable limits, varying with the complexity of the map layout.

The average travel time in the mazes was twice as long as in other setting types, with the robot making nearly four times as many turns. Additionally, although the total distances traveled by the robot in the C&CO and office settings were similar, the average number of turns in the office spaces was about 1.5 times higher.

Conclusions

The InsertBug algorithm implemented in the ROS framework was studied using the TurtleBot3 Burger platform tested in the Gazebo simulator. It addresses practical challenges, which are often overlooked in theoretical models. Key issues include: the robot's odometry inaccuracies affecting the obstacle traversal assessments due to the robot's physical dimensions; recovery strategies used by the robot when it gets stuck at the boundaries of an obstacle.

The algorithm proved to be effective for real-world scenarios. Its performance was evaluated based on three distinct map types: convex and concave obstacles, mazes, and office spaces. The results of the tests varied across the environments and demonstrate that the algorithm's

capacity to navigate is better in simpler settings than in complex scenarios, such as maze navigation and maneuvering within office layouts.

Table 1. Comparison of path lengths, yaw, and differences across various mazes

No	Map	Path length (m)	Total yaw (rad)	Abs. length diff. (m)	Abs. yaw diff. (rad)	Abs. norm. length diff. (%)	Abs. norm. yaw diff. (%)
1	Maze1	95.55	344.68	2.1	7.86	2.2	2.28
2		93.45	336.82				
3	Maze2	17.66	16.71	1.05	2.45	5.95	14.66
4		18.71	19.16				
5	Maze3	120.77	378.41	0.24	1.62	0.2	0.43
6		121.01	376.79				
7	Maze4	87.91	220.09	0.33	0.58	0.36	0.26
8		88.24	219.51				
9	Maze5	21.34	36.22	1.07	1.71	5.0	4.72
10		20.27	34.51				
11	Maze6	80.12	291.03	0.7	0.53	0.87	0.18
12		79.42	290.50				
13	Maze7	129.32	550.75	3.51	101.72	2.71	18.5
14		125.81	449.03				
15	Maze8	45.51	100.21	1.39	0.76	3.05	0.76
16		44.12	99.45				
17	Maze9	55.67	87.64	0.0	0.42	0.0	0.48
18		55.67	88.06				
19	Maze10	102.73	305.12	0.7	0.45	0.68	0.15
20		102.03	304.67				

Table 2. Comparison of path lengths, yaw, and differences across various C&CO environments

No	Map	Path length (m)	Total yaw (radians)	Abs. length diff. (m)	Abs. yaw diff. (radians)	Abs. norm. length diff. (%)	Abs. norm. yaw diff. (%)
1 2	CCO1	40.01 40.24	59.32 60.04	0.23	0.72	0.57	1.21
3 4	CCO2	25.67 24.89	48.05 47.94	0.78	0.11	3.04	0.23
5 6	CCO3	38.34 37.90	43.54 42.98	0.44	0.56	1.14	1.29
7 8	CCO4	31.67 32.05	55.23 54.76	0.38	0.47	1.19	0.85
9 10	CCO5	29.98 30.54	80.53 53.01	0.56	27.52	1.86	34.17
11 12	CCO6	23.09 22.81	48.67 49.04	0.28	0.37	1.22	0.76
13 14	CCO7	34.65 33.89	56.08 55.99	0.76	0.09	2.2	0.16
15 16	CCO8	33.29 33.29	39.49 40.02	0	0.53	0	1.34
17 18	CCO9	20.01 18.99	32.04 42.03	1.02	9.99	5.1	32.2
19 20	CCO10	35.67 36	55.12 54.89	0.33	0.23	0.92	0.42

Table 3. Comparison of path lengths, yaw, and differences across various offices

No	Map	Path length (m)	Total yaw (rad)	Abs. length diff. (m)	Abs. yaw diff. (rad)	Abs. norm. length diff. (%)	Abs. norm. yaw diff. (%)
1	OFFICE1	29.03	65.88	0.35	1.85	1.21	2.81
2		28.68	64.03				
3	OFFICE2	50.06	89.32	0.98	0.72	1.96	0.81
4		51.04	90.04				
5	OFFICE3	43.09	83.55	0.53	1.24	1.23	1.48
6		42.56	84.79				
7	OFFICE4	21.01	39.02	1.08	2.00	5.14	5.12
8		22.09	41.01				
9	OFFICE5	32.04	79.03	1.05	4.11	3.28	5.21
10		33.09	83.14				
11	OFFICE6	45.68	98.32	1.35	1.76	2.95	1.78
12		47.03	96.56				
13	OFFICE7	19.03	34.43	0.53	15.61	2.78	45.01
14		19.56	50.04				
15	OFFICE8	32.54	69.03	0.51	0.64	1.57	0.92
16		33.05	68.39				
17	OFFICE9	60.21	72.34	1.31	1.69	2.17	2.33
18		58.90	74.03				
19	OFFICE10	47.93	98.32	1.1	0.75	2.3	0.76
20		49.03	99.07				

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Lumelsky V.J., Stepanov A.A. Path-planning strategies for a point mobile automaton moving amidst unknown obstacles of arbitrary shape. In: Cox I.J., Wilfong G.T. (Eds.) *Autonomous Robot Vehicles*. New York, NY, Springer, 1990, pp. 363–390. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8997-2_27.
2. Dwaracherla V., Thakar S., Vachhani L., Gupta A., Yadav A., Modi S. Motion planning for point-to-point navigation of spherical robot using position feedback. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 2019, vol. 24, no. 5, pp. 2416–2426. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2019.2934789>.
3. Ng J., Bräunl T. Performance comparison of bug navigation algorithms. *J. Intell. Rob. Syst.*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 73–84. <https://doi.org/10.1007/s10846-007-9157-6>.
4. McGuire K.N., de Croon G.C.H.E., Tuyls K. A comparative study of bug algorithms for robot navigation. *Rob. Auton. Syst.*, 2019, vol. 121, art. 103261. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2019.103261>.
5. Mohamed E.F., El-Metwally K., Hanafy A.R. An improved Tangent Bug method integrated with artificial potential field for multi-robot path planning. *Proc. 2011 Int. Symp. on Innovations in Intelligent Systems and Applications*. IEEE, 2011, pp. 555–559. <https://doi.org/10.1109/INISTA.2011.5946136>.
6. Kamon I., Rimon E., Rivlin E. TangentBug: A range-sensor-based navigation algorithm. *Int. J. Rob. Res.*, 1998, vol. 17, no. 9, pp. 934–953. <https://doi.org/10.1177/027836499801700903>.
7. Magid E., Rivlin E. CautiousBug: A competitive algorithm for sensory-based robot navigation. *Proc. 2004 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE, 2004, pp. 2757–2762. <https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389826>.
8. Sankaranarayanan A., Vidyasagar M. A new path planning algorithm for moving a point object amidst unknown obstacles in a plane. *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Vol. 3. IEEE, 1990, pp. 1930–1936. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1990.126290>.
9. Lumelsky V.J., Skewis T. Incorporating range sensing in the robot navigation function. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, 1990, vol. 20, no. 5, pp. 1058–1069. <https://doi.org/10.1109/21.59969>.
10. Chiang C.H., Liu J.-S., Chou Y.-S. Comparing path length by boundary following fast matching method and Bug algorithms for path planning. In: Chien B.-C., Hong T.-P. (Eds.) *Opportunities and Challenges for Next-Generation Applied Intelligence*. Ser.: Studies in Computational Intelligence. Vol. 214. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009, pp. 303–309. https://doi.org/10.1007/978-3-540-92814-0_47.
11. Kamon I., Rivlin E. Sensory-based motion planning with global proofs. *IEEE Trans. Rob. Autom.*, 1997, vol. 13, no. 6, pp. 814–822. <https://doi.org/10.1109/70.650160>.

12. Laubach S.L., Burdick J.W. An autonomous sensor-based path-planner for planetary microrovers. *Proc. 1999 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. Vol. 1. IEEE, 1999, pp. 347–354. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.1999.770003>.
13. Xu Q.-L., Tang G.-Y. Vectorization path planning for autonomous mobile agent in unknown environment. *Neural Comput. Appl.*, 2013, vol. 23, no. 7, pp. 2129–2135. <https://doi.org/10.1007/s00521-012-1163-3>.
14. Sharma N., Thukral S., Aine S., Sujit P.B. A virtual bug planning technique for 2D robot path planning. *Proc. 2018 Annu. Am. Control Conf. (ACC)*. IEEE, 2018, pp. 5062–5069. <https://doi.org/10.23919/ACC.2018.8430678>.
15. Eryomin A., Safin R., Tsoy T., Lavrenov R., Magid E. Optical sensors fusion approaches for map construction: A review of recent studies. *J. Rob., Networking Artif. Life*, 2023, vol. 10, no. 2, pp. 127–130. https://doi.org/10.57417/jrnal.10.2_127.
16. Khan F., Alakberi A., Almaamari S., Beig A.R. Navigation algorithm for autonomous mobile robots in indoor environments. *Proc. 2018 Advances in Science and Engineering Technology Int. Conf. (ASET)*. IEEE, 2018, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICASET.2018.8376834>.
17. Xu Q.L., Yu T., Bai J. The mobile robot path planning with motion constraints based on Bug algorithm. *Proc. 2017 Chinese Automation Congr. (CAC)*. IEEE, 2017, pp. 2348–2352. <https://doi.org/10.1109/CAC.2017.8243168>.
18. Jahanshahi H., Jafarzadeh M., Sari N.N., Pham V.-T., Huynh V.V., Nguyen X.Q. Robot motion planning in an unknown environment with danger space. *Electronics*, 2019, vol. 8, no. 2, art. 201. <https://doi.org/10.3390/electronics8020201>.
19. Haro F., Torres M. A comparison of path planning algorithms for omni-directional robots in dynamic environments. *Proc. 2006 IEEE 3rd Latin American Robotics Symp.* IEEE, 2006, pp. 18–25. <https://doi.org/10.1109/LARS.2006.334319>.
20. Janis A., Bade A. Path planning algorithm in complex environment: A survey. *Trans. Sci. Technol.*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 31–40.
21. Lentin J., Cacace J. *Mastering ROS for Robotics Programming: Design, Build, and Simulate Complex Robots Using the Robot Operating System*. Birmingham, Packt Publ., 2018. 580 p.
22. Marian M., Stîngă F., Georgescu M.-T., Roibu H., Popescu D., Manta F. A ROS-based control application for a robotic platform using the Gazebo 3D simulator. *Proc. 2020 21st Int. Carpathian Control Conf. (ICCC)*. IEEE, 2020, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICCC49264.2020.9257256>.
23. Takaya K., Asai T., Kroumov V., Smarandache F. Simulation environment for mobile robots testing using ROS and Gazebo. *Proc. 2016 20th Int. Conf. on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*. IEEE, 2016, pp. 96–101. <https://doi.org/10.1109/ICSTCC.2016.7790647>.
24. Abbyasov B., Lavrenov R., Zakiev A., Yakovlev K., Svinin M., Magid E. Automatic tool for Gazebo world construction: From a grayscale image to a 3D solid model. *Proc. 2020 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2020, pp. 7226–7232. <https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9196621>.

Author Information

Iaroslav A. Nekеров, Undergraduate Student, HSE University

E-mail: yaanekerov@edu.hse.ru

Ramil N. Safin, Senior Lecturer, Kazan Federal University

E-mail: safin.ramil@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1429-1876>

Tatyana G. Tsoy, PhD, Senior Lecturer, Kazan Federal University

E-mail: tt@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5715-7768>

Shifa Sulaiman, PhD, Research Associate, University of Naples Federico II; Kazan Federal University

E-mail: shifa1910@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5330-0053>

Edgar A. Martinez-Garcia, PhD, Professor, Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

E-mail: edmartin@uacj.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-8285>

Evgeni A. Magid, PhD, Professor, Head of Intelligent Robotics Department, Kazan Federal University; HSE University

E-mail: magid@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7316-5664>

Информация об авторах

Ярослав Александрович Некеров, студент бакалавриата, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: yaanekerov@edu.hse.ru

Рамиль Набиуллович Сафин, старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: safin.ramil@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1429-1876>

Татьяна Григорьевна Цой, кандидат технических наук, старший преподаватель, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: tt@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5715-7768>

Шифа Сулайман, PhD, научный сотрудник, Неаполитанский университет имени Фридриха II; Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ssajmech@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5330-0053>

Эдгар Алонсо Мартинез-Гарсия, PhD, профессор, Автономный университет Сьюдад-Хуарес

E-mail: edmartin@uacj.mx

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9163-8285>

Евгений Аркадьевич Магид, PhD, профессор, заведующий кафедрой интеллектуальной робототехники, Казанский (Приволжский) федеральный университет; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

E-mail: magid@it.kfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7316-5664>

Received August 14, 2024

Accepted September 24, 2024

Поступила в редакцию 14.08.2024

Принята к публикации 24.09.2024

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 534.121

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.54-98>**Об исследованиях колебательного движения тел
в жидкости****А.Н. Нуриев , О.Н. Зайцева, О.С. Жучкова***Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия* *nuriev_an@mail.ru***Аннотация**

Представлен обзор исследований в области гидродинамики колебательного движения тела в разрезе трех разных, но во многом очень близких классов задач: о колебаниях твердых цилиндрических тел в покоящейся жидкости, об упругих колебаниях удлиненных тел в жидкости и о пропульсивном движении колеблющихся тел – колебательных движителей. Целью обзора являются систематизация результатов в обозначенной области, выделение общих гидродинамических проблем исследования и определение возможных путей их решения.

Ключевые слова: колебательное движение, вязкая несжимаемая жидкость, колебательный движитель, уравнение Навье – Стокса, асимптотический анализ, численное моделирование, эксперимент

Благодарности. Авторы выражают огромную благодарность своему учителю Егорову Андрею Геннадьевичу. Он стал проводником в механику для нас и множества молодых студентов Казанского университета. Переданная им любовь к познаниям остается путеводной звездой в наших жизнях.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-79-10033).

Для цитирования: Нуриев А.Н., Зайцева О.Н., Жучкова О.С. Об исследованиях колебательного движения тел в жидкости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 54–98. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.54-98>.

REVIEW ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.54-98>

On the study of oscillatory motion of bodies in fluid

A.N. Nuriev ✉, O.N. Zaitseva, O.S. Zhuchkova

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ nuriev_an@mail.ru

Abstract

This article reviews a large body of research on the hydrodynamics of oscillatory motion of bodies, covering three different, yet closely related, classes of problems: the oscillations of solid cylindrical bodies in a still fluid, the elastic oscillations of elongated bodies in a fluid, and the propulsive motion of oscillating bodies (oscillatory propulsors). The findings available so far are summarized. Some key challenges are identified, and their potential solutions are proposed.

Keywords: oscillatory motion, viscous incompressible fluid, oscillatory propulsor, Navier–Stokes equation, asymptotic analysis, numerical simulation, experiment

Acknowledgments. A heartfelt thanks to our mentor, Andrey G. Egorov, for his invaluable guidance in mechanics, which has inspired us and many young students at Kazan University. The passion for knowledge that he instilled in us remains a shining light in our lives.

This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-79-10033).

For citation: Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Zhuchkova O.S. On the study of oscillatory motion of bodies in fluid. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 54–98. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.54-98>. (In Russian)

Введение

На современном этапе развития целого спектра инновационных прикладных областей, таких как атомно-силовая микроскопия [1, 2], разработка волновых электростанций [3–6], создание перспективных систем для охлаждения микроэлектроники [7–9], разработка биоподобных движителей для беспилотных летательных и подводных аппаратов [10–20], создание акустических систем для управления микроустройствами (например, пузырьковых микророботов) и манипуляции наночастицами (в том числе «лабораторий на чипе» и биопринтеров) [21–25], разработка систем гашения колебаний конструкций и жидкости в баках [26–30], развитие методов определения свойств материалов [31–33] и жидкостей [34] и т. п., остро стоят проблемы предсказания, регулирования и управления гидродинамическим воздействием на колеблющиеся конструкции. Не секрет, что при периодическом движении в жидкости гидродинамическое воздействие может существенно изменяться (значительно сильнее, чем при стационарном обтекании) при близких параметрах колебания,

например, в зависимости от формы, положения в пространстве и взаимодействия различных элементов конструкции. Это открывает большие возможности по регулированию и управлению как нестационарным гидродинамическим воздействием, так и стационарными составляющими силы, появляющимися при определенных конфигурациях колебательного движения.

Несмотря на то, что исследования периодического движения тел в жидкости развиваются уже более ста семидесяти лет, общая теория в этой области все еще находится на этапе формирования. Отдельные блоки теоретических и экспериментальных исследований, связанные с тем или иным прикладным направлением, часто слабо пересекаются между собой как в области методов, так и в области результатов (например, сильно различаются диапазоны параметров исследования) и имеют отличия даже в терминологии. Для развития общей теории чрезвычайно важно, сложив и систематизировав все эти результаты, получить представление об общих гидродинамических процессах (об их подобии), происходящих при колебаниях тел в жидкости, провести анализ проблем исследования в названной области, а также выделить наиболее универсальные и успешные методы исследования. Именно эти цели ставит перед собой настоящая обзорная работа.

1. Колебания твердого цилиндрического тела в вязкой несжимаемой жидкости

Одно из первых аналитических исследований колебаний тела в покоящейся жидкости было проведено Дж. Стоксом в 1851 году в работе [35], в рамках которой впервые были получены оценки гидродинамического воздействия на круглый цилиндр, совершающий поступательные гармонические колебания. Представим математическую постановку этой задачи и ее решение в современных обозначениях.

Для описания течения жидкости перейдем в подвижную полярную систему координат (r, θ) , перемещающуюся поступательно вместе с центром цилиндра, и безразмерим пространственные переменные на радиус цилиндра R , время – на величину, обратно пропорциональную угловой частоте колебаний ω^{-1} , скорость – на амплитуду скорости колебаний $U = A\omega$. Используя в качестве основных характеристик течения завихренность w и функцию тока ψ , запишем определяющие уравнения и граничные условия в виде

$$\begin{aligned} r > 1: \quad w = \Delta\psi, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{KC}{\pi r} \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} &= \frac{2}{\beta\pi} \Delta w, \quad \frac{\partial(\psi, w)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial w}{\partial r}, \\ r = 1: \quad \psi &= 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi \sim -r \sin\theta \cos t. \end{aligned} \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа. Безразмерные параметры β и KC определяются формулами

$$\beta = \frac{2}{\pi} \frac{R^2 \omega}{\nu}, \quad KC = \pi \frac{A}{R}.$$

Здесь ν – кинематическая вязкость жидкости, β – число Стокса или безразмерная частота колебаний, KC – безразмерная амплитуда колебаний (число Келегана–Карпентера).

Стокс построил решение этой задачи в предположении малости амплитуды колебаний $KC \ll 1$, в рамках которого в первом приближении вкладом конвективных слагаемых

можно пренебречь. Решение Стокса с использованием модифицированных функций Бесселя K_j можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi &= \psi^{(0)} + O(KC), \quad \psi^{(0)} = \sin \theta \operatorname{Re}(\Psi_0(r)e^{it}), \\ w &= w^{(0)} + O(KC), \quad w^{(0)} = \sin \theta \operatorname{Re}(W_0(r)e^{it}), \\ \Psi_0 &= -r + \frac{1}{r} + \frac{S_x}{r} + \chi^{-2}W_0, \quad W_0 = -2\chi \frac{K_1(\chi r)}{K_0(\chi)}, \quad S_x(\chi) = \frac{2K_1(\chi)}{zK_0(\chi)}, \quad \chi = \sqrt{\frac{i\beta\pi}{2}}.\end{aligned}\quad (2)$$

По найденному решению Стокс определил гидродинамическую силу, действующую на цилиндр вдоль оси колебаний:

$$F_x = f_x^{(0)} + O(KC^2) = 2\pi \operatorname{Im} [e^{it} (1 + S_x)] + O(KC^2).$$

В используемых безразмерных переменных сила нормирована на $\rho R^2 U \omega$.

Решение Стокса не учитывает вклад конвективных слагаемых. Для оценки их значимости Г. Шлихтинг [36, 37] в 1932 году предложил использовать метод последовательных асимптотических приближений. Помимо условия малости амплитуд колебаний, Шлихтинг положил также $\beta \rightarrow \infty$, или $KC \sim \beta^{-1} \ll 1$. В этих условиях решение задачи формально представляется в виде разложения в ряд

$$\psi = KC^0(\psi^{(0,0)}\beta^0 + \psi^{(0,1)}\beta^{-1/2} + O(\beta^{-1})) + KC^1(\psi^{(1,0)}\beta^0 + O(\beta^{-1/2})) + O(KC^2).$$

Слагаемые порядка $O(KC^0)$ дают чисто периодическое стоксовское решение (они совпадают с (2), если разложить S_x в ряд при $\beta \rightarrow \infty$), члены порядка $O(KC^1)$ учитывают вклад конвективного слагаемого. Шлихтинг впервые показал, что нелинейный характер этого члена приводит к появлению в решении стационарной составляющей – вторичного стационарного течения, возникающего на фоне первичного нестационарного движения.

Обобщенное на случай произвольного значения β решение в члене $O(KC^1)$ было получено в работе Й. Хольстмарка [38] в 1954 году. В современной записи [39] его можно представить в следующем виде

$$\psi = \psi^{(0)} + KC \left(\psi_u^{(1)} + \psi_{st}^{(1)} \right) + O(KC^2),$$

где стационарная составляющая решения $\psi_{st}^{(1)}$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi_{st}^{(1)} &= \Psi(r) \sin 2\theta, \quad \Psi = \tilde{\Psi} - \frac{B}{r^2} + C \left(1 - \frac{1}{r^2} \right), \\ \tilde{\Psi} &= -\frac{\beta\pi}{2} \frac{r^4}{48} \int_1^\infty G(rx) (x^2 - 1)^3 \frac{dx}{x}, \quad G = \frac{1}{4r} \operatorname{Re} (\overline{W_0} \Psi'_0 - \overline{\Psi_0} W'_0), \\ B &= \tilde{\Psi}(1), \quad C = -\frac{\tilde{\Psi}'(1) + 2\tilde{\Psi}(1)}{2}.\end{aligned}\quad (3)$$

Черта сверху здесь означает комплексное сопряжение, штрихи – дифференцирование по r . Визуализация характерных вторичных картин течения представлена на рис. 1.

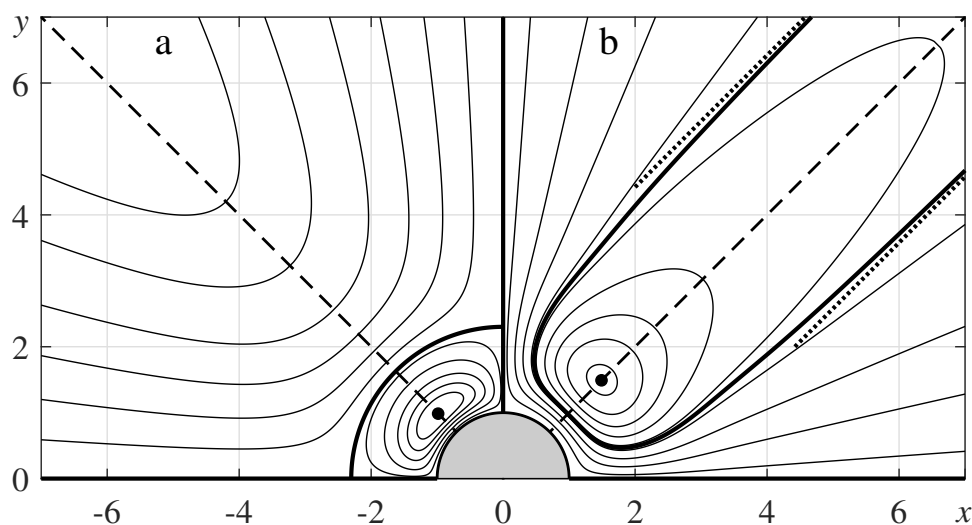


Рис. 1. Линии тока вторичных течений при поперечных колебаниях цилиндра в (а) закритическом S ($\beta = 44.5$) и (б) докритическом S^* ($\beta = 6.37$) режимах, построенные по решению (3). Жирными линиями показаны границы циркуляционных ячеек. Пунктирные линии дают их асимптотику при $r \rightarrow \infty$

Fig. 1. Streamlines of the secondary flows induced by transverse oscillations of a cylinder in (a) the supercritical S ($\beta = 44.5$) and (b) subcritical S^* ($\beta = 6.37$) regimes, based on the solution of (3). The bold lines show the boundaries of the circulation cells. The dashed lines indicate their asymptotics at $r \rightarrow \infty$

Асимптотические исследования задачи о колебаниях круглого цилиндра в разных приближениях проведены также в работах [40], [41–44], [45, 46]. Так, в частности, в работах А.Н. Нуриева и А.Г. Егорова [45, 46], в рамках развития подхода Шлихтинга в приближении $KC \ll 1$, $\beta \rightarrow \infty$, было исследовано решение в члене $O(KC^2)$. Результаты этих исследований позволяют определить соответствующую поправку к нестационарной гидродинамической силе:

$$F_x = 2\pi \sin(t) - \varepsilon 2\sqrt{2}\pi(\cos(t) - \sin(t)) - \varepsilon^2 2\pi \cos(t) - \varepsilon^3 \left(-\frac{5\pi}{2\sqrt{2}}(\cos(t) + \sin(t)) \right) - \varepsilon KC^2 2\pi \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}(1 - 2\sqrt{2})\sin(t) + \frac{5}{12}(1 + \sqrt{2})\cos(t) \right) - \varepsilon KC^2 3\pi(\sin(3t) - \cos(3t))(6\sqrt{2} + \sqrt{3} - 5 - 2\sqrt{6})/4 + O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon = (\beta\pi/2)^{-1/2}. \quad (4)$$

Теория Стокса, обобщенная для произвольного сечения цилиндра, была сформулирована в работе Е. Така [47], однако ее результаты дали лишь концептуальный подход к решению общей задачи, формально сводящийся к использованию метода граничных элементов. С применением этого метода автором было получено полуаналитическое решение задачи о гармонических колебаниях бесконечно тонкой пластинки с бесконечно малой амплитудой и рассчитаны гидродинамические силы, действующие на пластину. Дальнейшее свое развитие этот метод получил в работах Д. Брамли и др. [48], С. Ахсана и М. Аурели [49], где были проведены расчеты гидродинамического сопротивления для задач о гармонических колебаниях пластин конечной толщины и пластин с фланцами. Все конечные результаты этих исследований являются численными. Для практического использования

по данным этих исследований в работах [1, 49–52] были построены аппроксимационные зависимости гидродинамических сил.

Асимптотическая теория легла в основу многочисленных исследований свойств и структурных особенностей вторичных стационарных течений, формирующихся в жидкости около осциллирующих цилиндрических тел с разной формой сечения. Структура вторичных течений, возникающих при малоамплитудных колебаниях круглого цилиндра, изучена в работах [41–45, 53], вторичные течения около квадратных цилиндров с разным радиусом скругления углов и цилиндров с несимметричным сечением, близким к круглому, рассмотрены в статье [54]. Решение задачи о колебаниях эллиптического цилиндра с помощью асимптотического подхода в различных приближениях получено в [53, 55–58], исследование вторичных течений около колеблющегося профиля Жуковского – в работах [53, 59]. Визуализация вторичных течений около эллиптического цилиндра и профиля Жуковского представлена на рис. 2.

До настоящего времени асимптотические методы остаются одними из самых эффективных методов моделирования течений при малоамплитудных колебаниях, что делает их перспективным инструментом решения широкого класса новых прикладных задач в таких областях, как разработка микрофлюидных устройств, систем манипуляции микро-частицами (акустического пинцета), систем биопринтинга и т. д. (см., например, [60, 61]). Численные реализации асимптотического метода (численное решение построено во всех членах разложения) для сложных геометрий получили свое развитие в работах [60, 61].

В диапазоне умеренных и больших амплитуд основным источником данных о развитии гидродинамики при колебательном движении тел в покоящейся жидкости являются экспериментальные и численные (основанные на прямом решении уравнения Навье – Стокса) исследования. Как и в аналитических исследованиях, значительная часть результатов здесь получена для случаев колебаний цилиндрических тел с простой формой сечения: круглой, прямоугольной, ромбовидной.

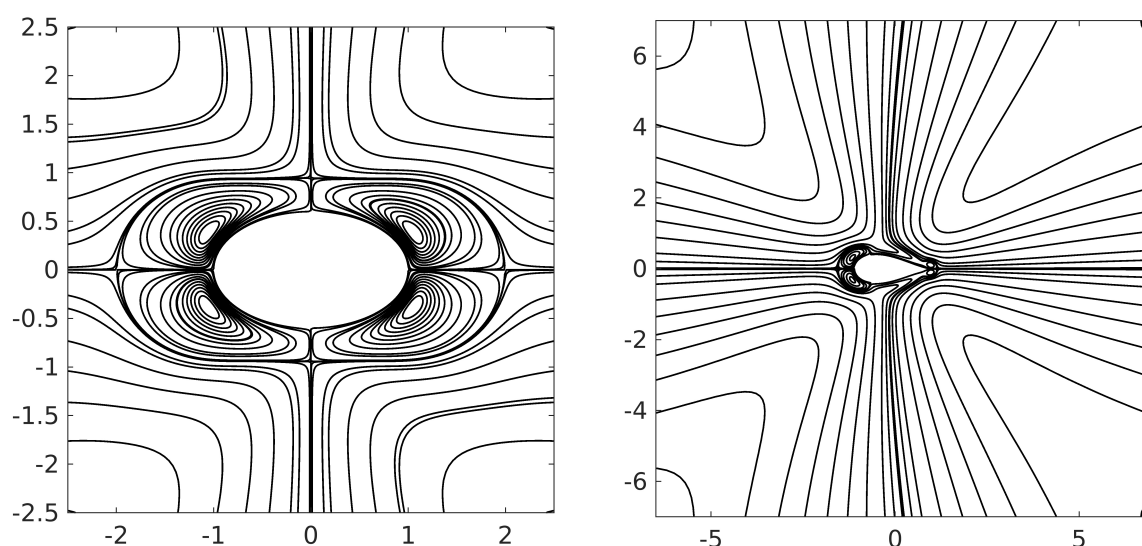


Рис. 2. Вторичные стационарные течения около эллиптического цилиндра ($\beta = 200$, $KC \ll 1$) и профиля Жуковского ($\beta = 190$, $KC \ll 1$)

Fig. 2. Secondary stationary flows around an elliptical cylinder ($\beta = 200$, $KC \ll 1$) and the Joukowski airfoil ($\beta = 190$, $KC \ll 1$)

Основу экспериментального блока составляют классические гидродинамические исследования, проведённые в 1960–1980-х годах [62–67]. Эти работы сформировали общую концепцию для анализа и интерпретации результатов как ранее проведенных аналитических исследований, так и всех последующих работ по изучению колебаний тел в покоящейся жидкости.

В экспериментальной работе Дж. Морисона, Дж. Джонсона и С. Шаафа [68] был представлен, ставший традиционным, подход к обработке гидродинамических сил (подход Морисона). Согласно ему сила, действующая на тело со стороны жидкости вдоль оси колебания пластины, представляется в виде суммы силы сопротивления C_D , пропорциональной скорости, и силы инерции C_M , пропорциональной ускорению осцилляционного движения:

$$F_x \approx \pi C_M \sin t - C_D K C |\cos t| \cos t / \pi.$$

Хотя такая интерпретация гидродинамического воздействия является сильно упрощенной, как можно видеть в (4), она не учитывает даже все члены в случае установившихся гармонических колебаний (см. также критические замечания [69, 70]), в то же время она позволяет оценить влияние двух важнейших гидродинамических эффектов: демпфирования (приводящего к отбору энергии у актуатора) и эффекта присоединенной массы.

В экспериментальных работах М. Тацуно и П. Бирмана [71–74] впервые были проведены подробные исследования структур течения, наблюдаемых около колеблющихся тел. В частности, в [74] впервые была построена карта режимов течения, возникающих около осциллирующего круглого цилиндра в широком диапазоне KC и β . Границы режимов, полученные авторами, изображены на рис. 3.

В экспериментальных работах [75–78] были проведены подробные исследования возникновения трехмерной неустойчивости течений около колеблющихся цилиндрических тел. Первые экспериментальные наблюдения трехмерной неустойчивости течения около круглого цилиндра были представлены в работе Х. Хонджи [75]. Асимптотическая оценка границы устойчивости была получена П. Холлом [79] в предположении больших β и малых KC :

$$KC_h = 5.778\beta^{-1/4}(1 + 0.205\beta^{-1/4} + \dots), \quad (5)$$

которая в широком диапазоне β совпадала с экспериментальными наблюдениями Х. Хонджи. Т. Сарпкая в работах [76–78] существенно расширил область экспериментальных наблюдений для больших чисел Стокса. Используя метод лазерно-флуоресцентной визуализации, Т. Сарпкая выделил зону формирования квазикогерентных структур, которые образуют когерентные структуры, обнаруженные Х. Хонджи в [75], в окрестности линии П. Холла, определяемой уравнением (5). Нижняя граница этой зоны – граница абсолютной устойчивости двумерного течения около осциллирующего круглого цилиндра – была аппроксимирована автором следующим образом:

$$KC_{cr} = 12.5\beta^{-2/5}.$$

Экспериментальные данные в существенной степени дополняются численными исследованиями, которые начали активно проводиться с 1990-х годов. Наиболее полные и разносторонние данные собраны в настоящее время для задачи о гармонических колебаниях круглого цилиндра в покоящейся жидкости [45, 80–93]. В двумерных численных исследованиях [80–83, 87] проведен подробный структурный анализ течений, проанализирована двумерная устойчивость, построены зависимости гидродинамического сопротивления от

управляющих параметров колебательного процесса. Результаты двумерного моделирования течений в диапазоне параметров экспериментальных исследований [74] представлены на рис. 3, 4, где, в частности, продемонстрирована структура режимов течения, возникающая после (двумерной) потери устойчивости симметричных режимов обтекания S и S^* , описываемых асимптотическим решением (3).

Численные исследования трехмерной неустойчивости течений около осциллирующего круглого цилиндра проведены в работах [45, 90–92, 94]. На рис. 3, 4 изображены характерные картины течений, полученные по результатам трехмерного численного моделирования А.Н. Нуриева [45], около круглого цилиндра при возникновении трехмерной неустойчивости Хонджи. В рамках исследований [45, 94] была установлена важная особенность трехмерных течений около осциллирующего тела: даже после формирования трехмерных структур в достаточно широком диапазоне амплитуд колебания они не оказывают существенного влияния на динамику течения в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, что, в частности, позволяет хорошо описать динамику течения в рамках двумерного моделирования.

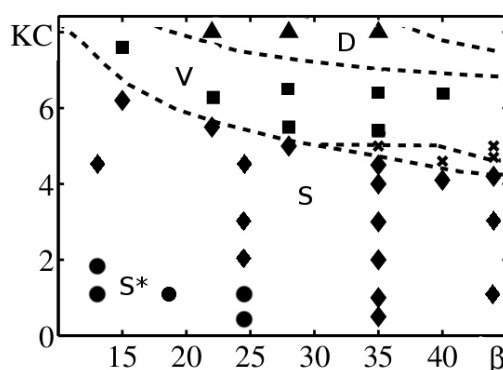


Рис. 3. Карта режимов течения около круглого цилиндра. Пунктирные линии – экспериментально наблюдаемые границы режимов [74]. Маркеры – результаты численных расчетов [80]. Визуализация режимов течения S , S^* , V и D представлена на рис. 1, 4

Fig. 3. Map of the flow regimes around a circular cylinder. The dashed lines show the regime boundaries observed experimentally [74]. The markers are the results of numerical calculations [80]. The flow regimes S , S^* , V , and D are visualized in Figs. 1, 4

В последние несколько лет благодаря развитию прикладных направлений начали активно проводиться исследования периодического движения удлиненных (цилиндрических) жестких и упругих тел некруглой формы, совершающих колебания по сложным законам. Имеющиеся данные свидетельствуют о значительных изменениях в течениях и сопутствующем гидродинамическом воздействии при варьировании как формы актуатора (колеблющегося тела), так и закона движения [62–64]. Тем не менее сколько-нибудь общих зависимостей для сил или структур течения на данный момент не установлено, и исследование каждого частного случая проводится в индивидуальном порядке (в своем, интересном с прикладной точки зрения, диапазоне параметров). Так, развитие исследований колебаний цилиндрических тел с прямоугольным профилем сечения тесно связано с изучением аэродинамического воздействия на удлиненные тонкие балочные конструкции, совершающие упругие резонансные колебания. Интерес к такому типу задач, в свою очередь, вызван появлением целого ряда перспективных технологических решений с применением пьезоактуаторов изгиба [7–9].

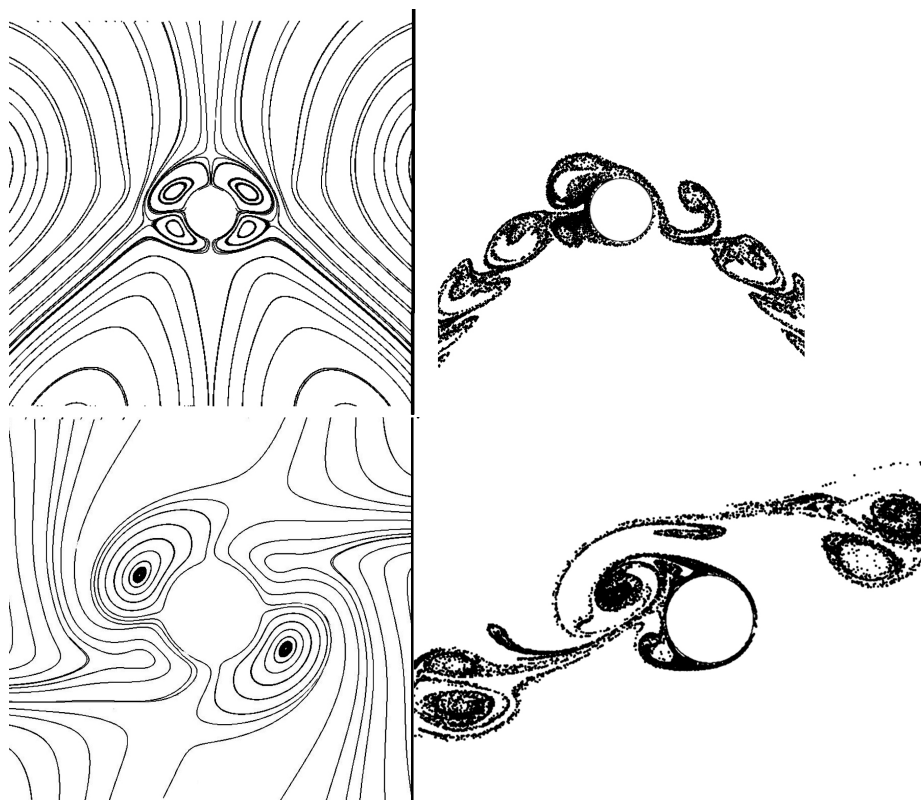


Рис. 4. Визуализация режимов течения около круглого цилиндра, совершающего поступательные колебания вдоль горизонтальной оси (плоскость xOy) при $\beta = 35$, $KC = 5.5$ (рисунок сверху, V режим), при $\beta = 35$, $KC = 8$ (рисунок снизу, D (диагональный) режим). Справа изображены линии тока вторичных течений, слева представлены мгновенные картины течений, визуализированные с помощью невесомых частиц

Fig. 4. Visualization of the flow regimes around a circular cylinder undergoing translational oscillations along the horizontal axis (xOy plane) at $\beta = 35$, $KC = 5.5$ (top image, V regime) and $\beta = 35$, $KC = 8$ (bottom image, D (diagonal) regime). Streamlines of the secondary flows are shown on the right, and the instantaneous flow patterns visualized using neutrally buoyant particles are displayed on the left

2. Упругие колебания балок в вязкой несжимаемой жидкости

В значительном числе современных работ исследования колебаний длинных упругих балок в жидкости (см., например, [7, 32, 50–52, 95, 96]) основаны на моделях квазидвумерного взаимодействия между жидкостью и балкой, согласно которым аэрогидродинамическое воздействие, оказываемое на каждое сечение балки, можно считать результатом его плоского обтекания. Таким образом, гидродинамические силы в каждом сечении считаются (как и в случае колебания твердого цилиндрического тела) функциями двух основных параметров: безразмерной частоты колебаний β и безразмерной локальной амплитуды колебаний KC . Объединение квазидвумерной модели взаимодействия, модели Морисона для описания гидродинамических сил и классической теории колебания балок дает возможность установить интегральные связи между параметрами колебания балки и гидродинамическими силами, действующими на нее со стороны жидкости. Это позволяет, в частности, использовать результаты обтекания гармонически осциллирующих жестких

цилиндрических тел для определения параметров аэродинамического воздействия на балки с аналогичным профилем поперечного сечения. Такой подход зарекомендовал себя в задачах определения аэрогидродинамического демпфирования балок при малоамплитудных колебаниях [50–52] (где максимальное значение параметра KC не превышает 0.3). Все численные и экспериментальные результаты, собранные в этой области, достаточно хорошо согласуются между собой.

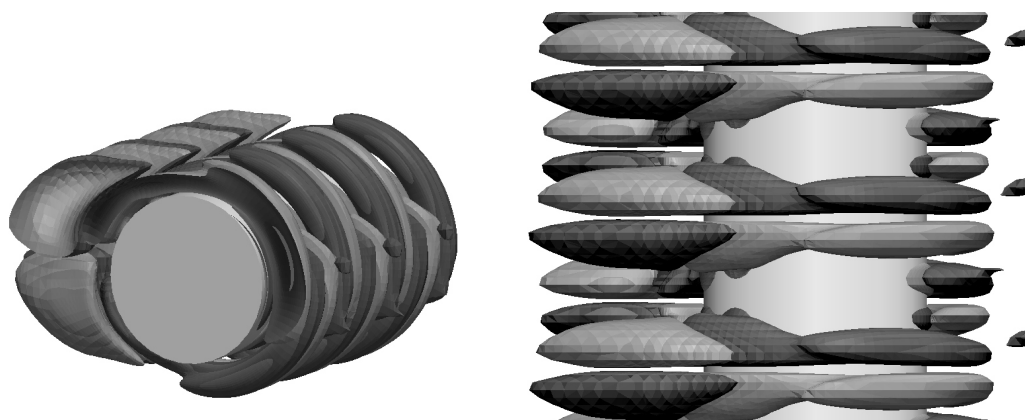


Рис. 5. Трехмерная картина течения около круглого цилиндра, совершающего поступательные колебания. Изоповерхности y -компоненты завихренности $\beta = 196$, $KC = 2.3$

Fig. 5. 3D visualization of the flow around a circular cylinder undergoing translational oscillations. Isosurfaces of the y -component of vorticity at $\beta = 196$, $KC = 2.3$

Исследования колебаний длинных балок в области больших амплитуд имеют более разрозненные результаты. Существенный разброс наблюдается даже в классических экспериментальных данных, полученных разными группами исследователей для тонких пластин – Г. Келеганом и Л. Карпентером [62], С. Сингхом, П. Бирманом, Дж. Грэхемом и др. [63–65]. Так, например, можно обнаружить существенные отличия, составляющие от 30 % до 40 % в разных диапазонах, по оценке коэффициента сопротивления пластин C_D в зоне умеренно больших значений безразмерной амплитуды $0.5 < KC < 12$.

Разброс оценок коэффициента сопротивления тонких пластин наблюдается и в ранних численных исследованиях. Первые попытки смоделировать отрывные течения при больших амплитудах колебания пластины были предприняты в работе Дж. Грэхема [97]. Используя метод дискретных вихрей (discrete-point-vortex method), автору удалось описать развитие вихревой структуры в окрестности торцов пластины, однако полученные на базе этого подхода оценки сил сопротивления, действующих на пластину, лишь качественно согласовались с экспериментальными данными [64]. Дискретная вихревая модель применялась для описания движения жидкости вокруг осциллирующей пластины в работе Р. Бидкара и др. [7]. Найденные здесь решения всюду в диапазоне $0 < KC < 5$ имели структуру, симметричную относительно оси колебания, что не соответствует экспериментальным наблюдениям. Вычисленные значения гидродинамических сил, действующих на пластину, также оказались ощутимо выше оценок, полученных экспериментально.

Современные численные модели, основанные на гидродинамике сглаженных частиц [98], методе решеточных уравнений Больцмана [99], методе конечных объемов [31, 100], дают качественно лучшее согласование с результатами экспериментов по оценке гидродинамических сил, действующих на пластины. В частности, в работе А.Н. Нуриева,

А.М. Камалутдинова и А.Г. Егорова [100] было проведено подробное исследование течений около колеблющихся пластин, соответствующего гидродинамического воздействия на них, а также причин отличия экспериментальных данных [64] и [62]. Полученные здесь результаты позволили классифицировать практически все режимы течения около пластины, обнаруженные ранее в различных экспериментальных исследованиях. Так, в названной работе впервые были смоделированы и подробно описаны диагональный и односторонний диагональный режимы, формирующиеся около пластин при умеренных и высоких амплитудах колебания и обнаруженные ранее в экспериментах [62] и [64]. В диапазоне низких амплитуд колебаний были смоделированы и изучены три симметричных режима течения (их визуализация представлена на рис. 7), локализованных ранее в экспериментальных исследованиях [101]. Большинство из описанных течений около пластин оказалось в значительной степени схожим с течениями, формирующимися у других осциллирующих цилиндрических тел, в частности круглого цилиндра. В особенности следует отметить практически идентичную структуру симметричных режимов, наблюдаемых при самых малых KC , и диагонального режима, формирующегося при высоких значениях безразмерной амплитуды колебания (см. рис. 7, 8). Как показали результаты исследования [100], несмотря на схожие режимы обтекания, наблюдаемые при одинаковых значениях параметров колебания, даже близкие по форме осциллирующие тела могут испытывать кардинально различное гидродинамическое воздействие. Так, даже изменение формы торца пластины имеет ощутимое влияние на величину гидродинамического сопротивления в режимах течения с интенсивным вихреобразованием, наблюдаемых при больших KC , в то время как влияние толщины пластины сказывается на сопротивлении уже в диапазоне малых амплитуд колебания при выходе из стоксовского режима обтекания.

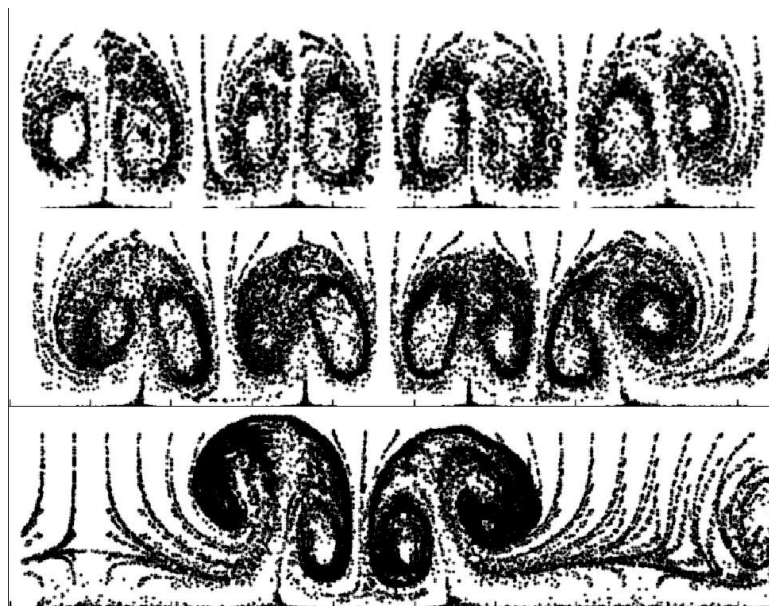


Рис. 6. Эволюция грибовидных структур (вихрей Хонджи) около осциллирующего круглого цилиндра в плоскости zOy при $\beta = 1035$, $KC = 1.5$. Визуализация с помощью невесомых частиц

Fig. 6. Evolution of the mushroom-like flow structures (Honji vortices) around an oscillating circular cylinder in the zOy plane at $\beta = 1035$, $KC = 1.5$. Visualization performed using neutrally buoyant particles

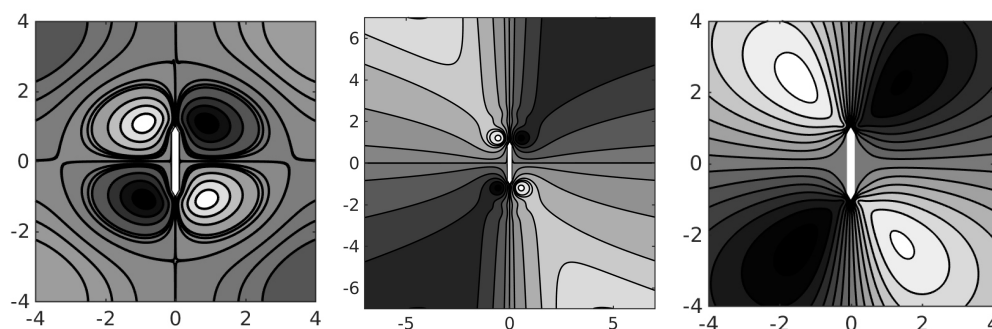


Рис. 7. Вторичные симметричные режимы течения около осциллирующих пластин
Fig. 7. Secondary symmetric flow regimes around oscillating plates

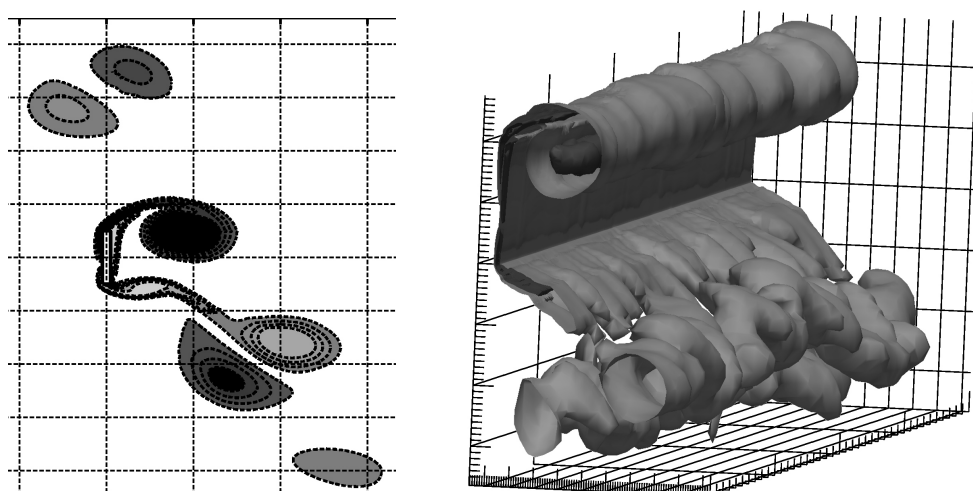


Рис. 8. Диагональный режим течения около осциллирующей пластины. Результаты двумерного и трехмерного моделирования ($KC = 7$, $\beta = 64$)

Fig. 8. Diagonal flow regime around an oscillating plate. Results of the 2D and 3D simulations ($KC = 7$, $\beta = 64$)

В работах А.Г. Егорова и его учеников [32, 95, 102, 103] были представлены результаты по определению характеристик силового аэродинамического воздействия на длинные балки по экспериментально измеренным параметрам колебания в диапазоне $0 < KC < 12$. Переход от параметров колебания к аэродинамическим характеристикам в этих работах проводился в рамках квазидвумерной гипотезы с помощью решения нелинейных интегральных уравнений с ядром, определяемым профилем основной моды изгибных колебаний. Авторами была получена следующая формула для определения гидродинамического воздействия на сечение балки в зависимости от локальных параметров KC и β :

$$C_D(KC, \beta) = \frac{28.97}{KC\sqrt{\beta}} + 0.171 \left(\frac{KC}{2\pi} \right)^{a-0.58} \frac{\left(a + 3.087 + 25.8 \left(\frac{KC}{2\pi} \right)^a \right)}{\left(0.12 + \left(\frac{KC}{2\pi} \right)^a \right)^2},$$

где $a = 1.03 + 16.61\beta^{-0.627}$. Этот результат оказался в достаточной степени согласован с оценками, полученными в рамках расчетов для плоских течений, и с экспериментальными данными по обтеканию жестких недеформируемых пластин в диапазоне $KC < 12$, $50 < \beta < 1500$.

Трехмерные численные и экспериментальные исследования гидродинамики около колеблющихся упругих балок, а также изучение границ применимости квазидвумерной теории были проведены в работах [8,9,103–107]. В исследовании А. Фаччи и М. Порфири [104] дана оценка границ применимости квазидвумерной модели взаимодействия в диапазоне малых амплитуд колебаний $KC < 0.35$. В ходе трехмерного численного моделирования авторами было показано, что для пластин с безразмерной длиной (определяемой как отношение длины к ширине) $L > 3$ трехмерные эффекты, в том числе сход вихрей со свободного конца пластины, оказывают минимальное влияние на распределение аэродинамических сил вдоль пластины.

В работах А.Н. Нуриева и др. [103, 107] исследование границ применимости квазидвумерной модели проведено для более широкого диапазона амплитуд $KC \leq 6$ – показано, что при обтекании длинных балок $L = 10, 20$ формируется квазидвумерная зона течений, в которой поперечные потоки становятся доминирующими. Квазидвумерная зона у балок длины $L = 20$ образуется во всем диапазоне исследуемых параметров $KC \leq 6$, $200 \leq \beta \leq 550$ в средней части балки на удалении от фиксированного основания и свободного конца. В этой зоне наблюдаются практически все те же ключевые режимы течения, что возникают при колебаниях жестких пластин: симметричный режим, С-образный, односторонний диагональный режим и диагональный режим обтекания (визуализация последнего представлена на рис. 9). Границы режимов в квазидвумерной зоне оказались чувствительными к значению безразмерной амплитуды колебаний конца балки. Наиболее точно соответствуют карте плоских течений по KC режимы, наблюдаемые в окрестностях торцов балки вне зоны трехмерных торцевых эффектов.

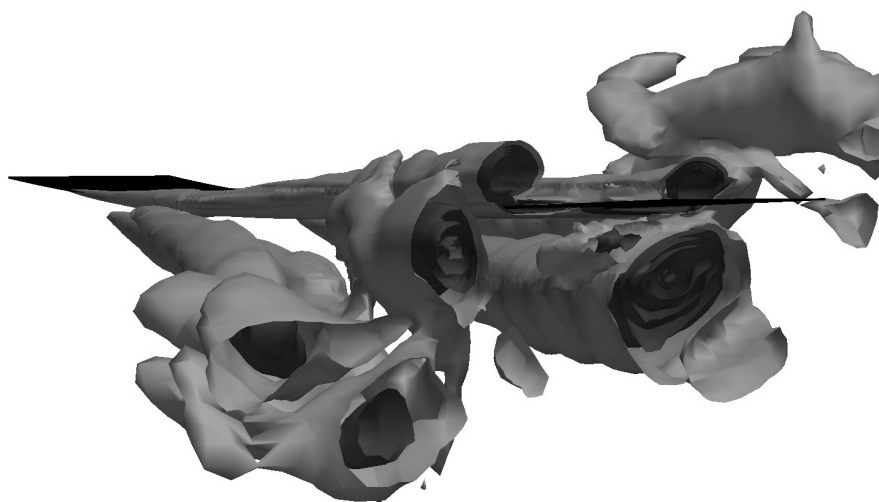


Рис. 9. Диагональный режим, формирующийся в средней части балки, совершающей изгибные колебания ($\beta = 200$)

Fig. 9. Diagonal flow regime developing in the central part of a beam undergoing flexural oscillations ($\beta = 200$)

Для коротких балок $L < 3$ квазидвумерная гипотеза оказалась неприменимой (см. работы [8,9,105,106]), здесь значительную роль (или даже доминирующую) играют течения, развивающиеся вдоль балки. Формирование интенсивных продольных течений изменяет поперечное гидродинамическое воздействие и приводит к возникновению новых гидродинамических эффектов, таких, например, как сила тяги, направленная вдоль оси балки.

3. Колебательные движители

Изучение механизмов возникновения тяги в процессе колебательного движения тел, а также устойчивого направленного движения колеблющихся тел является еще одним важнейшим направлением развития исследований в обозреваемой области. Оно напрямую связано с изучением полета птиц и плавания рыб, а также созданием биомиметических колебательных движителей. Теория колебательного движения тел в потоке стала развиваться с начала 20-го века. В 1922 году Л. Прандтлем [108] была сформулирована проблема нестационарного движения крыла, которая в линейном приближении была решена в работе В. Бирнбаума [109]. Решение дало качественные оценки силы тяги, создаваемой крылом. Подход Прандтля – Бирнбаума, основанный на введении поверхностей разрыва скоростей внутри идеальной жидкости, стал базой для многочисленных исследований аэрогидромеханики машущего крыла. Развивая этот подход, Т. Теодорсен [110] в 1935 году сформулировал теорию для расчета гидродинамических сил, действующих на крыло в случае малоамплитудных гармонических колебаний (предполагая выполнение постулата Жуковского – Чаплыгина). Опираясь на нее, И. Гаррик [111] получил выражение для силы тяги колеблющегося тонкого профиля. В дальнейшем эта теория развивалась в работах Г. Вагнера [112], Г. Глауэрта [113] и др. Практически в то же время в работах Г. Кюсснера [114], Г. Кюсснера и И. Шварца [115] был предложен метод решения проблемы нестационарного движения крыла, основанный на суперпозиции сингулярностей (в идеальной жидкости). В СССР решение задачи об оценке силы тяги, действующей на тонкую осциллирующую пластинку в идеальной жидкости, было получено в 1935 году М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым [116] на основе методов комплексного анализа. Этот подход нашел свое дальнейшее развитие в работах Л.И. Седова [117], А.И. Некрасова [118] и других исследователей. В 1935 году Т. Карман и И. Бюргерс в работе [119] описали особую структуру вихревого следа, формирующегося за осциллирующим крыловым профилем. Он оказался похожим на классическую дорожку Кармана, но с противоположным направлением вращения вихрей (его называют также вихревой дорожкой Голубева). Это дало толчок к формированию еще одного класса моделей аэрогидродинамики машущего крыла (в идеальной жидкости), основу которого заложил в 1940-е годы В.В. Голубев [120, 121].

В настоящее время подходы к исследованию аэрогидродинамики жесткого машущего крыла, основанные на теории идеальной жидкости, продолжают активно развиваться как в области совершенствования чисто аналитических моделей, так и в направлении создания аналитико-численных и численных методов, таких как метод дискретных вихрей и панельный метод. В этой связи можно отметить работы К.В. Рождественского [122, 123], Д.Н. Горелова [124], Р. Жбиковски [125], А. Адзумы и М. Окамото [126], Д. Матеску и М. Абдо [127], С. Глегга и У. Девенпорта [128], Г.Я. Дынниковой и др. [129], В.А. Рыжова [130], Д. Питерса [131, 132].

В 1960-х годах стало развиваться еще одно направление исследований колебательных движителей, посвященное изучению формирования тяги за счет периодического изменения формы тела (большое влияние на которое оказал парадокс Грея). Начало плоской теории движения тонкого волнообразно колеблющегося профиля (в идеальной жидкости) было положено в работах Дж. Зикмана [133] и Т. Ву [134]. Зикман распространил развитую Л. Шварцем [135] теорию граничных и свободных вихрей, в которой тонкое крыло представлено распределением пограничных вихрей, а след – свободными вихрями. Т. Ву развил теорию Теодорсена [110], однако вместо потенциала скоростей использовал

потенциал ускорений. Результаты Дж. Зикмана и Т. Ву были апробированы в рамках экспериментов Х. Келли и др. [136], в которых исследовались колебания резиновых и металлических пластинок в воде. Экспериментальные данные измерений тяги оказались ниже расчетных, что указывает на важность учета вязких эффектов на пластинке и соответствующих потерь энергии. В дальнейшем плоская теория развивалась в работах [137–141]. В работах Л.И. Коренной [140, 141] в рамках плоской теории была рассмотрена гипотеза об уменьшении сопротивления трения на волнообразно колеблющемся теле. Автору удалось показать, что в процессе распространения локомоторной волны вдоль движущейся в воде гибкой пластины от ее головной части к хвостовой при определенных условиях отдельные ее участки могут двигаться как в направлении обтекающего потока, так и в обратном направлении.

Основоположником пространственной теории пропульсивного движения колеблющегося тонкого тела можно считать Дж. Лайтхилла [142–145], разработавшего модель для определения тяги длинного цилиндрического тела переменного сечения, совершающего волнообразные движения (в идеальной жидкости). Идеи Лайтхилла получили дальнейшее развитие в ряде работ [146–153]. В [149, 150] теория тонкого тела была распространена на случай анализа пропульсивных характеристик рыбоподобного тела, которое может иметь плавники различной конфигурации. Независимо в 1960–1980-е годы аналогичная теория волнового движения тела развивалась в СССР М.А. Лаврентьевым и М.М. Лаврентьевым [154], Г.В. Логвиновичем [155–157], В.Е. Пятецким и Е.В. Романенко [158, 159]. В настоящее время подходы к исследованию аэрогидродинамики колеблющегося тонкого тела, основанные на теории идеальной жидкости, продолжают активно развиваться. Отметим в этой связи работы [160–164].

В 1980-х годах начали активно развиваться исследования в области разработки математических моделей, учитывающих упругие свойства машущего крыла и упругих связей, обеспечивающих его крепление к несущей конструкции. Отметим здесь работы Д.Н. Горелова [165], Р.А. Грунтфеста и Н.П. Дерезиной [166, 167], Ф.Н. Шклярчука и Т.В. Гришаниной [168, 169], К.В. Рождественского и В.А. Рыжова [130, 170, 171], Дж. Каца и Д. Вайса [172], Е.И. Каргузова [173], М.А. Сумбатяна и А.Е. Тарасова [174, 175]. Аэроупругие модели машущего крыла обычно сочетают в себе классическую балочную теорию с аэрогидродинамическими моделями движения крыла в идеальной жидкости. На основе такого подхода аэроупругий анализ гибкого крыла был проведен в работе М. Берчи и др. [176]. Для постановки задачи было использовано уравнение Эйлера – Бернулли для балки, при этом аэродинамические нагрузки учитывались с помощью модели, представленной в работе [131] и развивающей классический подход Прандтля – Бирнбаума. Т.В. Гришаниной и Ф.Н. Шклярчуком [169] были исследованы нестационарные аэродинамические нагрузки, действующие на деформируемый тонкий профиль при его произвольном движении в несжимаемом потоке с поперечными порывами ветра. Для решения задачи было использовано точное решение Кюсснера [177], в котором функция Теодорсена аппроксимировалась суммой дробных функций с полюсами [178]. Объединив полученные уравнения с дифференциальными уравнениями движения профиля, авторы исследовали устойчивость аэроупругой системы и провели расчет ее динамической реакции на порывы ветра.

Наиболее слабой стороной аэрогидродинамических моделей пропульсивного движения, основанных на теории идеальной жидкости, является необходимость формулирования дополнительных предположений о точках отрыва потока или структуре вихревого следа,

которые в большинстве случаев существенно ограничивают область применимости таких моделей. Начиная с 1990-х годов, появились возможности прямого численного моделирования аэрогидродинамики машущего крыла и рыбоподобного движения (решение полного уравнения Навье–Стокса), см., например, [179–192]. В настоящее время для изучения аэрогидродинамики птиц и рыб в жидкости широко используют и полные трехмерные численные модели (см., например, [193–196]). На основе данных обзорной работы 2020 года Ся Ву и др. [197] отметим, что за последние два десятилетия (с 2000 по 2020 год) прямое численное моделирование гидродинамики около колеблющихся профилей NASA0014, NASA0012 и NASA0009 проводилось более чем в двадцати четырех исследованиях, около колеблющегося эллиптического цилиндра – более чем в шести исследованиях, около колеблющейся тонкой пластинки – более чем в четырнадцати исследованиях и т. д. При этом практически все полученные результаты находятся в разных диапазонах параметров (частот, амплитуд, фазовых сдвигов, углов поворота, скоростей набегающего потока и т. д.), что существенно осложняет их систематизацию.

Относительно недавно при исследовании пропульсивного движения тел в жидкости стали применять асимптотические методы решения уравнения Навье–Стокса. Развивая идеи [36–38], Н. Райли и Е. Ватсон [198] провели асимптотическое исследование задачи о вращательно-поступательных колебаниях круглого цилиндра. В этой работе главным образом рассматривались структурные особенности вторичных течений в условиях нулевой средней скорости движения цилиндра. Для случая высоких частот авторами было отмечено появление ненулевой средней силы, действующей на цилиндр.

В исследованиях А.Н. Нуриева и А.Г. Егорова [199, 200] в 2022 году в рамках асимптотического подхода впервые были получены аналитические решения уравнения Навье–Стокса, описывающие крейсерский режим движения машущего цилиндрического крыла при малоамплитудных колебаниях $KC \ll 1$. Задача была сформулирована аналогично (1), но помимо поступательных были заданы еще и вращательные колебания:

$$r = 1 : \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \xi \cos t, \quad r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim -r \sin \theta \cos t + u_\infty r \cos(\theta + \alpha). \quad (6)$$

Течение при такой постановке определяется тремя параметрами подобия: KC , β и ξ . Последний определяет отношение амплитуд вращательного Θ и поступательного A колебаний:

$$\xi = R\Theta/A = \pi\Theta/KC.$$

Условие на бесконечности (6) задает однородный осцилляционный поток в направлении (оси Ox) колебаний цилиндра, а также стационарный поток, направленный под углом α к оси Oy , который определяет среднюю скорость движения цилиндра в жидкости $u_\infty = u_\infty^* \Theta$.

В работе [199] были определены первые два члена разложения по KC

$$\psi = \psi^{(0)} + KC(\psi^{(1,u)} + \psi^{(1,s)})/\pi \dots$$

Слагаемое $\psi^{(0)}$ описывает стоксовское чисто периодическое течение около цилиндра. Решение при KC содержит как периодическую $\psi^{(1,u)}$, так и стационарную $\psi^{(1,s)}$ составляющие. Последняя определяет вторичные течения около цилиндра.

Выражение для стационарной составляющей было получено в названной работе в виде

$$\begin{aligned}\psi^{(1,s)} &= \Psi_x(r) \sin 2\theta + \xi \Psi_\theta(r) \cos \theta, \\ \Psi_x &= \tilde{\Psi}_x - \frac{B_x}{r^2} + C_x \left(1 - \frac{1}{r^2}\right), \quad \Psi_\theta = \tilde{\Psi}_\theta - \frac{B_\theta}{r} + C_\theta \left(r - \frac{1}{r}\right) + D \left(r \ln r - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right), \\ \tilde{\Psi}_x &= -\frac{r^4}{48} \frac{\beta\pi}{2} \int_1^\infty G_x(rx) (x^2 - 1)^3 \frac{dx}{x}, \quad \tilde{\Psi}_\theta = -\frac{r^4}{16} \frac{\beta\pi}{2} \int_1^\infty G_\theta(rx) (x^4 - 4x^2 \ln x - 1) dx;\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}G_\theta(r; \beta) &= \frac{1}{r} \frac{\beta\pi}{2} \operatorname{Im}(S) |\Phi_1|^2 - \frac{\beta\pi}{4} \operatorname{Im} \left((1 - \bar{S}r^{-2}) \Phi_1 \right), \\ G_x(r; \beta) &= \frac{\beta\pi}{4} \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{S}\Phi_0}{r^2} + 2S\Phi_2\bar{\Phi}_0 - S\Phi_2 \right), \\ \Phi_k(r; \beta) &= \frac{K_k(\sqrt{i\beta\pi/2}r)}{K_k(\sqrt{i\beta\pi/2})}, \quad S(\beta) = \frac{K_2(\sqrt{i\beta\pi/2})}{K_0(\sqrt{i\beta\pi/2})}.\end{aligned}$$

Граничные условия при $r = 1$, $r \rightarrow \infty$ удовлетворяются за счет выбора произвольных констант $B_{x,\theta}$, $C_{x,\theta}$

$$B_{x,\theta} = \tilde{\Psi}_{x,\theta}(1), \quad C_\theta = -\frac{\tilde{\Psi}'_\theta(1) + \tilde{\Psi}_\theta(1)}{2}, \quad C_x = -\frac{\tilde{\Psi}'_x(1) + 2\tilde{\Psi}_x(1)}{2}, \quad D = 0.$$

Крейсерская скорость движения из этого решения определяется как

$$u_\infty^* = C_\theta(\beta), \quad \alpha = 0.\tag{8}$$

Кривая изменения коэффициента крейсерской скорости $u_\infty^* = C_\theta$ в зависимости от β , построенная по этому аналитическому выражению, представлена на рис. 10, на нем же маркерами изображены результаты прямого численного моделирования пропульсивного движения цилиндра.

Сопоставление численных и аналитических результатов показало, что диапазон применимости построенного асимптотического приближения (где различие между теоретическими и численными оценками крейсерской скорости не превышает 12 %) достаточно широк: для умеренных частот $100 \leq \beta \leq 300$ определяется как $0 < KC \leq 2.5$, $0.3 \leq \Theta \leq 1.7$; для высоких частот $300 < \beta < 4000$ имеет следующие границы: $0 < KC \leq 1$, $0.3 \leq \Theta \leq 1.7$. В обозначенных границах найденное асимптотическое решение хорошо описывает всю структуру вторичного течения (см. рис. 11).

В целом результаты [199, 200] указывают на большие перспективы использования асимптотических методов в области исследования колебательных движителей.

Заключение

Проведенный обзор показал, что решение широкого класса прикладных задач, связанных с колебаниями жестких и упругих тел в жидкости, сводится к одному и тому же блоку гидродинамических проблем взаимодействия удлиненного тела с вязкой жидкостью. Сюда можно отнести и проблемы влияния формы колеблющегося тела, закона и параметров колебаний на структуру первичных и вторичных течений, их интегральные и локальные

характеристики, проблемы появления двумерных и трехмерных неустойчивостей течения, взаимодействия форм и частот колебательного движения, минимизации или максимизации гидродинамического сопротивления и т. д. Отдельные результаты из разных областей здесь являются своего рода кусочками мозаики. Складывая их, можно построить общую картину гидродинамических процессов.

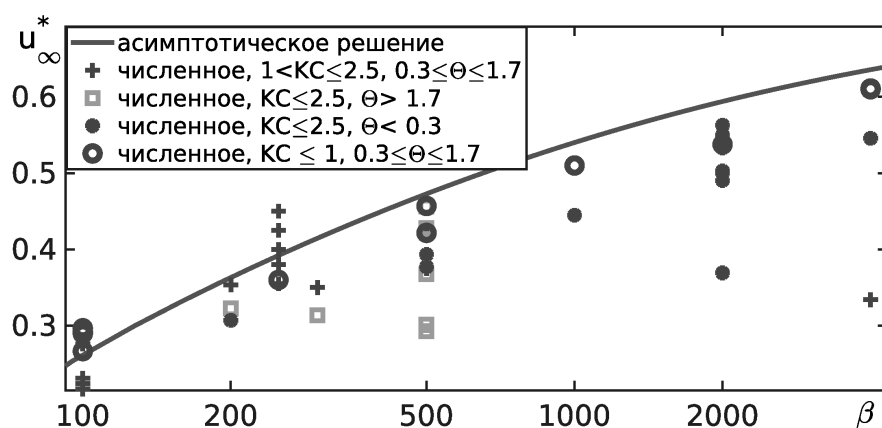


Рис. 10. Зависимость скорости u_{∞}^* от безразмерной частоты колебаний β . Сплошная линия – кривая асимптотической зависимости (8), маркеры – численные данные

Fig. 10. Velocity u_{∞}^* in relation to the dimensionless oscillation frequency β . The solid line corresponds to the asymptotic curve (8), and the markers are numerical results

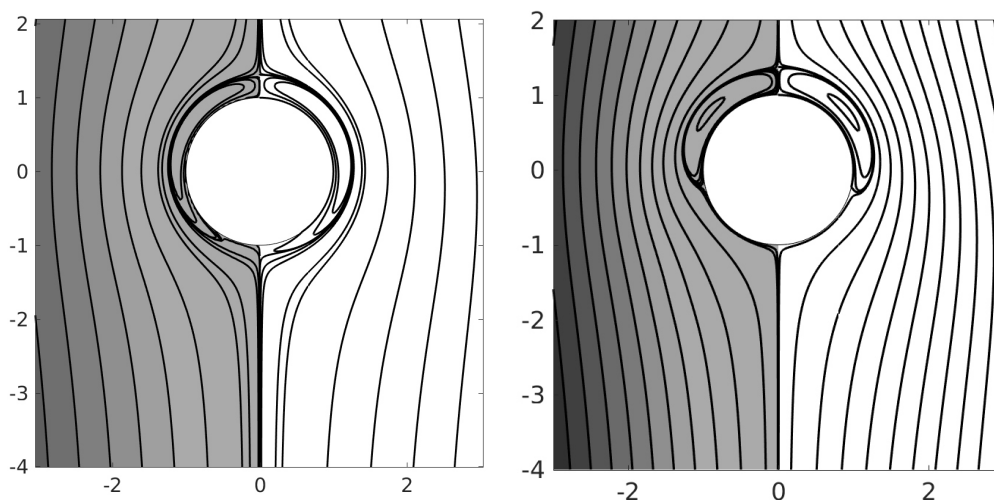


Рис. 11. Линии тока вторичных течений около цилиндра, совершающего вращательно-поступательные колебания, построенные по решению (7) (правая часть изображения) и полученные в рамках прямого численного моделирования (левая затемненная часть изображения) для $\beta = 100$, $KC = 0.4$, $\xi = 7.3$ и $KC = 2$, $\xi = 2$

Fig. 11. Streamlines of the secondary flows around a cylinder undergoing combined translational and rotational oscillations derived from the solution of (7) (the right side) and obtained from the direct numerical simulation (the left shaded side) for $\beta = 100$, $KC = 0.4$, $\xi = 7.3$ and $KC = 2$, $\xi = 2$

Литература

1. *Sader J.E.* Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope // *J. Appl. Phys.* 1998. V. 84, No 1. P. 64–76. <https://doi.org/10.1063/1.368002>.
2. *Scherer M.P., Frank G., Gummer A.W.* Experimental determination of the mechanical impedance of atomic force microscopy cantilevers in fluids up to 70 kHz // *J. Appl. Phys.* 2000. V. 88, No 5. P. 2912–2920. <https://doi.org/10.1063/1.1287522>.
3. *Aureli M., Prince Ch., Porfiri M., Peterson S.D.* Energy harvesting from base excitation of ionic polymer metal composites in fluid environments // *Smart Mater. Struct.* 2010. V. 19, No 1. Art. 015003. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/1/015003>.
4. *Erturk A., Inman D.J.* Piezoelectric Energy Harvesting. Chichester: John Wiley & Sons. 2011. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9781119991151>.
5. *Yu Y.-H., Tom N., Jenne D.* Numerical analysis on hydraulic power take-off for wave energy converter and power smoothing methods // *Proc. ASME 2018 37th Int. Conf. on Ocean, Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. V. 10: Ocean renewable energy. Art. OMAE2018-78176, V010T09A043. Madrid: ASME, 2018. <https://doi.org/10.1115/OMAE2018-78176>.
6. *Martin P.A., Farina L.* Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc // *J. Fluid Mech.* 1997. V. 337. P. 365–379. <https://doi.org/10.1017/S0022112097004989>.
7. *Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S.V.* Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan–Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 2009. V. 634. P. 269–289. <https://doi.org/10.1017/s0022112009007228>.
8. *Ebrahimi N.D., Eldredge J.D., Ju Y.S.* Wake vortex regimes of a pitching cantilever plate in quiescent air and their correlation with mean flow generation // *J. Fluids Struct.* 2019. V. 84. P. 408–420. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.11.010>.
9. *Oh M.H., Seo J., Kim Y.-H., Choi M.* Endwall effects on 3D flow around a piezoelectric fan // *Eur. J. Mech. – B/Fluids*. 2019. V. 75. P. 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.10.021>.
10. *Козлов В.В., Онищенко Д.А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // *ПММ*. 2003. Т. 67, № 4. С. 620–633.
11. *Черноусько Ф.Л.* Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // *ПММ*. 2008. Т. 72, № 2. С. 202–215.
12. *Егоров А.Г., Захарова О.С.* Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // *ПММ*. 2010. Т. 74, № 4. С. 620–632.
13. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M.* Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 8. P. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
14. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // *ПММ*. 2012. Т. 76, № 1. С. 3–22.

15. *Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T.* A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 2011. V. 669. P. 527–556. <https://doi.org/10.1017/S002211201000515X>.
16. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V.* Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation // *Regular Chaotic Dyn.* 2018. V. 23, Nos 7–8. P. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.
17. *Kopman V., Porfiri M.* Design, modeling, and characterization of a miniature robotic fish for research and education in biomimetics and bioinspiration // *IEEE/ASME Trans. Mechatron.* 2013. V. 18, No 2. P. 471–483. <https://doi.org/10.1109/tmech.2012.2222431>.
18. *Yeh P.D., Alexeev A.* Free swimming of an elastic plate plunging at low Reynolds number // *Phys. Fluids.* 2014. V. 26, No 5. Art. 053604. <https://doi.org/10.1063/1.4876231>.
19. *Yeh P.D., Demirer E., Alexeev A.* Turning strategies for plunging elastic plate propulsor // *Phys. Rev. Fluids.* 2019. V. 4. Art. 064101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.064101>.
20. *Shintake J., Cacucciolo V., Shea H., Floreano D.* Soft biomimetic fish robot made of dielectric elastomer actuators // *Soft Rob.* 2018. V. 5, No 4. P. 466–474. <https://doi.org/10.1089/soro.2017.0062>.
21. *Feng J., Cho S.K.* Two-dimensionally steering microswimmer propelled by oscillating bubbles // *Proc. 2014 IEEE 27th Int. Conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*. San Francisco, CA, 2014. P. 188–191. <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2014.6765606>.
22. *Dijkink R.J., van der Dennen J.P., Ohl C.D., Prosperetti A.* The ‘acoustic scallop’: A bubble-powered actuator // *J. Micromech. Microeng.* 2006. V. 16, No 8. P. 1653–1659. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/16/8/029>.
23. *Chen C., Zhang S.P., Mao Z., Nama N., Gu Y., Huang P.-H., Jing Y., Guo X., Costanzo F., Huang T.J.* Three-dimensional numerical simulation and experimental investigation of boundary-driven streaming in surface acoustic wave microfluidics // *Lab Chip.* 2018. V. 18, No 23. P. 3645–3654. <https://doi.org/10.1039/C8LC00589C>.
24. *Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J.* Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices // *Sci. Adv.* 2021. V. 7, No 2. Art. eabc7885. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abc7885>.
25. *Губайдуллин Д.А., Зарипов Р.Г., Осипов П.П., Ткаченко Л.А., Шайдуллин Л.Р.* Волновая динамика газовзвесей и отдельных частиц при резонансных колебаниях // *ТБТ.* 2021. Т. 59, № 3. С. 443–466. <https://doi.org/10.31857/S0040364421030054>.
26. *Zhu L., Lim H.-C.* Hydrodynamic characteristics of a separated heave plate mounted at a vertical circular cylinder // *Ocean Eng.* 2017. V. 131. P. 213–223. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.01.007>.
27. *McNamara K.P., Love J.S., Tait M.J.* Nonlinear modeling of series-type pendulum tuned mass damper-tuned liquid damper // *J. Vib. Acoust.* 2022. V. 144, No 4. Art. 041006. <https://doi.org/10.1115/1.4053636>.
28. *McNamara K.P., Tait M.J.* Modeling the response of structure-tuned liquid damper systems under large amplitude excitation using smoothed particle hydrodynamics // *J. Vib. Acoust.* 2022. V. 144, No 1. Art. 011008. <https://doi.org/10.1115/1.4051266>.

29. Бужинский В.А. Колебания жидкости в цилиндрических баках с продольными демпфирующими перегородками // Изв. РАН. МЖГ. 2020. № 1. С. 9–21.
30. Бужинский В.А., Петряхин Д.А., Соломонов Е.В. Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости // Изв. РАН. МЖГ. 2022. № 1. С. 39–46.
31. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping // Mech. Compos. Mater. 2014. V. 50, No 3. P. 267–278. <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9413-3>.
32. Егоров А.Г., Камалутдинов А.М., Нуриев А.Н., Паймушин В.Н. Экспериментальное определение демпфирования колебаний пластины вязкой жидкостью // ДАН. 2017. Т. 474, № 2. С. 172–176. <https://doi.org/10.7868/S0869565217140079>.
33. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Identification of the dynamic elasticity characteristics and damping properties of the OT-4 titanium alloy based on study of damping flexural vibrations of the test specimens // J. Mach. Manuf. Reliab. 2019. V. 48, No 2. P. 119–129. <https://doi.org/10.3103/S1052618819020110>.
34. Payam A.F., Trewby W., Voitchovsky K. Simultaneous viscosity and density measurement of small volumes of liquids using a vibrating microcantilever // Analyst. 2017. V. 142, No 9. P. 1492–1498. <https://doi.org/10.1039/C6AN02674E>.
35. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1851. V. 9. Pt. 2. P. 8–106.
36. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Zeit. 1932. Bd. 33. S. 327–335.
37. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / под ред. Л.Г. Лойцянского. М.: Наука, 1974. 712 с.
38. Holtmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1954. V. 26, No 1. P. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
39. Egorov A.G., Nuriev A.N. Steady streaming generated by low-amplitude oscillations of a cylinder // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 9. P. 2102–2108.
40. Wang C.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows // J. Fluid Mech. 1968. V. 32, No 1. P. 55–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000583>.
41. Stuart J. Double boundary layers in oscillatory viscous flow // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, No 4. P. 673–687. <https://doi.org/10.1017/S0022112066000910>.
42. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3, No 4. P. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
43. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. 1975. V. 68, No 4. P. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
44. Haddon E.W., Riley N. The steady streaming induced between oscillating circular cylinders // Q. J. Mech. Appl. Math. 1979. V. 32, No 2. P. 265–282. <https://doi.org/10.1093/qjmath/32.3.265>.

45. *Нуриев А.Н.* Течение вязкой жидкости вокруг осциллирующего цилиндра: численный эксперимент, бифуркационный и асимптотический анализ: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2013. 174 с.
46. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming reynolds numbers // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40, No 6. P. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.
47. *Tuck E.O.* Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid // *J. Eng. Math.* 1969. V. 3, No 1. P. 29–44. <https://doi.org/10.1007/BF01540828>.
48. *Brumley D.R., Willcox M., Sader J.E.* Oscillation of cylinders of rectangular cross section immersed in fluid // *Phys. Fluids*. 2010. V. 22, No 5. Art. 052001. <https://doi.org/10.1063/1.3397926>.
49. *Ahsan S.N., Aureli M.* Finite amplitude oscillations of flanged laminas in viscous flows: Vortex–structure interactions for hydrodynamic damping control // *J. Fluids Struct.* 2015. V. 59. P. 297–315. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.09.010>.
50. *Aureli M., Porfiri M.* Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids // *Appl. Phys. Lett.* 2010. V. 96, No 16. Art. 164102. <https://doi.org/10.1063/1.3405720>.
51. *Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E.* Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids // *J. Sound Vib.* 2012. V. 331, No 7. P. 1624–1654. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.007>.
52. *Phan C.N., Aureli M., Porfiri M.* Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids // *J. Fluids Struct.* 2013. V. 40. P. 52–69. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.03.013>.
53. *Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R.* Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies // *Fluid Dyn.* 2024. V. 159, No 2. P. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
54. *Kim S.K., Troesch A.W.* Streaming flows generated by high-frequency small-amplitude oscillations of arbitrarily shaped cylinders // *Phys. Fluids A*. 1989. V. 1, No 6. P. 975–985. <https://doi.org/10.1063/1.857409>.
55. *Ray M.* Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid // *Z. Angew. Math. Mech.* 1936. Bd. 16, H 2. S. 99–108. <https://doi.org/10.1002/zamm.19360160204>.
56. *Kanwal R.P.* Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid // *Z. Angew. Math. Mech.* 1955. Bd. 35, H. 1–2. S. 17–22. <https://doi.org/10.1002/zamm.19550350104>.
57. *Davidson B.J., Riley N.* Jets induced by oscillatory motion // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 53, No 2. P. 287–303. <https://doi.org/10.1017/S0022112072000163>.
58. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M.* Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 913. Art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
59. *Tamada K., Miyagi T.* Secondary flow around an oscillating cylinder // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1974. V. 37, No 1. P. 249–253. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.37.249>.

60. *Nama N., Huang P.-H., Huang T.J., Costanzo F.* Investigation of micromixing by acoustically oscillated sharp-edges // *Biomicrofluidics*. 2016. V. 10, No 2. Art. 024124. <https://doi.org/10.1063/1.4946875>.
61. *Lei J., Cheng F., Li K.* Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections // *Micromachines*. 2020. V. 11, No 3. Art. 240. <https://doi.org/10.3390/mi11030240>.
62. *Keulegan G.H., Carpenter L.H.* Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 1958. V. 60, No 5. Art. 2857. P. 423–440. <https://doi.org/10.6028/jres.060.043>.
63. *Bearman P.W., Graham J.M.R., Singh S.* Forces on cylinders in harmonically oscillating flow // *Mechanics of Wave-induced Forces on Cylinders* / Ed. by T.L. Shaw. Water Resources Engineering Ser. Pitman Publ., 1979. P. 437–449.
64. *Singh S.* Forces on bodies in oscillatory flow. PhD Thesis. London: Imp. Coll., Univ. of London, 1979. 367 p.
65. *Bearman P.W., Downie M.J., Graham J.M.R., Obasaju E.D.* Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 154, No 1. P. 337–356. <https://doi.org/10.1017/S0022112085001562>.
66. *Bearman P.W.* An investigation of the forces on flat plates normal to a turbulent flow // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46, No 1. P. 177–198. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000478>.
67. *Bearman P.W., Obasaju E.D.* An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 119. P. 297–321. <https://doi.org/10.1017/S0022112082001360>.
68. *Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A.* The force exerted by surface waves on piles // *J. Pet. Technol.* 1950. V. 2, No 05. Art. SPE-950149-G. P. 149–154. <https://doi.org/10.2118/950149-g>.
69. *Lighthill J.* Fundamentals concerning wave loading on offshore structures // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 173. P. 667–681. <https://doi.org/10.1017/S0022112086001313>.
70. *Chaplin J.R.* History forces and the unsteady wake of a cylinder // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 393. P. 99–121. <https://doi.org/10.1017/S0022112099005480>.
71. *Tatsuno M.* Circulatory streaming around an oscillating circular cylinder at low Reynolds numbers // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1973. V. 35, No 3. P. 915–920. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.35.915>.
72. *Tatsuno M.* Circulatory streaming in the vicinity of an oscillating square cylinder // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1974. V. 36, No 4. P. 1185–1191. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.36.1185>.
73. *Tatsuno M.* Circulatory streaming in the vicinity of an oscillating triangular cylinder // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1975. V. 38, No 1. P. 257–264. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.38.257>.
74. *Tatsuno M. and Bearman P.W.* A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 211. P. 157–182. <https://doi.org/10.1017/S0022112090001537>.
75. *Honji H.* Streaked flow around an oscillating circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 107. P. 509–520. <https://doi.org/10.1017/S0022112081001894>.

76. *Sarpkaya T.* Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 165. P. 61–71. <https://doi.org/10.1017/S0022112086002999>.
77. *Sarpkaya T.* Experiments on the stability of sinusoidal flow over a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 2002. V. 457. P. 157–180. <https://doi.org/10.1017/S002211200200784X>.
78. *Sarpkaya T.* Structures of separation on a circular cylinder in periodic flow // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 567. P. 281–297. <https://doi.org/10.1017/s0022112006002278>.
79. *Hall P.* On the stability of unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 146. P. 347–367. <https://doi.org/10.1017/S0022112084001907>.
80. *Нуриев А.Н., Егоров А.Г., Зайцева О.Н.* Численный анализ вторичных течений вокруг осциллирующего цилиндра // *ПМТФ*. 2018. Т. 59, № 3. С. 77–87. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180308>.
81. *Justesen P.* A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 222. P. 157–196. <https://doi.org/10.1017/S0022112091001040>.
82. *Dutsch H., Durst F., Becker S., Lienhart H.* Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 360. P. 249–271. <https://doi.org/10.1017/S002211209800860X>.
83. *Iliadis G., Anagnostopoulos P.* Viscous oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers and frequency parameters // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 1998. V. 26, No 4. P. 403–442. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19980228\)26:4<403::AID-FLD640>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19980228)26:4<403::AID-FLD640>3.0.CO;2-V).
84. *Uzunoglu B., Tan M., Price W.G.* Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder using a cell viscousboundary element method // *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001. V. 50, No 10. P. 2317–2338. <https://doi.org/10.1002/nme.122>.
85. *Anagnostopoulos P., Minearb R.* Blockage effect of oscillatory flow past a fixed cylinder // *Appl. Ocean Res.* 2004. V. 26, Nos 3–4. P. 147–153. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2004.11.001>.
86. *Nehari D., Armeni V., Balli F.* Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter and β numbers // *J. Fluid Mech.* 2004. V. 520. P. 157–186. <https://doi.org/10.1017/S002211200400134X>.
87. *Elston J.R., Blackburn H.M., Sheridan J.* The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder // *J. Fluid Mech.* 2006. V. 550. P. 359–389. <https://doi.org/10.1017/S0022112005008372>.
88. *An H.* Numerical modelling of flow characteristics and hydrodynamic forces on a cylinder subject to oscillatory flow. PhD Thesis. Perth, Univ. of West. Aust., 2009.
89. *An H., Cheng L., Zhao M.* Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow // *Ocean Eng.* 2009. V. 36, No 14. P. 1089–1097. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.06.010>.
90. *Rashid F., Vartdal M., Grue J.* Oscillating cylinder in viscous fluid: Calculation of flow patterns and forces // *J. Eng. Math.* 2011. V. 70, No 1. P. 281–295. <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9395-7>.

91. *Suthon P., Dalton C.* Streakline visualization of the structures in the near wake of a circular cylinder in sinusoidally oscillating flow // *J. Fluids Struct.* 2011. V. 27, No 7. P. 885–902. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2011.03.003>.
92. *Suthon P., Dalton C.* Observations on the Honji instability // *J. Fluids Struct.* 2012. V. 32. P. 27–36. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2011.12.008>.
93. *Малахова Т.В.* Нестационарная гидродинамика и теплообмен колеблющихся тел: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2012. 150 с.
94. *Ren C., Lu L., Cheng L., Chen T.* Hydrodynamic damping of an oscillating cylinder at small Keulegan–Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 913. Art. A36. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1159>.
95. *Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N.* Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples // *J. Sound Vib.* 2018. V. 421. P. 334–347. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.006>.
96. *Facci A.L., Porfiri M.* Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation // *J. Appl. Phys.* 2012. V. 112, No 12. Art. 124908. <https://doi.org/10.1063/1.4769307>.
97. *Graham J.M.R.* The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97, No 2. P. 331–346. <https://doi.org/10.1017/s0022112080002595>.
98. *Tafuni A., Sahin I.* Non-linear hydrodynamics of thin laminae undergoing large harmonic oscillations in a viscous fluid // *J. Fluids Struct.* 2015. V. 52. P. 101–117. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2014.10.004>.
99. *De Rosis A., Lévêque E.* Harmonic oscillations of a thin lamina in a quiescent viscous fluid: A numerical investigation within the framework of the lattice Boltzmann method // *Comput. Struct.* 2015. V. 157. P. 209–217. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.034>.
100. *Nuriev A.N., Kamalutdinov, A.M., Egorov A.G.* A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 874. P. 1057–1095. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.477>.
101. *Shrestha B., Ahsan S., Aureli M.* Experimental study of oscillating plates in viscous fluids: Qualitative and quantitative analysis of the flow physics and hydrodynamic forces // *Phys. Fluids.* 2018. V. 30, No 1. Art. 013102. <https://doi.org/10.1063/1.5001330>.
102. *Камалутдинов А.М.* Теоретико-экспериментальное исследование аэродинамических свойств колеблющейся пластины: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 2017. 142 с.
103. *Нуриев А.Н., Камалутдинов А.М.* Идентификация характеристик силового аэродинамического воздействия на колеблющиеся консольно-закрепленные балки // *Изв. РАН. МЖГ.* 2022. № 5. С. 62–79. <https://doi.org/10.31857/S0568528122050103>.
104. *Facci A.L., Porfiri M.* Analysis of three-dimensional effects in oscillating cantilevers immersed in viscous fluids // *J. Fluids Struct.* 2013. V. 38. P. 205–222. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.11.006>.

-
105. *Agarwal A., Nolan K., Stafford J., Jeffers N.* Visualization of three-dimensional structures shed by an oscillating beam // *J. Fluids Struct.* 2017. V. 70. P. 450–463. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.013>.
 106. *Peterson S.D., Porfiri M., Rovardi A.* A Particle Image Velocimetry Study of Vibrating Ionic Polymer Metal Composites in Aqueous Environments // *IEEE/ASME Trans. Mechatron.* 2009. V. 14, No 4. P. 474–483. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2009.2020979>.
 107. *Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Zaitseva O.N.* Hydrodynamics around long vibrating beams // *J. Fluids Struct.* 2021. V. 101. Art. 103203. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103203>.
 108. *Prandtl L.* Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // *Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)* / Hrsg. von Th. v. Kármán, T. Levi-Civita. Berlin, Heidelberg: Springer, 1924, S. 18–33. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2.
 109. *Birnbaum W.* Der Schlagflügelpropeller und die Kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel // *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt.* 1924. Bd. 15. S. 128–134.
 110. *Theodorsen T.* General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No NACA R-496. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935. P. 291–311.
 111. *Garrick I. E.* Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No NACA-TR-567. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. P. 1–10.
 112. *Wagner H.* Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // *Z. Angew. Math. Mech.* 1925. Bd. 15, H. 1. S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>.
 113. *Glauert H.* The force and moment on an oscillating aerofoil // *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929)* / Hrsg. von A. Gilles, L. Hopf, Th. v. Kármán. Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16.
 114. *Küssner H.G.* Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln // *Luftfahrtforschung.* 1936. Bd. 13, H. 12. S. 410–424.
 115. *Küssner H.G., Schwartz I.R.* The oscillating wing with aerodynamically balanced elevator. NACA Technical Report No NACA-TM-991. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1941. P. 1–32.
 116. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла // *Техн. заметки ЦАГИ.* 1935. № 45. С. 48–52.
 117. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 443 с.
 118. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
 119. *Aerodynamic Theory: A General Review of Progress under a Grant of the Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics* / Ed. by W.F. Durand. Vol. II: von Kármán Th., Burgers J.M. General aerodynamic theory: Perfect fluids. Berlin, Heidelberg: Springer, 1935. xvi, 368 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-91485-0>.
 120. *Голубев В.В.* Лекции по теории крыла. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. 480 с.

121. Голубев В.В. Исследования по теории машущего крыла. М.-Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1957.
122. Рождественский К.В. Метод сращиваемых асимптотических разложений в гидродинамике крыла. Л.: Судостроение, 1979. 208 с.
123. Рождественский К.В., Рыжов В.А. Математические модели в теории машущего крыла. Л.: Ленингр. кораблестроит. ин-т, 1985. 177 с.
124. Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 214 с.
125. Żbikowski R. On aerodynamic modelling of an insect-like flapping wing in hover for micro air vehicles // Philos. Trans. R. Soc., A. 2002. V. 360, No 1791. P. 273–290.
<http://doi.org/10.1098/rsta.2001.0930>.
126. Azuma A., Okamoto M. Theoretical study on two-dimensional aerodynamic characteristics of unsteady wings // J. Theor. Biol. 2005. V. 234, No 1. P. 67–78.
<https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.11.016>.
127. Mateescu D., Abdo M. Theoretical solutions for unsteady flows past oscillating flexible airfoils using velocity singularities // J. Aircr. 2003. V. 40, No 1. P. 153–163.
<https://doi.org/10.2514/2.3070>.
128. Glegg S.A.L., Devenport W.J. Unsteady loading on an airfoil of arbitrary thickness // J. Sound Vib. 2009. V. 319, Nos 3–5. P. 1252–1270. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.053>.
129. Dynnikova G.Ya., Dynnikov Ya.A., Guvernyuk S.V., Malakhova T.V. Stability of a reverse Karman vortex street // Phys. Fluids. 2021. V. 33, No 2. Art. 024102.
<https://doi.org/10.1063/5.0035575>.
130. Рыжов В.А. Гидродинамика пропульсивных и энергосберегающих систем с колеблющимися крыльевыми элементами: автореф. дис.... д-ра техн. наук. Санкт-Петербург, 1997.
131. Peters D., Hsieh M.A., Torrero A. A state-space airloads theory for flexible airfoils // J. Am. Helicopter Soc. 2007. V. 52. P. 329–342. <https://doi.org/10.4050/JAHS.52.329>.
132. Peters D.A. Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory — an overview // J. Fluids Struct. 2008. V. 24, No 3. P. 295–312. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.09.001>.
133. Siekmann J. Theoretical studies of sea animal locomotion, Part 1 // Ing.-Arch. 1962. V. 31, No 3. P. 214–227.
134. Wu T.Y.-T. Swimming of a waving plate // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, No 3. P. 321–344. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000949>.
135. Schwarz L. Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung // Luftfahrtforschung. 1940. Bd. 17. S. 379–386.
136. Kelly H.R., Rentz A.W., Siekmann J. Experimental studies on the motion of a flexible hydrofoil // J. Fluid Mech. 1964. V. 19, No 1. P. 30–48.
<https://doi.org/10.1017/S0022112064000520>.
137. Uldrick J.P., Siekmann J. On the swimming of a flexible plate of arbitrary finite thickness // J. Fluid Mech. 1964. V. 20, No 1. P. 1–33. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000994>.

138. *Reece J.W., Uldrick J.P., Siekmann J.* Some recent developments in sea animal locomotion hydrodynamics // *Developments in Theoretical and Applied Mechanics: Proc. 2nd Southeast. Conf. on Theoretical and Applied Mechanics. Atlanta, Georgia, March 5–6, 1964. Oxford, London, New York, NY: Pergamon Press, 1965. P. 337–349.*
139. *Uldrick J.P.* On the propulsion efficiency of swimming flexible hydrofoils of finite thickness // *J. Fluid Mech.* 1968. V. 32, No 1. P. 29–53. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000571>.
140. *Коренная Л.И.* Механизм образования сопротивления трения при волнообразных деформациях тела. В кн.: «Гидродинамические вопросы бионики». Киев: Наук. думка, 1983. С. 71–81.
141. *Коренная Л.И.* Составляющие вязкостного сопротивления волнообразно деформирующегося тела // *Бионика.* 1987. Т. 21. С. 53–58.
142. *Lighthill M.J.* Note on the swimming of slender fish // *J. Fluid Mech.* 1960. V. 9, No 2. P. 305–317. <https://doi.org/10.1017/S0022112060001110>.
143. *Lighthill M.J.* Hydromechanics of aquatic animal propulsion // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1969. V. 1, No 1. P. 413–446. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.01.010169.002213>.
144. *Lighthill M.J.* Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 44, No 2. P. 265–301. <https://doi.org/10.1017/S0022112070001830>.
145. *Lighthill M.J.* Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion // *Proc. R. Soc. London, Ser. B.* 1971. V. 179, No 1055. P. 125–138. <https://doi.org/10.1098/rspb.1971.0085>.
146. *Wu T.Y.-T.* Hydromechanics of swimming propulsion. Part 1. Swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in an inviscid fluid // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46, No 2. P. 337–355. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000570>.
147. *Wu T.Y.-T.* Hydromechanics of swimming propulsion. Part 2. Some optimum shape problems // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46, No 3. P. 521–544. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000685>.
148. *Wu T.Y.-T.* Hydromechanics of swimming propulsion. Part 3. Swimming and optimum movements of slender fish with side fins // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 46, No 3. P. 545–568. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000697>.
149. *Newman J.N., Wu T.Y.* A generalized slender-body theory for fish-like forms // *J. Fluid Mech.* 1973. V. 57, No 4. P. 673–693. <https://doi.org/10.1017/S0022112073001953>.
150. *Newman J.N., Wu T.Y.* Hydromechanical aspects of fish swimming // *Swimming and Flying in Nature* / Ed. by T.Y.-T. Wu, C.J. Brokaw, C. Brennen. Boston, MA: Springer, 1975. P. 615–634. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1326-8_10.
151. *Chopra M.G.* Hydromechanics of lunate-tail swimming propulsion // *J. Fluid Mech.* 1974. V. 64, No 2. P. 375–392. <https://doi.org/10.1017/S002211207400245X>.
152. *Chopra M.G.* Large amplitude lunate-tail theory of fish locomotion // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74, No 1. P. 161–182. <https://doi.org/10.1017/S0022112076001742>.
153. *Chopra M.G., Kambe T.* Hydromechanics of lunate-tail swimming propulsion. Part 2 // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 79, No 1. P. 49–69. <https://doi.org/10.1017/S0022112077000032>.

154. Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М. Об одном принципе создания тяговой силы движения // ПМТФ. 1962. Т. 4. С. 3–9.
155. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 208 с.
156. Логвинович Г.В. Гидродинамика тонкого гибкого тела (оценка гидродинамики рыб) // Бионика. 1970. Т. 4. С. 5–11.
157. Логвинович Г.В. Гидродинамика плавания рыб // Бионика. 1973. Т. 7. С. 3–8.
158. Романенко Е.В. Теория плавания рыб и дельфинов. М.: Наука, 1986. 148 с.
159. Романенко Е.В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК, 2001. 411 с.
160. Candelier F., Boyer F., Leroyer A. Three-dimensional extension of Lighthill's large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion // J. Fluid Mech. 2011. V. 674. P. 196–226. <https://doi.org/10.1017/S002211201000649X>.
161. Candelier F., Porez M., Boyer F. Note on the swimming of an elongated body in a non-uniform flow // J. Fluid Mech. 2013. V. 716. P. 616–637. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.560>.
162. Eloy C., Souilliez C., Schouveiler L. Flutter of a rectangular plate // J. Fluids Struct. 2007. V. 23, No 6. P. 904–919. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.02.002>.
163. Yu Zh., Eloy Ch. Extension of Lighthill's slender-body theory to moderate aspect ratios // J. Fluids Struct. 2018. V. 76. P. 84–94. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.09.010>.
164. Michelin S., Doaré O. Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows // J. Fluid Mech. 2013. V. 714. P. 489–504. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.494>.
165. Горелов Д.Н. Пропульсивные характеристики машущего крыла с упруго закрепленным элементом // Бионика. 1991. Т. 24. С. 18–24.
166. Грунтфест Р.А., Дерезина Н.П. Колебания упругой ласты в потоке жидкости // Бионика. 1981. Т. 15. С. 29–39.
167. Грунтфест Р.А., Дерезина Н.П. Колебание ласты произвольной формы в плане в потоке жидкости // Бионика. 1984. Т. 18. С. 45–52.
168. Шклярчук Ф.Н. Аэроупругость самолета: учеб. пособие. М.: МАИ, 1985. 77 с.
169. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Неустановившиеся колебания деформируемого профиля крыла в несжимаемом потоке // Изв. вузов. Авиацион. техн. 2009. Т. 2. С. 3–7.
170. Курапов А.А., Рождественский К.В., Рыжов В.А. Гидродинамика упругого крыла. Оптимальные характеристики // Тр. V Всесоюз. шк. «Гидродинамика высоких скоростей». Чебоксары, 1994. С. 32–41.
171. Rozhdestvensky K.V., Ryzhov V.A. Aerohydrodynamics of flapping-wing propulsors // Prog. Aerosp. Sci. 2003. V. 39, No 8. P. 585–633. [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(03\)00077-0](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(03)00077-0).
172. Katz J., Weihs D. Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility // J. Fluid Mech. 1978. V. 88, No 3. P. 485–497. <https://doi.org/10.1017/S0022112078002220>.

-
173. Карпузов Е.И. Оптимизация пропульсивных систем с крыльевыми элементами: автореф. дис.... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, 2000. 313 с.
174. Sumbatyan M.A., Tarasov A.E. A mathematical model for the propulsive thrust of the thin elastic wing harmonically oscillating in a flow of non-viscous incompressible fluid // Mech. Res. Commun. 2015. V. 68. P. 83–88. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.02.005>.
175. Тарасов А.Е. Аэрогидродинамический анализ упругих элементов движущего типа методом интегральных уравнений: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 2015. 139 с.
176. Berci M., Toropov V., Hewson R., Gaskell P. Aeroelastic Analysis and Gust Response of a Flexible Airfoil // Proc. 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf. Orlando, FL, 2010. Art. AIAA 2010-3119. <https://doi.org/10.2514/6.2010-3119>.
177. Küssner, H.G. Allgemeine Tragflächentheorie // Luftfahrtforschung. 1940. Bd. 17. S. 370–378.
178. Храбров А.Н. Математическое моделирование влияния схода вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики профиля при его произвольном движении // Учен. записки ЦАГИ. 2002. Т. 33, № 3–4. С. 3–17.
179. Liu H., Ellington C.P., Kawachi K., van den Berg C., Willmott A.P. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering // J. Exp. Biol. 1998. V. 201, No 4. P. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
180. Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil // AIAA J. 1999. V. 37, No 10. P. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
181. Pedro G., Suleman A., Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil // Int. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 42, No 5. P. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
182. Lewin G.C., Haj-Hariri H. Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow // J. Fluid Mech. 2003. V. 492. P. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
183. Alben S., Shelley M. Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body // Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 2005. V. 102, No 32. P. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
184. Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y. Locomotion of a passively flapping flat plate // J. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
185. Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching // Phys. Fluids. 2010. V. 22, No 4. Art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.
186. Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P. Efficiency of fish propulsion // Bioinspiration Biomimetics. 2015. V. 10, No 4. Art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
187. Lua K.B., Dash S.M., Lim T.T., Yeo K.S. On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight // J. Fluids Struct. 2016. V. 66. P. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.

188. Коваль К.А., Сухоруков А.Л., Чернышев И.А. Результаты верификации численного метода расчета гидродинамических и гидроакустических характеристик плавникового движителя // Фундамент. и прикл. гидрофиз. 2016. Т. 9, № 4. С. 60–72.
189. Дынников Я.А. К расчету машущего гибкого профиля в потоке вязкой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Машиностроение. 2016. № 4. С. 22–30.
<https://doi.org/10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>.
190. Taha H.E. Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing // Proc. AIAA Scitech 2020 Forum. Orlando, FL: AIAA, 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
191. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power // J. Fluid Mech. 2021. V. 915. Art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>.
192. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency // J. Fluid Mech. 2021. V. 915. Art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.
193. Borazjani I., Sotiropoulos F. On the role of form and kinematics on the hydrodynamics of self-propelled body/caudal fin swimming // J. Exp. Biol. 2010. V. 213, No 1. P. 89–107. <https://doi.org/10.1242/jeb.030932>.
194. Yeh P.D., Alexeev A. Effect of aspect ratio in free-swimming plunging flexible plates // Comput. Fluids. 2016. V. 124. P. 220–225. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.07.009>.
195. Maertens A.P., Gao A., Triantafyllou M.S. Optimal undulatory swimming for a single fish-like body and for a pair of interacting swimmers // J. Fluid Mech. 2017. V. 813. P. 301–345. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.845>.
196. Zhang D., Huang W.-X. Hydrodynamics of a swimming batoid fish at Reynolds numbers up to 148 000 // J. Fluid Mech. 2023. V. 963. Art. A16. <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.325>.
197. Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W. A review on fluid dynamics of flapping foils // Ocean Eng. 2020. V. 195. Art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
198. Riley N., Watson E.J. Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid // Mathematika. 1993. V. 40, No 2. P. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
199. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. V. 941. Art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
200. Егоров А.Г., Нуриев А.Н. Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, № 2–3. С. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>.

References

1. Sader J.E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope. *J. Appl. Phys.*, 1998, vol. 84, no. 1, pp. 64–76. <https://doi.org/10.1063/1.368002>.
2. Scherer M.P., Frank G., Gummer A.W. Experimental determination of the mechanical impedance of atomic force microscopy cantilevers in fluids up to 70 kHz. *J. Appl. Phys.*, 2000, vol. 88, no. 5, pp. 2912–2920. <https://doi.org/10.1063/1.1287522>.

3. Aureli M., Prince Ch., Porfiri M., Peterson S.D. Energy harvesting from base excitation of ionic polymer metal composites in fluid environments. *Smart Mater. Struct.*, 2010, vol. 19, no. 1, art. 015003. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/19/1/015003>.
4. Erturk A., Inman D.J. *Piezoelectric Energy Harvesting*. Chichester, John Wiley & Sons, 2011. 416 p. <https://doi.org/10.1002/9781119991151>.
5. Yu Y.-H., Tom N., Jenne D. Numerical analysis on hydraulic power take-off for wave energy converter and power smoothing methods. *Proc. ASME 2018 37th Int. Conf. on Ocean, Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. Vol. 10: Ocean renewable energy. Art. OMAE2018-78176, V010T09A043. Madrid, ASME, 2018. <https://doi.org/10.1115/OMAE2018-78176>.
6. Martin P.A., Farina L. Radiation of water waves by a heaving submerged horizontal disc. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 337, pp. 365–379. <https://doi.org/10.1017/S0022112097004989>.
7. Bidkar R.A., Kimber M., Raman A., Bajaj A.K., Garimella S.V. Nonlinear aerodynamic damping of sharp-edged flexible beams oscillating at low Keulegan–Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 2009, vol. 634, pp. 269–289. <https://doi.org/10.1017/s0022112009007228>.
8. Ebrahimi N.D., Eldredge J.D., Ju Y.S. Wake vortex regimes of a pitching cantilever plate in quiescent air and their correlation with mean flow generation. *J. Fluids Struct.*, 2019, vol. 84, pp. 408–420. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.11.010>.
9. Oh M.H., Seo J., Kim Y.-H., Choi M. Endwall effects on 3D flow around a piezoelectric fan. *Eur. J. Mech. – B/Fluids*, 2019, vol. 75, pp. 339–351. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2018.10.021>.
10. Kozlov V.V., Onishchenko D.A. The motion in a perfect fluid of a body containing a moving point mass. *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 4, pp. 553–564. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90058-X](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90058-X).
11. Chernous'ko F.L. The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 116–125. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.014>.
12. Yegorov A.G., Zakharova O.S. The energy-optimal motion of a vibration-driven robot in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2010, vol. 74, no. 4, pp. 443–451. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2010.09.010>.
13. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
14. Bolotnik N.N., Figurina T.Yu., Chernous'ko F.L. Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 1–14. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.001>.
15. Childress S., Spagnolie S.E., Tokieda T. A bug on a raft: Recoil locomotion in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 669, pp. 527–556. <https://doi.org/10.1017/S002211201000515X>.
16. Borisov A.V., Mamaev I.S., Vetchanin E.V. Self-propulsion of a smooth body in a viscous fluid under periodic oscillations of a rotor and circulation. *Regular Chaotic Dyn.*, 2018, vol. 23, nos. 7–8, pp. 850–874. <https://doi.org/10.1134/S1560354718070043>.

17. Kopman V., Porfiri M. Design, modeling, and characterization of a miniature robotic fish for research and education in biomimetics and bioinspiration. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 2013, vol. 18, no. 2, pp. 471–483. <https://doi.org/10.1109/tmech.2012.2222431>.
18. Yeh P.D., Alexeev A. Free swimming of an elastic plate plunging at low Reynolds number. *Phys. Fluids*, 2014, vol. 26, no. 5, art. 053604. <https://doi.org/10.1063/1.4876231>.
19. Yeh P.D., Demirer E., Alexeev A. Turning strategies for plunging elastic plate propulsor. *Phys. Rev. Fluids*, 2019, vol. 4, art. 064101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.064101>.
20. Shintake J., Cacucciolo V., Shea H., Floreano D. Soft biomimetic fish robot made of dielectric elastomer actuators. *Soft Rob.*, 2018, vol. 5, no. 4, pp. 466–474. <https://doi.org/10.1089/soro.2017.0062>.
21. Feng J., Cho S.K. Two-dimensionally steering microswimmer propelled by oscillating bubbles. *Proc. 2014 IEEE 27th Int. Conf. on Micro Electro Mechanical Systems (MEMS)*. San Francisco, CA, 2014, pp. 188–191. <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2014.6765606>.
22. Dijkink R.J., van der Dennen J.P., Ohl C.D., Prosperetti A. The ‘acoustic scallop’: A bubble-powered actuator. *J. Micromech. Microeng.*, 2006, vol. 16, no 8, pp. 1653–1659. <https://doi.org/10.1088/0960-1317/16/8/029>.
23. Chen C., Zhang S.P., Mao Z., Nama N., Gu Y., Huang P.-H., Jing Y., Guo X., Costanzo F., Huang T.J. Three-dimensional numerical simulation and experimental investigation of boundary-driven streaming in surface acoustic wave microfluidics. *Lab Chip*, 2018, vol. 18, no. 23, pp. 3645–3654. <https://doi.org/10.1039/C8LC00589C>.
24. Zhu H., Zhang P., Zhong Z., Xia J., Rich J., Mai J., Su X., Tian Z., Bachman H., Rufo J., Gu Y., Kang P., Chakrabarty K., Witelski T.P., Huang T.J. Acoustohydrodynamic tweezers via spatial arrangement of streaming vortices. *Sci. Adv.*, 2021, vol. 7, no. 2, art. eabc7885. <https://doi.org/10.1126/sciadv.abc7885>.
25. Gubaidullin D.A., Zaripov R.G., Osipov P.P., Tkachenko L.A., Shaidullin L.R. Wave dynamics of gas suspensions and individual particles during resonance oscillations. *High Temp.*, 2021, vol. 59, nos. 2–6, pp. 384–404. <https://doi.org/10.1134/S0018151X21030056>.
26. Zhu L., Lim H.-C. Hydrodynamic characteristics of a separated heave plate mounted at a vertical circular cylinder. *Ocean Eng.*, 2017, vol. 131, pp. 213–223. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.01.007>.
27. McNamara K.P., Love J.S., Tait M.J. Nonlinear modeling of series-type pendulum tuned mass damper-tuned liquid damper. *J. Vib. Acoust.*, 2022, vol. 144, no. 4, art. 041006. <https://doi.org/10.1115/1.4053636>.
28. McNamara K.P., Tait M.J. Modeling the response of structure-tuned liquid damper systems under large amplitude excitation using smoothed particle hydrodynamics. *J. Vib. Acoust.*, 2022, vol. 144, no. 1, art. 011008. <https://doi.org/10.1115/1.4051266>.
29. Buzhinskii V.A. Fluid oscillations in cylindrical tanks with longitudinal damping partitions. *Fluid Dyn.*, 2020, vol. 55, no. 1, pp. 7–19. <https://doi.org/10.1134/S001546281906003X>.
30. Buzhinskii V.A., Petryakhin D.A., Solomonov E.V. Oscillations of plates with stiffeners in fluid. *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 1, pp. 37–44. <https://doi.org/10.1134/S0015462822010025>.

31. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens 2. Aerodynamic component of damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 267–278. <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9413-3>.
32. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N., Paimushin V.N. Experimental determination of damping of plate vibrations in a viscous fluid. *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 5, pp. 257–261. <https://doi.org/10.1134/S1028335817050068>.
33. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Identification of the dynamic elasticity characteristics and damping properties of the OT-4 titanium alloy based on study of damping flexural vibrations of the test specimens. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2019, vol. 48, no. 2, pp. 119–129. <https://doi.org/10.3103/S1052618819020110>.
34. Payam A.F., Trewby W., Voitchovsky K. Simultaneous viscosity and density measurement of small volumes of liquids using a vibrating microcantilever. *Analyst*, 2017, vol. 142, no. 9, pp. 1492–1498. <https://doi.org/10.1039/C6AN02674E>.
35. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1851, vol. 9, pt. 2, pp. 8–106.
36. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Zeit*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
37. Schlichting H. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Boundary-Layer Theory]. Loizjanski L.G. (Ed.). Moscow, Nauka, 1974. 712 p. (In Russian)
38. Holtsmark J., Johnsen I., Sikkeland T., Skavlem S. Boundary layer flow near a cylindrical obstacle in an oscillating, incompressible fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1954, vol. 26, no. 1, pp. 26–39. <https://doi.org/10.1121/1.1907285>.
39. Egorov A.G., Nuriev A.N. Steady streaming generated by low-amplitude oscillations of a cylinder. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 9, pp. 2102–2108. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090067>.
40. Wang C.-Y. On high-frequency oscillatory viscous flows. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 55–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000583>.
41. Stuart J. Double boundary layers in oscillatory viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 24, no. 4, pp. 673–687. <https://doi.org/10.1017/S0022112066000910>.
42. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension. *IMA J. Appl. Math.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
43. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001243>.
44. Haddon E.W., Riley N. The steady streaming induced between oscillating circular cylinders. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1979, vol. 32, no. 3, pp. 265–282. <https://doi.org/10.1093/qjmam/32.3.265>.
45. Nuriev A.N. Viscous flow around an oscillating cylinder: Numerical experiment, bifurcation and asymptotic analysis. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Kazan, 2013. 174 p. (In Russian)

46. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic investigation of hydrodynamic forces acting on an oscillating cylinder at finite streaming reynolds numbers. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no 6, pp. 794–801. <https://doi.org/10.1134/S1995080219060180>.
47. Tuck E.O. Calculation of unsteady flows due to small motions of cylinders in a viscous fluid. *J. Eng. Math.*, 1969, vol. 3, no. 1, pp. 29–44. <https://doi.org/10.1007/BF01540828>.
48. Brumley D.R., Willcox M., Sader J.E. Oscillation of cylinders of rectangular cross section immersed in fluid. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, no. 5, art. 052001. <https://doi.org/10.1063/1.3397926>.
49. Ahsan S.N., Aureli M. Finite amplitude oscillations of flanged laminas in viscous flows: Vortex–structure interactions for hydrodynamic damping control. *J. Fluids Struct.*, 2015, vol. 59, pp. 297–315. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2015.09.010>.
50. Aureli M., Porfiri M. Low frequency and large amplitude oscillations of cantilevers in viscous fluids. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, vol. 96, no. 16, art. 164102. <https://doi.org/10.1063/1.3405720>.
51. Aureli M., Porfiri M., Basaran M.E. Nonlinear finite amplitude vibrations of sharp-edged beams in viscous fluids. *J. Sound Vib.*, 2012, vol. 331, no. 7, pp. 1624–1654. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.007>.
52. Phan C.N., Aureli M., Porfiri M. Finite amplitude vibrations of cantilevers of rectangular cross sections in viscous fluids. *J. Fluids Struct.*, 2013, vol. 40, pp. 52–69. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.03.013>.
53. Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R. Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies. *Fluid Dyn.*, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
54. Kim S.K., Troesch A.W. Streaming flows generated by high-frequency small-amplitude oscillations of arbitrarily shaped cylinders. *Phys. Fluids A*, 1989, vol. 1, no. 6, pp. 975–985. <https://doi.org/10.1063/1.857409>.
55. Ray M. Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1936, Bd. 16, H. 2, S. 99–108. <https://doi.org/10.1002/zamm.19360160204>.
56. Kanwal R.P. Vibrations of an elliptic cylinder and a flat plate in a viscous fluid. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1955, Bd. 35, H. 1–2, S. 17–22. <https://doi.org/10.1002/zamm.19550350104>.
57. Davidson B.J., Riley N. Jets induced by oscillatory motion. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 53, no. 2, pp. 287–303. <https://doi.org/10.1017/S0022112072000163>.
58. Nuriev A.N., Egorov A.G., Kamalutdinov A.M. Hydrodynamic forces acting on the elliptic cylinder performing high-frequency low-amplitude multi-harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 913, art. A40. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1180>.
59. Tamada K., Miyagi T. Secondary flow around an oscillating cylinder. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1974, vol. 37, no. 1, pp. 249–253. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.37.249>.
60. Nama N., Huang P.-H., Huang T.J., Costanzo F. Investigation of micromixing by acoustically oscillated sharp-edges. *Biomicrofluidics*, 2016, vol. 10, no. 2, art. 024124. <https://doi.org/10.1063/1.4946875>.

61. Lei J., Cheng F., Li K. Numerical simulation of boundary-driven acoustic streaming in microfluidic channels with circular cross-sections. *Micromachines*, 2020, vol. 11, no. 3, art. 240. <https://doi.org/10.3390/mi11030240>.
62. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 1958, vol. 60, no. 5, art. 2857, pp. 423–440. <https://doi.org/10.6028/jres.060.043>.
63. Bearman P.W., Graham J.M.R., Singh S. Forces on cylinders in harmonically oscillating flow. In: Shaw T.L. (Ed.) *Mechanics of Wave-Induced Forces on Cylinders*. Water Resources Engineering Ser. Pitman Publ., 1979, pp. 437–449.
64. Singh S. Forces on bodies in oscillatory flow. *PhD Thesis*. London, Imp. Coll., Univ. of London, 1979. 367 p.
65. Bearman P.W., Downie M.J., Graham J.M.R., Obasaju E.D. Forces on cylinders in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 1985, vol. 154, pp. 337–356. <https://doi.org/10.1017/S0022112085001562>.
66. Bearman P.W. An investigation of the forces on flat plates normal to a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, no. 1, pp. 177–198. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000478>.
67. Bearman P.W., Obasaju E.D. An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders. *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 119, pp. 297–321. <https://doi.org/10.1017/S0022112082001360>.
68. Morison J.R., Johnson J.W., Schaaf S.A. The force exerted by surface waves on piles. *J. Pet. Technol.*, 1950, vol. 2, no. 05, art. SPE-950149-G, pp. 149–154. <https://doi.org/10.2118/950149-g>.
69. Lighthill J. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 173, pp. 667–681. <https://doi.org/10.1017/S0022112086001313>.
70. Chaplin J.R. History forces and the unsteady wake of a cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1999, vol. 393, pp. 99–121. <https://doi.org/10.1017/S0022112099005480>.
71. Tatsuno M. Circulatory streaming around an oscillating circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1973, vol. 35, no. 3, pp. 915–920. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.35.915>.
72. Tatsuno M. Circulatory streaming in the vicinity of an oscillating square cylinder. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1974, vol. 36, no. 4, pp. 1185–1191. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.36.1185>.
73. Tatsuno M. Circulatory streaming in the vicinity of an oscillating triangular cylinder. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1975, vol. 38, no. 1, pp. 257–264. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.38.257>.
74. Tatsuno M., Bearman P.W. A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan-Carpenter numbers and low Stokes numbers. *J. Fluid Mech.*, 1990, vol. 211, pp. 157–182. <https://doi.org/10.1017/S0022112090001537>.
75. Honji H. Streaked flow around an oscillating circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1981, vol. 107, pp. 509–520. <https://doi.org/10.1017/S0022112081001894>.
76. Sarpkaya T. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 165, pp. 61–71. <https://doi.org/10.1017/S0022112086002999>.

77. Sarpkaya T. Experiments on the stability of sinusoidal flow over a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 457, pp. 157–180. <https://doi.org/10.1017/S002211200200784X>.
78. Sarpkaya T. Structures of separation on a circular cylinder in periodic flow. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 567, pp. 281–297. <https://doi.org/10.1017/s0022112006002278>.
79. Hall P. On the stability of unsteady boundary layer on a cylinder oscillating transversely in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 1984, vol. 146, pp. 347–367. <https://doi.org/10.1017/S0022112084001907>.
80. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N. Numerical analysis of secondary flows around an oscillating cylinder. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 3, pp. 451–459. <https://doi.org/10.1134/S0021894418030082>.
81. Justesen P. A numerical study of oscillating flow around a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1991, vol. 222, pp. 157–196. <https://doi.org/10.1017/S0022112091001040>.
82. Dütsch H., Durst F., Becker S., Lienhart H. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 1998, vol. 360, pp. 249–271. <https://doi.org/10.1017/S002211209800860X>.
83. Iliadis G., Anagnostopoulos P. Viscous oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter numbers and frequency parameters. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 1998, vol. 26, no. 4, pp. 403–442. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19980228\)26:4<403::AID-FLD640>3.0.CO;2-V](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19980228)26:4<403::AID-FLD640>3.0.CO;2-V).
84. Uzunoglu B., Tan M., Price W.G. Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder using a cell viscous boundary element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2001, vol. 50, no. 10, pp. 2317–2338. <https://doi.org/10.1002/nme.122>.
85. Anagnostopoulos P., Minear R. Blockage effect of oscillatory flow past a fixed cylinder. *Appl. Ocean Res.*, 2004, vol. 26, nos. 3–4, pp. 147–153. <https://doi.org/10.1016/j.apor.2004.11.001>.
86. Nehari D., Armeni V., Balli F. Three-dimensional analysis of the unidirectional oscillatory flow around a circular cylinder at low Keulegan–Carpenter and β numbers. *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 520, pp. 157–186. <https://doi.org/10.1017/S002211200400134X>.
87. Elston J.R., Blackburn H.M., Sheridan J. The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 550, pp. 359–389. <https://doi.org/10.1017/S0022112005008372>.
88. An H. Numerical modelling of flow characteristics and hydrodynamic forces on a cylinder subject to oscillatory flow. *PhD Thesis*. Perth, Univ. of West. Aust., 2009.
89. An H., Cheng L., Zhao M. Steady streaming around a circular cylinder in an oscillatory flow. *Ocean Eng.*, 2009, vol. 36, no. 14, pp. 1089–1097. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.06.010>.
90. Rashid F., Vartdal M., Grue J. Oscillating cylinder in viscous fluid: Calculation of flow patterns and forces. *J. Eng. Math.*, 2011, vol. 70, no. 1, pp. 281–295. <https://doi.org/10.1007/s10665-010-9395-7>.
91. Suthon P., Dalton C. Streakline visualization of the structures in the near wake of a circular cylinder in sinusoidally oscillating flow. *J. Fluids Struct.*, 2011, vol. 27, no. 7, pp. 885–902. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2011.03.003>.

-
92. Suthon P., Dalton C. Observations on the Honji instability. *J. Fluids Struct.*, 2012, vol. 32, pp. 27–36. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2011.12.008>.
 93. Malakhova T.V. Unsteady hydrodynamics and heat transfer of oscillating bodies. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Moscow, 2012. 150 p. (In Russian)
 94. Ren C., Lu L., Cheng L., Chen T. Hydrodynamic damping of an oscillating cylinder at small Keulegan–Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 913, art. A36. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1159>.
 95. Egorov A.G., Kamalutdinov A.M., Nuriev A.N. Evaluation of aerodynamic forces acting on oscillating cantilever beams based on the study of the damped flexural vibration of aluminium test samples. *J. Sound Vib.*, 2018, vol. 421, pp. 334–347. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.02.006>.
 96. Facci A.L., Porfiri M. Nonlinear hydrodynamic damping of sharp-edged cantilevers in viscous fluids undergoing multi-harmonic base excitation. *J. Appl. Phys.*, 2012, vol. 112, no. 12, art. 124908. <https://doi.org/10.1063/1.4769307>.
 97. Graham J.M.R. The forces on sharp-edged cylinders in oscillatory flow at low Keulegan–Carpenter numbers. *J. Fluid Mech.*, 1980, vol. 97, no. 2, pp. 331–346. <https://doi.org/10.1017/s0022112080002595>.
 98. Tafuni A., Sahin I. Non-linear hydrodynamics of thin laminae undergoing large harmonic oscillations in a viscous fluid. *J. Fluids Struct.*, 2015, vol. 52, pp. 101–117. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2014.10.004>.
 99. De Rosis A., Lévêque E. Harmonic oscillations of a thin lamina in a quiescent viscous fluid: A numerical investigation within the framework of the lattice Boltzmann method. *Comput. Struct.*, 2015, vol. 157, pp. 209–217. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.034>.
 100. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M., Egorov A.G. A numerical investigation of fluid flows induced by the oscillations of thin plates and evaluation of the associated hydrodynamic forces. *J. Fluid Mech.*, 2019, vol. 874, pp. 1057–1095. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.477>.
 101. Shrestha B., Ahsan S., Aureli M. Experimental study of oscillating plates in viscous fluids: Qualitative and quantitative analysis of the flow physics and hydrodynamic forces. *Phys. Fluids*, 2018, vol. 30, no. 1, art. 013102. <https://doi.org/10.1063/1.5001330>.
 102. Kamalutdinov A.M. Theoretical and experimental study of aerodynamic properties in an oscillating plate. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Kazan, 2017. 142 p. (In Russian)
 103. Nuriev A.N., Kamalutdinov A.M. Identification of characteristics of the force aerodynamic action on oscillating cantilevered beams. *Fluid Dyn.*, 2022, vol. 57, no. 5, pp. 608–624. <https://doi.org/10.1134/S001546282205010X>.
 104. Facci A.L., Porfiri M. Analysis of three-dimensional effects in oscillating cantilevers immersed in viscous fluids. *J. Fluids Struct.*, 2013, vol. 38, pp. 205–222. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.11.006>.
 105. Agarwal A., Nolan K., Stafford J., Jeffers N. Visualization of three-dimensional structures shed by an oscillating beam. *J. Fluids Struct.*, 2017, vol. 70, pp. 450–463. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.013>.

106. Peterson S.D., Porfiri M., Rovardi A. A particle image velocimetry study of vibrating ionic polymer metal composites in aqueous environments. *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, 2009, vol. 14, no. 4, pp. 474–483. <https://doi.org/10.1109/TMECH.2009.2020979>.
107. Nuriev A, Kamalutdinov A., Zaitseva O. Hydrodynamics around long vibrating beams. *J. Fluids Struct.*, 2021, vol. 101, art. 103203. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2020.103203>.
108. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: v. Kármán Th., Levi-Civita T. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1924, S. 18–33. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2. (In German)
109. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die Kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, S. 128–134. (In German)
110. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No. NACA R-496. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935, pp. 291–311.
111. Garrick I. E. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No. NACA-TR-567. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–10.
112. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1925, Bd. 15, H. 1, S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>. (In German)
113. Glauert H. The force and moment on an oscillating aerofoil. In: Gilles A., Hopf L., v. Kármán Th. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1930, S. 88–95. https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16. (In German)
114. Küssner H.G. Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln. *Luftfahrtforschung*, 1936, Bd. 13, H. 12, S. 410–424. (In German)
115. Küssner H.G., Schwartz I.R. The oscillating wing with aerodynamically balanced elevator. NACA Technical Report No. NACA-TM-991. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1941, pp. 1–32.
116. Keldysh M.V., Lavrentiev M.A. On the theory of the oscillating wing. *Tekh. Zametki TsAGI*, 1935, no. 4, pp. 48–52. (In Russian)
117. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Leningrad, 1950. 443 p. (In Russian)
118. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Theory of Wings in Nonstationary Flow]. Moscow, Leningrad, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1947. 258 p. (In Russian)
119. Durand W.F. (Ed.) *Aerodynamic Theory: A General Review of Progress under a Grant of the Guggenheim Fund for the Promotion of Aeronautics*. Vol. II: von Kármán Th., Burgers J.M. General aerodynamic theory: Perfect fluids. Berlin, Heidelberg, Springer, 1935. xvi, 368 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-91485-0>.
120. Golubev V.V. *Lektsii po teorii kryla* [Lectures on Wing Theory]. Moscow, Leningrad, Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1949. 480 p. (In Russian)

121. Golubev V.V. *Issledovaniya po teorii mashushchego kryla* [Studies on the Theory of a Flapping Wing]. Moscow, Leningrad, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1957. (In Russian)
122. Rozhdestvensky K.V. *Metod srashchivaemykh asimptoticheskikh razlozhenii v gidrodinamike kryla* [Method of Matched Asymptotic Expansions in Wing Hydrodynamics]. Leningrad, Sudostroenie, 1979. 208 p. (In Russian)
123. Rozhdestvensky K.V., Ryzhov V.A. *Matematicheskie modeli v teorii mashushchego kryla* [Mathematical Models in the Theory of the Flapping Wing]. Leningrad, Leningr. Korablestroit. Inst., 1985. 177 p. (In Russian)
124. Gorelov D.N. *Metody resheniya ploskikh kraevykh zadach teorii kyla* [Methods for Solving Two-Dimensional Boundary Value Problems of the Wing Theory]. Novosibirsk, Izd. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2000. 214 p. (In Russian)
125. Żbikowski R. On aerodynamic modelling of an insect-like flapping wing in hover for micro air vehicles. *Philos. Trans. R. Soc., A*, 2002, vol. 360, no. 1791, pp. 273–290.
<http://doi.org/10.1098/rsta.2001.0930>.
126. Azuma A., Okamoto M. Theoretical study on two-dimensional aerodynamic characteristics of unsteady wings. *J. Theor. Biol.*, 2005, vol. 234, no. 1, pp. 67–78.
<https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2004.11.016>.
127. Mateescu D., Abdo M. Theoretical solutions for unsteady flows past oscillating flexible airfoils using velocity singularities. *J. Aircr.*, 2003, vol. 40, no. 1, pp. 153–163.
<https://doi.org/10.2514/2.3070>.
128. Glegg S.A.L., Devenport W.J. Unsteady loading on an airfoil of arbitrary thickness. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 319, nos. 3–5, pp. 1252–1270. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.06.053>.
129. Dynnikova G.Ya., Dynnikov Ya.A., Guvernyuk S.V., Malakhova T.V. Stability of a reverse Karman vortex street. *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, no. 2, art. 024102.
<https://doi.org/10.1063/5.0035575>.
130. Ryzhov V.A. Hydrodynamics of propulsive and energy-saving devices with oscillating wing elements. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Engineering) Diss.* St. Petersburg, 1997. (In Russian)
131. Peters D.A., Hsieh M.A., Torrero A. A state-space airloads theory for flexible airfoils. *J. Am. Helicopter Soc.*, 2007, vol. 52, no. 4, pp. 329–342. <https://doi.org/10.4050/JAHS.52.329>.
132. Peters D.A. Two-dimensional incompressible unsteady airfoil theory — an overview. *J. Fluids Struct.*, 2008, vol. 24, no. 3, pp. 295–312. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.09.001>.
133. Siekmann J. Theoretical studies of sea animal locomotion, Part 1. *Ing.-Arch.*, 1962, vol. 31, no. 3, pp. 214–228. <https://doi.org/10.1007/BF00534511>.
134. Wu T.Y.-T. Swimming of a waving plate. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 3, pp. 321–344. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000949>.
135. Schwarz L. Berechnung der Druckverteilung einer harmonisch sich verformenden Tragfläche in ebener Strömung. *Luftfahrtforschung*, 1940, Bd. 17, S. 379–386. (In German)
136. Kelly H.R., Rentz A.W., Siekmann J. Experimental studies on the motion of a flexible hydrofoil. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 19, no. 1, pp. 30–48. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000520>.

137. Uldrick J.P., Siekmann J. On the swimming of a flexible plate of arbitrary finite thickness. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 20, no. 1, pp. 1–33. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000994>.
138. Reece J.W., Uldrick J.P., Siekmann J. Some recent developments in sea animal locomotion hydrodynamics. In: *Developments in Theoretical and Applied Mechanics: Proc. 2nd Southeast. Conf. on Theoretical and Applied Mechanics. Atlanta, Georgia, March 5–6, 1964*. Oxford, London, New York, NY, Pergamon Press, 1965, pp. 337–349.
139. Uldrick J.P. On the propulsion efficiency of swimming flexible hydrofoils of finite thickness. *J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 32, no. 1, pp. 29–53. <https://doi.org/10.1017/S0022112068000571>.
140. Korennaya L.I. Mechanism of frictional resistance in the undulating body. In: *Gidrodinamicheskie voprosy bioniki* [Hydrodynamic Problems of Bionics]. Kyiv, Naukova Dumka, 1983, pp. 71–81. (In Russian)
141. Korennaya L.I. Viscous drag components in the undulating body. *Bionika*, 1987, vol. 21, pp. 53–58. (In Russian)
142. Lighthill M.J. Note on the swimming of slender fish. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 9, no. 2, pp. 305–317. <https://doi.org/10.1017/S0022112060001110>.
143. Lighthill M.J. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1969, vol. 1, no. 1, pp. 413–446. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.01.010169.002213>.
144. Lighthill M.J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 44, no. 2, pp. 265–301. <https://doi.org/10.1017/S0022112070001830>.
145. Lighthill M.J. Large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *Proc. R. Soc. London, Ser. B*, 1971, vol. 179, no. 1055, pp. 125–138. <https://doi.org/10.1098/rspb.1971.0085>.
146. Wu T.Y.-T. Hydromechanics of swimming propulsion. Part 1. Swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in an inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, no. 2, pp. 337–355. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000570>.
147. Wu T.Y.-T. Hydromechanics of swimming propulsion. Part 2. Some optimum shape problems. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, no. 3, pp. 521–544. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000685>.
148. Wu T.Y.-T. Hydromechanics of swimming propulsion. Part 3. Swimming and optimum movements of slender fish with side fins. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 46, no. 3, pp. 545–568. <https://doi.org/10.1017/S0022112071000697>.
149. Newman J.N., Wu T.Y. A generalized slender-body theory for fish-like forms. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 57, no. 4, pp. 673–693. <https://doi.org/10.1017/S0022112073001953>.
150. Newman J.N., Wu T.Y. Hydromechanical aspects of fish swimming. In: Wu T.Y.-T., Brokaw C.J., Brennen C. (Eds.) *Swimming and Flying in Nature*. Boston, MA, Springer, 1975, pp. 615–634. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1326-8_10.
151. Chopra M.G. Hydromechanics of lunata-tail swimming propulsion. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 64, no. 2, pp. 375–392. <https://doi.org/10.1017/S002211207400245X>.
152. Chopra M.G. Large amplitude lunata-tail theory of fish locomotion. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 74, no. 1, pp. 161–182. <https://doi.org/10.1017/S0022112076001742>.

153. Chopra M.G., Kambe T. Hydromechanics of lunate-tail swimming propulsion. Part 2. *J. Fluid Mech.*, 1977, vol. 79, no. 1, pp. 49–69. <https://doi.org/10.1017/S0022112077000032>.
154. Lavrentiev M.A., Lavrentiev M.M. On a principle for creating a tractive force of motion. *Prikl. Mekh. Tekh. Fiz.*, 1962, vol. 4, pp. 3–9. (In Russian)
155. Logvinovich G.V. *Gidrodinamika techenii so svobodnymi granitsami* [Hydrodynamics of Free-Boundary Flows]. Kyiv, Naukova Dumka, 1969. 208 p. (In Russian)
156. Longvinovich G.V. Hydrodynamics of a thin flexible body (hydrodynamic characteristics of fish). *Bionika*, 1970, vol. 4, pp. 5–11. (In Russian)
157. Longvinovich G.V. Hydrodynamics of fish swimming. *Bionika*, 1973, vol. 7, pp. 3–8. (In Russian)
158. Romanenko E.V. *Teoriya plavaniya ryb i del'finov* [Theory of Fish and Dolphin Swimming]. Moscow, Nauka, 1986. 148 p. (In Russian)
159. Romanenko E.V. *Gidrodinamika ryb i del'finov* [Hydrodynamics of Fish and Dolphins]. Moscow, KMK, 2001. 411 p. (In Russian)
160. Candelier F., Boyer F., Leroyer A. Three-dimensional extension of Lighthill's large-amplitude elongated-body theory of fish locomotion. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 674, pp. 196–226. <https://doi.org/10.1017/S002211201000649X>.
161. Candelier F., Porez M., Boyer F. Note on the swimming of an elongated body in a non-uniform flow. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 716, pp. 616–637. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.560>.
162. Eloy C., Souilliez C., Schouveiler L. Flutter of a rectangular plate. *J. Fluids Struct.*, 2007, vol. 23, no. 6, pp. 904–919. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2007.02.002>.
163. Yu Zh., Eloy Ch. Extension of Lighthill's slender-body theory to moderate aspect ratios. *J. Fluids Struct.*, 2018, vol. 76, pp. 84–94. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.09.010>.
164. Michelin S., Doaré O. Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows. *J. Fluid Mech.*, 2013, vol. 714, pp. 489–504. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.494>.
165. Gorelov D.N. Propulsive characteristics of a flapping wing with with an elastically restrained aileron. *Bionika*, 1991, vol. 24, pp. 18–24. (In Russian)
166. Gruntfest R.A., Derezhina N.P. Vibration of an elastic fin in a fluid flow. *Bionika*, 1981, vol. 15, pp. 29–39. (In Russian)
167. Gruntfest R.A., Derezhina N.P. Vibration of a fin of an arbitrary planform in a fluid flow. *Bionika*, 1984, vol. 18, pp. 45–52. (In Russian)
168. Shklyarchuk F.N. *Aerouprugost' samoleta. Ucheb. posobie* [Aircraft Aeroelasticity. A Study Guide]. Moscow, MAI, 1985. 77 p. (In Russian)
169. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. Unsteady oscillation of a deformable airfoil section in incompressible flow. *Russ. Aeronaut.*, 2009, vol. 52, no. 2, pp. 129–137. <https://doi.org/10.3103/S1068799809020019>.
170. Kurapov A.A., Rozhdestvensky K.V., Ryzhov V.A. Hydrodynamics of an elastic wing. Optimal characteristics. *Tr. V Vsesoyuz. shk. "Gidrodinamika vysokikh skorostei"* [Proc. V All-Union School "Hydrodynamics of High Speeds"]. Cheboksary, 1994, pp. 32–41. (In Russian)

171. Rozhdestvensky K.V., Ryzhov V.A. Aerohydrodynamics of flapping-wing propulsors. *Prog. Aerosp. Sci.*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 585–633. [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(03\)00077-0](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(03)00077-0).
172. Katz J., Weihs D. Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility. *J. Fluid Mech.*, 1978, vol. 88, no. 3, pp. 485–497. <https://doi.org/10.1017/S0022112078002220>.
173. Kartuzov E.I. Optimization of propulsive systems with wing elements. *Extended Abstract of Dr. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* St. Petersburg, 2000. 313 p. (In Russian)
174. Sumbatyan M.A., Tarasov A.E. A mathematical model for the propulsive thrust of the thin elastic wing harmonically oscillating in a flow of non-viscous incompressible fluid. *Mech. Res. Commun.*, 2015, vol. 68, pp. 83–88. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.02.005>.
175. Tarasov A.E. Aero-hydrodynamic analysis of elastic propulsive elements using the method of integral equations. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Rostov-on-Don, 2015. 139 p. (In Russian)
176. Berci M., Toropov V., Hewson R., Gaskell P. Aeroelastic analysis and gust response of a flexible airfoil. *Proc. 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf.* Orlando, FL, 2010, art. AIAA 2010-3119. <https://doi.org/10.2514/6.2010-3119>.
177. Küssner H.G. Allgemeine Tragflächentheorie. *Luftfahrtforschung*, 1940, Bd. 17, S. 370–378. (In German)
178. Khrabrov A.N. Mathematical modeling of the influence of vortex shedding on the unsteady aerodynamic characteristics of an airfoil during its arbitrary motion. *Uch. Zap. TsaGI*, 2002, vol. 33, nos. 3–4, pp. 3–17. (In Russian)
179. Liu H., Ellington C.P., Kawachi K., van den Berg C., Willmott A.P. A computational fluid dynamic study of hawkmoth hovering. *J. Exp. Biol.*, 1998, vol. 201, no. 4, pp. 461–477. <https://doi.org/10.1242/jeb.201.4.461>.
180. Isogai K., Shinmoto Y., Watanabe Y. Effects of dynamic stall on propulsive efficiency and thrust of flapping airfoil. *AIAA J.*, 1999, vol. 37, no. 10, pp. 1145–1151. <https://doi.org/10.2514/2.589>.
181. Pedro G., Suleman A., Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2003, vol. 42, no. 5, pp. 493–526. <https://doi.org/10.1002/fld.525>.
182. Lewin G.C., Haj-Hariri H. Modelling thrust generation of a two-dimensional heaving airfoil in a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 492, pp. 339–362. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005743>.
183. Alben S., Shelley M. Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 2005, vol. 102, no. 32, pp. 11163–11166. <https://doi.org/10.1073/pnas.0505064102>.
184. Zhang J., Liu N.-S., Lu X.-Y. Locomotion of a passively flapping flat plate. *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 659, pp. 43–68. <https://doi.org/10.1017/S0022112010002387>.
185. Spagnolie S.E., Moret L., Shelley M.J., Zhang J. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, art. 041903. <https://doi.org/10.1063/1.3383215>.

-
186. Maertens A.P., Triantafyllou M.S., Yue D.K.P. Efficiency of fish propulsion. *Bioinspiration Biomimetics*, 2015, vol. 10, no. 4, art. 046013. <https://doi.org/10.1088/1748-3190/10/4/046013>.
187. Lua K.B., Dash S.M., Lim T.T., Yeo K.S. On the thrust performance of a flapping two-dimensional elliptic airfoil in a forward flight. *J. Fluids Struct.*, 2016, vol. 66, pp. 91–109. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.07.012>.
188. Koval' K.A., Sukhorukov A.L., Chernyshev I.A. Results of verification of the numerical method of calculating the hydrodynamic and hydroacoustic characteristics of a fin propeller. *Fundam. Prikl. Gidrofiz.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 60–72. (In Russian)
189. Dynnikov Ya.A. On the calculation of a flapping flexible airfoil in the flow of viscous incompressible fluid. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinostr.*, 2016, no. 4, pp. 22–30. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2016-4-22-30>. (In Russian)
190. Taha H.E. Geometric nonlinear control of the lift dynamics of a pitching-plunging wing. *Proc. AIAA Scitech 2020 Forum*. Orlando, FL, AIAA, 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-0824>.
191. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 1. Numerical method, single-plate case and lattice input power. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A20. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.6>.
192. Alben S. Collective locomotion of two-dimensional lattices of flapping plates. Part 2. Lattice flows and propulsive efficiency. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 915, art. A21. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.43>.
193. Borazjani I., Sotiropoulos F. On the role of form and kinematics on the hydrodynamics of self-propelled body/caudal fin swimming. *J. Exp. Biol.*, 2010, vol. 213, no. 1, pp. 89–107. <https://doi.org/10.1242/jeb.030932>.
194. Yeh P.D., Alexeev A. Effect of aspect ratio in free-swimming plunging flexible plates. *Comput. Fluids*, 2016, vol. 124, pp. 220–225. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.07.009>.
195. Maertens A.P., Gao A., Triantafyllou M.S. Optimal undulatory swimming for a single fish-like body and for a pair of interacting swimmers. *J. Fluid Mech.*, 2017, vol. 813, pp. 301–345. <https://doi.org/10.1017/jfm.2016.845>.
196. Zhang D., Huang W.-X. Hydrodynamics of a swimming batoid fish at Reynolds numbers up to 148 000. *J. Fluid Mech.*, 2023, vol. 963, art. A16. <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.325>.
197. Wu X., Zhang X., Tian X., Li X., Lu W. A review on fluid dynamics of flapping foils. *Ocean Eng.*, 2020, vol. 195, art. 106712. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2019.106712>.
198. Riley N., Watson E.J. Eccentric oscillations of a circular cylinder in a viscous fluid. *Mathematika*, 1993, vol. 40, no. 2, pp. 187–202. <https://doi.org/10.1112/S0025579300006975>.
199. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
200. Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 2–3, pp. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>. (In Russian)

Информация об авторах

Артем Наилевич Нуриев, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: nuriev_an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

Ольга Николаевна Зайцева, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник НИЛ «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: olga_fdpi@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

Ольга Сергеевна Жучкова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов в геологии Института геологии и нефтегазовых технологий, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: OSZaharova@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6779-6934>

Author Information

Artem N. Nuriev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: nuriev_an@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

Olga N. Zaitseva, Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: olga_fdpi@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

Olga S. Zhuchkova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical Methods in Geology, Institute of Geology and Petroleum Technologies, Kazan Federal University

E-mail: OSZaharova@kpfu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6779-6934>

Поступила в редакцию 23.08.2024

Принята к публикации 27.11.2024

Received August 23, 2024

Accepted November 27, 2024

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.6: 532.5

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.99-114>Реализация быстрых алгоритмов при моделировании
двумерных течений вихревыми методамиЕ.П. Рятина, И.К. Марчевский , А.О. Колганова, Д.Ю. Кобзарь*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия* *iliamarchevsky@mail.ru*

Аннотация

Вихревые методы вычислительной гидродинамики широко используются в инженерной практике для решения задач моделирования течений и оценки нестационарных гидродинамических нагрузок, действующих на тела в потоке. Основным преимуществом вихревых методов является возможность выполнения расчета при относительно небольших затратах вычислительных ресурсов, при этом область их применения весьма узка: моделирование дозвуковых несжимаемых однофазных нетеплопроводных течений. Однако при повышении степени дискретизации вычислительная сложность основных операций существенно возрастает, как и затраты машинной памяти, если использовать «прямые» алгоритмы. Для основных трудоемких операций, таких как вычисление конвективных скоростей вихревых частиц и решение граничного интегрального уравнения, разработаны и реализованы приближенные быстрые алгоритмы, обладающие квазилинейной сложностью. Представлено описание быстрых алгоритмов, обсуждаются их модификации для решения указанных задач, исследована эффективность их реализаций. Показано, что использование быстрых алгоритмов позволяет достичь ускорения расчетов в сотни раз при количестве вихревых частиц порядка миллиона.

Ключевые слова: вихревой метод, быстрый алгоритм, метод Барнса – Хата, быстрый метод мультиполей, задача N тел, граничное интегральное уравнение

Для цитирования: Рятина Е.П., Марчевский И.К., Колганова А.О., Кобзарь Д.Ю. Реализация быстрых алгоритмов при моделировании двумерных течений вихревыми методами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 99–114.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.99-114>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.99-114>

Implementation of fast algorithms for 2D flow simulation using vortex particle methods

E.P. Ryatina, I.K. Marchevsky , A.O. Kolganova, D.Yu. Kobzar

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

 iliamarchevsky@mail.ru

Abstract

Vortex particle methods of computational hydrodynamics are widely employed by engineers to solve the problems of flow simulation and estimation of unsteady hydrodynamic loads acting on bodies. The main advantage of such methods is a relatively low computational cost, but their applicability is limited to subsonic incompressible single-phase non-heat-conducting flows. If high-order discretization is required, the usage of direct algorithms leads to a significant increase in computational complexity and memory demand. To overcome this limitation, approximate fast algorithms of quasilinear computational complexity were developed and implemented for the most time-consuming operations, such as the computation of convective velocities and the solution of the boundary integral equation. The general principles of fast algorithms were described. Their modifications for the problems mentioned above were discussed, and their efficiency was evaluated. The results obtained show that the application of fast algorithms enables a computational speedup of up to several hundred times for around a million vortex particles.

Keywords: vortex method, fast algorithm, Barnes–Hut method, fast multipole method, N -body problem, boundary integral equation

For citation: Ryatina E.P., Marchevsky I.K., Kolganova A.O., Kobzar D.Yu. Implementation of fast algorithms for 2D flow simulation using vortex particle methods. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 99–114. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.99-114>. (In Russian)

Введение

В настоящее время для решения задач вычислительной гидродинамики, таких как моделирование обтекания двумерных профилей и трехмерных тел, оценка стационарных и нестационарных гидродинамических нагрузок, действующих на подвижные или неподвижные конструкции, и т. д., преимущественно применяются сеточные методы. Однако при рассмотрении низкоскоростных, существенно дозвуковых течений однофазных сред, когда влиянием сжимаемости можно пренебречь, эффективной альтернативой сеточным (с точки зрения времени вычислений) могут являться лагранжевы вихревые методы [1–6], особенно при моделировании внешнего обтекания профилей или тел, которые являются подвижными и/или деформируемыми. При этом движение обтекаемых поверхностей может

происходить как по заранее заданному закону, так и под действием гидродинамических сил; в последнем случае речь идет о рассмотрении сопряженных задач гидроупругости.

Суть вихревых методов заключается в переходе от классической формулировки уравнений Навье – Стокса в переменных «скорость – давление» к завихренности как первичной расчетной величине. Распределение завихренности в области течения задают в виде множества N вихревых частиц, которые в двумерном случае представляют собой бесконечные вихревые нити (или вихревые домены), ортогональные плоскости течения. Их интенсивности (циркуляции), в зависимости от рассматриваемой модификации вихревых методов, могут быть как постоянными, так и изменяющимися во времени. В рамках обсуждаемого здесь метода вязких вихревых доменов [3, 7, 8] использован первый подход.

Обтекаемая поверхность в потоке в соответствии с идеями, восходящими еще к Н. Е. Жуковскому и даже Г. Гельмгольцу, может быть заменена тонким вихревым слоем с заранее неизвестной интенсивностью, удовлетворяющей некоторому интегральному уравнению, которое выражает граничное условие на обтекаемом профиле: условие прилипания, если рассматривается вязкая среда, или условие непротекания, если моделируется течение идеальной среды.

При решении задач моделирования поперечного обтекания элементов конструкций, имеющих значительное удлинение, вместо решения пространственной задачи можно рассмотреть одну или набор значительно более простых плоских задач о расчете обтекания профилей отдельных сечений исходного тела. В настоящей работе будем рассматривать именно алгоритмы решения двумерных задач.

Если моделируется течение вязкой жидкости, описываемое уравнениями Навье – Стокса, завихренность, содержащаяся в вихревом слое на профиле, следует рассматривать как свободную. Это означает, что будучи сгенерированной вблизи профиля, далее она становится «частью» вихревого следа, т. е. распределения завихренности в области течения [3]. Эволюция вихревого следа моделируется движением большого числа вихревых частиц согласно законам гидродинамики вязких сред. При этом диффузия отдельных вихревых частиц, по крайней мере в методе вязких вихревых доменов, не моделируется. Воспроизведение диффузии макроскопических («физических») вихрей обеспечивается путем их моделирования большим числом вихревых частиц, которые, в свою очередь, движутся по специальным образом построенному полю скоростей – это т. н. метод диффузионной скорости [3, 7–9].

При моделировании обтекания подвижных профилей в дополнение к свободному вихревому слою вводят присоединенный вихревой слой и присоединенный слой источников, интенсивности которых определяются только лишь скоростями движения точек обтекаемой поверхности [3].

При повышении степени дискретизации число вихревых частиц может достигать сотен тысяч и даже миллионов, что резко снижает эффективность вихревых методов, если все вычислительные алгоритмы реализовать тривиальным образом, рассчитывая взаимодействие каждой частицы с каждой (в отличие от других методов частиц, к примеру, SPH, вихревые частицы обладают дальним действием, и влияние каждой частицы распространяется на всю область течения). Для решения этой проблемы была предложена идея построения семейства приближенных быстрых алгоритмов, позволяющих значительно снизить вычислительную сложность основных операций вихревого метода. Целями настоящей работы являются программная реализация названных алгоритмов и исследование их эффективности при решении модельных задач.

1. Об эффективности вихревых методов

Не ставя задачу полного и детального описания алгоритма вихревых методов (для этого можно обратиться к ранее упомянутым монографиям [1–5], обзору [6], а также описаниям реализации метода вязких вихревых доменов в коде VM2D [10–12]), приведем лишь краткую схему алгоритма моделирования течения среды вокруг профиля или системы профилей. Ниже перечислены основные блоки операций алгоритма, выполняемые на каждом шаге расчета по времени.

- А. Генерация завихренности на обтекаемой поверхности; математически – решение граничного интегрального уравнения (ГИУ). Помимо собственно решения ГИУ, для этого требуется решение таких вычислительно сложных задач, как аппроксимация самого оператора и расчет правой части (если профиль неподвижен – первое выполняется однократно).
- В. Моделирование эволюции завихренности в области течения; математически – решение уравнения переноса завихренности. В рамках лагранжева подхода для этого выполняются расчет конвективных и диффузионных скоростей вихревых частиц и их перемещение по суммарному полю. Также выполняются реструктуризация вихревого следа, позволяющая сократить число частиц в потоке, моделирование движения профиля (если требуется) и контроль проникновения вихревых частиц внутрь профиля.
- С. При необходимости – восстановление поля скоростей и поля давления в области течения в точках, заданных пользователем; расчет гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые профили.

Задачи из каждого указанного блока существенно различаются как по подходам и алгоритмам их решения, так и по вычислительной сложности. Для наглядности на рис. 1 представлена диаграмма, показывающая соотношения времен, затрачиваемых на выполнение перечисленных операций, при рассмотрении типичной ситуации моделирования обтекания неподвижного профиля, когда все операции реализованы тривиальным образом. Видно, что наиболее трудоемким является расчет конвективных скоростей вихревых частиц.

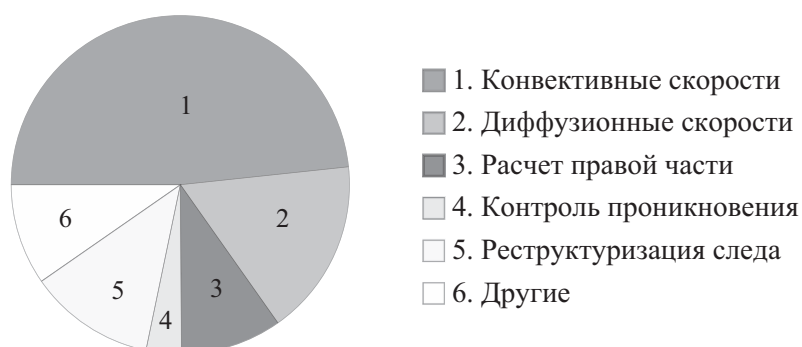


Рис. 1. Распределение времени расчета по основным операциям вихревого метода при решении типичной задачи моделирования обтекания неподвижного профиля

Fig. 1. Distribution of computational times for the main operations of the vortex method when solving a standard problem of flow simulation around a stationary airfoil

Граница профиля обычно аппроксимируется многоугольником, состоящим из прямолинейных участков – панелей. Дискретным аналогом ГИУ относительно интенсивности вихревого слоя на профиле является система линейных алгебраических уравнений с полностью заполненной матрицей, размерность которой пропорциональна числу панелей (суммарно на всех профилях, если речь идет о моделировании обтекания системы профилей). Столбец правой части вычисляется как суперпозиция влияний на панели со стороны набегающего потока, всей завихренности в области течения и присоединенных слоев вихрей и источников (если профили подвижны).

Оценка вклада влияния завихренности в области течения – наиболее трудозатратная операция с учетом того, что количество вихревых частиц в следе может быть весьма значительным. Если рассматриваются система из нескольких профилей или один профиль, но имеющий сложную геометрическую форму, размерность матрицы системы также может стать довольно большой, поэтому в общем случае и вычисление коэффициентов матрицы, и расчет правой части, а также собственно решение системы уравнений становятся невозможными за разумное время [13].

Рассмотрим операции из второго блока описанного алгоритма. Процедура восстановления поля скоростей основана на использовании обобщенного закона Био – Савара, такие скорости называют «конвективными». Скорости необходимо вычислять по крайней мере во всех точках расположения вихревых частиц. Задача расчета конвективных скоростей аналогична гравитационной задаче N тел и имеет, таким образом, квадратичную по числу частиц вычислительную сложность. Отметим, что вычисление правой части линейной системы также можно рассматривать как расчет влияния вихревых частиц на панели профиля, поэтому вычислительная сложность этой операции пропорциональна произведению числа частиц на число панелей. Расчет компонентов матрицы линейной системы также фактически представляет собой вычисление влияния каждой панели с единичной завихренностью на ней на каждую.

При использовании метода вязких вихревых доменов для учета влияния вязкости необходимо рассчитывать и диффузионные скорости вихревых частиц, обусловленные влиянием других частиц и обтекаемой поверхности. Сложность этой операции также является квадратичной по числу частиц. Похожим образом обстоит дело и с реструктуризацией вихревого следа, а также контролем проникновения частиц. Здесь, конечно, речь не идет о законе Био – Савара, но все эти операции также суть расчет взаимодействия частиц между собой и/или с панелями профиля.

Операции из третьего блока алгоритма также обладают квадратичной сложностью. Исключение составляет расчет гидродинамических нагрузок, действующих на обтекаемые профили: в работе [14] представлены интегральные выражения для них, зависящие от интенсивности свободного вихревого слоя; вычислительная сложность такой операции пренебрежимо мала. В то же время восстановление скоростей и давления предполагает обращение к закону Био – Савара, т. е. дополнительно требует учета влияния всех вихревых частиц. Таким образом, сложность этой операции пропорциональна произведению числа частиц на число точек вычисления скоростей и давления.

Основные операции алгоритма вихревого метода, выполняемые на каждом расчетном шаге по времени, и оценки по порядку величины сложности их прямой реализации приведены в табл. 1.

Здесь N – число вихревых частиц, моделирующих завихренность в области течения; M – суммарное число панелей на границах профилей; P – число точек вычисления давления и скорости.

Если число частиц и панелей невелико (первых – не более десятков тысяч, вторых – до нескольких тысяч), то, несмотря на квадратичную вычислительную сложность рассмотренных операций, время их выполнения на современных ЭВМ оказывается весьма малым и может быть практически линейно уменьшено за счет применения технологий параллельных вычислений, наиболее эффективной из которых является перенос вычислительной работы на графические ускорители (GPU). Однако в задачах, представляющих интерес, может потребоваться довольно высокое разрешение, в результате количество частиц N может достигать сотен тысяч и даже нескольких миллионов, а число панелей на профилях M – десятков тысяч. Прямое решение указанных подзадач, наиболее характерной из которых является расчет конвективных скоростей вихрей по закону Био – Савара, становится при этом неприемлемо долгим и, по существу, сводит на нет все преимущества вихревых методов. Использование технологий параллельных вычислений (в данном случае – «экстенсивный» путь) при этом не позволяет решить проблему: простая оценка показывает, что при повышении степени дискретизации по пространству в два раза и двукратном измельчении шага по времени общая трудоемкость алгоритма решения нестационарной задачи возрастает в тридцать два раза.

Табл. 1. Сложность (по порядку величины) основных операций вихревых методов при прямой реализации алгоритмов

Table 1. Computational complexity (by the order of magnitude) for the main operations of vortex methods in case of direct algorithm implementation

Блок	Операция	Сложность
А	Формирование матрицы	M^2
	Расчет правой части	NM
	Решение системы	от M^2 до M^3
В	Конвективные скорости	$(N + M)N$
	Диффузионные скорости	$(N + M)N$
	Перемещение частиц и тел	$N + M$
	Контроль проникновения	NM
	Реструктуризация следа	N^2
С	Расчет V и p	$(M + N)P$
	Расчет нагрузок	от M до $(N + M)M$

Принципиального снижения вычислительной сложности операций можно достичь путем применения приближенных быстрых алгоритмов, обладающих квазилинейной вычислительной сложностью вместо квадратичной.

Обсуждаемый здесь быстрый алгоритм разработан для решения вышеупомянутых задач и основан на объединении идей хорошо известного метода Барнса – Хата [15] и быстрого метода мультиполей [16, 17]. Предлагаемый алгоритм [18] можно рассматривать как

дальнейшее развитие метода [19] с учетом бóльшего количества слагаемых в мультипольном и локальном разложениях. Метод может быть адаптирован как к решению задачи расчета скоростей вихревых частиц и восстановления поля скоростей в целом, так и к расчету правой части, а также к итерационному решению системы линейных уравнений, аппроксимирующей граничное интегральное уравнение.

2. Быстрый алгоритм расчета конвективных скоростей вихревых частиц

Метод Барнса–Хата основан на иерархическом разделении области течения на под-области, что, по существу, означает построение в расчетной области k -d дерева; таким образом, все частицы объединяются в кластеры (по геометрическому принципу). Если при расчете влияния на вихревые частицы, находящиеся в контрольном кластере, влияющий кластер расположен достаточно далеко, его влияние можно с высокой точностью заменить суммированием нескольких первых членов разложения функции скорости по отрицательным степеням расстояния $|\rho|$ между центрами кластеров. Такое разложение называют мультипольным. При этом нет необходимости рассчитывать это влияние в точках расположения всех частиц, а достаточно сделать это лишь в центре контрольного кластера $\mathbf{r}$. После этого для расчета скоростей расположенных в нем частиц необходимо выполнить локальное разложение всех членов упомянутого мультипольного разложения (фактически – по формуле Тейлора), считая расстояния $\Delta\rho$ от центра кластера до отдельных частиц малыми величинами (рис. 2). Таким образом, вычислительная сложность всего алгоритма расчета конвективных скоростей составляет величину порядка $O(N \log N)$ вместо $O(N^2)$ по числу частиц в вихревом следе.

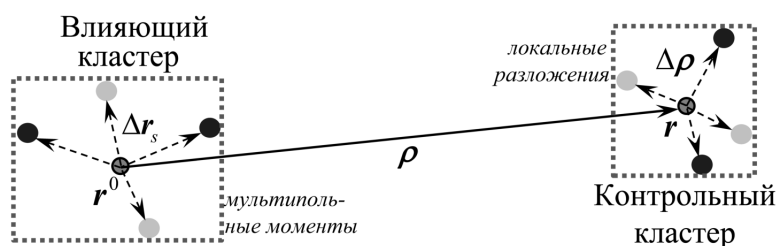


Рис. 2. Взаимодействие двух кластеров вихревых частиц

Fig. 2. Interaction between two clusters of vortex particles

Отметим, что при реализации алгоритма для GPU, используя технологию программирования Nvidia CUDA, производить объединение частиц в контрольные кластеры явным образом не нужно; роль «контрольных кластеров» там играют блоки частиц (в терминологии CUDA), размер которых пропорционален размеру варпа (32). При этом в каждый блок должны входить частицы, расположенные в пространстве близко друг к другу, что достигается в результате их предварительной сортировки по Z-кривой (мортонским кодам).

Если влияющий кластер расположен близко к контрольному, то его влияние на все точки наблюдения рассчитывается напрямую по закону Био–Савара без использования каких-либо приближений и упрощений:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{inf}}} \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2},$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки наблюдения; $\mathbf{k}$ – единичный вектор, ортогональный плоскости течения; N_{inf} – число вихревых частиц, содержащихся во влияющем кластере; $\mathbf{r}_i$ и Γ_i – положения и циркуляции этих частиц.

Наиболее эффективным способом построения дерева является использование заполняющих пространство кривых, например, кривой Мортон, позволяющих отобразить многомерные данные (ячейки дерева и вихревые частицы) в упорядоченный линейный массив (рис. 3).

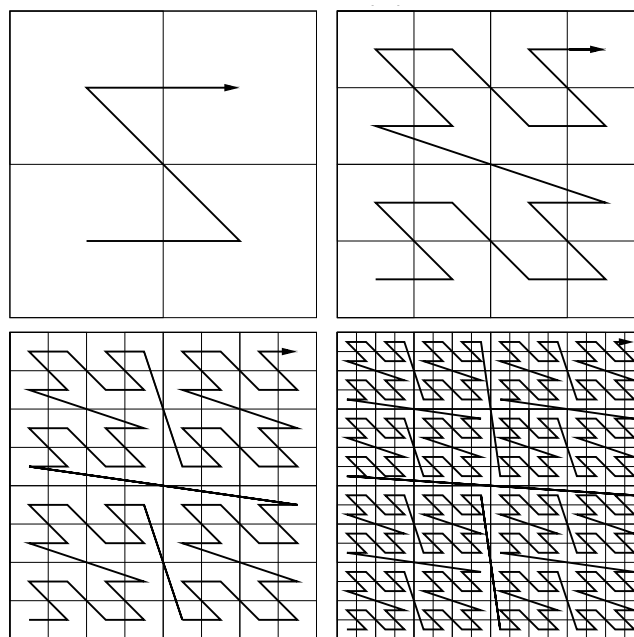


Рис. 3. Кривая Мортон

Fig. 3. Morton curve

Такой алгоритм является нерекурсивным и хорошо масштабируемым. В дополнение к этому известны алгоритмы [20], позволяющие независимо и параллельно обрабатывать все ячейки дерева на всех уровнях. Затем производится обход дерева снизу вверх для расчета всех параметров ячеек – мультипольных моментов. Далее для каждой ячейки нижнего уровня (т.е. отдельных вихревых частиц или кластеров, если дерево строится лишь до определенной глубины) выполняется обход дерева сверху вниз; при этом определяются далеко расположенные ячейки, влияние которых может быть рассчитано приближенно, а также близко расположенные ячейки (нижнего уровня), влияние которых рассчитывается напрямую по закону Био – Савара. Все необходимые формулы для расчета мультипольных моментов, их сдвига к новой точке приведения, а также вычисления коэффициентов локальных разложений имеются в работе [18]. Их реализации в виде прототипов программ с исходными кодами доступны по ссылке <https://github.com/vortexmethods/fastm>.

На рис. 4 приведено сравнение времени расчета конвективных скоростей вихревых частиц с помощью прямого метода и разработанного быстрого алгоритма. Расчеты проводились в параллельном режиме: для реализации алгоритма с использованием технологии OpenMP – на 18-ядерном центральном процессоре Intel i9-10980XE; для реализации с использованием технологии Nvidia CUDA – на графическом ускорителе Nvidia Titan V.

Последняя является результатом существенной переработки подхода и кода [21], использованного первоначально для решения на GPU гравитационной задачи N тел.

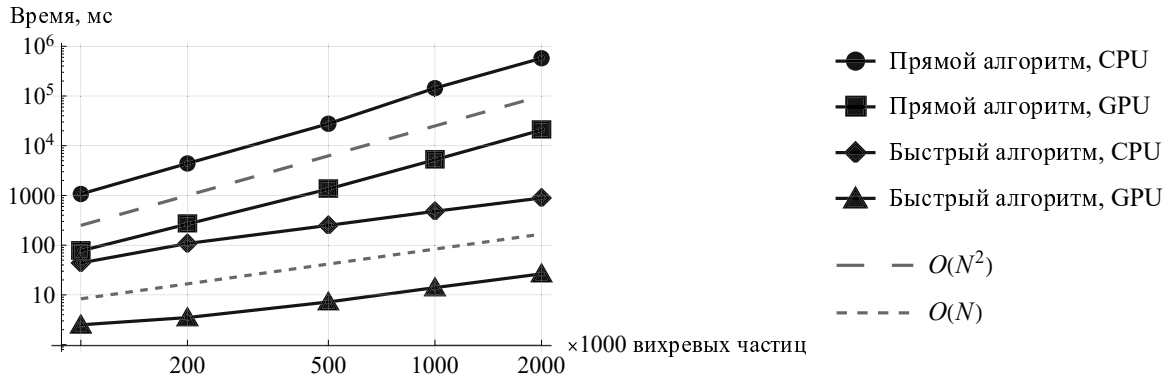


Рис. 4. Время расчета конвективных скоростей вихревых частиц

Fig. 4. Computational time for the convective velocities of vortex particles

Видно, что реализация и прямого, и быстрого алгоритмов на GPU позволяет получить ускорение примерно в тридцать раз по сравнению с расчетами на центральном процессоре. Использование быстрого алгоритма позволяет достичь ускорения в несколько сотен раз при значениях N порядка 10^6 .

3. Быстрый алгоритм для решения граничного интегрального уравнения

Интенсивность свободного вихревого слоя может быть найдена из решения граничного интегрального уравнения (ГИУ), выражающего условие прилипания. Наиболее эффективным подходом представляется использование т.н. T -модели [22, 23], основанной на равенстве касательных компонент скорости среды на границе профиля K и собственной скорости профиля, что математически означает рассмотрение ГИУ относительно интенсивности вихревого слоя $\gamma(\mathbf{r}) = \gamma(\mathbf{r})\mathbf{k}$

$$\oint_K Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\ell_{\boldsymbol{\xi}} - \frac{\gamma(\mathbf{r})}{2} = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in K,$$

ядро которого отличается от функции расчета скоростей по закону Био–Савара лишь скалярным умножением на орт касательной в точке наблюдения:

$$Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})}{2\pi|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^2} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}).$$

Отметим, что такое ядро является ограниченным для гладких профилей и абсолютно интегрируемым для профилей с угловыми точками или острыми кромками.

Если рассматривается задача моделирования внешнего обтекания профиля или системы профилей, такое ГИУ имеет бесконечное множество решений; для выделения единственного решения следует задать величины интеграла от решения вдоль каждого профиля:

$$\oint_{K_p} \gamma(\boldsymbol{\xi}) d\ell_{\boldsymbol{\xi}} = \Gamma_p, \quad p = 1, \dots, C,$$

где C — количество контуров.

Для решения ГИУ разработана иерархия численных схем на основе метода Галеркина [22,23], из которых оптимальной по точности/сложности при моделировании обтекания гладких профилей является схема $\mathcal{T}^1$, основанная на кусочно-линейном представлении решения $\gamma(\mathbf{r})$ на панелях профиля. Матрица соответствующей линейной системы, полученной из условия ортогональности невязки системе проекционных кусочно-линейных функций, имеет размерность $(2M + C) \times (2M + C)$. Следует отметить, что если рассматривается один профиль или система из нескольких профилей, неподвижных друг относительно друга, то трудоемкость операции решения СЛАУ на каждом расчетном шаге можно значительно снизить: коэффициенты матрицы системы остаются постоянными, поэтому она может быть сформирована и обращена однократно в начале расчета, а на каждом шаге следует лишь умножать обратную матрицу на новый вектор правой части. В противном случае, если с течением времени взаимное расположение профилей изменяется, на каждом шаге необходимо решать систему с новой матрицей. При достаточно подробной дискретизации профилей трудоемкость данной операции многократно возрастает.

Вычисление каждого коэффициента a_{ij} матрицы системы, за исключением последних C строк и столбцов, можно трактовать как расчет влияния j -й панели с заданным распределением завихренности на i -ю (контрольную) панель. Таким образом, требуется производить интегрирование функции влияния, причем дважды – по влияющей и контрольной панелям, с постоянными и линейными базисными и проекционными функциями. Первое реализуется за счет введения мультипольных моментов панелей, которые можно вычислить, если суммирование по частицам заменить на интегрирование вдоль панели. Второе реализуется переходом от интегрирования самой функции влияния к интегрированию ее локального разложения (с необходимыми весами – проекционными функциями). Панели, далеко расположенные друг от друга, могут быть объединены в кластеры, и их влияние может быть вычислено приближенно (рис. 5).

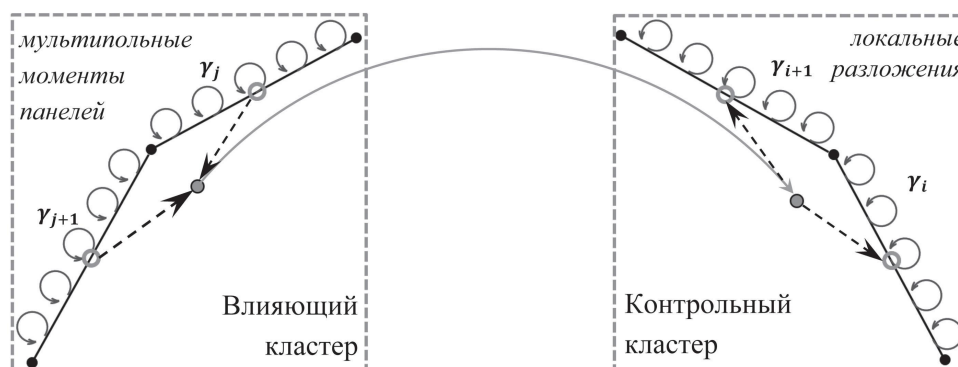


Рис. 5. Влияние кластеров панелей профиля
Fig. 5. Influence of the clusters of airfoil panels

Для решения линейной системы можно использовать итерационные алгоритмы. При выполнении каждой итерации происходит умножение матрицы системы на некоторый вектор, который можно формально считать заданным распределением завихренности. В силу приведенных выше соображений это умножение можно рассматривать как форму вычисления вихревого влияния и, значит, выполнять приближенно, используя фактически

тот же быстрый алгоритм Барнса – Хата/мультиполей, что и для расчета конвективных скоростей.

Приведем основные шаги быстрого алгоритма матрично-векторного умножения.

1. Построение k -d дерева на основе фрактальной кривой Мортон (по центрам панелей профиля).
2. Расчет мультипольных моментов панелей; отличие от расчета скоростей вихревых частиц заключается в том, что панели характеризуются не только монопольным моментом – содержащейся в них суммарной завихренностью, но и моментами старших порядков, характеризующими ее распределение вдоль панели.
3. Расчет мультипольных моментов всех ячеек дерева путем суммирования моментов содержащихся в них панелей (для ячеек нижнего уровня, т.е. листьев дерева) или ячеек-потомков с предварительным приведением их моментов к центру родительской ячейки.
4. Для каждой ячейки нижнего уровня выполняем:
 - обход дерева от корня к листьям: определение дальних и ближних ячеек;
 - для дальних ячеек: расчет (путем накопления) коэффициентов локального разложения;
 - для ячеек ближней зоны: расчет их влияния напрямую;
 - расчет приближенного влияния дальней зоны с использованием накопленных коэффициентов локального разложения.

Вычисление столбца правой части системы линейных уравнений – это расчет влияния вихревых частиц на панели профиля, который может быть выполнен приближенно с использованием комбинации описанных алгоритмов. Необходимо построить два дерева (по частицам и панелям), затем влияние далеко расположенных кластеров частиц рассчитывать по быстрому алгоритму, выполнив при этом интегрирование по контрольным панелям с требуемыми проекционными функциями.

При рассмотрении различных итерационных алгоритмов решения линейных систем наиболее эффективным оказался обобщенный метод минимальных невязок (GMRES) с дополнительно реализованной процедурой предобуславливания. Время решения системы линейных уравнений при достаточно подробной дискретизации профиля представлено в табл. 2. В качестве тестовой была взята задача о моделировании обтекания системы из 9 близко расположенных круговых профилей, каждый из которых был разбит сначала на 1 000, а потом на 4 000 панелей. Были рассмотрены три способа решения линейной системы: метод исключения Гаусса, реализованный в библиотеке Intel MKL и имеющий кубическую вычислительную сложность; итерационный метод GMRES (с вычислением всей матрицы и ее прямым умножением на вектор), имеющий квадратичную вычислительную сложность каждой итерации, а также метод GMRES с выполнением матрично-векторного умножения по предлагаемому быстрому алгоритму, имеющий квазилинейную вычислительную сложность итерации. Расчеты проводились в параллельном режиме на 18-ядерном процессоре Intel i9-10980XE, для первых двух методов указаны время формирования матрицы и собственно время решения СЛАУ.

Табл. 2. Время решения системы линейных уравнений**Table 2.** Computation time for solving the system of linear equations

Метод	$9 \times 1\,000$ панелей	$9 \times 4\,000$ панелей
Гаусс (MKL)	$1.81 + 5.27$ с	$29.3 + 268$ с
GMRES	$1.81 + 0.61$ с	$29.3 + 8.80$ с
GMRES + быстрый м-д	0.20 с	0.68 с

Ускорение матрично-векторного умножения за счет использования быстрого алгоритма составляет десятки и даже сотни раз. Следует отметить, что помимо этого также достигается существенная экономия машинной памяти, поскольку при использовании быстрого алгоритма необходимо хранить лишь ту часть коэффициентов матрицы, которая вычисляется точно. Например, при решении указанных задач для хранения полной матрицы системы потребовалось 2.6 Гб и 41.5 Гб оперативной памяти соответственно, тогда как при использовании быстрого метода при количестве панелей, превышающем 5 000, оказалось достаточным явного вычисления и хранения менее 1 % компонент, и эта доля быстро уменьшается с ростом размерности системы.

Заключение

Реализован быстрый алгоритм квазилинейной вычислительной сложности на основе метода Барнса – Хата с использованием мультипольных и локальных разложений для задач расчета конвективных скоростей вихревых частиц. Мультипольное разложение, содержащее достаточное количество членов, позволило с высокой точностью рассчитать влияние кластеров вихревых частиц на достаточно удаленную точку наблюдения. Локальные разложения мультипольных слагаемых позволили также объединять точки наблюдения в кластеры и ограничиться вычислением членов мультипольного разложения в их центрах. Использование быстрого алгоритма позволило достичь ускорения в сотни раз по сравнению с прямым расчетом. Разработаны параллельные реализации алгоритма расчета конвективных скоростей частиц для многоядерных процессоров по технологии OpenMP и для графических ускорителей с использованием технологии Nvidia CUDA.

Выполнена адаптация быстрого алгоритма к решению граничного интегрального уравнения с применением расчетных схем повышенной точности. Модификация основана на учете мультипольных моментов панелей и интегрального характера обеспечения граничного условия. Помимо значительного уменьшения времени проведения расчетов, не потребовалось вычислять и хранить полную матрицу системы, что привело к существенной экономии машинной памяти.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Lewis R.I.* Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems. Cambridge Engine Technology Ser. 1. Cambridge, New York, NY: Cambridge Univ. Press, 1991. xxii, 566 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511529542>.
2. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D.* Vortex Methods: Theory and Practice. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. xiv, 313 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442>.
3. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: МГУ, 2006. 184 с.
4. *Головкин М.А., Головкин В.А., Каляев В.М.* Вопросы вихревой гидромеханики. М.: Физматлит, 2009. 265 с.
5. *Branlard E.* Wind Turbine Aerodynamics and Vorticity-Based Methods: Fundamentals and Recent Applications. Ser.: Research Topics in Wind Energy. V. 7. Cham: Springer, 2017. xxxi, 632 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55164-7>.
6. *Mimeau C., Mortazavi I.* A review of vortex methods and their applications: From creation to recent advances // *Fluids*. 2021. V. 6, No 2. Art. 68. <https://doi.org/10.3390/fluids6020068>.
7. *Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Моделирование обтекания колеблющегося профиля методом вязких вихревых доменов // *Изв. РАН. МЖГ*. 2007. № 1. С. 3–14.
8. *Дынникова Г.Я.* Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье – Стокса // *ДАН*. 2004. Т. 399, № 1. С. 42–46.
9. *Ogami Y., Akamatsu T.* Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method // *Comput. Fluids*. 1991. V. 19, Nos 3–4. P. 433–441. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90068-S](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S).
10. *Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E.* VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation by using vortex methods // *Parallel Computational Technologies. PCT 2018: Proc. 12th Int. Conf. / Ed. by L. Sokolinsky, M. Zymbler. Ser.: Communications in Computer and Information Science. V. 910. Cham: Springer, 2018. P. 251–265. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_18.*
11. *Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y.* On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing // *Entropy*. 2021. V. 23, No 1. Art. 118. <https://doi.org/10.3390/e23010118>.
12. *Marchevsky I., Sokol K., Ryatina E., Izmailova Y.* The VM2D open source code for two-dimensional incompressible flow simulation by using fully Lagrangian vortex particle methods // *Axioms*. 2023. V. 12, No 3. Art. 248. <https://doi.org/10.3390/axioms12030248>.
13. *Kolganova A., Marchevsky I.* Parallel implementation of fast algorithms in the vortex particle method // *Parallel Computational Technologies. PCT 2023: Proc. 17th Int. Conf. / Ed. by L. Sokolinsky, M. Zymbler. Ser.: Communications in Computer and Information Science. V. 1868. Cham: Springer, 2023. P. 197–211. https://doi.org/10.1007/978-3-031-38864-4_14.*
14. *Дынникова Г.Я.* Аналог интегралов Бернулли и Коши – Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости // *Изв. РАН. МЖГ*. 2000. № 1. С. 31–41.
15. *Barnes J., Hut P.* A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm // *Nature*. 1986. V. 324, No 6096. P. 446–449. <https://doi.org/10.1038/324446a0>.
16. *Greengard L., Rokhlin V.* A fast algorithm for particle simulations // *J. Comput. Phys*. 1987. V. 73, No 2. P. 325–348. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90140-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90140-9).

17. Carrier J., Greengard L., Rokhlin V. A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1988. V. 9, No 4. P. 669–686.
<https://doi.org/10.1137/0909044>.
18. Marchevsky I., Ryatina E., Kolganova A. Fast Barnes–Hut-based algorithm in 2D vortex method of computational hydrodynamics // *Comput. Fluids*. 2023. V. 266. Art. 106018.
<https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.106018>.
19. Дынникова Г.Я. Использование быстрого метода решения задачи N тел при вихревом моделировании течений // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2009. Т. 49, № 8. С. 1458–1465.
20. Karras T. Maximizing parallelism in the construction of BVHs, octrees, and k -d trees // *Proc. Eurographics/ACM SIGGRAPH Symp. on High Performance Graphics. Collect.: High-Performance Graphics 2012*. Eurographics Assoc., 2012. P. 33–37.
<https://doi.org/10.2312/EGGH/HPG12/033-037>.
21. Burtscher M., Pingali K. An efficient CUDA implementation of the tree-based Barnes Hut n -body algorithm // *GPU Computing Gems Emerald Edition* / Ed. by Wen-mei W. Hwu. Ch. 6. Morgan Kaufmann Publ., 2011. P. 75–92. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384988-5.00006-1>.
22. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations. SANDIA Report No. SAND96-0583, UC-700. Sandia Natl. Lab., 1996. 52 p. <https://doi.org/10.2172/242701>.
23. Марчевский И.К., Сокол К.С., Измайлова Ю.А. Т-схемы для математического моделирования генерации завихренности на гладких профилях в вихревых методах // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. науки*. 2022. № 6 (105). С. 33–59.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-33-59>.

References

1. Lewis R.I. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*. Cambridge Engine Technology Ser. 1. Cambridge, New York, NY, Cambridge Univ. Press, 1991. xxii, 566 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511529542>.
2. Cottet G.-H., Koumoutsakos P.D. *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000. xiv, 313 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511526442>.
3. Andronov P.R., Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. *Vikhrevye metody rascheta nestatsionarnykh gidrodinamicheskikh nagruzok* [Vortex Methods for Non-Stationary Hydrodynamic Loads Calculation]. Moscow, MGU, 2006. 184 p. (In Russian)
4. Golovkin M.A., Golovkin V.A., Kalyavkin V.M. *Voprosy vikhrevoi gidromekhaniki* [Issues of Vortex Hydromechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 265 p. (In Russian)
5. Branlard E. *Wind Turbine Aerodynamics and Vorticity-Based Methods: Fundamentals and Recent Applications*. Ser.: Research Topics in Wind Energy. Vol. 7. Cham, Springer, 2017. xxxi, 632 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55164-7>.
6. Mimeau C., Mortazavi I. A review of vortex methods and their applications: From creation to recent advances. *Fluids*, 2021, vol. 6, no. 2, art. 68. <https://doi.org/10.3390/fluids6020068>.
7. Guvernyuk S.V., Dynnikova G.Ya. Modeling the flow past an oscillating airfoil by the method of viscous vortex domains. *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, no. 1, pp. 1–11.
<https://doi.org/10.1134/S0015462807010012>.
8. Dynnikova G.Ya. The Lagrangian approach to solving the time-dependent Navier–Stokes equations. *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 11, pp. 648–652. <https://doi.org/10.1134/1.1831530>.

9. Ogami Y., Akamatsu T. Viscous flow simulation using the discrete vortex model — the diffusion velocity method. *Comput. Fluids*, 1991, vol.19, nos. 3–4, pp. 433–441. [https://doi.org/10.1016/0045-7930\(91\)90068-S](https://doi.org/10.1016/0045-7930(91)90068-S).
10. Kuzmina K., Marchevsky I., Ryatina E. VM2D: Open source code for 2D incompressible flow simulation by using vortex methods. *Parallel Computational Technologies. PCT 2018: Proc. 12th Int. Conf.* Sokolinsky L., Zymbler M. (Eds.). Ser.: Communications in Computer and Information Science. Vol. 910. Cham, Springer, 2018, pp. 251–265. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99673-8_18.
11. Kuzmina K., Marchevsky I., Soldatova I., Izmailova Y. On the scope of Lagrangian vortex methods for two-dimensional flow simulations and the POD technique application for data storing and analyzing. *Entropy*, 2021, vol. 23, no. 1, art. 118. <https://doi.org/10.3390/e23010118>.
12. Marchevsky I., Sokol K., Ryatina E., Izmailova Y. The VM2D open source code for two-dimensional incompressible flow simulation by using fully Lagrangian vortex particle methods. *Axioms*, 2023, vol. 12, no. 3, art. 248. <https://doi.org/10.3390/axioms12030248>.
13. Kolganova A., Marchevsky I. Parallel implementation of fast algorithms in the vortex particle method. *Parallel Computational Technologies. PCT 2023: Proc. 17th Int. Conf.* Sokolinsky L., Zymbler M. (Eds.). Ser.: Communications in Computer and Information Science. Vol. 1868. Cham, Springer, 2023, pp. 197–211. https://doi.org/10.1007/978-3-031-38864-4_14.
14. Dynnikova G.Ya. An analog of the Bernoulli and Cauchy-Lagrange integrals for a time-dependent vortex flow of an ideal incompressible fluid. *Fluid Dyn.*, 2000, vol. 35, no. 1. pp. 24–32. <https://doi.org/10.1007/BF02698782>.
15. Barnes J., Hut P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, 1986, vol. 324, no. 6096, pp. 446–449. <https://doi.org/10.1038/324446a0>.
16. Greengard L., Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 1987, vol. 73, no. 2, pp. 325–348. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(87\)90140-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(87)90140-9).
17. Carrier J., Greengard L., Rokhlin V. A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1988, vol. 9, no. 4, pp. 669–686. <https://doi.org/10.1137/0909044>.
18. Marchevsky I., Ryatina E., Kolganova A. Fast Barnes–Hut-based algorithm in 2D vortex method of computational hydrodynamics. *Comput. Fluids*, 2023, vol. 266, art. 106018. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.106018>.
19. Dynnikova G.Ya. Fast technique for solving the N -body problem in flow simulation by vortex methods. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 8, pp. 1389–1396. <https://doi.org/10.1134/S0965542509080090>.
20. Karras T. Maximizing parallelism in the construction of BVHs, octrees, and k -d trees. *Proc. Eurographics/ACM SIGGRAPH Symp. on High Performance Graphics*. Collect.: High-Performance Graphics 2012. Eurographics Assoc., 2012, pp. 33–37. <https://doi.org/10.2312/EGGH/HPG12/033-037>.
21. Burtcher M., Pingali K. An efficient CUDA implementation of the tree-based Barnes Hut n -body algorithm. In: Hwu Wen-mei W. (Ed.) *GPU Computing Gems Emerald Edition*. Ch. 6. Morgan Kaufmann Publ., 2011, pp. 75–92. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-384988-5.00006-1>.
22. Kempka S.N., Glass M.W., Peery J.S., Strickland J.H., Ingber M.S. *Accuracy considerations for implementing velocity boundary conditions in vorticity formulations*. SANDIA Report No. SAND96-0583, UC-700. Sandia Natl. Lab., 1996. 52 p. <https://doi.org/10.2172/242701>.

23. Marchevsky I.K., Sokol K.S., Izmailova Yu.A. *T*-schemes for mathematical modelling of vorticity generation on smooths airfoils in vortex particle methods. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki*, 2022, no. 6 (105), pp. 33–59.
<https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-6-33-59>. (In Russian)

Информация об авторах

Евгения Павловна Рятина, аспирант кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: evgeniya.ryatina@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7533-3796>

Илья Константинович Марчевский, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: iliamarchevsky@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4899-4828>

Александра Олеговна Колганова, студент кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: kolganova.ao@mail.ru

Дарья Юрьевна Кобзарь, студент кафедры «Прикладная математика», Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

E-mail: cobzardash@yandex.ru

Author Information

Evgeniya P. Ryatina, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University

E-mail: evgeniya.ryatina@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7533-3796>

Ilya K. Marchevsky, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University

E-mail: iliamarchevsky@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4899-4828>

Aleksandra O. Kolganova, Student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University

E-mail: kolganova.ao@mail.ru

Dar'ya Yu. Kobzar, Student, Department of Applied Mathematics, Bauman Moscow State Technical University

E-mail: cobzardash@yandex.ru

Поступила в редакцию 31.07.2024

Принята к публикации 16.12.2024

Received July 31, 2024

Accepted December 16, 2024

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.7

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.115-124>Квантовый поиск в словаре на основе функции
отпечатков

Н.М. Салихова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

Аннотация

Рассмотрена задача поиска элемента в словаре. В последние десятилетия были предложены различные подходы к решению этой проблемы, в том числе классические и квантовые алгоритмы. Метод квантового усиления амплитуды, который лежит в основе хорошо известного алгоритма Гровера, квадратично ускоряет процесс поиска.

Мы представляем новый подход к поиску элемента w длиной m в словаре V размером n , основанный на квантовой функции отпечатков. Наш алгоритм имеет запросную сложность $O(\sqrt{n})$ и использует $O(\log n + \log m)$ кубитов, тогда как алгоритмы, представленные в работах других авторов, используют $O(\log n + m)$ кубитов.

Ключевые слова: квантовый алгоритм, поиск элемента в словаре, квантовый поиск, код исправляющий ошибки, функция отпечатков

Для цитирования: Салихова Н.М. Квантовый поиск в словаре на основе функции отпечатков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 115–124.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.115-124>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.115-124>

Quantum search in a dictionary using fingerprinting function

N.M. Salikhova

Kazan Federal University, Kazan, Russia

Abstract

The problem of searching for an element within a dictionary was considered. Over the past decades, various approaches, including classical and quantum algorithms, have been proposed to solve it. One possible solution is the method of quantum amplitude amplification, which underpins the well-known Grover algorithm and enables a quadratic speedup in the search process.

In this article, a new approach to searching for an element w of length m in a dictionary V of size n with the use of the quantum fingerprinting function was introduced. The developed algorithm has a query complexity of $O(\sqrt{n})$ and requires $O(\log n + \log m)$ qubits.

Keywords: quantum algorithm, searching for element in dictionary, quantum search, error-correcting code, fingerprinting function

For citation: Salikhova N.M. Quantum search in a dictionary using fingerprinting function. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 115–124. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.115-124>. (In Russian)

Введение

Проблемы поиска информации в базах данных хорошо известны в теоретической и прикладной информатике. Классический поиск в неотсортированном списке представляет собой алгоритм последовательного перебора элементов. Квантовый алгоритм поиска, который квадратично ускоряет поиск по сравнению с классическими алгоритмами, был предложен Л. Гровером в 1996 году [1] и был модифицирован в ряде последующих работ (см., например, [2, 3]). Разработка квантовых алгоритмов для поиска информации в базах данных продолжается и сегодня (см. [4, 5]).

Идея использования методов хеширования (универсального семейства хеш-функций) для поиска информации в неупорядоченной базе данных была представлена в 2024 году в работе [6]. В ней предложен гибридный классико-квантовый (вероятностно-квантовый) алгоритм для поиска подстроки длиной m в тексте длиной N . Доказано, что использование методов хеширования может экспоненциально сократить количество требуемых кубитов. В настоящей работе мы расширяем подход, представленный в [6], и предлагаем “чистый” квантовый алгоритм $\mathcal{A}$ для поиска определенного элемента длиной m в неупорядоченной коллекции из n объектов, каждый из которых имеет длину m . Ключевым отличием

предлагаемого алгоритма от алгоритма, представленного в [6], является использование квантовой хеш-функции, которая обеспечивает эффективность работы алгоритма по памяти: алгоритму требуется $O(\log n + \log m)$ кубитов для решения задачи. Количество обращений к оракулу оценивается как $O(\sqrt{n})$. Отметим, что для других известных на сегодняшний день алгоритмов поиска элемента длины m в неупорядоченной коллекции из n объектов требуется $O(\log n + m)$ кубитов.

1. Квантовая функция отпечатков

Квантовая функция ψ , представленная ниже, рассматривалась в работе [7], где называлась “квантовой функцией отпечатков”.

Коды, исправляющие ошибки. Код, исправляющий ошибки, определяется отображением $E : \Sigma^m \rightarrow \Sigma^l$ со следующим условием: для любых двух слов $w, w' \in \Sigma^m$ их отображения $E(w), E(w') \in \Sigma^l$ таковы, что расстояние Хэмминга $d(E(w), E(w'))$ между ними не меньше d . Такой код E называется (l, m, d) -кодом. В случае, когда $\Sigma = \{0, 1\}$, код называется двоичным кодом, исправляющим ошибки.

Для произвольного $d > 1$ существует (l, m, d) -код, исправляющий ошибки E , где $l = cm$, $c > 1$.

Квантовая функция ψ_E . Функция ψ_E определяется на основе бинарного (l, m, d) -кода, исправляющего ошибки E . Для $s = \log l$ функция $\psi_E : \{0, 1\}^m \rightarrow (\mathcal{H}^2)^{\otimes(s+1)}$ определяется следующим образом:

$$|\psi_E(w)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w)\rangle, \quad (1)$$

где $E_i(w)$ – i -й бит кодового слова $E(w)$.

Реализация функции ψ_E . Пусть $|0\rangle = |0\rangle^{\otimes(s+1)}$. Преобразование

$$U_{\psi_E} : |0\rangle \xrightarrow{w} (\mathcal{H}^2)^{\otimes(s+1)}$$

воздействует на $(s+1)$ кубитов.

Определим преобразование $U_{\psi_E}(w) = U_E(w)(H^{\otimes s} \otimes I)$ унитарной матрицей $2^{s+1} \times 2^{s+1}$. Это композиция преобразования Адамара $H^{\otimes s}$, единичного оператора I и преобразования U_E . Удобно определить преобразование U_E , описав его действие на 2^{s+1} векторах $|b\rangle$ вычислительного базиса $B = \{(0, \dots, 1), \dots, (1, \dots, 0)\}$ пространства $(\mathcal{H}^2)^{\otimes(s+1)}$. Аргументами преобразования U_E являются слова $w \in \{0, 1\}^m$:

$$U_E : |b\rangle \xrightarrow{w} |b'\rangle.$$

U_E определяется кодовым словом $E(w)$, длина которого равна $l = 2^s$. Содержательно: преобразование U_E “изменяет” состояние последнего $(s+1)$ -го кубита $|a\rangle$ базисного состояния $|b\rangle = |i\rangle \otimes |a\rangle$ на $|b'\rangle = |i\rangle \otimes |a \oplus E_i(w)\rangle$.

Свойство 1. Преобразование $U_{\psi_E}(w) = U_E(w)(H^{\otimes s} \otimes I)$ определяет функцию ψ_E . А именно, для любого слова $w \in \{0, 1\}^m$ верно следующее:

$$|\psi_E(w)\rangle = U_{\psi_E}(w)|0\rangle^{\otimes(s+1)} = \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w)\rangle.$$

Свойство 2. Преобразование $U_{\psi_E}^{-1}(w) = (H^{\otimes s} \otimes I) \otimes U_E(w)$ является обратным к $U_{\psi_E}(w)$.

Доказательство. Действительно, для произвольного слова $w \in \{0, 1\}^m$ и $(s+1)$ -кубитного состояния $|\psi_E(w)\rangle$ верно, что $U_{\psi_E}^{-1}(w)|\psi_E(w)\rangle = |0\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w)\rangle &\xrightarrow{U_E(w)} \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w) \oplus E_i(w)\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{H^{\otimes s} \otimes I} |0\rangle^{\otimes(s+1)}. \end{aligned}$$

□

2. Алгоритм $\mathcal{A}$

Постановка задачи. Дано неупорядоченное множество V из n бинарных слов w_j , каждое длины m :

$$V = \{w_0, \dots, w_{n-1}\},$$

где $w_j \in \{0, 1\}^m$, $0 \leq j \leq n-1$.

Дано бинарное слово w длины m , где $m < n$. Требуется найти индекс вхождения слова w в множество V , а именно, такой индекс k , для которого $w = w_k$.

Алгоритм $\mathcal{A}$ состоит из двух частей:

А. Первая часть: подготовка начального состояния на основе V .

В. Вторая часть: считывание искомого слова w и поиск его позиции во множестве.

Описание алгоритма $\mathcal{A}$.

Входные данные. Для первой части: множество $V = \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ бинарных строк длины m . Для второй части: бинарная строка w длины m .

Выходные данные: индекс k , обозначающий номер элемента во множестве и такой, что $w = w_k$.

Таким образом, алгоритм $\mathcal{A}$ реализует отображение $\mathcal{A} : V, w \mapsto k$.

А. Первая часть алгоритма включает в себя подготовку начального состояния $|V, \psi_E\rangle$ на основе множества V с помощью преобразования U_{ψ_E} , определяющего квантовую функцию ψ_E :

$$|V, \psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \otimes |\psi_E(w_j)\rangle \otimes |1\rangle,$$

где

$$|\psi_E(w_j)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w_j)\rangle.$$

В. Вторая часть алгоритма $\mathcal{A}$ состоит из считывания искомого слова w и поиска такой его позиции k , что $w = w_k$.

- Оператор $I^{\otimes \log n} \otimes U_{\psi_E}^{-1}(w) \otimes I$ применяется к состоянию $|V, \psi_E\rangle$:

$$\begin{aligned} |V, \psi_E, w\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle |E_i(w_j) \oplus E_i(w)\rangle \right) \otimes |1\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2^s}} \sum_{i=0}^{2^s-1} |i\rangle \otimes \left(\sum_{i: E_i(w_j)=E_i(w)} |0\rangle + \sum_{i: E_i(w_j) \neq E_i(w)} |1\rangle \right) \right) \otimes |1\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \otimes |\phi(w_j, w)\rangle \otimes |1\rangle, \end{aligned}$$

где $|\phi(w_j, w)\rangle = U_{\psi_E}^{-1}(w) |\psi_E(w_j)\rangle$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

- В состоянии $|V, \psi_E, w\rangle$ проводится поиск базовых состояний $|j\rangle |0\rangle^{\otimes s+1} |1\rangle$. Для этого применяется известная процедура “усиления амплитуды” (см., например, [2]). Процедура заключается в применении оператора QQ (4) — оператора итерации поиска. Число применений QQ определяется как запросная сложность алгоритма.
- Первые $\log n$ кубитов конечного состояния измеряются в вычислительном базисе. Результат измерения k объявляется позицией элемента w_k , для которого выполнено: $w_k = w$.

2.1. Характеристики алгоритма $\mathcal{A}$. Характеристики квантового алгоритма включают:

Вероятность успеха. Обозначим через $Pr_{success}(\mathcal{A})$ вероятность успешного завершения алгоритма $\mathcal{A}$.

Запросная сложность. Количество обращений $Q(\mathcal{A})$ к унитарному оператору QQ (оператор QQ итерации поиска, определяется в (4)) — это запросная сложность квантового алгоритма $\mathcal{A}$.

Сложность по памяти. Число $S(\mathcal{A})$ используемых кубитов является мерой сложности памяти квантового алгоритма $\mathcal{A}$.

3. Анализ алгоритма $\mathcal{A}$

Обозначим через $Pr_{success}(\mathcal{A})$ вероятность того, что результатом действия алгоритма $\mathcal{A}$ будет такое число k , что $w_k = w$.

Теорема 1. Для алгоритма $\mathcal{A}$, который ищет вхождение элемента длиной m в неупорядоченной последовательности из n элементов, верно

$$S(\mathcal{A}) = O(\log n + \log m), \quad Q(\mathcal{A}) = O(\sqrt{n}) \quad \text{и} \quad Pr_{success}(\mathcal{A}) \approx 1.$$

Теорема 1 основана на следующем формальном утверждении.

Теорема 2. Пусть $c > 0$, $t = O(\sqrt{n})$ и $a = \sin^2((2t+1)\theta)$, где $\sin \theta \in \left(\sqrt{1/n}, \sqrt{1/n+c}\right]$. Тогда

$$S(\mathcal{A}) \leq 2 \log n + \log m + \text{const}, \quad Q(\mathcal{A}) = O(\sqrt{n}) \quad \text{и} \quad Pr_{\text{success}}(\mathcal{A}) \geq a \frac{1}{1+c}.$$

3.1. Доказательство теоремы 2. В [7] доказано следующее утверждение, которое необходимо для анализа алгоритма, рассматриваемого нами. Представим это утверждение в следующем виде, удобном для нас.

Свойство 3. Пусть $\epsilon < 1$ и $E : \{0, 1\}^m \rightarrow \{0, 1\}^l$ – бинарный (l, m, d) -код с $d \geq (1 - \epsilon)l$. Тогда для функции ψ_E (1) и произвольной пары различных слов $w, w' \in \{0, 1\}^m$ верно неравенство

$$|\langle \psi_E(w) | \psi_E(w') \rangle| \leq \epsilon.$$

3.1.1. Оценка вероятности успеха $Pr_{\text{success}}(\mathcal{A})$ и запросной сложности алгоритма. Следующая лемма 1, основанная на свойстве 3, имеет решающее значение для оценки вероятности успеха $Pr_{\text{success}}(\mathcal{A})$ алгоритма $\mathcal{A}$.

Напомним, что $|\phi(w_j, w)\rangle = U_{\psi_E}^{-1}(w)|\psi_E(w_j)\rangle$.

Лемма 1. Пусть

$$|\phi(w_j, w)\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \dots + \alpha_{2^l-1}|2^s - 1\rangle.$$

Тогда для слова $w_j = w$ верно, что $\alpha_0 = 1$, $p_0 = 1$, а для слов $w_j \neq w$ верно, что $\alpha_0 = \epsilon_j \leq \epsilon$, $p_0 = \epsilon_j^2 \leq \epsilon^2$.

Доказательство. Преобразование $U_E^{-1}(w)$ является обратным к преобразованию $U_E(w)$. Применим $U_E^{-1}(w)$ к состоянию $|\psi_E(w_j)\rangle$ для получения $|\phi(w_j, w)\rangle$. Для слова $w_k = w$ имеем

$$|\phi(w_k, w)\rangle = |0\rangle = 1|0\rangle + 0|1\rangle + \dots + 0|2^s - 1\rangle.$$

Для всех других слов $w_j \in \{0, 1\}^m$ значения функции $|\psi(w_k)\rangle$ и $|\psi(w_j)\rangle$ попарно ϵ -ортогональны:

$$|\langle \psi(w_k) | \psi(w_j) \rangle| \leq \epsilon.$$

Унитарное преобразование $U_E^{-1}(w)$ состояний $|\psi(w_k)\rangle$ и $|\psi(w_j)\rangle$ сохраняет скалярное произведение. Это означает, что все состояния $|\phi(w_j, w)\rangle = U_E^{-1}(w)|\psi(w_j)\rangle$ для $w_j \in \{0, 1\}^m$ попарно ϵ -ортогональны:

$$|\langle \phi(w_k, w) | \phi(w_j, w) \rangle| \leq \epsilon.$$

Следовательно, для состояний

$$|\phi(w_j, w)\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + \dots + \alpha_{2^l-1}|2^s - 1\rangle$$

и $w_j \neq w$ верно равенство $|\alpha_0| = \epsilon_j \leq \epsilon$. Последнее доказывает утверждение леммы. $\square$

Процедура усиления амплитуды соответствует процедуре, представленной в статье [2]. Мы будем следовать описанию процедуры в главе 8 книги [3].

Процедура усиления амплитуды реализуется путем многократного применения унитарного оператора QQ (оператора итерации поиска) (4) к состоянию $|V, \psi_E, w\rangle$. Ниже для простоты будем использовать $|\psi\rangle$ для обозначения состояния $|V, \psi_E, w\rangle$.

Разделим вектор $|\psi\rangle$ на части: $|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + |\psi_1\rangle$. Согласно лемме 1,

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(|k\rangle|0\rangle^{\otimes(s+1)}|1\rangle + \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \epsilon_j |j\rangle|0\rangle^{\otimes(s+1)}|1\rangle \right), \quad (2)$$

а вектор $|\psi_1\rangle$ включает в себя оставшиеся компоненты состояния $|\psi\rangle$. Обозначим

$$p_{good} = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \epsilon_j^2 \right) \quad \text{и} \quad p_{bad} = 1 - p_{good};$$

p_{good} – это вероятность измерения n базовых состояний $|j\rangle|0\rangle^{\otimes(s+1)}|1\rangle$ для $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Эти базовые состояния будем называть хорошими состояниями, а вероятность их получения – хорошей вероятностью p_{good} ; другие базовые состояния $|j\rangle|i\rangle|1\rangle$ – плохими состояниями, а вероятность их получения – плохой вероятностью p_{bad} . Перенормируем компоненты $|\psi_0\rangle$ и $|\psi_1\rangle$ и получим следующие состояния:

$$|\psi_{good}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{good}}} |\psi_0\rangle \quad \text{и} \quad |\psi_{bad}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_{bad}}} |\psi_1\rangle. \quad (3)$$

Далее запишем

$$|\psi\rangle = \sqrt{p_{good}} |\psi_{good}\rangle + \sqrt{p_{bad}} |\psi_{bad}\rangle,$$

или

$$|\psi\rangle = \sin \theta |\psi_{good}\rangle + \cos \theta |\psi_{bad}\rangle,$$

где $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ определяется уравнением $\sin^2 \theta = p_{good}$.

Определим оператор итерации поиска QQ следующим образом

$$QQ = U_\psi^\perp U_f. \quad (4)$$

Для произвольного действительного числа θ операция U_f осуществляется следующим образом:

$$U_f(\sin \theta |\psi_{good}\rangle + \cos \theta |\psi_{bad}\rangle) = -\sin \theta |\psi_{good}\rangle + \cos \theta |\psi_{bad}\rangle,$$

значит, U_f выполняет отражение относительно оси, определяемой вектором $|\psi_{bad}\rangle$. Точнее, оператор U_f изменяет знак амплитуды для базовых состояний вида $|j\rangle|0\rangle|1\rangle$.

Обозначим состояние

$$|\bar{\psi}\rangle = \cos \theta |\psi_{good}\rangle - \sin \theta |\psi_{bad}\rangle,$$

которое ортогонально к $|\psi\rangle$. $\{|\psi_{good}\rangle, |\psi_{bad}\rangle\}$ и $\{|\bar{\psi}\rangle, |\psi\rangle\}$ являются ортонормированными базисами для одного и того же двумерного пространства,

$$U_f|\psi\rangle = -\sin \theta |\psi_{good}\rangle + \cos \theta |\psi_{bad}\rangle = \cos(2\theta)|\psi\rangle - \sin(2\theta)|\bar{\psi}\rangle.$$

Оператор $U_\psi^\perp$ действует так:

$$U_\psi^\perp(\sin(\theta)|\psi\rangle + \cos(\theta)|\bar{\psi}\rangle) = \sin(\theta)|\psi\rangle - \cos(\theta)|\bar{\psi}\rangle,$$

таким образом, $U_\psi^\perp$ выполняет отражение относительно оси, определенной вектором $|\psi\rangle$. Действительно,

$$U_\psi^\perp U_f |\psi\rangle = U_\psi^\perp (-\sin(\theta)|\psi_{good}\rangle + \cos(\theta)|\psi_{bad}\rangle) = \cos(2\theta)|\psi\rangle + \sin(2\theta)|\bar{\psi}\rangle$$

и может быть описан в базисе $\{|\psi_{good}\rangle, |\psi_{bad}\rangle\}$ как

$$U_\psi^\perp U_f |\psi\rangle = \sin(3\theta)|\psi_{good}\rangle + \cos(3\theta)|\psi_{bad}\rangle.$$

Применение оператора QQ t раз приводит начальное состояние $|\psi\rangle$ к состоянию

$$|\psi^t\rangle = QQ^t |\psi\rangle = \sin((2t+1)\theta)|\psi_{good}\rangle + \cos((2t+1)\theta)|\psi_{bad}\rangle. \quad (5)$$

Пусть $a = \sin^2((2t+1)\theta)$. Отметим, что для малых θ имеем $\sin \theta \geq \theta - \delta$ для малых δ ($\sin \theta \approx \theta$). В частности, в нашем случае

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + \sum_{j=0, j \neq k}^{n-1} \epsilon_j^2 \right)}$$

и $\sin \theta \in \left(\sqrt{1/n}, \sqrt{1/n+c} \right]$ для малых $c > 0$. Выберем t таким образом, что $(2t+1)\theta \approx \frac{\pi}{2}$, имея в виду, что $t \in \Omega(\sqrt{n})$ ($t \in \Omega(\frac{1}{\theta})$). Выбор t обеспечивает $a \approx 1$.

$Pr_{success}(A)$ – вероятность измерения уникального базового состояния $|k\rangle|0\rangle^{\otimes(s+1)}|1\rangle$ среди всех базовых состояний $|j\rangle|0\rangle^{\otimes(s+1)}|1\rangle$, $j \in \{0, \dots, n-1\}$, части $\sin((2t+1)\theta)|\psi_{good}\rangle$ состояния $|\psi^t\rangle$ (5). Отсюда и из (2), (3) следует, что

$$Pr_{cussess}(A) = a \frac{1}{p_{good}} \frac{1}{n} = a \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + \sum_{j,j \neq k} \epsilon_j^2\right) n} \geq a \frac{1}{1 + (n-1)\epsilon^2} \geq a \frac{1}{1 + c(\epsilon)}.$$

Таким образом, выбор $t \in \Omega(\sqrt{n})$ и $c > 0$ (в соответствии с ϵ), близкого к 0, обеспечивает $Pr_{cussess}(A) \approx 1$.

3.1.2. Оценка объема памяти $S(\mathcal{A})$. Размерность $S(\mathcal{A})$ алгоритма $\mathcal{A}$ определяется как количество кубитов в состоянии $|V, \psi_E\rangle$. Таким образом, имеем

$$S(\mathcal{A}) = \log n + s + 2.$$

Для некоторого выбранного $c > 0$ и $\epsilon = \sqrt{c/(n-1)}$ имеем

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}) &= \log n + \log m + \log(\epsilon^2(n-1)) + 2 = \\ &= \log n + \log m + \log \epsilon^2 + \log(n-1) + 2 \leq 2 \log n + \log m + const. \end{aligned}$$

Комментарий. Напомним, что ϵ является параметром кода E , исправляющего ошибки, а код E определяет квантовую функцию отпечатков ψ_E . Величина ϵ является важной компонентой, определяющей попарную “почти” ортогональность (ϵ -ортогональность) значений функции ψ_E . Последнее существенно в доказательстве высокой вероятности правильного результата действия алгоритма.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Grover L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search // STOC'96: Proc. 28th Annu. ACM Symp. on Theory of Computing. Philadelphia, PA: ACM. 1996. P. 212–219. <https://doi.org/10.1145/237814.237866>.
2. Brassard G., Høyer P., Mosca M., Tapp A. Quantum amplitude amplification and estimation // Quantum Computation and Information. Ser.: Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2002. V. 305. P. 53–74. <http://dx.doi.org/10.1090/conm/305/05215>.
3. Kaye P., Laflamme R., Mosca M. An Introduction to Quantum Computing. New York, NY: Oxford Univ. Press, 2007. 274 p.
4. Ablayev F., Ablayev M., Huang J.Z., Khadiev K., Salikhova N., Wu D. On quantum methods for machine learning problems. Part I: Quantum tools // Big Data Min. Anal. 2020. V. 3, No 1. P. 41–55. <https://doi.org/10.26599/BDMA.2019.9020016>.
5. Ablayev F., Ablayev M., Huang J.Z., Khadiev K., Salikhova N., Wu D. On quantum methods for machine learning problems. Part II: Quantum classification algorithms // Big Data Min. Anal. 2020. V. 3, No 1. P. 56–67. <https://doi.org/10.26599/BDMA.2019.9020018>.
6. Ablayev F., Salikhova N., Ablayev M. Hybrid classical–quantum text search based on hashing // Mathematics. 2024. V. 12, No 12. Art. 1858. <https://doi.org/10.3390/math12121858>.
7. Buhrman H., Cleve R., Watrous J., de Wolf R. Quantum fingerprinting // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87, No 16. Art. 167902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.167902>.

References

1. Grover L.K. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *STOC'96: Proc. 28th Annu. ACM Symp. on Theory of Computing*. Philadelphia, PA, ACM, 1996, pp. 212–219. <https://doi.org/10.1145/237814.237866>.
2. Brassard G., Høyer P., Mosca M., Tapp A. Quantum amplitude amplification and estimation. In: *Quantum Computation and Information*. Ser.: Contemporary Mathematics. Vol. 305. Providence, RI, Am. Math. Soc., 2002, pp. 53–74. <http://dx.doi.org/10.1090/conm/305/05215>.
3. Kaye P., Laflamme R., Mosca M. *An Introduction to Quantum Computing*. New York, NY, Oxford Univ. Press, 2007. 274 p.
4. Ablayev F., Ablayev M., Huang J.Z., Khadiev K., Salikhova N., Wu D. On quantum methods for machine learning problems. Part I: Quantum tools. *Big Data Min. Anal.*, 2020, vol. 3, no. 1, pp. 41–55. <https://doi.org/10.26599/BDMA.2019.9020016>.
5. Ablayev F., Ablayev M., Huang J.Z., Khadiev K., Salikhova N., Wu D. On quantum methods for machine learning problems. Part II: Quantum classification algorithms. *Big Data Min. Anal.*, 2020, vol. 3, no. 1, pp. 56–67. <https://doi.org/10.26599/BDMA.2019.9020018>.
6. Ablayev F., Salikhova N., Ablayev M. Hybrid classical–quantum text search based on hashing. *Mathematics*, 2024, vol. 12, no. 12, art. 1858. <https://doi.org/10.3390/math12121858>.
7. Buhrman H., Cleve R., Watrous J., de Wolf R. Quantum fingerprinting. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, vol. 87, no. 16, art. 167902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.167902>.

Информация об авторах

Наиля Маратовна Салихова, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *nailyasalikhova66@gmail.com*

Author Information

Nailya M. Salikhova, Postgraduate Student, Kazan Federal University

E-mail: *nailyasalikhova66@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.11.2024

Принята к публикации 18.01.2025

Received November 15, 2024

Accepted January 18, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.516, 532.517, 517.928

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.125-139>**О движении гидромеханической системы
с вязкой жидкостью при периодических воздействиях****В.Л. Сенницкий***Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия**Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия**sennitskii@yandex.ru***Аннотация**

Поставлена и решена задача о движении гидромеханической системы, состоящей из вязкой жидкости и граничащих с ней твердых тел – стенки и пластины. Граница стенки проницаема для жидкости, стенка совершает заданное поступательное движение. Гидромеханическая система подвергается периодическим по времени воздействиям. Задачу о движении системы составляют уравнение движения пластины, уравнение Навье – Стокса и условия на твердых границах жидкости. Обнаружены новые гидромеханические эффекты.

Ключевые слова: вязкая жидкость, твердые тела, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, гидромеханические эффекты

Для цитирования: Сенницкий В.Л. О движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью при периодических воздействиях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 125–139. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.125-139>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.125-139>

On the motion of a hydro-mechanical system with a viscous liquid under periodic influences

V.L. Sennitskii

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

sennitskii@yandex.ru

Abstract

The problem of the motion of a hydro-mechanical system consisting of a viscous liquid and solid bodies, a wall and a plate, bordering it is formulated and solved. The wall undergoes a prescribed translational motion, and its boundary is permeable to the liquid. The hydro-mechanical system is subjected to time-periodic influences. The problem formulation includes the equation of the plate motion, the Navier–Stokes equation, and the conditions at the solid–liquid interfaces. New hydro-mechanical effects are revealed.

Keywords: viscous liquid, solid bodies, time-periodic influences, predominant direction in space, hydro-mechanical effects

For citation: Sennitskii V.L. On the motion of a hydro-mechanical system with a viscous liquid under periodic influences. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 125–139. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.125-139>. (In Russian)

Введение

Одним из перспективных направлений в современной механике жидкости является изучение динамики гидромеханических систем при периодических по времени воздействиях. В этом направлении получен ряд нетривиальных результатов, обнаружены новые гидромеханические эффекты, выявлены возможности периодических воздействий на гидромеханические системы как средства качественного влияния на динамику систем, управления системами, организации заданной динамики систем (см., например, [1–9], а также [10–48]). Результаты исследований в рассматриваемом направлении могут представлять, в частности, существенный прикладной интерес [14, 43, 45–48].

В настоящей работе поставлена и решена новая задача о движении гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Свободные части системы (движение которых не задано, требует определения) испытывают периодические по времени воздействия, характеризующиеся наличием или отсутствием выделенного направления в пространстве. Обнаружены новые гидромеханические эффекты. Установлено, в частности, что гидромеханическая система может совершать среднее по времени движение, состоящее в том, что свободная

твердая часть системы и граничащая с ней часть жидкости движутся в направлении, совпадающем с направлением внешнего стационарного силового воздействия на систему, а остальная жидкость, граничащая с неподвижной твердой частью системы, совершает движение в противоположном направлении.

1. Постановка задачи

Имеется гидромеханическая система, состоящая из вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно твердых тел – стенки η и однородной пластины ξ (рис. 1).

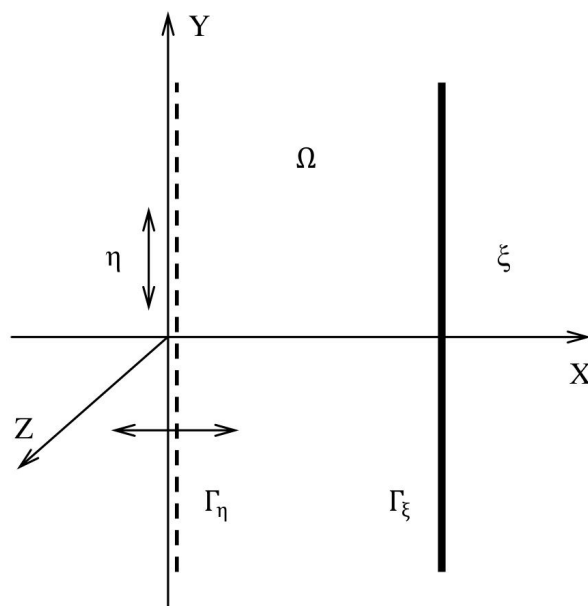


Рис. 1. Гидромеханическая система

Fig. 1. Hydro-mechanical system

Стенка η ограничена плоскостью Γ_η , перпендикулярной к оси X инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z и пересекающей с осью X в точке $X = A$. Пластина ξ ограничена плоскостями $\Gamma_\xi : X = B$, $\Gamma'_\xi : X = C$ ($-\infty < Y < \infty$, $-\infty < Z < \infty$; $B > A$, $C > B$ – постоянные). Жидкость заполняет область $\Omega : A < X < B$. Граница Γ_η стенки η проницаема для жидкости. Стенка η совершает заданное поступательное движение вдоль осей X, Y ; координата A и скорость U движения стенки η в направлении оси Y периодически с периодом T изменяются со временем t ($A = \hat{A} \sin(2\pi t/T + \alpha)$; $U = \hat{U} \sin(2\pi t/T)$; $\hat{A} > 0$, α , $\hat{U} > 0$ – постоянные; скорость движения стенки η в направлении оси X составляет $dA/dt = (2\pi\hat{A}/T) \cos(2\pi t/T + \alpha)$). На пластину ξ оказывается заданное внешнее стационарное силовое воздействие. Пластина ξ является свободной, совершает поступательное движение со скоростью $\mathbf{W} = \{0, W, 0\}$, которую необходимо найти. Скорость жидкости $\mathbf{V} = \{0, V, 0\}$ и давление в жидкости P не зависят от координат Y, Z .

Требуется определить периодическое по времени движение гидромеханической системы (свободных частей гидромеханической системы – жидкости и пластины ξ).

Пусть $\tau = t/T$; $x = X/B$; $\mathbf{e} = \{0, 1, 0\}$; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/B = v(x, \tau)\mathbf{e}$; ρ – плотность жидкости; $p = T^2 P/(\rho B^2) = p(x, \tau)$; $\varepsilon = \hat{A}/B$; $a = A/B = \varepsilon \sin(2\pi\tau + \alpha)$; ξ' – абсолютно твердое

тело, (какая-либо) часть пластины ξ , заполняющая в (какой-либо) момент времени $t = t'$ область $B < X < C$, $Y^* < Y < Y^* + D_Y$, $Z^* < Z < Z^* + D_Z$ (Y^* , Z^* , $D_Y > 0$, $D_Z > 0$ – постоянные); ρ' – плотность пластины ξ ; $m = \rho'(C - B)D_Y D_Z$ – масса тела ξ' ; $\mathbf{U} = U\mathbf{e}$; $\mathbf{u} = T\mathbf{U}/B = u\mathbf{e}$; $\mathbf{w} = T\mathbf{W}/B = w\mathbf{e}$; ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости; $Re = B^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $\varkappa = \rho B/[\rho'(C - B)]$; $\mathbf{F}_{liq} = F_{liq}\mathbf{e}$ – сила, действующая на тело ξ' со стороны жидкости; $f_{liq} = T^2 F_{liq}/(mB) = -(\varkappa/Re) (\partial v/\partial x)|_{x=1}$; $\mathbf{F}_{ext} = F_{ext}\mathbf{e}$ – (не зависящая от времени) внешняя сила, действующая на тело ξ' ; $f_{ext} = T^2 F_{ext}/(m\hat{A})$.

Задачу о движении гидромеханической системы составляют уравнение движения пластины ξ (тела ξ'), уравнение Навье–Стокса и условия на границах Γ_η , Γ_ξ

$$\frac{dw}{d\tau} = f_{liq} + \varepsilon f_{ext}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{v} \quad \text{в} \quad \Omega; \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \quad \text{при} \quad x = a; \quad (3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (4)$$

Отметим, что в задаче (1)–(4) периодические по времени воздействия, оказываемые на гидромеханическую систему (свободные части гидромеханической системы), при $f_{ext} \neq 0$ характеризуются наличием, а при $f_{ext} = 0$ – отсутствием выделенного направления в пространстве (выделенным является направление вектора $f_{ext}\mathbf{e}$).

2. Решение задачи

Согласно (2)–(4) имеем

$$p = p(\tau); \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad \Omega; \quad (6)$$

$$v = u \quad \text{при} \quad x = a, \quad v = w \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (7)$$

Будем рассматривать задачу (1), (6), (7) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [49, 50]. Предположим, что

$$v \sim v_0 + \varepsilon v_1, \quad w \sim w_0 + \varepsilon w_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

Используя (1), (6)–(8), в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) получим

$$\frac{dw_N}{d\tau} = f_{liqN} + N f_{ext}; \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial \tau} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2} \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}; \quad (10)$$

$$v_N = (1 - N)u - N \frac{\partial v_0}{\partial x} a' \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (11)$$

$$v_N = w_N \quad \text{при} \quad x = 1, \quad (12)$$

где $\bar{\Omega}$ – область $0 < X < B$; $f_{liqN} = -(\varkappa/Re) (\partial v_N/\partial x)|_{x=1}$; $a' = a/\varepsilon = \sin(2\pi\tau + \alpha)$.

Пусть $N = 0$. Задача (9)–(12) имеет решение

$$v_0 = \text{Real} (\tilde{v}_0 e^{2\pi i \tau}); \quad (13)$$

$$w_0 = \text{Real} (\tilde{w}_0 e^{2\pi i \tau}). \quad (14)$$

Здесь

$$\tilde{v}_0 = \frac{i\hat{u} \operatorname{sh} q(x-1) + \tilde{w}_0 \operatorname{sh} qx}{\operatorname{sh} q}; \quad \tilde{w}_0 = -\frac{i\hat{u}\kappa}{q \operatorname{sh} q + \kappa \operatorname{ch} q}$$

$$(q = (1+i)\lambda = (1+i)\sqrt{\pi Re}).$$

Отметим, что $q \operatorname{sh} q + \kappa \operatorname{ch} q$ не обращается в нуль ни при каких значениях $\kappa > 0$, $Re > 0$ ввиду того, что при любых значениях $\kappa > 0$, $Re > 0$ выполняется соотношение

$$\sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + \lambda^2} e^\lambda > \sqrt{(\kappa - \lambda)^2 + \lambda^2} e^{-\lambda}.$$

Пусть $N = 1$. Преобразуем условие (11) к виду

$$v_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{Real} (ie^{-i\alpha} \frac{d\tilde{v}_0}{dx}) + \frac{1}{2} \operatorname{Real} (ie^{i\alpha} \frac{d\tilde{v}_0}{dx} e^{4\pi i \tau}) \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (15)$$

Учитывая (15), сделаем в (9), (10), (12) подстановку

$$v_1 = \operatorname{Real} (\bar{v} + \tilde{v}_1 e^{4\pi i \tau}), \quad w_1 = \operatorname{Real} (\bar{w} + \tilde{w}_1 e^{4\pi i \tau}) \quad (16)$$

($\bar{v}$, $\tilde{v}_1$ – функции x ; $\bar{w}$, $\tilde{w}_1$ – постоянные). Используя полученные в результате этого формулы и (13)–(15), определим задачи

$$\frac{\kappa}{Re} \frac{d\bar{v}}{dx} \Big|_{x=1} = f_{ext}; \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2} = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}; \quad (18)$$

$$\bar{v} = -\frac{i}{2} e^{-i\alpha} \frac{d\tilde{v}_0}{dx} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \bar{v} = \bar{w} \quad \text{при} \quad x = 1; \quad (19)$$

и

$$4\pi i \tilde{w}_1 = -\frac{\kappa}{Re} \frac{d\tilde{v}_1}{dx} \Big|_{x=1}; \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \tilde{v}_1}{dx^2} - 4\pi i Re \tilde{v}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}; \quad (21)$$

$$\tilde{v}_1 = \frac{i}{2} e^{i\alpha} \frac{d\tilde{v}_0}{dx} \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \tilde{v}_1 = \tilde{w}_1 \quad \text{при} \quad x = 1. \quad (22)$$

Задача (17)–(19) имеет решение

$$\bar{v} = f_{ext} \frac{Re}{\kappa} x - \frac{i}{2} e^{-i\alpha} \frac{q}{\operatorname{sh} q} (i\hat{u} \operatorname{ch} q + \tilde{w}_0); \quad (23)$$

$$\bar{w} = \bar{v} \Big|_{x=1}. \quad (24)$$

Задача (20)–(22) имеет решение

$$\tilde{v}_1 = \frac{(Qe^{\sqrt{2}q} - \tilde{w}_1)e^{-\sqrt{2}qx} - (Qe^{-\sqrt{2}q} - \tilde{w}_1)e^{\sqrt{2}qx}}{2 \operatorname{sh} \sqrt{2}q}; \quad (25)$$

$$\tilde{w}_1 = \frac{\varkappa Q}{\sqrt{2}q \operatorname{sh} \sqrt{2}q + \varkappa \operatorname{ch} \sqrt{2}q}, \quad (26)$$

где

$$Q = \frac{i}{2} e^{i\alpha} \frac{q}{\operatorname{sh} q} (i\hat{u} \operatorname{ch} q + \tilde{w}_0).$$

Отметим, что $\sqrt{2}q \operatorname{sh} \sqrt{2}q + \varkappa \operatorname{ch} \sqrt{2}q$ не обращается в нуль ни при каких значениях $\varkappa > 0$, $Re > 0$ ввиду того, что при любых значениях $\varkappa > 0$, $Re > 0$ выполняется соотношение

$$\sqrt{(\varkappa + \sqrt{2}\lambda)^2 + 2\lambda^2} e^{\sqrt{2}\lambda} > \sqrt{(\varkappa - \sqrt{2}\lambda)^2 + 2\lambda^2} e^{-\sqrt{2}\lambda}.$$

Формулами

$$v = v_0 + \varepsilon v_1, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 \quad (27)$$

и (5), (13), (14), (16), (23)–(26) определяется приближенное решение задачи (1)–(4).

3. Анализ и выводы

Стенка η , совершающая заданное движение, в среднем по времени покоится.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении свободных частей гидромеханической системы (жидкости и пластины ξ). Используя (13), (14), (16), (23)–(27), найдем

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \varepsilon \left\{ f_{ext} \frac{Re}{\varkappa} x + \frac{1}{2} \hat{u} \operatorname{Real} \left[e^{-i\alpha} \frac{q}{\operatorname{sh} q} \left(\operatorname{ch} q - \frac{\varkappa}{q \operatorname{sh} q + \varkappa \operatorname{ch} q} \right) \right] \right\} \mathbf{e}; \quad (28)$$

$$\langle \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle|_{x=1}. \quad (29)$$

Здесь

$$\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$$

– оператор усреднения по (безразмерному) времени τ ; $\langle \mathbf{v} \rangle$ – средняя (по времени τ) безразмерная скорость жидкости; $\langle \mathbf{w} \rangle$ – средняя безразмерная скорость пластины ξ .

Формулы (28), (29) имеют место для любого значения числа Рейнольдса $Re > 0$. Эти формулы, в частности, свидетельствуют о существовании эффекта, состоящего в том, что в рассматриваемых гидромеханических условиях и при наличии, и в отсутствие выделенного направления в пространстве (то есть и при $f_{ext} \neq 0$, и при $f_{ext} = 0$) на фоне колебаний свободные части гидромеханической системы совершают стационарное движение.

Рассмотрим вопрос о среднем по времени движении свободных частей гидромеханической системы при значениях Re , больших по сравнению с единицей. Используя (28), (29), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \varphi \mathbf{e}, \quad \langle \mathbf{w} \rangle \sim \varphi|_{x=1} \mathbf{e} \quad \text{при } Re \rightarrow \infty \quad (\text{для } f_{ext} \neq 0); \quad (30)$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \chi \mathbf{e}, \quad \langle \mathbf{w} \rangle \sim \chi \mathbf{e} \quad \text{при } Re \rightarrow \infty \quad (\text{для } f_{ext} = 0), \quad (31)$$

где

$$\varphi = \frac{f_{ext}}{\varkappa} \varepsilon Re x; \quad \chi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{u} \varepsilon \sqrt{Re} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Согласно (30), (31) на фоне колебаний имеет место следующее.

1. Если $f_{ext} \neq 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ движутся в направлении, совпадающем с направлением вектора $f_{ext}\mathbf{e}$.

2. Если $f_{ext} = 0$, то при $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) > 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ (как “одно целое”) совершают поступательное движение в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}$; при $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) < 0$ – совершают поступательное движение в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}$; при $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ покоятся.

Рассмотрим вопрос о среднем по времени движении свободных частей гидромеханической системы при значениях Re , малых по сравнению с единицей. Используя (28), (29), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \psi \mathbf{e}, \quad \langle \mathbf{w} \rangle \sim \psi|_{x=1} \mathbf{e} \quad \text{при } Re \rightarrow 0, \quad (32)$$

где

$$\psi = \frac{\varepsilon}{\kappa} [f_{ext} x + \pi \hat{u}(\kappa + 1) \sin \alpha] Re.$$

Согласно (32) на фоне колебаний имеет место следующее.

1. Если $f_{ext} \neq 0$, $\sin \alpha = 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ движутся в направлении, совпадающем с направлением вектора $f_{ext}\mathbf{e}$.

2. Если $f_{ext} = 0$, $\sin \alpha \neq 0$, то при $\sin \alpha > 0$ жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ (как “одно целое”) совершают поступательное движение в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}$; при $\sin \alpha < 0$ – совершают поступательное движение в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}$.

3. Если $f_{ext} = 0$, $\sin \alpha = 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ покоятся.

4. Если $f_{ext} \sin \alpha > 0$, то жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ движутся в направлении, совпадающем с направлением вектора $f_{ext}\mathbf{e}$.

5. Если $f_{ext} \sin \alpha < 0$, $|f_{ext}| < \pi \hat{u}(\kappa + 1) |\sin \alpha|$, то свободные части гидромеханической системы совершают движение, которое может характеризоваться как “необычное”; жидкость в области $\bar{\Omega}$ и пластина ξ движутся в направлении, противоположном направлению вектора $f_{ext}\mathbf{e}$, то есть направлению внешнего силового воздействия на пластину ξ (при $\sin \alpha > 0$ жидкость и пластина движутся в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}$; при $\sin \alpha < 0$ – движутся в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}$).

6. Если $f_{ext} \sin \alpha < 0$, $|f_{ext}| > \pi \hat{u}(\kappa + 1) |\sin \alpha|$, то пластина ξ движется в направлении, совпадающем с направлением вектора $f_{ext}\mathbf{e}$, при том, что для значения $x = x^* = -\pi \hat{u}(\kappa + 1) (\sin \alpha) / f_{ext}$ скорость жидкости равна нулю, при $x^* < x < 1$ жидкость движется в направлении, совпадающем с направлением вектора $f_{ext}\mathbf{e}$, при $0 < x < x^*$ жидкость совершает движение в направлении, противоположном направлению вектора $f_{ext}\mathbf{e}$, то есть направлению внешнего силового воздействия на пластину ξ и направлению движения пластины ξ . “Толщина” $1 - x^*$ области $x^* < x < 1$ “правильного” направления движения жидкости может быть сколь угодно малой по сравнению с “толщиной” x^* области $0 < x < x^*$ “необычного” направления движения жидкости (и наоборот).

7. Если $f_{ext} \sin \alpha < 0$, $|f_{ext}| = \pi \hat{u}(\kappa + 1) |\sin \alpha|$, то пластина ξ покоится, а жидкость в области $\bar{\Omega}$ совершает движение в направлении, противоположном направлению вектора $f_{ext}\mathbf{e}$.

Результаты проведенного изучения среднего движения свободных частей гидромеханической системы при больших и малых значениях числа Рейнольдса Re , в частности,

свидетельствуют о том, что периодические по времени воздействия на гидромеханические системы способны быть средством организации предписанных качественных изменений в динамике систем.

Заключение

Присутствующие в данном исследовании и в ряде других работ (например, в [7, 8, 37, 40–42]) периодические по времени воздействия, характеризующиеся отсутствием выделенного направления в пространстве, представляют интерес, в частности, ввиду того, что при таких воздействиях на механические системы в среднем по времени каждое частичное периодическое воздействие является нулевым, “отсутствует”; в среднем по времени “ничего не происходит” (например, в данной работе в среднем по времени стенка η “стоит на месте”), но свободные части систем совершают среднее движение. Причиной эффектов среднего движения свободных частей механических систем является согласованность (друг с другом) воздействий, оказываемых на системы, что находится в непосредственной связи с принципом среднего движения [7, 9, 18, 41, 51].

Полученные результаты в сочетании с результатами других теоретических исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях могут использоваться как теоретическая основа при организации направленных экспериментальных исследований в области механики жидкости, при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами и создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, при проведении исследований в области технических наук, исследований прикладного характера.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Сенницкий В.Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 1985. № 5. С. 19–23.
3. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
4. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory // Proc. 14 IMACs Congr. on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, GA: Ga. Inst. Technol., 1994. P. 59–68.
5. Сенницкий В.Л. О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2007. Т. 48, № 1. С. 79–85.
6. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // Прикл. мех. техн. физ. 2014. Т. 55, № 5. С. 55–63.
7. Сенницкий В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Междунар. журн. прикл. и фундам. иссл. 2017. № 8 (ч. 1). С. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>.

8. *Сенницкий В.Л.* Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>.
9. *Сенницкий В.Л.* О движении вязкой жидкости со свободной границей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 99–110. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>.
10. *Сенницкий В.Л.* Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // Прикл. мех. техн. физ. 1986. № 4. С. 31–36.
11. *Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л.* О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
12. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* О движении твёрдого тела в вибрирующей жидкости // Конвект. течен. Пермь: Перм. пед. ин-т, 1987. С. 61–71.
13. *Челомей В.Н.* Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
14. *Сенницкий В.Л.* О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // Гагаринск. науч. чтен. по космонавт. и авиац., 1988. М.: Наука, 1989. С. 267.
15. *Сенницкий В.Л.* Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 1993. № 1. С. 100–101.
16. *Sennitskii V.L.* On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Proc. Int. Workshop on G-jitter. Potsdam, NY: Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
17. *Lyubimov D.V.* Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Q. 1994. V. 4, No 1. P. 221–225.
18. *Сенницкий В.Л.* Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
19. *Kozlov V.G.* Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhys. Lett. 1996. V. 36, No 9. P. 651–656. <https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
20. *Сенницкий В.Л.* О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // Прикл. мех. техн. физ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.
21. *Иванова А.А., Козлов В.Г., Эвеск П.* Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998, № 4. С. 29–39.
22. *Любимов Д.В., Перминов А.В., Черепанов А.А.* Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // Вибрац. эффекты в гидродинам. Сб. статей / Пермь: Перм. ун-т, 1998. С. 204–221.
23. *Сенницкий В.Л.* Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // Прикл. мех. техн. физ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
24. *Lavrenteva O.M.* On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10, No 3. P. 251–263. <https://doi.org/10.1017/S0956792599003745>.
25. *Сенницкий В.Л.* О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
26. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.

27. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. АН СССР. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
28. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyayev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. V. 18, No 1. Art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
29. Сенницкий В.Л. О колебательном движении неоднородного твердого шара в вибрирующей жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2009. Т. 50, № 6. С. 27–35.
30. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 63–73.
31. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration // Acta Astronaut. 2012. V. 79. P. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.
32. Пятигорская О.С., Сенницкий В.Л. Пример движения цилиндрического твердого тела в вязкой жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2013. Т. 54, № 2. С. 81–87.
33. Пятигорская О.С., Сенницкий В.Л. О движении твердых частиц в колеблющейся жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2013. Т. 54, № 3. С. 74–78.
34. Vlasova O.A., Kozlov V.G. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2015. V. 27, No 4. P. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
35. Сенницкий В.Л. О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>.
36. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation // Fluid Dyn. Res. 2016. V. 48, No 5. Art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
37. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.210>.
38. Власова О.А., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180105>.
39. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // Вычисл. механ. сплошн. сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>.
40. Сенницкий В.Л. О движении вязкой жидкости в отсутствие выделенного направления в пространстве // Междунар. журн. прикл. и фундам. иссл. 2021. № 2. С. 67–71. <https://doi.org/10.17513/mjpf.13181>.
41. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.210>.
42. Сенницкий В.Л. О течении вязкой жидкости в поле силы тяжести // Теплофиз. и аэромех. 2021. Т. 28, № 3. С. 373–377.

43. Сенницкий В.Л. Эффекты парадоксального движения вязкой жидкости в поле силы тяжести // Аэрокосм. техн., высокие технолог. и инновации-2021. Матер. Всероссийск. науч.-техн. конф. (г. Пермь, 18–20 ноября 2021 г.). В 2-х т. Пермь: ПНИПУ, 2021. 440 с. Т. 1. С. 138–142. ISBN 978-5-398-02670-2.
44. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // Перм. гидродинам. науч. чтен. Сб. статей по матер. VIII Всероссийск. конф., посвящ. памяти проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. Отв. ред. Т.П. Любимова. Пермь: ПГНИУ, 2022. С. 254–261.
45. Сенницкий В.Л. Движение включения в вибрирующей жидкости // Аэрокосм. техн., высокие технолог. и инновации-2022. Матер. Всероссийск. науч.-техн. конф. (г. Пермь, 16–18 ноября 2022 г.). Пермь: ПНИПУ, 2022. 279 с. С. 207–209.
46. Сенницкий В.Л. Вынужденные вращательные колебания гидромеханической системы // Сб. статей Междунар. науч.-техн. конф. “Минские научные чтения-2022” (г. Минск, 07–09 декабря 2022 г.). В 3-х т. Минск: БГТУ, 2022. 1115 с. Т. 3. С. 181–186. ISBN 978-985-897-058-1.
47. Сенницкий В.Л. О диагностике гидромеханической системы // Аэрокосм. техн., высокие технолог. и инновации-2023. Матер. Всероссийск. науч.-техн. конф. (г. Пермь, 15–17 ноября 2023 г.). Пермь: ПНИПУ, 2023. 243 с. С. 205–207. ISBN 978-5-398-03043-3.
48. Сенницкий В.Л. О движении включения в жидкой среде // Гидропроц. в катализе. V Науч.-техн. симпоз. (г. Сочи, 3–6 октября 2024 г.). Новосибирск: Ин-т катализа СО РАН, 2024. 215 с. С. 180–182. ISBN 978-5-906376-57-2.
49. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. М. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004. 352 с.
50. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 408 с.
51. Сенницкий В.Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикл. мех. техн. физ. 2000. Т. 41, № 1. С. 57–62.

References

1. Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67 (In Russian)
2. Sennitskii V.L. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 5, pp. 620–623. <https://doi.org/10.1007/BF00915307>.
3. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, vol. 319, no. 1, pp. 117–119 (In Russian)
4. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory. *Proc. 14 IMACs Congr. on Computational and Applied Mathematics*. Atlanta, GA, Ga. Inst. Technol., 1994, pp. 59–68.
5. Sennitskii V.L. Motion of an inclusion in uniformly and nonuniformly vibrating liquids. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 1, pp. 65–70. <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0009-8>.
6. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 773–780. <https://doi.org/10.1134/S002189441405006X>.

7. Sennitskii V.L. A paradoxical liquid motion. *Mezhdunar. Zh. Prikl. Fundam. Issled.*, 2017, no. 8 (pt. 1), pp. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>. (In Russian)
8. Sennitskii V.L. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>. (In Russian)
9. Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>. (In Russian)
10. Sennitskii V.L. Motion of a sphere in fluid caused by vibrations of another sphere. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1986, vol. 27, no. 4, pp. 501–505. <https://doi.org/10.1007/BF00910190>.
11. Lugovtsov B.A., Sennitskii V.L. Motion of a body in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 2, pp. 314–317. (In Russian)
12. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherpanov A.A. On the motion of a rigid body in a vibrating liquid. In: *Konvektivnye techeniya* [Convective Flows]. Perm, Permsk. Pedagog. Inst., 1987, pp. 61–71. (In Russian)
13. Chelomey V.N. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 336 p. (In Russian)
14. Sennitskii V.L. On the motion of a gas bubble in a viscous vibrating liquid. *Gagarinsk. nauch. chten. po kosmonavt. i aviats.*, 1988 [Proc. Gagarin Sci. Lect. on Cosmonautics and Aviation, 1998]. Moscow, Nauka, 1989. p. 276. (In Russian)
15. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a compressible solid body in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 96–97. <https://doi.org/10.1007/BF00851812>.
16. Sennitskii V.L. On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid. *Proc. Int. Workshop on G-jitter*. Potsdam, NY, Clarkson Univ., 1993, pp. 178–186.
17. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems. *Microgravity Q.* 1994, vol. 4, no. 1, pp. 221–225.
18. Sennitskii V.L. The motion of inclusions in an oscillating liquid. *Sib. Fiz. Zh.*, 1995, no. 4, pp. 18–26. (In Russian)
19. Kozlov V.G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. *Europhys. Lett.*, 1996, vol. 36, no. 9, pp. 651–656. <https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
20. Sennitskii V.L. Behavior of a gas bubble in a viscous oscillating liquid in the presence of gravity. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1997, vol. 38, no. 5, pp. 718–723. <https://doi.org/10.1007/BF02467883>.
21. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, no. 4, pp. 488–496. <https://doi.org/10.1007/BF02698213>.
22. Lyubimov D.V., Perminov A.V., Cherepanov A.A. Generation of averaged flows in a vibrational field at the fluid interface. In: *Vibrats. efekty v gidrodinam.: Sb. statei* [Vibration Effects in Hydrodynamics: A Collection of Articles]. Perm, Permsk. Univ., 1998, pp. 204–221. (In Russian)
23. Sennitskii V.L. Motion of a sphere in a vibrating liquid in the presence of a wall. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1999, vol. 40, no. 4, pp. 662–668. <https://doi.org/10.1007/BF02468441>.
24. Lavrenteva O.M. On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid. *Eur. J. Appl. Math.*, 1999, vol. 10, no. 3, pp. 251–263. <https://doi.org/10.1017/S0956792599003745>.

25. Sennitskii V.L. Motion of a pulsating rigid body in an oscillating viscous fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2001, vol. 42, no. 1, pp. 72–76. <https://doi.org/10.1023/A:1018808628235>.
26. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh polyakh* [Dynamics of Interfaces in Vibrational Fields]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 216 p. (In Russian)
27. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 6, pp. 311–314. <https://doi.org/10.1134/1.1958123>.
28. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, no. 1, art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
29. Sennitskii V.L. Pulsating motion of an inhomogeneous solid sphere in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2009, vol. 50, no. 6, pp. 936–943. <https://doi.org/10.1007/s10808-009-0127-6>.
30. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 889–897. <https://doi.org/10.1134/S0015462810060062>.
31. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronaut.*, 2012, vol. 79, pp. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.
32. Pyatigorskaya O.S., Sennitskii V.L. Example of motion of a cylindrical solid in a viscous liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 237–242. <https://doi.org/10.1134/S0021894413020089>.
33. Pyatigorskaya O.S., Sennitskii V.L. Motion of solid particles in an oscillating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 3, pp. 404–407. <https://doi.org/10.1134/S0021894413030085>.
34. Vlasova O.A., Kozlov V.G. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.*, 2015, vol. 27, no. 4, pp. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
35. Sennitskii V.L. On the prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous fluid. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>. (In Russian)
36. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dyn. Res.*, 2016, vol. 48, no. 5, art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
37. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 284–288. <https://doi.org/10.1134/S1990478917020144>.
38. Vlasova O.A., Kozlov V.G., Kozlov N.V. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 219–228. <https://doi.org/10.1134/S0021894418020050>.
39. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Numerical study of the effect of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>. (In Russian)
40. Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid in the absence of a predominant direction in space. *Mezhdunar. Zh. Prikl. Fundam. Issled.*, 2021, no. 2, pp. 67–71. <https://doi.org/10.17513/mjpf.13181>. (In Russian)

41. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional flow of a viscous fluid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 326–330. <https://doi.org/10.1134/S1990478921020149>.
42. Sennitskii V.L. On the flow of a viscous liquid in a gravity field. *Thermophys. Aeromech.*, 2021, vol. 28, no. 3, pp. 347–351. <https://doi.org/10.1134/S0869864321030057>.
43. Sennitskii V.L. The effects of paradoxical motion of a viscous liquid in a gravity field. *Aerokosm. tekhn., vysokie tekhnolog. i innovatsii-2021. Mater. Vserossiisk. nauch.-tekhn. konf. (g. Perm', 18–20 noyabrya 2021 g.)* [Aerospace Engineering, High Technologies, and Innovations-2021. Proc. All-Russ. Sci.-Tech. Conf. (Perm, November 18–20, 2021)]. Vol. 1. Perm, PNIPU, 2021, pp. 138–142. (In Russian)
44. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. *Perm. Gidrodinam. nauch. chten. Sb. statei po mater. VIII Vserossiisk. konf., posvyashch. pamyati prof. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskogo i D.V. Lyubimova* [Perm Hydrodynamic Scientific Lectures. Proc. VIII All-Russ. Conf. in Memory of Professors G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, and D.V. Lyubimov]. Lyubimova T.P. (Ed.). Perm, PGNIU, 2022, pp. 254–261. (In Russian)
45. Sennitskii V.L. The motion of an inclusion in a vibrating liquid. *Aerokosm. tekhn., vysokie tekhnolog. i innovatsii-2022. Mater. Vserossiisk. nauch.-tekhn. konf. (g. Perm', 16–18 noyabrya 2022 g.)* [Aerospace Engineering, High Technologies, and Innovations-2022. Proc. All-Russ. Sci.-Tech. Conf. (Perm, November 16–18, 2022)]. Perm, PNIPU, 2022, pp. 207–209. (In Russian)
46. Sennitskii V.L. Forced rotational oscillations of a hydro-mechanical system. *Sb. statei Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. "Minskieskie nauchnye chteniya-2022" (g. Minsk, 07–09 dekabrya 2022 g.)* [Proc. Int. Sci.-Tech. Conf. "Minsk Scientific Lectures-2022" (g. Minsk, December 7–9, 2022)]. Vol. 3. Minsk, BGUTU, 2022, pp. 181–186. (In Russian)
47. Sennitskii V.L. On the diagnostics of a hydro-mechanical system. *Aerokosm. tekhn., vysokie tekhnolog. i innovatsii-2023. Mater. Vserossiisk. nauch.-tekhn. konf. (g. Perm', 15–17 noyabrya 2023 g.)* [Aerospace Engineering, High Technologies, and Innovations-2023. Proc. All-Russ. Sci.-Tech. Conf. (Perm, November 15–17, 2023)]. Perm, PNIPU, 2023, pp. 205–207. (In Russian)
48. Sennitskii V.L. On the motion of an inclusion in a liquid medium. *Gidroprots. v katalize. V Nauch.-tekhn. simpoz. (g. Sochi, 3–6 oktyabrya 2024 g.)* [Hydroprocesses in Catalysis. Proc. V Sci.-Tech. Symp. (Sochi, October 3–6, 2024)]. Novosibirsk, Inst. Katal. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2024, pp. 180–182. (In Russian)
49. Kryloff N.M., Bogoliubov N.N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku* [Introduction to Non-Linear Mechanics]. Moscow, Izhevsk, NITs "Regul. Khaot. Din.", 2004. 352 p. (In Russian)
50. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Yu.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations]. Moscow, GIFML, 1958. 408 p. (In Russian)
51. Sennitskii V.L. Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2000, vol. 41, no. 1, pp. 50–54. <https://doi.org/10.1007/BF02465236>.

Информация об авторах

Владимир Леонидович Сенницкий, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук; профессор механико-математического факультета, Новосибирский государственный университет

E-mail: *sennitskii@yandex.ru*

Author Information

Vladimir L. Sennitskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute of Hydrodynamics SB RAS; Professor, Department of mechanics and mathematics, Novosibirsk State University

E-mail: *sennitskii@yandex.ru*

Поступила в редакцию 20.12.2024

Принята к публикации 2.03.2025

Received December 20, 2024

Accepted March 2, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 514.763

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149>

Инвариантная почти контактная структура на вещественном расширении сферы

М.В. Сорокина ✉, Ю.Д. Морщинкина

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

✉ sorokina_m@list.ru

Аннотация

Исследован вопрос о существовании инвариантных относительно группы движений контактных и почти контактных метрических структур на вещественном расширении двумерной сферы с римановой метрикой прямого произведения. Найдены базисные векторные поля алгебры Ли группы Ли движений. Доказано, что не существует инвариантных контактных структур, но существует почти контактная метрическая структура, которая является интегрируемой нормальной с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Группа Ли автоморфизмов этой структуры совпадает с группой движений и имеет максимальную размерность. Найдены все линейные связности, инвариантные относительно группы автоморфизмов, в которых структурные тензоры квазисасакиевой структуры ковариантно постоянны. Каждая такая связность однозначно определяется квазисасакиевой структурой и фиксированием одной постоянной. Установлено, что контактное распределение почти контактной структуры является вполне геодезическим, следовательно, найденные связности согласованы с данным распределением.

Ключевые слова: вещественное расширение сферы, почти контактная структура, инфинитезимальный автоморфизм, почти контактная метрическая связность

Для цитирования: Сорокина М.В., Морщинкина Ю.Д. Инвариантная почти контактная структура на вещественном расширении сферы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 140–149. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149>

Invariant almost contact structure on the real extension of a sphere

M.V. Sorokina ✉, Y.D. Morshchinkina

Penza State University, Penza, Russia

✉ sorokina_m@list.ru

Abstract

The existence of contact and almost contact metric structures invariant under the group of motions on the real extension of a two-dimensional sphere with a Riemannian direct product metric was examined. The basis vector fields of the Lie algebra associated with the Lie group of motions were found. The results obtained show that invariant contact structures do not exist, but there is an almost contact metric structure, which is integrable, normal, and has a closed fundamental form, thus making it quasi-Sasakian. The Lie group of automorphisms of this structure coincides with the group of motions and has the maximum possible dimension. All linear connections were found that are invariant under the automorphism group and in which the structural tensors of the quasi-Sasakian structure are covariantly constant. Each such connection is uniquely determined by the quasi-Sasakian structure and by fixing one constant. It was established that the contact distribution of the almost contact structure is completely geodesic. Therefore, the derived connections are consistent with this distribution.

Keywords: real extension of sphere, almost contact structure, infinitesimal automorphism, almost contact metric connection

For citation: Sorokina M.V., Morshchinkina Y.D. Invariant almost contact structure on the real extension of a sphere. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 140–149. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.140-149>. (In Russian)

Введение

В настоящее время не ослабевает интерес к исследованию контактных и почти контактных метрических структур, заданных на нечетномерных многообразиях [1–6], в частности, на трехмерных многообразиях [7]. Если многообразие является группой Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные структуры. Если многообразие не является группой Ли, то также естественно исследовать метрические структуры, инвариантные относительно группы движений (изометрий). Среди восьми трехмерных геометрий Терстона [8,9] имеется геометрия вещественного расширения сферы $S^2 \times \mathbb{R}$ с римановой метрикой прямого произведения. Это многообразие является односвязным и допускает группу Ли движений

максимальной размерности. Установлено, что на многообразии $S^2 \times \mathbb{R}$ не существует контактной структуры, инвариантной относительно группы движений, но существует почти контактная метрическая структура, которая является интегрируемой нормальной структурой с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Найдены все инвариантные связности с кручением, в которых структурные тензоры квазисасакиевой структуры ковариантно постоянны.

1. Почти контактная метрическая структура

Пусть M – гладкое многообразие нечетной размерности $m = 2n + 1$. Почти контактной структурой на M называется тройка тензорных полей (η, ξ, φ) , где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой, ξ – векторное поле Роба, φ – структурный эндоморфизм модуля гладких векторных полей на M . При этом требуется выполнение следующих условий:

$$1) \eta(\xi) = 1, \quad 2) \varphi(\xi) = 0, \quad 3) \eta \circ \varphi = 0, \quad 4) \varphi^2 = -id + \eta \otimes \xi.$$

Если на M зафиксирована такая риманова метрика, что

$$5) g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

то четверка (η, ξ, φ, g) определяет на M почти контактную метрическую структуру. Дифференциальная 2-форма ω , определенная равенством

$$\omega(X, Y) = g(\varphi X, Y),$$

называется фундаментальной формой почти контактной метрической структуры. Почти контактная структура является нормальной, если выполняется следующее равенство:

$$[\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi = 0,$$

где

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

– кручение Нейенхейса. Нормальная почти контактная метрическая структура с замкнутой фундаментальной формой называется квазисасакиевой. Почти контактная структура называется интегрируемой, если кручение Нейенхейса эндоморфизма φ равно нулю.

Если $\omega = d\eta$, то $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, и почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой [10, 11].

2. Алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов

Пусть S^2 – единичная сфера трехмерного евклидова пространства E^3 , а (x, y) – ее географические координаты. Евклидова метрика в E^3 индуцирует на S^2 следующую риманову метрику:

$$ds^2 = dx^2 + (\cos x)^2 dy^2.$$

Если z – координата на вещественной прямой $\mathbb{R}$, то риманова метрика прямого произведения на $S^2 \times \mathbb{R}$ примет следующий вид:

$$ds^2 = dx^2 + (\cos x)^2 dy^2 + dz^2. \quad (1)$$

Заметим, что трехмерное многообразие $S^2 \times \mathbb{R}$ можно вложить в четырехмерное евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ в виде цилиндрической поверхности. Уравнение этой поверхности в прямоугольных декартовых координатах (u^1, u^2, u^3, u^4) имеет вид

$$u^1 = \cos x \cos y, \quad u^2 = \cos x \sin y, \quad u^3 = \sin x, \quad u^4 = z.$$

Нетрудно теперь убедиться, что евклидова метрика в E^4 индуцирует на «сферическом цилиндре» метрику (1). Хорошо известно (см, например, [8]), что связное односвязное многообразие с римановой метрикой прямого произведения $S^2 \times \mathbb{R}$ допускает четырехмерную группу Ли G движений (изометрий). Пусть $\varphi_t = \exp tX$ – однопараметрическая подгруппа группы G . Векторное поле X , порождающее эту подгруппу, является инфинитезимальным движением, если производная Ли вдоль X от метрического тензора g равна нулю: $L_X g = 0$. В координатах имеем следующие уравнения Киллинга:

$$X^p \partial_p g_{ij} + \partial_i X^p g_{pj} + \partial_j X^p g_{ip} = 0, \quad (2)$$

где X^p – координаты векторного поля X , g_{ij} – компоненты метрического тензора g ; $X = X^p \partial_p$, $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, $\partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}$ – локальный базис гладких векторных полей, dx^i – дуальный ему кобазис дифференциальных 1-форм. Компоненты метрического тензора g для метрики (1) образуют следующую матрицу:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Уравнения (2) для метрического тензора (3) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_1 X^1 &= 0, & \partial_1 X^2 \cos^2 x + \partial_2 X^1 &= 0, & \partial_1 X^3 + \partial_3 X^1 &= 0, \\ -X^1 \sin x + \partial_2 X^2 \cos x &= 0, & \partial_2 X^3 + \partial_3 X^2 \cos^2 x &= 0, & \partial_3 X^3 &= 0, \end{aligned}$$

где $\partial_1 = \partial/\partial x$, $\partial_2 = \partial/\partial y$, $\partial_3 = \partial/\partial z$. Проинтегрировав эту систему, найдем ее общее решение

$$X^1 = c_2 \cos y + c_3 \sin y, \quad X^2 = c_2 \operatorname{tg} x \sin y - c_3 \operatorname{tg} x \cos y + c_1, \quad X^3 = c_4.$$

Постоянным c_1, c_2, c_3, c_4 соответствуют следующие операторы группы Ли G – базисные векторные поля ее алгебры Ли:

$$X_1 = \partial_2, \quad X_2 = \cos y \partial_1 + \operatorname{tg} x \sin y \partial_2, \quad X_3 = \sin y \partial_1 - \operatorname{tg} x \cos y \partial_2, \quad X_4 = \partial_3. \quad (4)$$

Координаты этих полей определяют следующие структурные уравнения группы:

$$[X_1, X_2] = -X_3, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_1, X_4] = 0,$$

$$[X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_4] = 0, \quad [X_3, X_4] = 0,$$

откуда следует, что группа движений является неразрешимой.

3. Инвариантная почти контактная структура

Векторное поле X является инфинитезимальным автоморфизмом почти контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) , если производная Ли от η, ξ, φ, g вдоль X равна нулю:

$$L_X \eta = 0, \quad L_X \xi = 0, \quad L_X \varphi = 0, \quad L_X g = 0.$$

Из последнего равенства следует, что производная Ли от η, ξ, φ, g должна обращаться в нуль вдоль базисных векторных полей (4) алгебры Ли инфинитезимальных движений. В координатах имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$X_\alpha^p \partial_p \eta_i + \partial_i X_\alpha^p \eta_p = 0, \quad (5)$$

$$X_\alpha^p \partial_p \xi^i - \partial_p X_\alpha^i \xi^p = 0, \quad (6)$$

$$X_\alpha^p \partial_p \varphi_j^i + \partial_j X_\alpha^p \varphi_p^i - \partial_p X_\alpha^i \varphi_j^p = 0. \quad (7)$$

Так как $X_1 = \partial_2$ и $X_4 = \partial_3$, то $\eta_i, \xi^i, \varphi_j^i$ являются функциями одного аргумента x . Запишем систему (5) для векторного поля X_2 :

$$\cos y \partial_1 \eta_1 + \frac{\sin y}{\cos^2 x} \eta_2 = 0,$$

$$\cos y \partial_1 \eta_2 - \sin y \eta_1 + \operatorname{tg} x \cos y \eta_2 = 0,$$

$$\cos y \partial_1 \eta_3 = 0.$$

Продифференцировав первое уравнение по y , получим

$$-\sin y \partial_1 \eta_1 + \frac{\cos y}{\cos^2 x} \eta_2 = 0.$$

Умножив это уравнение на $\cos y$, а первое уравнение на $\sin y$ и сложив их, получим $\eta_2 = 0$; из второго и третьего уравнений следует, что $\eta_1 = 0$, $\eta_3 = c_3 = \text{const}$. Таким образом, $\eta = c_3 dz$. Нетрудно проверить, что эта форма инвариантна относительно оператора X_3 . Так как $d\eta = 0$, то заключаем, что на $S^2 \times \mathbb{R}$ не существует контактных метрических структур, инвариантных относительно группы движений.

Поскольку формы $c_3 dz$ и dz ($c_3 \neq 0$) определяют одно и то же распределение, то в качестве «исходной» можно взять форму

$$\eta = dz. \quad (8)$$

Заметим, что распределение $H = \ker \eta$ является интегрируемым и определяет естественное слоение $z = \text{const}$, слои которого суть сферы.

Из условия 1) $\eta(\xi) = 1$ следует соотношение

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (9)$$

которое в силу (6) также инвариантно относительно группы движений.

Из условий 2) $\varphi_j^i \xi^j = 0$ и 3) $\varphi_j^i \eta_i = 0$ следует, что $\varphi_3^3 = 0$ и $\varphi_j^3 = 0$. С учетом этих условий уравнения инвариантности (7) эндоморфизма φ относительно действия оператора X_2 представим в виде

$$\cos y \partial_1 \varphi_1^1 + \frac{\sin y}{\cos^2 x} \varphi_2^1 + \sin y \varphi_1^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}\cos y \partial_1 \varphi_2^1 - \sin y \varphi_1^1 + \operatorname{tg} x \cos y \varphi_2^1 + \sin y \varphi_2^2 &= 0, \\ \cos y \partial_1 \varphi_1^2 + \frac{\sin y}{\cos^2 x} \varphi_2^2 - \frac{\sin y}{\cos^2 x} \varphi_1^1 - \operatorname{tg} x \cos y \varphi_1^2 &= 0, \\ \cos y \partial_1 \varphi_2^2 - \sin y \varphi_1^2 - \frac{\sin y}{\cos^2 x} \varphi_2^1 &= 0.\end{aligned}$$

Как и в случае формы η , продифференцировав соответствующие уравнения и сложив соответствующие выражения, получим

$$\varphi_2^1 = -\cos^2 x \varphi_1^2, \quad \varphi_1^1 = \varphi_2^2 = \text{const}, \quad \partial_1 \varphi_2^1 + \operatorname{tg} x \varphi_2^1 = 0, \quad \partial_1 \varphi_1^2 - \operatorname{tg} x \varphi_1^2 = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_2^1 = c_2^1 \cos x$, $\varphi_1^2 = c_1^2 / \cos x$ и $c_2^1 = -c_1^2$. Таким образом, матрица эндоморфизма φ примет вид

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} a & -b \cos x & 0 \\ \frac{b}{\cos x} & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a, b – постоянные. Нетрудно убедиться, что полученный эндоморфизм инвариантен относительно оператора X_3 .

Наложив на эндоморфизм φ условия 4) и 5) из определения почти контактной метрической структуры, получим

$$a^2 - b^2 = -1, \quad ab = 0, \quad a^2 + b^2 = 1,$$

откуда следует, что $a = 0$, $b = \pm 1$, т.е. эндоморфизм φ определен с точностью до знака. Ограничение J эндоморфизма φ на распределение $H : z = \text{const}$ определяет комплексную структуру и при $x = 0$ должно иметь канонический вид

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому логично положить $b = 1$. Таким образом, имеем следующий вид структурного эндоморфизма, инвариантного относительно группы движений:

$$\varphi_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -\cos x & 0 \\ \frac{1}{\cos x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Условие нормальности почти контактной структуры в координатах имеет вид

$$\varphi_i^p \partial_p \varphi_j^k - \varphi_j^p \partial_p \varphi_i^k + \varphi_p^k \partial_j \varphi_i^p - \varphi_p^k \partial_i \varphi_j^p + (d\eta)_{ij} = 0.$$

Нетрудно убедиться, что эти равенства для полученной структуры выполняются тождественно, а так как $d\eta = 0$, то и кручение Нейенхейса равно нулю. Компоненты $\Omega_{ij} = \varphi_i^p g_{pj}$ фундаментальной формы Ω образуют следующую матрицу:

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cos x & 0 \\ -\cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. $\omega = \cos x dx \wedge dy$, следовательно, Ω является замкнутой формой $d\Omega = 0$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. *На вещественном расширении сферы существует почти контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) , структурные тензоры которой определяются формулами (8)–(10) и (1). Эта структура является интегрируемой, нормальной, с замкнутой фундаментальной формой и, следовательно, квазисасакиевой. Группа автоморфизмов данной структуры совпадает с группой движений и имеет максимальную размерность.*

4. Инвариантные почти контактные метрические связности

Пусть (η, ξ, φ, g) – почти контактная метрическая структура на гладком многообразии M . Линейную связность $\tilde{\nabla}$ на M назовем инвариантной, если она инвариантна относительно группы автоморфизмов почти контактной метрической структуры и структурные тензоры почти контактной метрической структуры ковариантно постоянны:

$$\tilde{\nabla}\eta = 0, \quad \tilde{\nabla}\xi = 0, \quad \tilde{\nabla}\varphi = 0, \quad \tilde{\nabla}g = 0. \quad (11)$$

Так как разность двух связностей является тензором, то коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ связности $\tilde{\nabla}$ можно представить в виде суммы

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + T_{ij}^k, \quad (12)$$

где Γ_{ij}^k – коэффициенты связности Леви-Чивиты ∇ , а T_{ij}^k – компоненты ее тензора деформации. Поскольку связность $\tilde{\nabla}$ является метрической: $\tilde{\nabla}g = 0$, то ковариантный тензор деформации T кососимметричен по последним двум аргументам, следовательно, $T_{ijk} = -T_{ikj}$, $T_{ijk} = T_{ij}^p g_{kp}$. Используя известную формулу

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kp} (\partial_i g_{pj} + \partial_j g_{ip} - \partial_p g_{ij})$$

для вычисления коэффициентов связности Леви-Чивиты для метрики (1), получим

$$\Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg} x & 0 \\ -\operatorname{tg} x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{ij}^3 = 0. \quad (13)$$

Первые два условия в (11) запишем в координатах:

$$\partial_i \eta_j - \tilde{\Gamma}_{ij}^p \eta_p = 0, \quad \partial_i \xi^k + \tilde{\Gamma}_{ip}^k \xi^p = 0.$$

Так как $\eta = dz$ и $\xi = \partial/\partial z$, то $\tilde{\Gamma}_{ij}^3 = 0$ и $\tilde{\Gamma}_{i3}^k = 0$. Кроме того, $\Gamma_{ij}^3 = 0$ и $\Gamma_{i3}^k = 0$, следовательно, $T_{i3k} = 0$ и $T_{ij3} = 0$.

Теперь исследуем условие инвариантности связности $\tilde{\nabla}$. Известно, что связность Леви-Чивиты инвариантна относительно группы движений метрики g , поэтому связность $\tilde{\nabla}$ инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантен тензор деформации, следовательно, и ковариантный тензор деформации T . Поэтому производная Ли вдоль базисных векторных полей X_α (4) равна нулю. В координатах это означает, что

$$X_\alpha^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i X_\alpha^p T_{pj k} + \partial_j X_\alpha^p T_{ip k} + \partial_k X_\alpha^p T_{ij p} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, найдем

$$T_{321} = -T_{312} = a \cos x,$$

где $a = \text{const}$, остальные компоненты равны нулю, следовательно, $T_{32}^1 = a \cos x$, $T_{31}^2 = -\frac{a}{\cos x}$,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x \cos x & 0 \\ 0 & a \cos x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{tg} x & 0 \\ -\operatorname{tg} x & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\cos x} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^3 = 0. \quad (14)$$

Теперь нетрудно убедиться, что $\tilde{\nabla} \varphi = 0$. Заметим также, что $T(X, Y, Z) = \eta(X)\Omega(Y, Z)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На вещественном расширении сферы существует однопараметрическое семейство инвариантных почти контактных метрических связностей, определенное формулой*

$$g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + a\eta(X)\Omega(Y, Z).$$

Пусть H – распределение на гладком m -мерном многообразии M , т.е. семейство r -мерных ($r < m$) подпространств H_p касательных пространств $T_p M$, гладко зависящих от точки $p \in M$.

Линейная связность на M называется согласованной с распределением H , если через каждую точку $p \in M$ в каждом направлении $v_p \in H_p$ проходит единственная геодезическая, касающаяся распределения H (контактная геодезическая) [4].

Нетрудно убедиться, что почти контактные метрические связности на $S^2 \times \mathbb{R}$ согласованы с распределением $H = \ker \eta$. Действительно, дифференциальные уравнения геодезических имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} + \cos x \sin x \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + a \cos x \frac{dz}{ds} \frac{dy}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 y}{ds^2} - \operatorname{tg} x \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} - \frac{a}{\cos x} \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} &= 0, \\ \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0. \end{aligned}$$

Для контактных геодезических $z = \text{const}$, $dz/ds = 0$, и мы получим дифференциальные уравнения геодезических сферы. Это означает, что распределение H является вполне геодезическим, что и доказывает наше утверждение.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Галаев С.В. ∇_N -Эйнштейновы почти контактные метрические многообразия // Вестн. Том. гос. ун-та. Матем. и мех. 2021. Т. 70. С. 5–15. <https://doi.org/10.17223/19988621/70/1>.
2. Банару М.Б. О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4 -многообразиях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2018. № 1. С. 67–70.

3. Панъженский В.И., Климова Т.Р. Контактная метрическая связность на группе Гейзенберга // Изв. вузов. Матем. 2018. Т. 62, № 11. С. 51–59.
4. Панъженский В.И., Климова Т.Р. Контактная метрическая связность с кососимметрическим кручением // Изв. вузов. Матем. 2019. Т. 63, № 11. С. 54–63.
<https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-11-54-63>.
5. Панъженский В.И., Растрепина А.О. Левоинвариантная контактная метрическая структура на многообразии Sol // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2020. Т. 162, кн. 1. С. 77–90. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.77-90>.
6. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups // Differ. Geom. Its Appl. 2008. V. 26, No 5. P. 544–552. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
7. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures // J. Geom. Phys. 2013. V. 69. P. 60–73. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.03.001>.
8. Скотт П. Геометрия на трехмерных многообразиях. Пер. с англ. С.К. Ландо; под ред. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1986. 168 с.
9. Терстон У. Трехмерная геометрия и топология. Пер. с англ. П.В. Сергеева и др.; под ред. О.В. Шварцмана. М.: МЦНМО, 2001. 312 с.
10. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Ser.: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 509. Berlin, Heidelberg: Springer, 1976. viii, 148 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0079307>.
11. Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса: Печатный дом, 2013. 458 с.

References

1. Galaev S.V. ∇_N -Einstein almost contact metric manifolds. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2021, vol. 70, pp. 5–15. <https://doi.org/10.17223/19988621/70/1>. (In Russian)
2. Banaru M.B. The almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4 -manifolds. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2018, vol. 73, no. 1, pp. 38–40.
<https://doi.org/10.3103/S0027132218010072>.
3. Pan'zhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection on the Heisenberg group. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 11, pp. 45–52. <https://doi.org/10.3103/S1066369X18110051>.
4. Panzhenskii V.I., Klimova T.R. The contact metric connection with skew torsion. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 11, pp. 47–55. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19110070>.
5. Pan'zhenskii V.I., Rastrepina A.O. The left-invariant contact metric structure on the Sol manifold. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 1, pp. 77–90. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.1.77-90>. (In Russian)
6. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups. *Differ. Geom. Its Appl.*, 2008, vol. 26, no. 5. pp. 544–552. <https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2008.04.001>.
7. Calvaruso G. Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures. *J. Geom. Phys.*, 2013, vol. 69, pp. 60–73. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2013.03.001>.

8. Scott P. *Geometriya na trekhmernykh mnogoobraziyakh* [The Geometries of 3-Manifolds]. Lando S.K. (Trans.). Arnol'd V.I. (Ed.). Moscow, Mir, 1986. 168 p. (In Russian)
9. Thurston W. *Trekhmernaya geometriya i topologiya* [Three-Dimensional Geometry and Topology]. Sergeev P.V. et al. (Trans.). Shvartsman O.V. (Ed.). Moscow, MTsNMO, 2001. 312 p. (In Russian)
10. Blair D.E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*. Ser.: Lecture Notes in Mathematics. Vol. 509. Berlin, Heidelberg, Springer, 1976. viii, 148 p. <https://doi.org/10.1007/BFb0079307>.
11. Kirichenko V.F. *Differentsial'no-geometricheskie struktury na mnogoobraziyakh* [Differential-Geometric Structures on Manifolds]. Odessa, Pechatnyi Dom, 2013. 458 p. (In Russian)

Информация об авторах

Марина Валерьевна Сорокина, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Математическое образование», Пензенский государственный университет

E-mail: sorokina_m@list.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7335-9016>

Юлия Дмитриевна Морщинкина, студент, Пензенский государственный университет

E-mail: juliamorwinkina@mail.ru

Author Information

Marina V. Sorokina, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics Education, Penza State University

E-mail: sorokina_m@list.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-7335-9016>

Yulia V. Morshchinkina, Student, Penza State University

E-mail: juliamorwinkina@mail.ru

Поступила в редакцию 31.05.2023

Принята к публикации 28.02.2025

Received May 31, 2023

Accepted February 28, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>**Радиально-симметричные решения задачи Неймана
для уравнения с p -лапласианом****А.С. Терсенов¹ ✉, Р.Ч. Сафаров^{2,3}**¹*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, Россия*²*Новосибирский научно-исследовательский государственный университет, г. Новосибирск, Россия*³*Каршинский государственный университет, г. Карши, Узбекистан*✉ aterseno@math.nsc.ru**Аннотация**

Рассмотрена задача Неймана для уравнения с p -лапласианом и младшим членом, не удовлетворяющим условию Бернштейна–Нагумо. Исследована разрешимость задачи в классе радиально-симметричных решений. Определен класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование слабого соболевского радиально-симметричного решения с производной, непрерывной по Гёльдеру с показателем $\frac{1}{p-1}$.

Ключевые слова: уравнение с p -лапласианом, условие Бернштейна–Нагумо, радиально-симметричное решение, априорная оценка

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

Для цитирования: Терсенов А.С., Сафаров Р.Ч. Радиально-симметричные решения задачи Неймана для уравнения с p -лапласианом // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 150–168. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>

On radially symmetric solutions of the Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation

Ar.S. Tersenov¹✉, R.C. Safarov^{2,3}

¹*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

³*Karshi State University, Karshi, Republic of Uzbekistan*

✉ aterseno@math.nsc.ru

Abstract

The Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation with a low order term that does not satisfy the Bernstein–Nagumo condition was studied. The solvability of the problem in the class of radially symmetric solutions was investigated. A class of gradient nonlinearities was defined, for which the existence of a weak Sobolev radially symmetric solution that has a Hölder continuous derivative with exponent $\frac{1}{p-1}$ was proved.

Keywords: p -Laplace equation, Bernstein–Nagumo condition, radially symmetric solution, a priori estimate

Acknowledgments. This study was carried out as part of state assignment no. FWNF-2022-0008 to the Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences.

For citation: Tersenov Ar.S., Safarov R.C. On radially symmetric solutions of the Neumann boundary value problem for the p -Laplace equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 150–168.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.150-168>. (In Russian)

Введение

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = F(x, u, \nabla u) \quad \text{в} \quad B_R \subset \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial B_R} = 0, \quad (2)$$

где B_R – шар радиуса R , ∂B_R – граница B_R , ν – вектор внешней нормали к ∂B_R , постоянная $p > 2$.

Один из основных подходов к исследованию краевых задач для уравнения (1) базируется на методах вариационного исчисления, что связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические методы, основанные на получении априорных оценок, а также различные аппроксимационные методы.

Исследованию разрешимости краевых задач для уравнения (1) посвящено большое количество работ. Отметим среди них те, в которых исследование краевых задач проводилось при наличии градиентных членов. В работах [1–4] авторы применили аппроксимационные методы для доказательства существования слабых решений краевых задач для (1). В [5–10] с помощью различных топологических методов, основанных на теоремах лиувилевского типа и методе суб- и суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского, доказаны аналогичные результаты. В [11] результаты о существовании решений были получены на основе метода горного перевала. В [12, 13] авторы для получения существования решений использовали принцип неподвижной точки Лерэ–Шаудера, применив методы линеаризации, априорные оценки с весами и теоремы сравнения. В работах [14–17] были исследованы вопросы существования и множественности радиально-симметричных решений задачи Неймана для уравнения с p -лапласианом.

Все перечисленные выше результаты были получены в предположении, что $F(x, u, q)$ удовлетворяет условию Бернштейна–Нагумо

$$|F(x, u, q)| \leq c(1 + |q|^p) \quad \text{для} \quad (x, u, q) \in \bar{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n \quad (3)$$

с некоторой постоянной c при условии, что решение удовлетворяет условию $\max |u| \leq M$ с некоторой постоянной M . Нас интересует разрешимость задачи (1), (2) в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной q . Отметим, что в [18] были получены результаты о существовании решения, когда условие (3) не выполнено, при определенных условиях малости на коэффициенты уравнения. Нелинейность по градиенту предполагалась не более чем полиномиальной.

Новизна наших результатов заключается в доказательстве существования решения при нарушении условия Бернштейна–Нагумо без каких-либо условий малости входных данных краевой задачи. Более того, наши результаты допускают произвольный рост решения, в том числе экспоненциальный.

В [19–21] было доказано существование радиально-симметричных решений задачи Дирихле для (1), когда условие (3) не выполнено. В настоящей статье мы докажем аналогичные результаты для задачи Неймана.

Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются функции вида

$$F(|x|, u, |\nabla u|), \quad F(|x|, u, x \cdot \nabla u),$$

где $x \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции u по переменной r будем обозначать u' . Как известно, ограниченное радиально-симметричное решение (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \quad (4)$$

и краевым условиям

$$u'(0) = u'(R) = 0. \quad (5)$$

Учитывая вырожденность уравнения (4), можно предположить, что его решения могут не принадлежать пространству $\mathbb{C}^2$. В связи с этим дадим определение того, что мы понимаем под решением задачи (4), (5).

Определение 1. Будем говорить, что функция $u(r)$ является слабым решением задачи (4), (5), если $u'(r)$ непрерывна по Гёльдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (5), и имеет место интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^R |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi'(r) dr = \\ & = \int_0^R \frac{n-1}{r} |u'(r)|^{p-2} u'(r) \phi(r) dr + \int_0^R F(r, u(r), u'(r)) \phi(r) dr \\ & \quad \forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R). \end{aligned}$$

Краевые условия (5) понимаем в обычном смысле.

Предположим без ограничения общности, что функция F имеет вид

$$F(r, u, u') = h(r, u) + g(r, u, u') + f(r), \quad h(r, 0) = g(r, u, 0) = 0, \quad (6)$$

причем $f(r)$ не обращается тождественно в нуль и

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} |h(r, u)| = \infty, \quad (7)$$

$$u h(r, u) < 0, \quad u \neq 0. \quad (8)$$

Например, условиям (7) и (8) удовлетворяет функция $h(r, u) = -u|u|^s$, $s > 0$.

Положим

$$F_+ = \max_{[0, R] \times [-M, M]} F(r, u, 0), \quad F_- = \min_{[0, R] \times [-M, M]} F(r, u, 0), \quad \max_{r \in [0, R]} |f| = f_0.$$

Введем постоянные $C_1 > 0$ и C_2 , связанные следующим соотношением:

$$C_2 > C_1 R + \left(\frac{F_+ - F_-}{2(p-1)C_1} \right)^{\frac{1}{p-2}}. \quad (9)$$

Предположим, что $g(r, u, u')$ удовлетворяет условиям

$$|g(r, u, q) - g(s, u, q)| \leq K(r, s, u, q)(r - s) \quad (10)$$

для $r, s \in (0, R)$, $0 < r - s$, $|u| \leq M$, $q \in [-C_2, C_1 R - C_2] \cup [C_2 - C_1 R, C_2]$, где $K \geq 0$,

$$g(r, u_2, q) - g(r, u_1, q) \geq \gamma(r, u_1, u_2, q)(u_1 - u_2) \quad (11)$$

для $r \in (0, R)$, $|u_1|, |u_2| \leq M$, $u_1 > u_2$, $q \in [-C_2, C_1 R - C_2] \cup [C_2 - C_1 R, C_2]$, $\gamma(r, u_1, u_2, q) \geq 0$.

Обозначим через $\mathbf{V}$ следующее множество:

$$\mathbf{V} = \left\{ (r, s) \in (0, R), \quad s < r, \quad |u_1|, |u_2| \leq M, \quad u_1 - u_2 \geq \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r - s) \right) (r - s) \right\}.$$

Предположим, что для любых $(r, s, u_1, u_2) \in \mathbf{V}$ выполнено неравенство

$$K(r, s, u_1, \pm [C_2 - C_1(r - s)]) - \\ - \gamma(r, u_1, u_2, \pm [C_2 - C_1(r - s)]) \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r - s) \right) \leq 0. \quad (12)$$

Теорема 1. Пусть функция $F(r, u, u')$ из (6) непрерывна по совокупности своих аргументов и удовлетворяет условиям (7), (8) и (10)–(12). Тогда существует слабое решение задачи (4), (5), удовлетворяющее неравенству

$$|u| \leq M, \quad |u'| \leq C_2,$$

где C_2 определяется из (9), а $M = M(f_0, h)$ – некоторая постоянная, зависящая от f_0 и h .

Ниже мы приведем несколько простых примеров функции g , удовлетворяющей (10)–(12). Во всех примерах для простоты ограничимся случаем $h(r, u) \equiv -u$.

Пример 1. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -u + \frac{1}{|x|^{2k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^{2k+1} - u |\nabla u|^\nu + f(|x|), \quad (13)$$

где $\nu > 0$, $k \geq 0$ – целое. Радиально-симметричное решение (13) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' = -u + r u'^{2k+1} - u |u'|^\nu + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Из (9) следует, что постоянная C_2 может быть выбрана сколь угодно большой. Таким образом, функция $g = r u'^{2k+1} - u |u'|^\nu$ удовлетворяет (10)–(12) при $2k \leq \nu$. Как следствие, задача (13), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение при $2k \leq \nu$. В случае, когда C_2 удовлетворяет неравенству $C_2 \leq 1$ (что соответствует определенным условиям малости размеров области или малости f_0), разрешимость (13), (5) имеет место при $2k > \nu$.

Пример 2. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -u - u e^{|x|^{1-\mu} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^\mu} + f(|x|). \quad (14)$$

Радиально-симметричное решение (14) удовлетворяет следующему уравнению:

$$-(|u'|^{p-2} u')' - \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' = -u - u e^{r u'^\mu} + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Функция $g = -u e^{r u'^\mu}$ удовлетворяет (10)–(12) с постоянной $\mu < 1$, значит, задача (14), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение при указанном μ . Заметим, что при $\mu \geq 1$ разрешимость задачи (14), (5) может быть получена лишь при определенных условиях малости входных данных.

Пример 3. Рассмотрим в B_R уравнение

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -u + \frac{1}{|x|^{2k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i u_{x_i} \right)^{2k+1} - u e^{|\nabla u|} + f(|x|). \quad (15)$$

Радиально-симметричное решение (15) удовлетворяет следующему уравнению:

$$-(|u'|^{p-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p-2}u' = -u + ru'^{2k+1} - ue^{|u'|} + f(r), \quad r \in (0, R).$$

Из (10) и (11) следует, что

$$K(r, s, u, q) = q^{2k+1}, \quad \gamma(r, u_1, u_2, q) = e^{|q|},$$

значит, (12) примет вид

$$\begin{aligned} & (\pm [C_2 - C_1(r-s)])^{2k+1} - e^{(\pm [C_2 - C_1(r-s)])} \left(C_2 - \frac{C_1}{2}(r-s) \right) \leq \\ & \leq (\pm [C_2 - C_1(r-s)])^{2k+1} - e^{(\pm [C_2 - C_1(r-s)])} (C_2 - C_1(r-s)) \leq 0 \end{aligned}$$

при достаточно большом C_2 . Как следствие, задача (15), (5) имеет слабое в смысле определения 1 радиально-симметричное решение.

Для построения решения исходной задачи применим аппроксимационную технику, разработанную в [19–21]. Доказательство теоремы 1 разбито на два этапа.

На первом этапе проведены регуляризация исходной задачи и построение последовательности классических решений регуляризованных задач. Доказательство существования классических решений получено с помощью принципа неподвижной точки, для использования которого необходимо получить ряд априорных оценок. Имея эти оценки, уже можно применить принцип неподвижной точки и доказать существование классического решения.

На втором этапе осуществлен предельный переход по параметру регуляризации. Учитывая тот факт, что полученные оценки не зависят от параметра регуляризации, предельный переход может быть осуществлен, а полученная предельная функция имеет гладкость, указанную в теореме.

Главным отличием настоящей статьи является рассмотрение задачи Неймана вместо задачи Дирихле, которая была исследована в предыдущих работах. Также можно отметить более общие и точные ограничения на функцию g , позволяющие доказать разрешимость краевых задач в классе радиально-симметричных решений.

Статья организована следующим образом. В первом разделе получена априорная оценка классического решения регуляризованной задачи, во втором – априорная оценка производной классического решения регуляризованной задачи. В третьем разделе приведено доказательство одной вспомогательной леммы (лемма 3), на которой базируется доказательство существования классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 2), а также доказательство существования слабого в смысле определения 1 решения задачи (4) и (5) (см. теорему 1).

1. Априорная оценка максимума модуля регуляризованной задачи

Рассмотрим регуляризацию уравнения (4) вида

$$-((u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u')' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' = F(r, u, u'). \quad (16)$$

Краевые условия (5) оставим без изменения. Перепишем (16) в недивергентном виде

$$-a_\varepsilon(u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' = F(r, u, u'), \quad (17)$$

где постоянная $\alpha \in (0, 1)$ такова, что $(u'^\alpha)^{\frac{p-2}{\alpha}} = |u'|^{p-2}$ и

$$a_\varepsilon(z) = ((p-1)z^\alpha + \varepsilon)(z^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}.$$

Нетрудно видеть, что $a_\varepsilon(z)$ является четной функцией по z .

Лемма 1. Пусть $F \in \mathbb{C}(\overline{B}_R \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Тогда для любого классического решения задачи (17), (5) имеет место оценка $|u(r)| \leq M(f_0, h)$ с некоторой постоянной M , зависящей от f_0 и h .

Доказательство. Пусть в точке $r = r_0 \in (0, R)$ функция $u(r)$ достигает положительного максимума и $f(r_0) > 0$. Тогда $u'(r_0) = 0$ и $u''(r_0) \leq 0$. Из (17), учитывая равенство $g(r_0, u(r_0), 0) = 0$, получим

$$h(r_0, u(r_0)) + f(r_0) \geq 0.$$

Из (8) следует, что

$$|h(r_0, u(r_0))| \leq f(r_0) \leq f_0,$$

откуда в силу (7) немедленно вытекает существование такой постоянной M_1 , зависящей от f_0 и h , что

$$u(r_0) \leq M_1(f_0, h). \quad (18)$$

Если же $f(r_0) \leq 0$, то r_0 не может быть точкой положительного максимума функции u .

Перейдем к исследованию поведения u на границе. Если $r = 0$ является точкой положительного максимума функции u , то существует такая δ -окрестность точки $r = 0$, что для любого $r \in (0, \delta)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \leq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Тогда из (17) для указанных значений r получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) \geq 0,$$

или

$$f(r) + g(r, u, u') \geq |h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow 0$, учитывая краевые условия (6)–(8) и предполагая, что $f(0) > 0$, в пределе найдем

$$|h(0, u(0))| \leq f(0) \leq f_0,$$

и, как следствие,

$$u(0) \leq M_1(f_0, h). \quad (19)$$

Если $f(0) \leq 0$, то достижение функцией u положительного максимума в нуле невозможно.

Рассмотрим теперь поведение функции u в правой граничной точке. Если $r = R$ является точкой положительного максимума функции u , то существует такая δ -окрестность

точки $r = R$, что для любого $r \in (R - \delta, R)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \geq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Из (17) получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha(r) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'(r) \geq 0,$$

откуда следует неравенство

$$f(r) + g(r, u, u') + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' \geq |h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow R$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(R) > 0$, в пределе найдем

$$|h(R, u(R))| \leq f(R) \leq f_0,$$

и, как следствие,

$$u(R) \leq M_1(f_0, h). \quad (20)$$

Если $f(R) \leq 0$, то u не может достигать положительного максимума в $r = R$.

Получим теперь оценку функции u снизу. Пусть в точке $r = r_1 \in (0, R)$ функция u достигает отрицательного минимума и $f(r_1) < 0$. Тогда $u'(r_1) = 0$, $u''(r_1) \geq 0$, и из (17) следует

$$-f_0 \leq f(r_1) \leq -|h(r_1, u(r_1))|,$$

или, учитывая (6)–(8), существует такая постоянная $M_2(f_0, h)$, что

$$u(r_1) \geq -M_2(f_0, h). \quad (21)$$

Если $f(r_1) \geq 0$, то r_1 не может быть точкой отрицательного минимума функции u .

Перейдем к исследованию поведения u на границе. Пусть $r = 0$ является точкой отрицательного минимума функции u . Тогда существует такая окрестность $(0, \delta)$, что для любого r из этой окрестности $u(r) < 0$, $u' \geq 0$ и $u'' \geq 0$. Из (17) получим

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u_r) + f(r) \leq 0.$$

Устремив $r \rightarrow 0$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(0) < 0$, в пределе получим

$$-f_0 \leq f(0) \leq -|h(0, u(0))|,$$

и, следовательно,

$$u(0) \geq -M_2(f_0, h). \quad (22)$$

Если $f(0) \geq 0$, то нуль не может быть точкой отрицательного минимума функции u .

Пусть теперь точка $r = R$ является точкой отрицательного минимума функции u . Тогда существует такая окрестность $(R - \delta, R)$, что для любого r из этой окрестности $u(r) < 0$, $u' \leq 0$ и $u'' \geq 0$. Из (17) следует, что

$$h(r, u(r)) + g(r, u, u') + f(r) + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha(r) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'(r) \leq 0,$$

отсюда

$$f(r) + g(r, u, u') + \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' \leq -|h(r, u(r))|.$$

Устремив $r \rightarrow R$, учитывая краевые условия, (6)–(8) и предполагая, что $f(R) < 0$, в пределе найдем

$$-f_0 \leq f(R) \leq -|h(r, u(r))|,$$

и, как следствие,

$$u(R) \geq -M_2(f_0, h). \quad (23)$$

Если $f(R) \geq 0$, то функция u не может достигать отрицательного минимума в $r = R$.

Таким образом, из (18)–(23) вытекает, что решение задачи (17), (5) удовлетворяет неравенству

$$|u(r)| \leq M(f_0, h) \quad \forall r \in (0, R), \quad M = \max\{M_1, M_2\}.$$

□

2. Априорная оценка максимума модуля производной регуляризованной задачи

Получим теперь априорную оценку максимума модуля производной классического решения регуляризованной задачи. Введем функцию

$$\Phi(\tau) = -C_1 \frac{\tau^2}{2} + C_2 \tau,$$

где $\tau \in [0, R]$, C_1 и C_2 из (9).

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1 и (10)–(12). Тогда для любого классического решения задачи (17), (5) справедлива оценка

$$|u'(r)| \leq \Phi'(0) = C_2.$$

Доказательство. Используем метод введения дополнительной пространственной переменной. Запишем уравнение (17) в двух различных точках $r = x$ и $r = y$:

$$-a_\varepsilon(u'(x))u''(x) - \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(x) = F(x, u(x), u'(x)), \quad (24)$$

$$-a_\varepsilon(u'(y))u''(y) - \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(y) = F(y, u(y), u'(y)). \quad (25)$$

Вычитая (25) из (24), получим

$$\begin{aligned} & -a_\varepsilon(u'(x))u''(y) + a_\varepsilon(u'(y))u''(x) - \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u'(y) = \\ & = F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим функцию $V(x, y) = u(x) - u(y)$. Очевидно, $V_{xx} = u_{xx}$, $V_{yy} = -u_{yy}$. Учитывая эти равенства, перепишем (26) следующим образом:

$$\begin{aligned} & -a_\varepsilon(u_x)V_{xx} - a_\varepsilon(u_y)V_{yy} = \\ & = \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x(x) - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)). \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$\tilde{L}z(x, y) = -a_\varepsilon(u_x)z_{xx} - a_\varepsilon(u_y)z_{yy}.$$

Функция $\Phi(x - y)$ удовлетворяет равенству

$$\tilde{L}\Phi = -a_\varepsilon(u_x)\Phi_{xx} - a_\varepsilon(u_y)\Phi_{yy} = (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1.$$

Для функции $W(x, y) = V(x, y) - \Phi(x - y)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{L}W &= -a_\varepsilon(u_x)W_{xx} - a_\varepsilon(u_y)W_{yy} = \tilde{L}V - \tilde{L}\Phi = \\ &= \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x - \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)) - \\ &\quad - (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Положим

$$P = \{(x, y) : x \in (0, R), y \in (0, R), x > y\}.$$

Пусть $Q_0 = (x_0, y_0)$ является точкой положительного максимума функции $W(x, y)$. Тогда в этой точке

$$W_x = W_y = 0, \quad W_{xx} \leq 0, \quad W_{yy} \leq 0, \quad u_x = u_y = \Phi', \quad \tilde{L}W \geq 0. \quad (28)$$

С другой стороны, из (6), (27) и (28) следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{L}W \Big|_{Q_0} &\leq \left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' \Big|_{Q_0} + \\ &+ g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) + (F_+ - F_-) - 2a_\varepsilon(\Phi'(x_0 - y_0))C_1 < \\ &< g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) + (F_+ - F_-) - 2a_\varepsilon(\Phi'(x_0 - y_0))C_1, \end{aligned} \quad (29)$$

так как

$$\left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' \Big|_{Q_0} < 0.$$

Нетрудно показать прямым дифференцированием, что функция

$$a_\varepsilon(\Phi') = ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)(\Phi')^\alpha + \varepsilon)$$

является возрастающей по параметру ε при $p > 2$. Значит,

$$a_\varepsilon(\Phi') = ((\Phi')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}-1}((p-1)(\Phi')^\alpha + \varepsilon) \geq (p-1)(\Phi')^{p-2}. \quad (30)$$

Из $\Phi' \geq C_2 - C_1R$ следует неравенство $(\Phi')^{p-2} \geq (C_2 - C_1R)^{p-2}$. Значит, из (30) имеем

$$a_\varepsilon(\Phi')C_1 \geq (p-1)(C_2 - C_1R)^{p-2}C_1. \quad (31)$$

Из (9) и (29) вытекает, что

$$\tilde{L}W \Big|_{Q_0} < g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)).$$

Чтобы получить противоречие с неравенством $\tilde{L}W \geq 0$, имеющим место в точке Q_0 , покажем, что

$$g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq 0. \quad (32)$$

Представим (32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) = \\ & = [g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0))] + \\ & + [g(y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0))]. \end{aligned} \quad (33)$$

Используя условия (10) и (11), из (33) получим

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq \\ & \leq \left[K\left(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)\right)(x_0 - y_0) - \right. \\ & \left. - \gamma\left(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)\right)(u(x_0) - u(y_0)) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

В точке максимума

$$\begin{aligned} u(x_0) - u(y_0) & > \Phi(x_0 - y_0) = \Phi(x_0 - y_0) - \Phi(0) = \\ & = \Phi'\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right)(x_0 - y_0). \end{aligned} \quad (35)$$

Для упрощения записи положим

$$\begin{aligned} K(x_0, y_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) & = K(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)), \\ \gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) & = \gamma(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)). \end{aligned}$$

Используя (12), (35) и равенство $\Phi'(\tau) = -C_1\tau + C_2$, неравенство (34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & g(x_0, u(x_0), \Phi'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \Phi'(x_0 - y_0)) \leq \\ & \leq \left[K(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, \Phi'(x_0 - y_0))\Phi'\left(\frac{x_0 - y_0}{2}\right) \right](x_0 - y_0) = \\ & = \left[K(\cdot, C_2 - C_1(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, C_2 - C_1(x_0 - y_0))\left(C_2 - \frac{C_1}{2}(x_0 - y_0)\right) \right](x_0 - y_0) \leq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Таким образом, $\tilde{L}W|_{Q_0} < 0$ и, как следствие, W не может достигать положительного максимума внутри P .

Исследуем поведение функции W на ∂P . При $x = R$ и $y \in [0, R]$ имеем

$$W_x(x, y)|_{x=R} = u_x(R) - \Phi_x(R - y) = -\Phi_x(R - y) \leq C_1R - C_2 < 0.$$

Следовательно, на этой части границы W не достигает положительного максимума. При $x = y$ имеем

$$W(x, y)|_{x=y} = u(x) - u(y) - \Phi(x - y)|_{x=y} = -\Phi(0) = 0.$$

При $y = 0$ и $x \in [0, R]$ имеем

$$W_y(x, y) \Big|_{y=0} = -u_y(0) + \Phi'(x) = \Phi'(x) \geq C_2 - C_1 R > 0.$$

Таким образом, функция W не достигает положительного максимума на этой части границы. Итак, мы заключаем, что $W(x, y) \leq 0$, откуда следует

$$u(x) - u(y) \leq \Phi(x - y). \quad (37)$$

Оценим разность $u(x) - u(y)$ снизу. Рассмотрим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{V}(x, y) - \Phi(x - y) = u(y) - u(x) - \Phi(x - y)$. Вычитая (24) из (25), найдем

$$\begin{aligned} -a_\varepsilon(u_y)u_{yy} + a_\varepsilon(u_x)u_{xx} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)), \end{aligned}$$

и с учетом соотношений $\widetilde{V}_{xx} = -u_{xx}$ и $\widetilde{V}_{yy} = u_{yy}$ придем к равенству

$$\begin{aligned} -a_\varepsilon(y)\widetilde{V}_{yy} - a_\varepsilon(x)\widetilde{V}_{xx} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \widetilde{L}\widetilde{W} &= \frac{n-1}{y}(u_y^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_y - \frac{n-1}{x}(u_x^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}}u_x + \\ &+ F(y, u(y), u'(y)) - F(x, u(x), u'(x)) - (a_\varepsilon(u_x) + a_\varepsilon(u_y))C_1. \end{aligned} \quad (38)$$

Предположим, что в некоторой точке $Q_1 = (x_1, y_1) \in P$ функция $\widetilde{W}(x, y)$ достигает положительного максимума. Следовательно, в точке Q_1 выполнены соотношения

$$\widetilde{W}_x = \widetilde{W}_y = 0, \quad \widetilde{W}_{xx} \leq 0, \quad \widetilde{W}_{yy} \leq 0, \quad u_x = u_y = -\Phi', \quad \widetilde{L}\widetilde{W} \geq 0. \quad (39)$$

С другой стороны, из (10)–(12), (31), (38), (39), четности функции a_ε , используя рассуждения о функции g , приведенные выше, получим

$$\begin{aligned} \widetilde{L}\widetilde{W} \Big|_{Q_1} &\leq \left[\frac{n-1}{x} - \frac{n-1}{y} \right] (\Phi'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} \Phi' + F_+ - F_- - 2(p-1)(C_2 - C_1 R)^{p-2} C_1 + \\ &+ g(y, u(y), -\Phi'(x_0 - y_0)) - g(x, u(x), -\Phi'(x_0 - y_0)) \Big|_{Q_1} < 0, \end{aligned}$$

что противоречит предположению о том, что $\widetilde{W}$ достигает положительного максимума внутри P .

Исследуем поведение $\widetilde{W}$ на ∂P . При $x = R$ и $y \in [0, R]$ имеем

$$\widetilde{W}_x(x, y) \Big|_{x=R} = -u_x(R) - \Phi_x(R - y) = -\Phi_x(R - y) \leq C_1 R - C_2 < 0,$$

следовательно, $W(x, y)$ не достигает положительного максимума на указанном участке границы. При $x = y$ имеем

$$\widetilde{W}(x, y) \Big|_{x=y} = u(y) - u(x) - \Phi(x - y) \Big|_{x=y} = -\Phi(0) = 0.$$

Перейдем теперь к части границы, на которой $y = 0$, $x \in [0, R]$. Получим

$$\widetilde{W}_y(x, y) \Big|_{y=0} = u_y(0) + \Phi'(x) = \Phi'(x) \geq C_2 - C_1 R > 0.$$

Таким образом, функция $\widetilde{W}$ на этой части границы также не может достигать положительного максимума. Просуммировав полученные результаты, получим $\widetilde{W}(x, y) \leq 0$, значит,

$$u(y) - u(x) \leq \Phi(x - y). \quad (40)$$

Из (37) и (40) следует, что $|u(x) - u(y)| \leq \Phi(x - y)$. В силу симметрии переменных x и y можно аналогичным образом рассмотреть случай $x < y$, чтобы получить оценку $|u(x) - u(y)| \leq \Phi(y - x)$. Следовательно,

$$|u(x) - u(y)| \leq \Phi(|x - y|).$$

Заметив, что $\Phi(0) = 0$, перепишем последнее неравенство в виде

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq \frac{\Phi(|x - y|) - \Phi(0)}{|x - y|},$$

откуда сразу следует требуемая оценка градиента

$$|u_x| \leq \Phi'(0) = C_2.$$

□

3. Доказательство теорем существования

Рассмотрим решение u_ε регуляризованного уравнения (4)

$$-((u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon)' - \frac{n-1}{r} (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon), \quad (41)$$

$$u'_\varepsilon(0) = 0, \quad u'_\varepsilon(R) = 0. \quad (42)$$

Наличие неограниченного при $r \rightarrow 0$ коэффициента $\frac{n-1}{r}$ требует исследования поведения выражения $\frac{n-1}{r} (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$. Для доказательства существования классического решения задачи (41), (42) нужно показать ограниченность этого выражения при $r \rightarrow 0$ [22]. Положим $Z(r) = (u'_\varepsilon + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon$.

Лемма 3. Если u_ε является классическим решением задачи (41), (42), то $Z(r) \in C^1[0, R]$ и

$$Z'(0) = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n}.$$

Доказательство. Перепишем (41) в следующем виде:

$$Z' + \frac{n-1}{r}Z + F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = 0. \quad (43)$$

Представим теперь уравнение (43) в форме

$$(r^{n-1}Z)' + r^{n-1}F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = 0. \quad (44)$$

Из (44) немедленно вытекает, что

$$\frac{Z(r)}{r} = -\frac{1}{r^n} \int_0^r t^{n-1} F(t, u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t)) dt. \quad (45)$$

Из (43) и (45) следует

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} Z' &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Z(r) - Z(0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Z(r)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n} \end{aligned} \quad (46)$$

для любого $\varepsilon > 0$, причем (46) является следствием применения правила Лопиталья к правой части (45). $\square$

Заметим, что из леммы 3 вытекает ограниченность Z_r в $[0, R]$ для любого $\varepsilon \geq 0$ и, как следствие, гёльдеровость u'_ε

$$|u'_\varepsilon(r_1) - u'_\varepsilon(r_2)| \leq c_1 |r_1 - r_2|^{\frac{1}{p-1}}, \quad (47)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от ε . Имея априорные оценки классического решения в классе $\mathbb{C}^{1, \frac{1}{p-1}}$, можно применить принцип неподвижной точки [19, 23] для доказательства существования решения задачи (41) и (42). Применение теоремы Лерэ – Шаудера требует наличия априорных оценок в семействе уравнений с параметром, где параметр входит в уравнение как множитель при младших членах, т. е. семейство имеет вид

$$-a_\varepsilon(u')u'' = \sigma \left(\frac{n-1}{r} (u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u' + F(r, u, u') \right),$$

где $\sigma \in [0, 1]$ (см. [23], гл. 11, теорема 11.3). Учитывая специфику вхождения параметра и его пределы изменения, выполнение всех оценок и условий легко можно проверить. Ниже приведены итоговые формулировки.

Теорема 2. Пусть $F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon)$ непрерывна по совокупности своих переменных и выполнены условия (7), (8). Пусть $g(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (10)–(12). Тогда существует классическое решение $u_\varepsilon \in \mathbb{C}^2(0, R) \cap \mathbb{C}^{1, \frac{1}{p-1}}[0, R]$ задачи (41) и (42), удовлетворяющее следующим соотношениям:

$$|u_\varepsilon| \leq M(f_0, h), \quad |u'_\varepsilon| \leq C_2 = \Phi'(0).$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение (41). Домножив (41) на $\phi \in C_0^\infty(0, R)$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^R ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi' dr - \int_0^R \frac{n-1}{r} ((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon \phi dr = \\ & = \int_0^R (h(r, u_\varepsilon) + g(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + f(r)) \phi(r) dr. \end{aligned} \quad (48)$$

Из (47) сделаем заключение о существовании такой подпоследовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что

$$u_{\varepsilon_n}(r) \rightarrow u(r), \quad u'_{\varepsilon_n}(r) \rightarrow u'(r) \quad \text{в } C[0, R], \quad (49)$$

откуда в силу непрерывности функций h и g по совокупности своих переменных сразу следует

$$h(r, u_{\varepsilon_n}) \rightarrow h(r, u), \quad g(r, u_{\varepsilon_n}, u'_{\varepsilon_n}) \rightarrow g(r, u, u') \quad \text{в } C[0, R].$$

Также из (49) получим

$$\begin{aligned} & (u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n \rightarrow (u')^\alpha \quad \text{в } C[0, R], \\ & ((u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_{\varepsilon_n} \rightarrow |u'|^{p-2} u' \quad \text{в } C[0, R]. \end{aligned} \quad (50)$$

Из (50) и того факта, что функция $\frac{\phi(r)}{r}$ непрерывна на $[0, R]$, вытекает

$$\int_0^R \frac{n-1}{r} ((u'_{\varepsilon_n})^\alpha + \varepsilon_n)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_{\varepsilon_n} \phi dr \rightarrow \int_0^R \frac{n-1}{r} |u'|^{p-2} u' \phi dr.$$

Переходя к пределу в (48) при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим, что $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (4) и (5). $\square$

Заключение

Рассмотрена задача Неймана для уравнения с p -лапласианом и младшим членом, не удовлетворяющим условию Бернштейна–Нагумо. Исследована разрешимость указанной задачи в классе слабых соболевских радиально-симметричных решений. Определен класс градиентных нелинейностей, для которого доказано существование слабого соболевского радиально-симметричного решения с производной, непрерывной по Гёльдеру с показателем $\frac{1}{p-1}$. Новизна результатов заключается в доказательстве существования решения при нарушении условия Бернштейна–Нагумо без каких-либо условий малости на входные данные краевой задачи. Теорема существования доказана при произвольном росте младших членов по градиенту, в частности, и при экспоненциальном. Для получения решения исходной задачи применена аппроксимационная техника. Доказательство основного результата базируется на доказательстве классической разрешимости регуляризованной задачи и предельного перехода по параметру регуляризации. Полученные априорные оценки решения регуляризованной задачи не зависят от параметра регуляризации, что позволяет осуществить предельный переход и получение решения исходной задачи указанной гладкости.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Dall’Aglia A., Giachetti D., Segura de León S.* Global existence for parabolic problems involving the p -Laplacian and a critical gradient term // *Indiana Univ. Math. J.* 2009. V. 58, No 1. P. 1–48. <https://dx.doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3409>.
2. *Dall’Aglia A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // *Nonlinear Differ. Equations Appl.* 2004. V. 11, No 4. P. 431–450. <https://dx.doi.org/10.1007/s00030-004-1070-0>.
3. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m -Laplacian type with a nonlinear convection term // *J. Differ. Equations.* 2000. V. 162, No 1. P. 224–250. <https://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1999.3694>.
4. *Sbai A., El Hadfi Y., Zeng S.* Nonlinear singular elliptic equations of p -Laplace type with superlinear growth in the gradient // *Mediterr. J. Math.* 2023. V. 20, No 1. Art. 32. <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02244-7>.
5. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the p -Laplacian with dependence on the gradient // *Nonlinearity.* 2010. V. 25, No 4. P. 1211–1234. <https://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/25/4/1211>.
6. *Figueiredo D.G., Sánchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.* 2009. V. 71, No 10. P. 4862–4868. <https://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.03.061>.
7. *Iturriaga L., Lorca S., Sánchez J.* Existence and multiplicity results for the p -Laplacian with a p -gradient term // *Nonlinear Differ. Equations Appl.* 2008. V. 15, No 6. P. 729–743. <https://doi.org/10.1007/s00030-008-0064-8>.
8. *Li J., Yin J., Ke Y.* Existence of positive solutions for the p -Laplacian with p -gradient term // *J. Math. Anal. Appl.* 2011. V. 383, No 1. P. 147–158. <https://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.008>.
9. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // *J. Differ. Equations.* 2004. V. 199, No 1. P. 96–114. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.10.021>.
10. *Zou H.H.* A priori estimates and existence for quasilinear elliptic equations // *Calculus Var. Partial Differ. Equations.* 2008. V. 33. P. 417–437. <https://doi.org/10.1007/s00526-008-0168-3>.
11. *Gupta S., Dwivedi G.* An existence result for p -Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$ // *Commun. Math.* 2022. V. 30, No 1. P. 149–159. <https://doi.org/10.46298/cm.9316>.
12. *Leonori T., Porretta A., Riey G.* Comparison principles for p -Laplace equations with lower order terms // *Ann. Mat. Pura Appl.* 2017. V. 196, No 3. P. 877–903. <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0600-9>.
13. *Razani A.* Game-theoretic p -Laplace operator involving the gradient // *Miskolc Math. Notes.* 2022. V. 23, No 2. P. 867–879. <https://doi.org/10.18514/MMN.2022.3467>.
14. *Precup R., Gheorghiu C.-I.* Theory and computation of radial solutions for Neumann problems with ϕ -Laplacian // *Qual. Theory Dyn. Syst.* 2024. V. 23, No 3. Art. 107. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-00963-8>.

15. *Pei M., Wang L., Lv X.* Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems involving gradient term without growth restrictions // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 2021. V. 44, No 4. P. 2035–2047. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-01047-x>.
16. *Pei M., Wang L., Lv X.* Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems with gradient dependence // *Math. Nachr.* 2022. V. 295, No 12. P. 2422–2435. <https://doi.org/10.1002/mana.202000107>.
17. *Cianciaruso F., Infante G., Pietramala P.* Multiple positive radial solutions for Neumann elliptic systems with gradient dependence // *Math. Methods Appl. Sci.* 2018. V. 41, No 16. P. 6358–6367. <https://doi.org/10.1002/mma.5143>.
18. *Bueno H., Ercole G.* A quasilinear problem with fast growing gradient // *Appl. Math. Lett.* 2013. V. 26, No 4. P. 520–523. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.009>.
19. *Tersenov Ar.S.* Influence of gradient terms on the existence of solutions to the Dirichlet problem for p -Laplacian // *J. Math. Sci.* 2018. V. 228, No 4. P. 463–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3635-6>.
20. *Tersenov Ar.S.* Radially symmetric solutions of the p -Laplace equation with gradient terms // *J. Appl. Ind. Math.* 2018. V. 12, No 4. P. 770–784. <https://doi.org/10.1134/S1990478918040178>.
21. *Tersenov Ar.S.* On the existence of radially symmetric solutions for the p -Laplace equation with strong gradient nonlinearities // *Sib. Math. J.* 2023. V. 64, No 6. P. 1443–1454. <https://doi.org/10.1134/S0037446623060162>.
22. *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n // *Adv. Math.* 1996. V. 118, No 2. P. 177–243. <https://doi.org/10.1006/aima.1996.0021>.
23. *Gilbarg D., Trudinger N.S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 224. Berlin, New York, NY: Springer, 1983. xiii, 513 p.

References

1. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de León S.* Global existence for parabolic problems involving the p -Laplacian and a critical gradient term. *Indiana Univ. Math. J.*, 2009, vol. 58, no. 1, pp. 1–48. <https://dx.doi.org/10.1512/iumj.2009.58.3409>.
2. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains. *Nonlinear Differ. Equations Appl.*, 2004, vol. 11, no. 4, pp. 431–450. <http://dx.doi.org/10.1007/s00030-004-1070-0>.
3. *Nakao M., Chen C.* Global existence and gradient estimates for the quasilinear parabolic equations of m -Laplacian type with a nonlinear convection term. *J. Differ. Equations*, 2000, vol. 162, no. 1, pp. 224–250. <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1999.3694>.
4. *Sbai A., El Hadfi Y., Zeng S.* Nonlinear singular elliptic equations of p -Laplace type with superlinear growth in the gradient. *Mediterr. J. Math.*, 2023, vol. 20, no. 1, art. 32. <https://doi.org/10.1007/s00009-022-02244-7>.
5. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the p -Laplacian with dependence on the gradient. *Nonlinearity*, 2010, vol. 25, no. 4, pp. 1211–1234. <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/25/4/1211>

6. De Figueiredo D.G, Sánchez J., Ubilla P. Quasilinear equations with dependence on the gradient. *Nonlinear Anal.: Theory, Methods Appl.*, 2009, vol. 71, no. 10, pp. 4862–4868. <http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.03.061>.
7. Iturriaga L., Lorca S., Sánchez J. Existence and multiplicity results for the p -Laplacian with a p -gradient term. *Nonlinear Differ. Equations Appl.*, 2008, vol. 15, no. 6, pp. 729–743. <https://doi.org/10.1007/s00030-008-0064-8>.
8. Li J., Yin J., Ke Y. Existence of positive solutions for the p -Laplacian with p -gradient term. *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, vol. 383, no. 1, pp. 147–158. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.008>.
9. Ruiz D. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems. *J. Differ. Equations*, 2004, vol. 199, no. 1, pp. 96–114. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.10.021>.
10. Zou H.H. A priori estimates and existence for quasilinear elliptic equations. *Calculus Var. Partial Differ. Equations*, 2008, vol. 33, no. 4, pp. 417–437. <https://doi.org/10.1007/s00526-008-0168-3>.
11. Gupta S., Dwivedi G. An existence result for p -Laplace equation with gradient nonlinearity in $\mathbb{R}^N$. *Commun. Math.*, 2022, vol. 30, no. 1, pp. 149–159. <https://doi.org/10.46298/cm.9316>.
12. Leonori T., Porretta A., Riey G. Comparison principles for p -Laplace equations with lower order terms. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 2017, vol. 196, no. 3, pp. 877–903. <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0600-9>.
13. Razani A. Game-theoretic p -Laplace operator involving the gradient. *Miskolc Math. Notes*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 867–879. <https://doi.org/10.18514/MMN.2022.3467>.
14. Precup R., Gheorghiu C.-I. Theory and computation of radial solutions for Neumann problems with ϕ -Laplacian. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2024, vol. 23, no. 3, art. 107. <https://doi.org/10.1007/s12346-024-00963-8>.
15. Pei M., Wang L., Lv X. Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems involving gradient term without growth restrictions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2021, vol. 44, no. 4, pp. 2035–2047. <https://doi.org/10.1007/s40840-020-01047-x>.
16. Pei M., Wang L., Lv X. Radial solutions for p -Laplacian Neumann problems with gradient dependence. *Math. Nachr.*, 2022, vol. 295, no. 12, pp. 2422–2435. <https://doi.org/10.1002/mana.202000107>.
17. Cianciaruso F., Infante G., Pietramala P. Multiple positive radial solutions for Neumann elliptic systems with gradient dependence. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, no. 16, pp. 6358–6367. <https://doi.org/10.1002/mma.5143>.
18. Bueno H., Ercole G. A quasilinear problem with fast growing gradient. *Appl. Math. Lett.*, 2013, vol. 26, no. 4, pp. 520–523. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.12.009>.
19. Tersenov Ar.S. Influence of gradient terms on the existence of solutions to the Dirichlet problem for p -Laplacian. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 228, no. 4, pp. 463–474. <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3635-6>.
20. Tersenov Ar.S. Radially symmetric solutions of the p -Laplace equation with gradient terms. *J. Appl. Ind. Math.*, 2018, vol. 12, no. 4, pp. 770–784. <https://doi.org/10.1134/S1990478918040178>.

21. Tersenov Ar.S. On the existence of radially symmetric solutions for the p -Laplace equation with strong gradient nonlinearities. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 6, pp. 1443–1454.
<https://doi.org/10.1134/S0037446623060162>.
22. Franchi B., Lanconelli E., Serrin J. Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n . *Adv. Math.*, 1996, vol. 118, no. 2, pp. 177–243.
<https://doi.org/10.1006/aima.1996.0021>.
23. Gilbarg D., Trudinger N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 224. Berlin, New York, NY, Springer, 1983. xiii, 513 p.

Информация об авторах

Арис Саввич Терсенов, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2748-8020>

Расул Чориёр угли Сафаров, аспирант, Новосибирский научно-исследовательский государственный университет; Каршинский государственный университет

E-mail: r.safarov1@g.nsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6247-1373>

Author Information

Aris S. Tersenov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Leading Researcher, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: aterseno@math.nsc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-2748-8020>

Rasul C. Safarov, Postgraduate Student, Novosibirsk State University; Karshi State University

E-mail: r.safarov1@g.nsu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-6247-1373>

Поступила в редакцию 3.02.2025
Принята к публикации 24.02.2025

Received February 3, 2025
Accepted February 24, 2025

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.6: 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>

Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости

Д.Т. Чекмарев , Е.Г. Глазова, Д.В. Седова*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия* 4ekt@mm.unn.ru

Аннотация

Рассмотрена новая неявная схема решения трехмерных динамических задач теории упругости. Для аппроксимации уравнений теории упругости по пространственным координатам использована ажурная схема метода конечных элементов на базе 4-узлового конечного элемента с линейной аппроксимацией перемещений в пределах элемента. Конечные элементы расположены по одному в центрах расчетной сетки из гексаэдрических ячеек. Благодаря этому на сетках с одинаковым размером элементов данная схема имеет в пять раз меньше конечных элементов и в два раза меньше узлов по сравнению с традиционными схемами на базе 4-узловых линейных конечных элементов. Это обуславливает её высокую экономичность. Аппроксимация уравнений по времени построена на основе неявной абсолютно устойчивой численной схемы Кранка – Николсона (метод трапеций). Обсуждена проблема эффективной применимости данной схемы – того класса задач, для решения которых она будет предпочтительнее явной схемы. Приведен пример решения тестовой модельной задачи с использованием этой схемы.

Ключевые слова: неявная схема, ажурная схема, трехмерная задача теории упругости, метод конечных элементов, схема Кранка – Николсона

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-29-00422).

Для цитирования: Чекмарев Д.Т., Глазова Е.Г., Седова Д.В. Неявная ажурная схема решения трехмерных задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 169–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>

Implicit rare mesh scheme for solving 3D elasticity problems

D.T. Chekmarev , E.G. Glazova, D.V. Sedova*Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russia* 4ekm@mm.unn.ru

Abstract

A new implicit scheme for solving 3D dynamic elasticity problems was considered. To approximate the elasticity equations by spatial coordinates, a rare mesh FEM scheme based on a four-node finite element with a linear approximation of displacements within the element was employed. The finite elements are located in the centers of hexahedral cells, with each cell containing a single element. As a result, for meshes with the same element size, this scheme uses five times fewer finite elements and half as many nodes as traditional schemes utilizing four-node linear finite elements, which makes it highly efficient. The equations were approximated in time based on the implicit unconditionally stable Crank–Nicolson numerical scheme (trapezoidal rule). The applicability of the scheme was discussed, with a focus on the class of problems for which it outperforms the explicit scheme. An example of a test model problem solved using this scheme was provided.

Keywords: implicit scheme, rare mesh scheme, 3D elasticity problem, finite element method, Crank–Nicolson scheme

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-29-00422).

For citation: Chekmarev D.T., Glazova E.G., Sedova D.V. Implicit rare mesh scheme for solving 3D elasticity problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 169–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.169-180>. (In Russian)

Введение

Настоящая работа в некотором смысле завершает серию публикаций о реализации ажурной схемы метода конечных элементов (МКЭ) для решения трехмерных задач теории упругости и пластичности. Ранее была реализована [1] и подробно исследована [2] явная ажурная схема типа «крест» решения динамических задач. Потом была ее реализация для решения статических задач [3]. В обоих случаях схема зарекомендовала себя наилучшим образом. Особенности данной схемы являются: высокая экономичность, отсутствие нежелательных эффектов сдвигового и объемного записания и «песочных часов» [4, 5], сходимость, не уступающая традиционным схемам МКЭ, а также простота реализации.

Существует достаточно широкий класс задач, при решении которых применение неявных схем оказывается более эффективным по сравнению с явными схемами. Это обусловлено в первую очередь тем, что, исходя из условий устойчивости, шаг интегрирования по времени явной схемы ограничивается условием Куранта [6] $\tau \leq \frac{h}{c}$, где τ – шаг по времени, c – скорость звука, h – характерный минимальный размер конечного элемента. Таким образом, в случае необходимости использования мелких сеток данное ограничение является весьма обременительным, требует большого числа шагов по времени и может приводить как к большим вычислительным затратам, так и к накоплению погрешностей. Если явные схемы предпочтительнее при моделировании быстропротекающих нестационарных процессов на коротких промежутках времени (задачи «быстрой» динамики), то преимущества неявных схем проявляются на задачах «медленной» динамики. Характерными признаками последних являются задачи со сравнительно длительными по времени процессами, в которых определяющими являются длинноволновые процессы деформирования. Сравнительная эффективность неявных схем повышается также при наличии в задачах разномасштабных геометрических особенностей, являющихся концентраторами напряжений. Таковыми являются отверстия или жесткие включения малого размера по сравнению с общим размером расчетной области, требующие измельчения сетки для адекватного описания напряженно-деформированного состояния вблизи них. Отметим, что в данном случае процессы вблизи особенностей малого масштаба можно считать квазистатическими, и для их описания неявная схема предпочтительнее.

Учитывая, что вычислительные затраты на шаге по времени неявных схем значительно выше, чем у явных, в качестве критерия эффективности можно принять число Куранта k – безразмерный параметр, характеризующий отношение шага по времени к предельно допустимому шагу явной схемы: $\tau = kh/c$. Как правило, неявная схема будет предпочтительнее явной при $k \geq 10$, что в конечном счете определяется отношением вычислительных затрат на шаге по времени, которое зависит от метода решения СЛАУ, ширины ленты и т. п. Эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений в рамках неявных схем описаны в [7, 8]. Актуальна проблема совместного использования явных и неявных схем. Это позволяет существенно повысить эффективность применяемых методик численного решения [9, 10].

Для аппроксимации уравнений теории упругости по времени используем схему Кранка – Николсона [11], имеющую второй порядок точности.

1. Конечный элемент ажурной схемы

Дадим краткое описание конечного элемента ажурной схемы МКЭ. Пусть расчетная область задачи покрыта сеткой из гексаэдрических ячеек. Под ажурной схемой МКЭ будем понимать численную схему на базе 4-узловых конечных элементов в виде тетраэдров с линейной аппроксимацией функций внутри элемента со следующим расположением элементов. Пусть в каждой ячейке гексаэдрической сетки находится один расчетный 4-узловой элемент в виде тетраэдра (рис. 1), а остальные 4 элемента в расчетах не участвуют.

На рис. 2 показано расположение конечных элементов, инцидентных внутреннему узлу регулярной сетки. Соседние элементы ориентированы по-разному, что необходимо для сохранения связности сетки. При этом узлы исходной гексаэдрической сетки делятся на два класса: те, которые участвуют в формировании системы уравнений (основные узлы), и те,

которые не участвуют (вспомогательные узлы). Таким образом, в ажурных схемах число расчетных узлов сокращается в два раза на сетках с ячейками (элементами) одинакового размера.

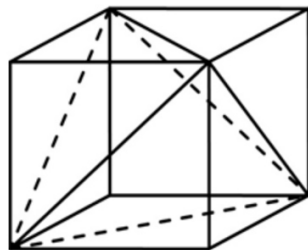


Рис. 1. Ячейка ажурной сетки

Fig. 1. Rare mesh cell

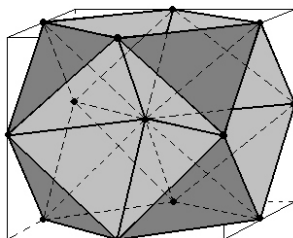


Рис. 2. Расположение конечных элементов в окрестности внутреннего узла регулярной сетки

Fig. 2. Finite elements near an interior node of the regular mesh

Все экстенсивные характеристики (объем, масса, энергия и т. д.) отсутствующих боковых элементов ячейки присоединим к единственному расчетному элементу. Построенная таким образом схема МКЭ имеет в пять раз меньше элементов и в два раза меньше узлов по сравнению с традиционной схемой на базе 4-узловой линейной конечного элемента. Иначе данную схему можно интерпретировать как схему на базе 4-узловых гексаэдрических конечных элементов.

Для формирования схемы МКЭ будем использовать векторно-матричную форму записи [11, 12]. Векторы узловых перемещений конечного элемента, приведенные векторы деформаций и напряжений запишем соответственно в виде

$$(u)^T = (u_1^1, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2, u_2^3, u_3^1, u_3^2, u_3^3, u_4^1, u_4^2, u_4^3),$$

$$(\varepsilon)^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}), \quad (\sigma)^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}).$$

В матричной форме соотношения Коши, закон Гука и полная потенциальная энергия конечного элемента имеют вид

$$\varepsilon = Bu, \quad \sigma = C\varepsilon = CBu, \quad \Pi = \frac{1}{2}u^TKu - u^Tq, \quad (1)$$

где B – матрица деформаций, связывающая компоненты тензора деформаций с узловыми перемещениями, C – матрица упругих постоянных, K – матрица жесткости, q – вектор

внешних сил. В общем случае элементы матрицы B являются функциями пространственных координат, но для линейных конечных элементов они являются константами:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & 0 & 0 & \beta_2^1 & 0 & 0 & \beta_3^1 & 0 & 0 & \beta_4^1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 & 0 & \beta_3^2 & 0 & 0 & \beta_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^3 & 0 & 0 & \beta_2^3 & 0 & 0 & \beta_3^3 & 0 & 0 & \beta_4^3 \\ \beta_1^1 & \beta_1^1 & 0 & \beta_2^2 & \beta_2^1 & 0 & \beta_3^2 & \beta_3^1 & 0 & \beta_4^2 & \beta_4^1 & 0 \\ 0 & \beta_1^3 & \beta_1^2 & 0 & \beta_2^3 & \beta_2^2 & 0 & \beta_3^3 & \beta_3^2 & 0 & \beta_4^3 & \beta_4^2 \\ \beta_1^3 & 0 & \beta_1^1 & \beta_2^3 & 0 & \beta_2^1 & \beta_3^3 & 0 & \beta_3^1 & \beta_4^3 & 0 & \beta_4^1 \end{pmatrix}.$$

Матрица упругих постоянных имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Здесь β_j^i – коэффициенты сеточных дифференциальных операторов, λ, μ – константы Ламе.

Матрица жесткости конечного элемента записывается в виде [11] $K = \int B^T C B dV$. С учетом того, что подынтегральное выражение постоянно в пределах конечного элемента, матрица жесткости примет вид $K = B^T C B \Delta V$, где ΔV – объем элемента (гексаэдра). Ненулевые элементы матрицы B являются коэффициентами сеточных операторов, аппроксимирующих первые частные производные в элементе. Данные операторы могут быть представлены в виде

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^m \beta_j^i f_j = \frac{\partial f}{\partial x^i} + O(h).$$

Здесь m – число узлов в элементе, f_j – значения функции в узлах элемента. Операторы (1) вычислим следующим образом. Объем тетраэдра можно записать как $\det V/6$, где V – квадратная матрица,

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}.$$

Формула для аппроксимации производных в конечном элементе имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\det V_j}{\det V}.$$

Матрица V_j получается из V заменой j -го столбца столбцом $\text{col}(f_1 - f_m, \dots, f_{m-1} - f_m)$:

$$V_1 = \begin{bmatrix} f_1 - f_4 & x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ f_2 - f_4 & x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ f_3 - f_4 & x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & f_1 - f_4 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^1 - x_4^1 & f_2 - f_4 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^1 - x_4^1 & f_3 - f_4 & x_3^3 - x_4^3 \end{bmatrix},$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} x_1^1 - x_4^1 & x_1^2 - x_4^2 & f_1 - f_4 \\ x_2^1 - x_4^1 & x_2^2 - x_4^2 & f_2 - f_4 \\ x_3^1 - x_4^1 & x_3^2 - x_4^2 & f_3 - f_4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что коэффициенты операторов (1) d_1^+, d_2^+, d_3^+ выражаются через миноры:

$$\beta_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \\ x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3^2 - x_4^2 & x_3^3 - x_4^3 \\ x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V},$$

$$\beta_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1^2 - x_4^2 & x_1^3 - x_4^3 \\ x_2^2 - x_4^2 & x_2^3 - x_4^3 \end{vmatrix}}{\det V}, \quad \beta_4^1 = -\beta_1^1 - \beta_2^1 - \beta_3^1,$$

и т. д. Аналогичные формулы для коэффициентов матрицы деформаций линейного 4-узлового элемента приведены в [12].

2. Неявная схема

Известно несколько вариантов построения неявных схем решения динамических задач теории упругости [11, 13]: методы Хаболта, Вилсона, Ньюмарка, Кранка – Николсона. Для реализации ажурной схемы рассмотрим метод трапеций (схему Кранка – Николсона) в полном соответствии с описанием, приведенным в [11].

Пусть $\{u\}$ – глобальный вектор узловых перемещений, $\{v\}$ – глобальный вектор узловых скоростей, $\{P\}$ – глобальный вектор внешних сил; $[K]$ – глобальная матрица жесткости, $[M]$ – глобальная матрица масс. Запишем уравнения движения упругой среды в виде

$$\{\dot{u}\} = \{v\}, \quad [M]\{\dot{v}\} = -[K]\{u\} + \{P\}.$$

Для аппроксимации этого уравнения запишем двухслойную по времени разностную схему, симметричную для правых частей уравнений относительно временных слоев (метод трапеций). Такая симметрия гарантирует второй порядок аппроксимации, а также абсолютную устойчивость схемы. Схема имеет вид

$$\frac{1}{\tau} (\{u^{k+1}\} - \{u^k\}) = \frac{1}{2} (\{v^{k+1}\} + \{v^k\}),$$

$$[M]\frac{1}{\tau} (\{v^{k+1}\} - \{v^k\}) = -[K]\frac{1}{2} (\{u^{k+1}\} + \{u^k\}) + \frac{1}{2} (\{P^{k+1}\} + \{P^k\}).$$

Для решения данной системы выразим $\{u^{k+1}\}$ из первого уравнения и подставим во второе. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных скоростей $\{v^{k+1}\}$ в виде

$$\left(\frac{1}{\tau}[M] + \frac{\tau}{4}[K] \right) \{v^{k+1}\} = \left(\frac{1}{\tau}[M] - \frac{\tau}{4}[K] \right) \{v^k\} - [K]\{u^k\} + \frac{1}{2} (\{P^{k+1}\} + \{P^k\}). \quad (2)$$

После решения системы (2) найдем вектор перемещений $\{u^{k+1}\}$ по формулам

$$\{u^{k+1}\} = \{u^k\} + \frac{\tau}{2} (\{v^{k+1}\} + \{v^k\}).$$

Матрицу масс примем в диагональном виде. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используем метод квадратного корня [14]. Отметим, что на одинаковых сетках конечных элементов у ажурной схемы ширина ленты матрицы системы примерно в два раза уже по сравнению с традиционными схемами и число уравнений в два раза меньше, благодаря чему её вычислительная эффективностькратно (от двух раз и выше) превосходит эффективность других неявных схем.

3. Численные результаты

В работе [15] рассмотрены результаты решения задачи о раскрытии плоской стержневой системы, состоящей из трех гибких стержней (рис. 3), соединенных последовательно с помощью специальных шарниров. Моделировался принудительный взаимный поворот смежных стержней. Отмечено, что попытка решить задачу в рамках стержневой модели с использованием явной схемы окончилась неудачей. Явная схема при описании колебаний конструкции при больших перемещениях привела к накоплению ошибок и заметному искажению как формы колебаний конструкции, так и амплитудно-частотных характеристик после полного раскрытия. В результате задача была решена с использованием неявной схемы и метода продолжения решения по наилучшему параметру [16]. Позже данная задача была решена также и с использованием явной схемы на основе стержневой модели типа Тимошенко [17] с применением специального приема увеличения временного шага интегрирования до числа Куранта, равного 1 относительно шага сетки. Отметим, что в условии устойчивости Куранта явной схемы «крест» решения уравнений теории стержней типа Тимошенко одним из характерных размеров является толщина стержня. Специальный прием позволил снять это ограничение и тем самым увеличить шаг интегрирования по времени в двадцать шесть раз. Без этого приема явная схема показала совершенно неудовлетворительные результаты.

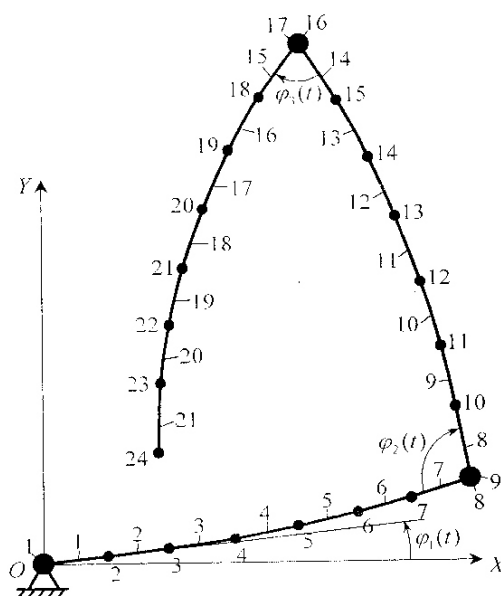


Рис. 3. Раскрытие плоской стержневой системы

Fig. 3. Deployment of the planar rod system

В качестве тестовой рассмотрим похожую, но более простую задачу о колебаниях консольной балки под действием мгновенно приложенной сосредоточенной поперечной нагрузки. Задача решалась в трехмерной геометрически и физически линейной постановке.

Стержень длиной $L = 100$ см квадратного сечения $H_1 = H_2 = 1$ см зашцеилен на левом торце. На расстоянии $L/2 = 50$ см от заделки (в середине бруса) мгновенно прикладывается постоянная по времени сосредоточенная поперечная нагрузка $F = 2000$ н. Механические свойства материала: $\rho = 7.8$ г/см³, $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Используем равномерную сетку $4 \times 4 \times 40$ ячеек в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $h_1 = h_2 = 0.25$ см, $h_3 = 2.5$ см. Расчеты по неявной схеме проводились с числами Куранта $k = 10$ и $k = 20$. Результаты решения задачи приведем в безразмерных величинах: прогибы $w^* = w/w_{\max}$, где $w_{\max}$ – максимальный прогиб, полученный для решения при $k = 10$; скорости $v^* = v/v_{\max}$, где $v_{\max}$ – максимальная скорость, полученная для решения при $k = 10$; время $t^* = t^*c/L$. Здесь c – скорость звука. На рис. 4 показаны графики прогибов стержня в моменты достижения максимума $t^* = 125$ и минимума $t^* = 250$.

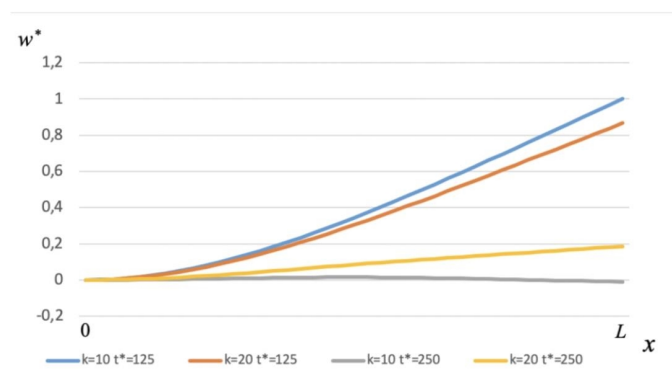


Рис. 4. Прогибы стержня в моменты достижения максимума и минимума

Fig. 4. Rod deflections, maximum and minimum values

На рис. 5. приведены зависимости скорости свободного конца стержня от времени, полученные при разных значениях числа Куранта.

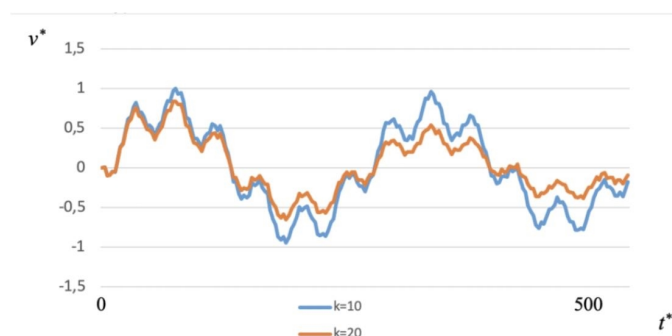


Рис. 5. Скорость свободного конца стержня в зависимости от времени при $k = 10$ и при $k = 20$

Fig. 5. Velocity of the free end of the rod over time for $k = 10$ and $k = 20$

Представленные результаты демонстрируют работоспособность неявной схемы. Необходимо отметить, что при увеличении шага интегрирования по времени наблюдается заметный численный эффект затухания колебаний. По-видимому, данная неявная схема обладает схемной вязкостью, монотонно зависящей от числа Куранта.

Заключение

Предложена новая неявная схема решения трехмерных динамических задач теории упругости на основе ажурной схемы аппроксимации по пространственным переменным и схемы Кранка – Николсона интегрирования по времени. Описаны возможные преимущества данной схемы по сравнению с известными схемами МКЭ. Согласно опыту реализации и исследования свойств аналогичной явной схемы, можно утверждать, что данная схема обладает лучшей сходимостью и отсутствием нежелательных эффектов сдвигового запираания и неустойчивости типа «песочные часы» по сравнению с традиционными схемами. Рассмотрен класс задач для эффективного применения неявных схем. Поскольку на решенной тестовой задаче схема демонстрирует заметную схемную вязкость, это накладывает дополнительные ограничения на её применение к моделированию процессов без диссипации. Весьма перспективным может быть её использование в комбинации с явными схемами [9, 10].

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Жидков А.В., Зефиоров С.В., Кастальская К.А., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестн. ННГУ. 2011. № 4 (4). С. 1480–1482.
2. Крутова К.А. Численное решение трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности на основе ажурной вариационно-разностной схемы: автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2015.
3. Жидков А.В., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2012. Т. 154, кн. 4. С. 26–32.
4. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, No 7. P. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
5. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde Ch.E. Overcoming volumetric locking in material point methods // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2018. V. 333. P. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
6. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // УМН. 1941. № 8. С. 125–160.
7. Бураго Н.Г., Никитин И.С. Безматричная реализация неявных схем методом сопряженных градиентов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 8. С. 50–61.

8. *Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P., Meshechkin V., Popov A., Kazakovtsev L.* A family of multi-step subgradient minimization methods // *Mathematics*. 2023. V. 11, No 10. Art. 2264. <https://doi.org/10.3390/math11102264>.
9. *Carson A.M., Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W.* High-order accurate implicit-explicit time-stepping schemes for wave equations on overset grids. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.14592>.
10. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Mi X.* Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2024. Т. 17, № 1. С. 8–17.
11. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань: ДАС, 2001. 300 с.
12. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
13. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / пер. с англ. А.С. Алексеева и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
14. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы: учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. 432 с.
15. *Данилин А.Н., Марков А.В.* Моделирование динамики разворачивания гибких стержневых систем при различных способах изменения их начальной геометрии // Матер. VIII Междунар. симпоз. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец, 11–15 февр. 2002 г.). Москва, 2002. 61 с.
16. *Шалашин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 222 с.
17. *Баженов В.Г., Ломунов В.К.* Методика расчета динамического деформирования геометрически изменяемых плоских стержневых систем // Пробл. прочн. и пласт.: межвуз. сб. научн. тр. ННГУ. 2002. Вып. 64. С. 55–63.

References

1. *Zhidkov A.V., Zefirov S.V., Kastalskaya K.A., Spirin S.V., Chekmarev D.T.* Rare mesh scheme for solution of three-dimensional dynamic problems of elasticity and plasticity. *Vestn. NNGU*, 2011, no. 4 (4), pp. 1480–1482. (In Russian)
2. *Krutova K.A.* Numerical solution of three-dimensional dynamic problems of the elasticity and plasticity theory based on a rare variational-difference scheme. *Extended Abstract of Cand. Sci. (Physics and Mathematics) Diss.* Nizhny Novgorod, 2015. (In Russian)
3. *Zhidkov A.V., Spirin S.V., Chekmarev D.T.* A rare mesh finite element scheme for solving static elasticity problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 4, pp. 26–32. (In Russian)
4. *Lakes R.* Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).

5. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde Ch.E. Overcoming volumetric locking in material point methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2018, vol. 333, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
6. Courant R., Friedrichs K., Lewy G. On difference equations of mathematical physics. *Usp. Mat. Nauk*, 1941, no. 8, pp. 125–160. (In Russian)
7. Burago N.G., Nikitin I.S. Matrix-free conjugate gradient implementation of implicit schemes. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 8, pp. 1247–1258. <https://doi.org/10.1134/S0965542518080043>.
8. Tovbis E., Krutikov V., Stanimirović P., Meshechkin V., Popov A., Kazakovtsev L. A family of multi-step subgradient minimization methods. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 10, art. 2264. <https://doi.org/10.3390/math11102264>.
9. Carson A.M., Banks J.W., Henshaw W.D., Schwendeman D.W. High-order accurate implicit-explicit time-stepping schemes for wave equations on overset grids. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.14592>.
10. Golubev V.I., Nikitin I.S., Mi X. Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media. *Zh. SFU. Ser. Mat. Fiz.*, 2024, vol. 17, no. 1, pp. 8–17. (In Russian)
11. Golovanov A.I., Berezhnoi D.V. *Metod konechnykh elementov v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel* [Finite Element Method in Mechanics of Deformable Solids]. Kazan, DAS, 2001. 300 p. (In Russian)
12. Zienkiewicz O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The Finite Element Method in Engineering Science]. Moscow, Mir, 1975. 541 p. (In Russian)
13. Bathe K., Wilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical Methods in Finite Element Analysis]. Alekseev A.S. et al. (Trans.). Smirnov A.F. (Ed.). Moscow, Stroiizdat, 1982. 448 p. (In Russian)
14. Samarskii A.A., Gulín A.V. *Chislennyye metody. Ucheb. posobie dlya vuzov* [Numerical Methods: A Textbook for Universities]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1989. 432 p. (In Russian)
15. Danilin A.N., Markov A.V. Modeling the dynamics of flexible rod systems unfolding with various initial geometry transformations. *Mater. VIII Mezhdunar. simpoz. "Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksii i sploshnykh sred"* (Yaropolets, 11–15 fevr. 2002 g.) [Proc. VIII Int. Symp. "Dynamic and Technological Problems of Structural and Continuous Media Mechanics" (Yaropolets, February 11–15, 2002)]. Moscow, 2002, p. 61. (In Russian)
16. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya v prikladnoi matematike i mekhanike* [Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics]. Moscow, Ed. URSS, 1999. 224 p. (In Russian)
17. Bazhenov V.G., Lomunov V.K. Methodology for calculating the dynamic deformation of geometrically variable flat rod systems. *Probl. Prochn. Plast.*, 2002, no. 64, pp. 55–63. (In Russian)

Информация об авторах

Дмитрий Тимофеевич Чекмарев, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *4ekm@mm.unn.ru*

Елена Геннадьевна Глазова, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *glazova@mech.unn.ru*

Дарья Владимировна Седова, младший научный сотрудник Научно-исследовательского института механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

E-mail: *iPad.0303@yandex.ru*

Author Information

Dmitry T. Chekmarev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *4ekm@mm.unn.ru*

Elena G. Glazova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *glazova@mech.unn.ru*

Elena G. Glazova, Junior Researcher, Research Institute of Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

E-mail: *iPad.0303@yandex.ru*

Поступила в редакцию 30.09.2024

Принята к публикации 24.12.2024

Received September 30, 2024

Accepted December 24, 2024

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 007.51: 004.891

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.181-195>**Прототипирование видеоигр на основе нечеткой логики****А.В. Шубин***Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия**shubin.aleksey.kpfu@gmail.com***Аннотация**

Рассмотрено применение нечеткой логики при создании игровых механик. Отмечена важность этой логики для процесса дизайна видеоигр, который требует сбалансированного подхода, объединяющего творчество и внимание к деталям. Обсуждены ограничения существующих средств и методов прототипирования и аргументирована необходимость разработки системы, способной интегрировать экспертные знания для принятия решений.

Анализ подобных исследований показывает, что нечеткая логика, которая хорошо моделирует процесс мышления человека, может предоставить удобный метод для рекомендации игровых механик на первых этапах разработки. Данное направление может оказаться более актуальным, особенно по сравнению с затратами при разработке и использовании нейронных сетей. Проектирование системы, предложенной в настоящей работе, не требует разработки сложных алгоритмов, что обеспечивает относительно простое усовершенствование разработанного подхода, позволяя расширить объем входных данных. Кроме этого, имеющаяся возможность легко усовершенствовать используемую экспертную базу знаний обеспечит уточнение информации и адаптацию системы к изменяющимся требованиям.

В статье также охарактеризованы разнообразные варианты применения нечеткой логики и ее потенциал для улучшения дизайна игр через поддержку выбора игровых механик с использованием экспертных систем.

Ключевые слова: игровой дизайн, игровая механика, автоматизация, нечеткая логика

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Для цитирования: Шубин А.В. Прототипирование видеоигр на основе нечеткой логики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 181–195.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.181-195>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.181-195>

Video game prototyping using fuzzy logic

A.V. Shubin

Kazan Federal University, Kazan, Russia

shubin.aleksey.kpfu@gmail.com

Abstract

The use of fuzzy logic in the development of game mechanics was analyzed. The important role of fuzzy logic in the video game design process, which requires a balance between creativity and attention to detail, was emphasized. The shortcomings of current prototyping tools and methods were discussed. The growing need for a system effectively incorporating expert knowledge into decision-making was highlighted.

The results of previous research on this problem show that fuzzy logic, which mimics human reasoning, can be successfully used for selecting game mechanics in the early stages of game development. Hence, it appears to be a good alternative to resource-intensive neural networks. The design of the system proposed here does not require the construction of complex algorithms, offering a relatively simple refinement of the developed approach by enabling an expansion of the scope of input data. In addition, the possibility to easily improve the expert knowledge base used ensures the refinement of information and the adaptation of the system to changing requirements.

Various applications of fuzzy logic were covered, and its potential to improve game design by supporting the selection of game mechanics using expert systems was considered.

Keywords: game design, game mechanics, automation, fuzzy logic

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

For citation: Shubin A.V. Video game prototyping using fuzzy logic. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 181–195.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.181-195>. (In Russian)

Введение

Создание видеоигр и игровой дизайн – комплексная задача, которая требует внимания к деталям, творческого подхода и баланса между различными аспектами игры для создания увлекательного и сбалансированного игрового опыта. Понимание различных аспектов видеоигры и их связь между собой могут показаться неочевидными для начинающего разработчика. Поэтому, как и во многих других сферах, одним из главных критериев хорошего игрового дизайнера является опыт разработки.

На плечи геймдизайнера ложится ответственность за проектирование видеоигры, разработку игрового процесса и, в частности, игровых механик, а также контроль реализации и согласованности различных элементов видеоигры друг с другом. Считается, что единственный и наиболее эффективный на данный момент подход к разработке видеоигр – итеративное развитие прототипов с последующим анализом игрового процесса и жизнеспособности игровых механик [1]. При этом создание прототипов – достаточно дорогой и долгий процесс, который требует от игрового дизайнера специфических знаний языка программирования или создания видеоигр на более простом движке. В связи с этим некоторые опытные разработчики видеоигр [2] предлагают создавать нецифровые прототипы, например, в виде классической настольной игры на бумаге, что является значительно устаревшей практикой.

Конечно, существуют инструменты, помогающие геймдизайнерам в тестировании различных концепций, такие как Machinations, Twine, Articy:draft, или инструменты, расширяющие функционал игровых движков (например, ProBuilder, Fungus). При этом они не обеспечивают поиск и развитие игровых механик, а лишь позволяют протестировать придуманные концепции. В некоторых работах (например, [3–5]) предложено использовать специальные инструменты для быстрого прототипирования видеоигр, например, когда разработчик может автоматически сгенерировать раскладовку внутриигровых видеороликов (катсцен) на основе сценария или другого текста.

Таким образом, существует необходимость в создании специфичного инструмента, который помог бы геймдизайнерам выбирать оптимальные варианты игровой механики, учитывая определенные параметры. Создание такой системы принятия решений на основе экспертной информации может помочь молодым геймдизайнерам в подборе наиболее подходящих механик. Кроме этого, опытные геймдизайнеры могут получить быстрое решение, на основе которого они будут базироваться при создании видеоигры.

Учитывая все возможные методы реализации, было выбрано создать систему принятия решения, основанную на принципах нечеткой логики. Этот выбор обусловлен рядом факторов:

1. Упрощенная реализация не требует глубоких знаний в области архитектуры нейронных сетей и обладает более низким порогом входа в сравнении с другими методами.
2. Модель нечеткой логики близка к процессам человеческого мышления. Это является важной особенностью метода за счет более естественного моделирования процесса принятия решений.
3. Система на основе нечеткой логики облегчает процесс интеграции экспертных знаний и оценок в структуру принятия решений.
4. Концепция разрабатываемого инструмента не требует сложных и продвинутых алгоритмов, следовательно, использование данного подхода будет достаточным для реализации системы принятия решений.

1. Связанные работы

Теория нечетких множеств и нечеткая логика, предложенные американским ученым Лотфи Заде в 1965 году (см., например, [6]), представляют собой расширение традиционной теории множеств и формальной логики. Эти концепции возникли как ответ на потребность в описании человеческих мыслительных процессов, систем и объектов, которые часто характеризуются неопределенностью и приблизительностью.

Несмотря на упавшую популярность на фоне искусственных нейронных сетей, нечеткая логика нашла применение и активно используется в различных отраслях и промышленности:

1. Применение нечеткой логики в системе антиблокировки тормозов (ABS) [7]. Нечеткая логика может быть использована для улучшения производительности и надежности систем ABS, обеспечивая более точное и адаптивное управление тормозным процессом в различных дорожных условиях.
2. Контроль различных параметров бытовой техники [8, 9]. Стиральные машины с нечетким управлением определяют количество воды, время стирки и количество моющего средства на основе загрязненности белья и его объема. Подобные системы применяются также в современных микроволновых печах и роботах-пылесосах.
3. Нечеткая логика при установке диагноза и медицине в целом [10]. Нечеткая логика применяется для помощи в диагностике заболеваний и анализе медицинских данных, где часто присутствуют неопределенность и субъективность.

Кроме этого, нечеткие логические системы находят применение в игровой индустрии. Некоторые работы предлагают использование нечеткой логики в создании искусственного интеллекта (например, [11, 12]); несмотря на нечастое использование данного подхода, имеются примеры видеоигр с искусственным интеллектом на основе нечеткой логики. Такими примерами являются известные видеоигры The Sims или Civilization: Call to Power, использующие нечеткие конечные автоматы для управления неигровыми персонажами и другими параметрами видеоигр.

Нечеткая логика также нашла применение в разработке систем принятия решений для поиска подходящих видеоигр. В статье [13] описана возможность создания экспертной системы на основе четырех параметров: оценка критиков, оценка пользователей, глобальные продажи и год выпуска видеоигры. Кроме этого, указанные авторы подготовили шестнадцать правил для отбора наиболее подходящей видеоигры на основе выбранных параметров. По словам этих авторов, точность такой системы достигает отметки в 80 %, а в будущем, используя гибридные подходы, планируется еще повысить точность данной системы.

В некоторых работах представлена разработка адаптивных сценариев игр на основе нечеткой логики (см. [14, 15]). Так, нечеткая логика используется для более реалистичного представления уровня знаний учащегося [14]. Прогресс игрока оценивается на основе успеха в двух предыдущих тестах, результат которых влияет на соотношение сложных и простых вопросов в последующих заданиях. В другой работе [15] на основе частоты сердцебиения и уровня стресса определяется состояние больного посттравматическим стрессовым расстройством. Так как частота сердцебиения является целочисленным значением,

а уровень стресса не может быть оценен объективно, то нечеткая логика позволяет коррелировать точную и неточную переменные.

Считается (например, [16]), что применение нечеткой логики в индустрии видеоигр на данный момент невелико. Поэтому есть неисследованные знания и практики, которые могут быть эффективно применимы к различным игровым системам.

2. Разработка модели нечеткой логики

Рассмотрим универсальное множество E , содержащее элементы X , обладающие определенным свойством R . Четкое подмножество A этого универсального множества E , состоящее из элементов, соответствующих свойству R , определяется как набор упорядоченных пар $A = \{\mu A(x)/x\}$, где $\mu A(x)$ выступает в роли функции принадлежности. Значения этой функции принадлежат строго упорядоченному множеству M , что отражает меру или уровень, на котором элемент x принадлежит подмножеству A . Множество M в данном контексте именуется множеством принадлежностей. Если $M = \{0, 1\}$, то нечеткое подмножество A может быть идентифицировано как четкое множество. Основное отличие нечеткого множества заключается в том, что для элементов X из подмножества E наличие у них свойства R не определяется однозначно (т. е. не сводится к простым ответам «да» или «нет»). Следовательно, нечеткое подмножество A универсального множества E формируется как совокупность упорядоченных пар, где функция принадлежности $\mu A(x)$ выражает степень принадлежности элемента X к подмножеству A .

В нечеткой логике основную роль выполняют так называемые «лингвистические переменные», представляющие собой способ описания качественных характеристик объекта или явления с помощью языковых понятий. Примерами таких переменных могут быть даже такие абстрактные понятия, как «комфорт», «красота», «спокойствие», которые трудно оценить численно – они имеют лишь субъективное количественное определение.

Частью лингвистической переменной является понятие «терм». Каждый терм представляет собой метку, связанную с функцией принадлежности, которая определяет степень, в которой конкретное значение относится к данному терму. Например, для лингвистической переменной «температура» в качестве термов могут быть использованы понятия «пониженная», «нормальная», «высокая» (рис. 1).

Для обработки данных и получения результатов экспертной системой в нечеткой логике используется операция логического вывода на основе базы правил. База правил модели представляет собой высказывания R^k в форме «ЕСЛИ–ТО»:

R^k : ЕСЛИ (X_1 ЕСТЬ A_1^k И X_2 ЕСТЬ A_2^k И ... И X_n ЕСТЬ A_n^k), ТО (Y_j ЕСТЬ B_j^k),

где X_i ($i \in N$) – входные лингвистические переменные,

Y_j ($j \in N$) – выходные переменные,

A_i^k , B_j^k ($k \in N$) – заданные функции принадлежности нечетким множествам, термы.

При этом при задании правил должны соблюдаться следующие условия [17]:

1. Существует хотя бы одно правило для каждой лингвистической выходной переменной.
2. Для любого терма выходной переменной имеется хотя бы одно правило, в котором этот термин используется в качестве целевой части правила. В противном случае имеет место база нечетких правил.

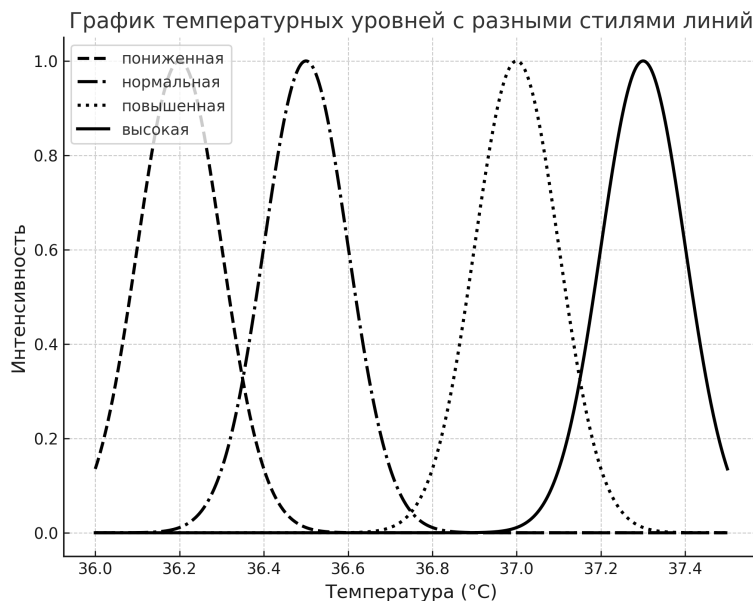


Рис. 1. График функций принадлежности четырех термов лингвистической переменной «температура»

Fig. 1. Membership functions curves for four linguistic terms of the linguistic variable “temperature”

Типовая схема работы системы принятия решений на основе нечеткой логики выглядит следующим образом (рис. 2).

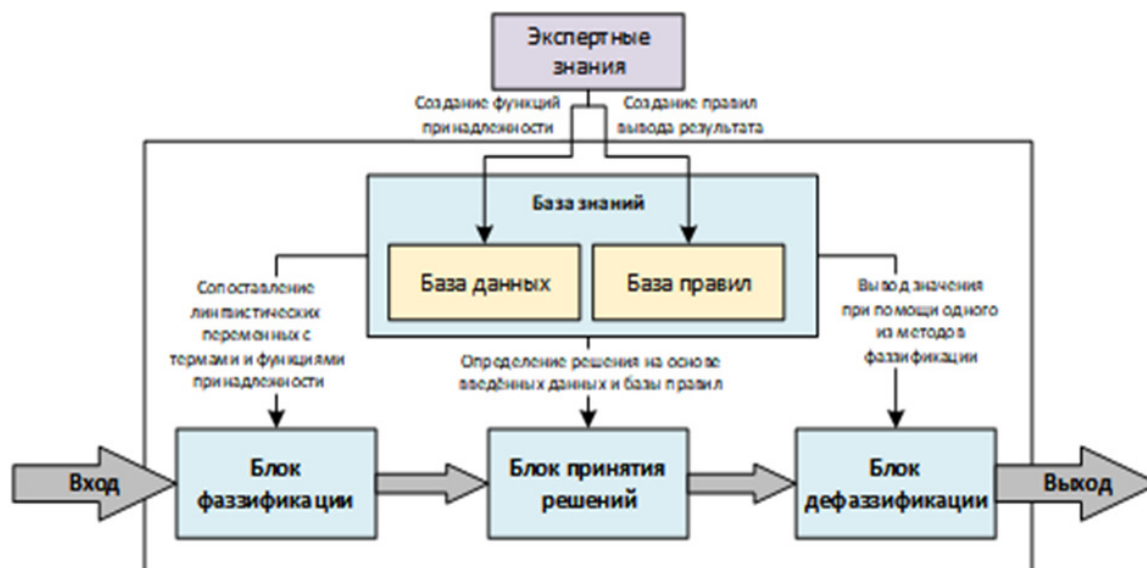


Рис. 2. Типовая архитектура нечеткой системы [18]

Fig. 2. General architecture of a fuzzy system [18]

Входные переменные проходят сначала через первый блок (фаззификатор), в котором осуществляется соответствие между численным значением входной переменной нечеткой системы и значением функции принадлежности соответствующего термина лингвистической переменной, т. е. в блоке фаззификации происходит преобразование четкого значения переменной в нечеткое.

База знаний – это блок нечеткой системы, предназначенный для хранения информации о переменных, а также необходимый для формирования решения. База знаний состоит из двух блоков:

1. База данных. Содержит представление о лингвистических переменных и значения функции принадлежности термов.
2. База правил. Хранит набор утверждений вида «Если – То», на основе которых принимается решение в блоке принятия решений.

Блок принятия решений объединяет все правила, активированные входными переменными, для формирования одного нечеткого множества, а затем агрегирует все выходные нечеткие множества для формирования.

Дефаззификация – это процесс преобразования нечеткого вывода в четкое значение. Данный процесс полностью зависит от выбранного метода фаззификации и позволяет вычислить взвешенное решение относительно всех возможных выводов.

3. Проектирование инструмента

Разработка системы на основе нечеткой логики, которая способна предлагать различные решения на основе вводимых переменных, не является сложным процессом. Учитывая архитектуру и работу системы, для реализации требуется выполнение пяти шагов:

1. Выбор нескольких параметров, которые могут хорошо описать характеристики механики, определение термов.
2. Сбор экспертной информации об игровых механиках и их характеристиках для разработки базы знаний.
3. Связывание термов с числовыми значениями, определив функцию принадлежности.
4. Выбор и реализация метода дефаззификации нечетких данных.
5. Разработка системы в среде разработки нечеткой модели.
6. Тестирование и валидация результатов.

В рамках настоящего исследования было решено остановиться на четырех параметрах, которые могут охарактеризовать игровые механики (табл. 1). Выбор конкретных механик обусловлен тем, что они оказывают непосредственное воздействие на игровой процесс и влияют на удовлетворение от игры, что делает их более ценными для игроков.

Для правильной работы системы требуются наличие в базе знаний необходимых данных для связи лингвистических переменных с конкретными термами на этапе фаззификации, а также блок правил для вывода экспертного решения. Для этого можно воспользоваться методом сбора и обработки статистической экспертной информации [17]. В основе такого метода лежит процесс заполнения каждым экспертом опросника, в котором он указывает принадлежность или непричастность (при $M = \{0, 1\}$) какого-либо значения или свойства $u_1, u_2, \dots, u_n$ относительно термов $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Для проведения эксперимента было опрошено пять экспертов, которые отнесли термы параметра механики с конкретным представителем системы механик (рис. 3). В силу большого разнообразия игровых механик было решено ограничиться лишь тремя игровыми

системами: «Боевая система», «Головоломки», а также механики, дополняющие игровой процесс. Выбор механик пал на наиболее релевантные игровые механики из каждой системы. На основе опроса были сформированы зависимости параметров от игрового жанра, что позволило определить нечеткие правила системы (табл. 2).

Табл. 1. Выбранные лингвистические переменные и термины

Table 1. Selected linguistic variables and terms

Лингвистическая переменная	Числовые данные	Термы			
Сложность механики	Время обучения (часы) $x = [0; 6]$	Просто	Комфортно	Сложно	–
Динамичность механики	Числовая оценка (баллы) $x = [0; 10]$	Монотонно	Умеренно	Оживленно	–
Агентивность игрока	Числовая оценка (баллы) $x = [0; 10]$	Малая	Ограничена	Высокая	–
Случайность механики	Влияние случайности (%) $x = [0; 100]$	Отсутствует	Низкая	Высокая	Абсолютная

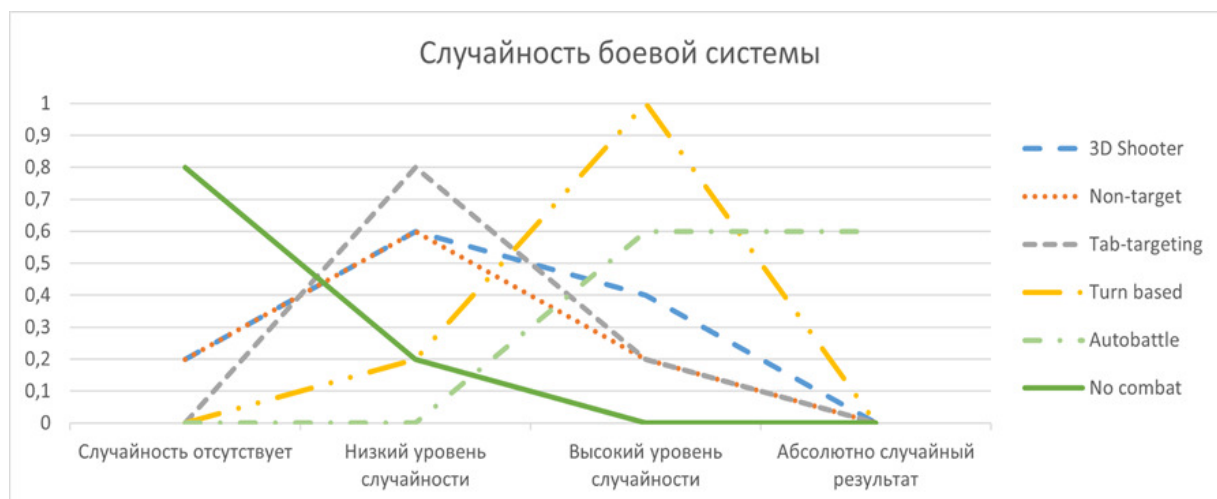


Рис. 3. Результат опроса на примере определения случайности боевой системы

Fig. 3. Survey results for randomness of combat system

Функции принадлежности (рис. 4, 5) всех термов также были получены на основе экспертной оценки пяти игровых дизайнеров. Для формирования графиков воспользуемся треугольной (первое уравнение) и трапециевидной (второе уравнение) видами функций принадлежности:

$$MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1 - \frac{x-b}{c-b}, & b \leq x \leq c; \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad MF(x) = \begin{cases} 1 - \frac{b-x}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 1, & b \leq x \leq c; \\ 1 - \frac{x-c}{d-c}, & c \leq x \leq d; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Табл. 2. База правил

Table 2. Rule base

Игровая система	Игровая механика	Сложность	Динамичность	Агентивность игрока	Случайность
Боевая система	3D Shooter	Сложно	Оживленно	Высокая	Низкая
	Non-target	Комфортно	Оживленно	Ограничение	Низкая
	Tab-Targeting	Комфортно	Оживленно	Ограничение	Низкая
	Turn-based	Комфортно	Оживленно	Ограничение	Низкая
	Autobattle	Комфортно	Оживленно	Ограничение	Низкая
	No combat	Комфортно	Оживленно	Ограничение	Низкая
Головоломки	Object search	Комфортно	Монотонно	Ограничение	Низкая
	Match-three	Просто	Монотонно	Ограничение	Высокая
	Riddle	Комфортно	Умеренно	Отсутствует	Отсутствует
	Picklock	Комфортно	Умеренно	Ограничение	Низкая
	Jigsaw puzzle	Комфортно	Монотонно	Ограничение	Отсутствует
	No puzzle	Просто	Умеренно	Высокая	Отсутствует
Дополняющие механики	Card draw	Комфортно	Умеренно	Ограничение	Высокая
	Exploring	Просто	Умеренно	Высокая	Низкая
	Skill Tree	Комфортно	Умеренно	Ограничение	Низкая
	Parkour	Комфортно	Оживленно	Высокая	Отсутствует
	QTE	Просто	Умеренно	Ограничение	Отсутствует
	Dialog System	Просто	Монотонно	Ограничение	Низкая

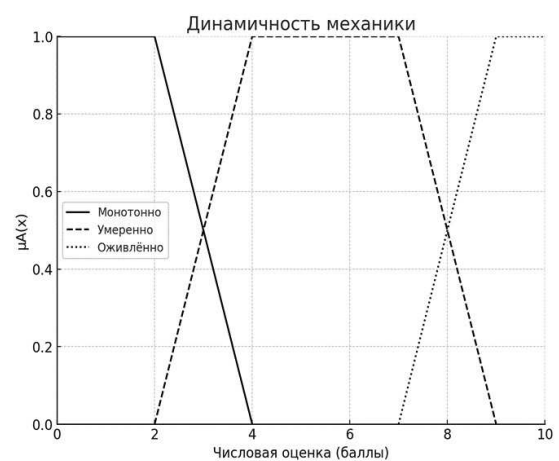
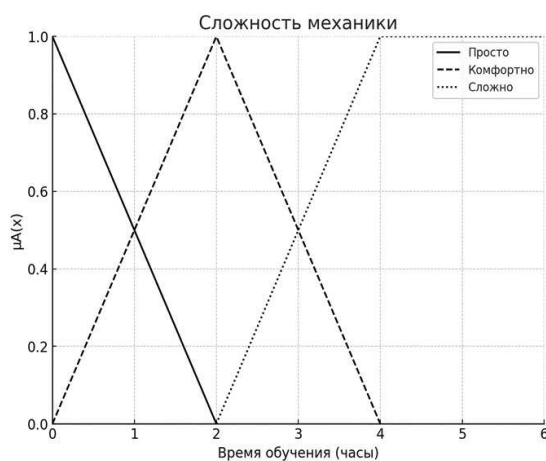


Рис. 4. Функции принадлежности термов «Сложность механики» (слева) и «Динамичность механики» (справа)

Fig. 4. Membership functions for the terms “mechanics complexity” (on the left) and “mechanics dynamics” (on the right)

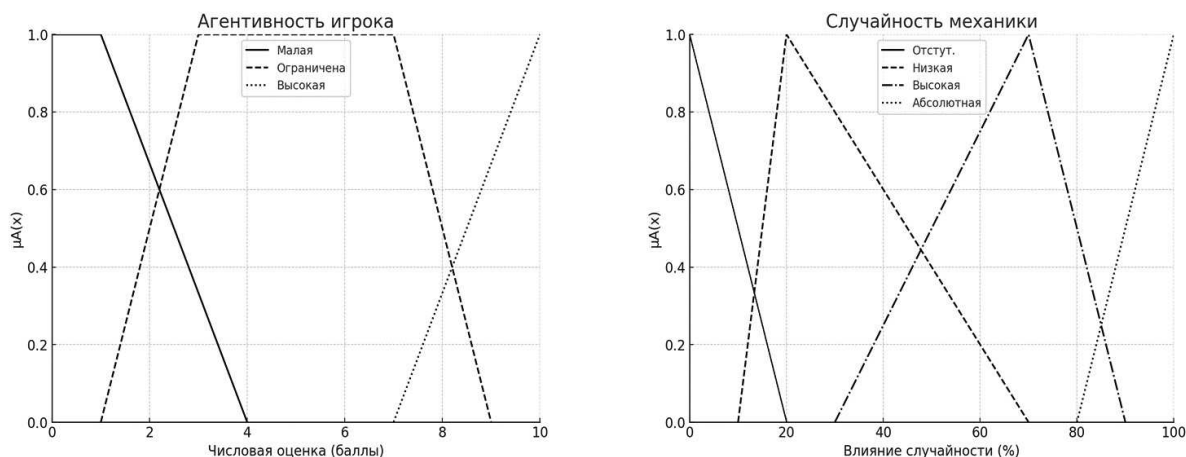


Рис. 5. Функции принадлежности термов «Агентивность игрока» (слева) и «Случайность механики» (справа)

Fig. 5. Membership functions for the terms “player agency” (on the left) and “mechanics randomness” (on the right)

Функция принадлежности для выходных переменных представляет собой распределение, равное между двумя термами, отражающими принадлежность к той или иной игровой механике. Таким образом, чем ближе выходное значение к единице, тем больше точность и релевантность предлагаемой механики относительно вводных параметров. Следовательно, можно использовать как целочисленное, так и нечеткое значение результата работы экспертной системы.

4. Обсуждение результатов

После настройки нечеткой функции принадлежности термов и правил для каждой игровой системы были получены три нечеткие системы с четырьмя входами, соответствующими характеристикам игровой механики, и шестью выходами системы (рис. 6), соответствующими конкретной механике из каждой игровой системы: боевая система, головоломки, дополняющие механики. Для удобства сделано так, что каждая нечеткая система не зависит друг от друга и имеет свой набор выходов и нечетких правил, но аналогичный набор термов для описания игровой механики. Далее происходит ввод значений, характеризующих игровую механику, для получения степени принадлежности данных значений с вариантами игровой системы. Результаты полученной работы системы отражены в табл. 3.

Таким образом, система на основе экспертной оценки может достаточно близко подбирать наиболее подходящие игровые механики на основе четырех критериев. Отметим, что полученные результаты имеют довольно низкую степень принадлежности к игровой механике, что говорит о неуверенности системы в данном решении. В то же время в некоторых случаях она полностью уверена в актуальности данной механики при всех вводных, что говорит о недочетах разработанной нечеткой системы. Кроме этого, в некоторых случаях система не может выбрать ни одну из предложенных механик и устанавливает степень принадлежности в одинаковое положение для всех игровых механик в игровой системе.

Конечно, при более тонкой настройке системы можно добиться повышения степени принадлежности: так, например, при использовании нечеткого вывода Сугено вместо

используемого метода Мамдани можно добиться повышения уверенности системы на 5–10 %, но это не решает проблему существенно. Предположительно, проблема с достаточно низкой уверенностью системы проявилась из-за недостаточного количества правил в нечеткой системе и недостатка данных. Для ее решения требуется более глубокий анализ и сбор большего объема экспертных знаний.

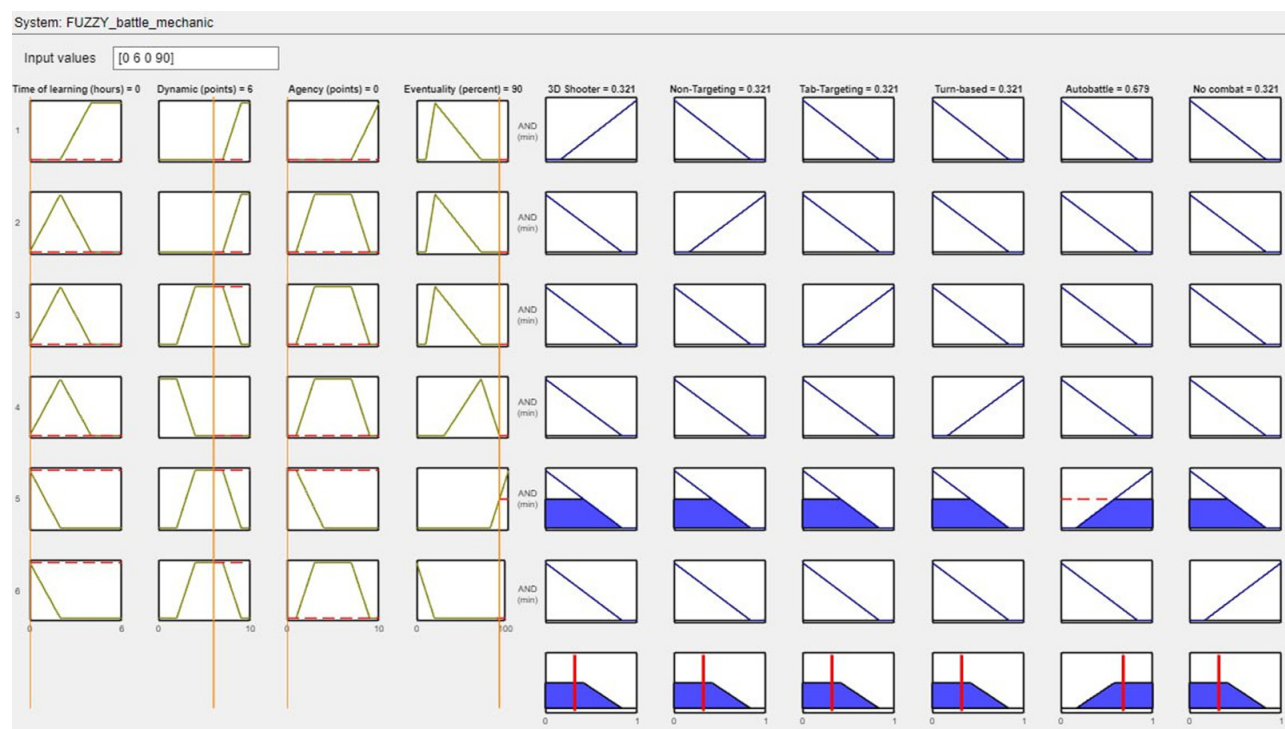


Рис. 6. Результаты работы системы принятия решения при вводе значений

Fig. 6. Output of the decision-making system based on the input values

Табл. 3. Результаты системы принятия решений на основе нечеткой логики

Table 3. Results of the decision-making system based on fuzzy logic

Сложность механики (часы)	Динамичность механики (баллы)	Агентивность игрока (баллы)	Случайность механики (%)	Боевая система (степень принадл.)	Головоломка (степень принадл.)	Доп. механика (степень принадл.)
2	3	5	60	Turn-based (0.602)	Object search (1)	Card draw (0.714)
3	5	4	30	Tab-targeting (0.679)	Любая (0.5)	Skill Tree (1)
5	8	8	50	3D Shooter (0.651)	Любая (0.5)	Любая (0.5)
0	6	4	15	No combat (0.635)	Picklock (0.67)	QTE (1)
0	6	0	90	Auto Battle (0.679)	Любая (0.5)	Любая (0.5)

Другая проблема рассматриваемой системы принятия решений заключается в том, что эта система затрагивает довольно ограниченный набор игровых механик, а их специфика не может быть описана при помощи лишь четырех критериев. Следовательно, несмотря на работоспособность теории, данная система требует доработки и расширения, что является трудной и наукоемкой задачей по определению наиболее существенных критериев, так как при наличии большого количества критериев минимально необходимый набор правил будет расти.

5. Выводы

Процесс работы геймдизайнера практически никак не изменился со времен зарождения игровой индустрии. При этом последняя шагнула далеко вперед, а комплексность и разнообразие видеоигр заметно возросли. В данных реалиях уследить за различными аспектами видеоигры и поддерживать высокое качество продукта очень сложно и требует большого опыта и времени. В связи с этим создание инструментов для поддержки работы игровых дизайнеров является актуальным.

В статье представлена система, использующая нечеткую логику для рекомендации механик видеоигр. Чтобы улучшить процесс выбора и реализации игровых механик, экспертные знания были интегрированы в экспертную систему. Основное внимание было уделено разработке системы, которая могла бы облегчить и оптимизировать этот процесс, делая его более эффективным и доступным для дизайнеров видеоигр. Система была направлена на упрощение сложных алгоритмов, чтобы обеспечить легкость в улучшении и адаптации к изменяющимся требованиям в дизайне видеоигр.

Предложенное решение может быть прототипом инструмента-ассистента для игровых дизайнеров, который в дальнейшем можно модифицировать использованием большого количества параметров для более тонкой настройки планируемых игровых механик, кроме того, необходимо значительно увеличить количество экспертов для увеличения точности экспертной оценки.

Полученные данные станут фундаментом для дальнейшего исследования, которое будет нацелено на определение взаимосвязей между игровыми механиками, нарративом и игровым опытом на основе ряда экспериментов. Определение такой взаимосвязи позволит проектировать игровой процесс более осмысленно и целесообразно, что в перспективе даст возможность ускорения процесса геймдизайна и автоматизации работы над корпусом игровых механик.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Шараева Р.А., Кугуракова В.В., Селезнева Н.Э.* Методика упрощения таск-трекинга в проектах игровой индустрии // *Прогр. прод. и сист.* 2022. № 3. С. 374–383. <http://dx.doi.org/10.15827/0236-235X.139.374-383>.
2. *Шелл Дж.* Геймдизайн. Как создать игру, в которую будут играть все. М.: Альпина Паблшер, 2019. 640 с.
3. *Сахибгареева Г.Ф., Кугуракова В.В.* Редактор интерактивной структуры для инструмента генерации сценарных прототипов // *Электр. библ.* 2021. Т. 24, № 6. С. 1184–1202. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-6-1184-1202>.
4. *Козар Б.А., Кугуракова В.В., Сахибгареева Г.Ф.* Структуризация сущностей естественного текста с использованием нейронных сетей для генерации трехмерных сцен // *Прогр. прод. и сист.* 2022. № 3. С. 329–339.

5. *Sahibgareeva G.F., Kugurakova V.V.* Branched structure component for a video game scenario prototype generator // Proc. 23rd All-Russ. Sci. Conf. "Scientific Services and Internet", September 20–23, 2021. Moscow, 2021. P. 101–111. <https://doi.org/10.20948/abrau-2021-10-ceur>.
6. *Zadeh L.A.* Fuzzy logic = computing with words // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1996. V. 4, No 2. P. 103–111. <https://doi.org/10.1109/91.493904>.
7. *Mauer G.F.* A fuzzy logic controller for an ABS braking system // IEEE Trans. Fuzzy Syst. 1995. V. 3, No 4. P. 381–388. <https://doi.org/10.1109/91.481947>.
8. *Hungilo G.G., Emmanuel G., Maiga J., Santoso A.J.* Fuzzy logic control application: Design and simulation for washing machine // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019. V. 662, No 2. Art. 022046. <https://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/662/2/022046>.
9. *Raja K.* Python-based fuzzy logic in automatic washer control system // Soft Comput. 2023. V. 27. P. 6159–6185. <https://doi.org/10.1007/s00500-023-07979-3>.
10. *Ozsahin D.U., Uzun B., Ozshahin I., Mustapha M.T., Musa M.S.* Fuzzy logic in medicine // Biomedical Signal Processing and Artificial Intelligence in Healthcare / Ed. by W. Zgallai. Ser.: Developments in Biomedical Engineering and Bioelectronics. Acad. Press, 2020. P. 153–182. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-818946-7.00006-8>.
11. *Millington I.* Artificial Intelligence for Games. The Morgan Kaufmann Ser. in Interactive 3D Technology / Ed. by D.H. Eberly. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann Publ., 2006. xxxv, 856 p.
12. *Sweetser P., Wiles J.* Current AI in games: A review // Aust. J. Intell. Inf. Process. Syst. 2002. V. 8, No 1. P. 24–42.
13. *Calderon-Vilca H.D., Chavez N.M., Guimarey J.M.R.* Recommendation of videogames with fuzzy logic // Proc. 2020 27th Conf. of Open Innovations Association (FRUCT). Trento, 2020. P. 27–37. <https://doi.org/10.23919/FRUCT49677.2020.9211082>.
14. *Papadimitriou S., Chrysafiadi K., Virvou. M.* FuzzEG: Fuzzy logic for adaptive scenarios in an educational adventure game // Multimedia Tools Appl. 2019. V. 78, No 22. P. 32023–32053. <https://doi.org/10.1007/s11042-019-07955-w>.
15. *de Oliveira F.M., Lanzillotti R.S., da Costa R.M.E.M., Gonçalves R., Ventura P., de Carvalho L.A.V.* ARVET and SAPTEPT: A virtual environment and a system supported by fuzzy logic in virtual reality exposure therapy for PTSD patients // Proc. 2012 12th Int. Conf. on Computational Science and Its Applications. Salvador, 2012. P. 103–107. <https://doi.org/10.1109/ICCSA.2012.26>.
16. *Pirovano M.* The use of fuzzy logic for artificial intelligence in games. Milano, Univ. of Milano, Politecnico di Milano, 2012.
17. *Григорьева Д.Р., Гареева Г.А., Басыров Р.Р.* Основы нечеткой логики. Учебно-методическое пособие к практическим занятиям и лабораторным работам. Набережные Челны: Изд-во НЧИ КФУ, 2018. 42 с.
18. *Chuang K.-C., Lan T.-S., Zhang L.-P., Chen Y.-M., Dai X.-J.* Parameter optimization for computer numerical controlled machining using fuzzy and game theory // Symmetry. 2019. V. 11, No 12. Art. 1450. <https://doi.org/10.3390/sym11121450>.

References

1. Sharaeva R.A., Kugurakova V.V., Selezneva N.E. A method for simplifying task tracking in video game development projects. *Software Syst.*, 2022, no. 3, pp. 374–383. <http://dx.doi.org/10.15827/0236-235X.139.374-383>. (In Russian)
2. Schell J. Geimdzain. *Kak sozdat' igru, v kotoruyu budut igrat' vse* [The Art of Game Design: A Book of Lenses]. Moscow, Alpina Publ., 2019. 640 p. (In Russian)
3. Sahibgareeva G.F., Kugurakova V.V. Interactive structure editor for scenario prototyping tool. *Elektron. Bibl.*, 2021, vol. 24, no. 6, pp. 1184–1202. <https://doi.org/10.26907/1562-5419-2021-24-6-1184-1202>. (In Russian)
4. Kozar B.A., Kugurakova V.V., Sahibgareeva G.F. Structuring natural text entities using neural networks for 3D scene generation. *Program. Prod. Sist.*, 2022, no. 3, pp. 329–339. (In Russian)
5. Sahibgareeva G.F., Kugurakova V.V. Branched structure component for a video game scenario prototype generator. *Proc. 23rd All-Russ. Sci. Conf. "Scientific Services and Internet", September 20–23, 2021*. Moscow, 2021, pp. 101–111. <https://doi.org/10.20948/abrau-2021-10-ceur>.
6. Zadeh L.A. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1996, vol. 4, no. 2, pp. 103–111. <https://doi.org/10.1109/91.493904>.
7. Mauer G.F. A fuzzy logic controller for an ABS braking system. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 1995, vol. 3, no. 4, pp. 381–388. <https://doi.org/10.1109/91.481947>.
8. Hungilo G.G., Emmanuel G., Maiga J., Santoso A.J. Fuzzy logic control application: Design and simulation for washing machine. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 662, no. 2, art. 022046. <https://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/662/2/022046>.
9. Raja K. Python-based fuzzy logic in automatic washer control system. *Soft Comput.*, 2023, vol. 27, pp. 6159–6185. <https://doi.org/10.1007/s00500-023-07979-3>.
10. Ozsahin D.U., Uzun B., Ozsahin I., Mustapha M.T., Musa M.S. Fuzzy logic in medicine. In: Zgallai W. (Ed.) *Biomedical Signal Processing and Artificial Intelligence in Healthcare*. Ser.: Developments in Biomedical Engineering and Bioelectronics. Acad. Press, 2020, pp. 153–182. <http://dx.doi.org/10.1016/B978-0-12-818946-7.00006-8>.
11. Millington I. *Artificial Intelligence for Games*. The Morgan Kaufmann Ser. in Interactive 3D Technology. Eberly D.H. (Ed.). San Francisco, CA, Morgan Kaufmann Publ., 2006. xxxv, 856 p.
12. Sweetser P., Wiles J. Current AI in games: A review. *Aust. J. Intell. Inf. Process. Syst.*, 2002, vol. 8, no. 1, pp. 24–42.
13. Calderon-Vilca H.D., Chavez N.M., Guimarey J.M.R. Recommendation of videogames with fuzzy logic. *Proc. 2020 27th Conf. of Open Innovations Association (FRUCT)*. Trento, 2020, pp. 27–37. <https://doi.org/10.23919/FRUCT49677.2020.9211082>.
14. Papadimitriou S., Chrysafiadi K., Virvou. M. FuzzEG: Fuzzy logic for adaptive scenarios in an educational adventure game. *Multimedia Tools Appl.*, 2019, vol. 78, no. 22, pp. 32023–32053. <https://doi.org/10.1007/s11042-019-07955-w>.
15. de Oliveira F.M., Lanzillotti R.S., da Costa R.M.E.M., Gonçalves R., Ventura P., de Carvalho L.A.V. ARVET and SAPTEPT: A virtual environment and a system supported by fuzzy logic in virtual reality exposure therapy for PTSD patients. *Proc. 2012 12th Int. Conf.*

on Computational Science and Its Applications. Salvador, 2012, pp. 103–107.
<https://doi.org/10.1109/ICCSA.2012.26>.

16. Pirovano M. The use of fuzzy logic for artificial intelligence in games. Milano, Univ. of Milano, Politecnico di Milano, 2012.
17. Grigor'eva D.R., Gareeva G.A., Basyrov R.R. *Osnovy nechetkoi logiki. Uchebno-metodicheskoe posobie k prakticheskim zanyatiyam i laboratornym rabotam* [Fundamentals of Fuzzy Logic: Educational and Methodical Manual for Practical Classes and Laboratory Work]. Naberezhnye Chelny, Izd. NChI KFU, 2018. 42 p. (In Russian)
18. Chuang K.-C., Lan T.-S., Zhang L.-P., Chen Y.-M., Dai X.-J. Parameter optimization for computer numerical controlled machining using fuzzy and game theory. *Symmetry*, 2019, vol. 11, no. 12, art. 1450. <https://doi.org/10.3390/sym11121450>.

Информация об авторах

Алексей Витальевич Шубин, ассистент, младший научный сотрудник Института информационных технологий и интеллектуальных систем, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: shubin.aleksey.kpfu@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6203-3268>

Author Information

Aleksey V. Shubin, Teaching Assistant, Junior Researcher, Institute of Information Technology and Intelligent Systems, Kazan Federal University

E-mail: shubin.aleksey.kpfu@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6203-3268>

Поступила в редакцию 10.12.2024

Принята к публикации 31.12.2024

Received December 10, 2024

Accepted December 31, 2024

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>

Модель циклической оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности

С.Н. Якупов¹, Х.Г. Киямов¹, И.З. Мухамедова^{1,2,3} ✉, Б.Ф. Тазюков³¹Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук», г. Казань, Россия²Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия³Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия✉ muhammedova-inzilija@mail.ru

Аннотация

Построена математическая модель расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) циклической оболочки с дефектом в виде локального несквозного углубления на внутренней поверхности на основе трехмерного сплайнового варианта метода конечных элементов (МКЭ). Предложен подход, сочетающий в себе параметризацию рассматриваемой области и кубическую аппроксимацию искомых переменных. Приведены результаты исследования распределения напряжений в дефектной области при различном расположении зоны углубления. Установлены закономерности изменения НДС циклической оболочки при варьировании геометрических параметров углубления.

Ключевые слова: циклическая оболочка, метод, параметризация, трехмерная конечно-элементная модель, локальное углубление, интенсивность напряжений, вычислительный эксперимент

Благодарности. Якупов С.Н. выполнил работу по влиянию вибрации за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан».

Для цитирования: Якупов С.Н., Киямов Х.Г., Мухамедова И.З., Тазюков Б.Ф. Модель циклической оболочки с локальным углублением на внутренней поверхности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 1. С. 196–208.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>

Modeling of a cyclic shell with a local deepening on the inner surface

S.N. Yakupov¹, H.G. Kiyamov¹, I.Z. Mukhamedova^{1,2,3} ✉, B.F. Tazyukov³

¹*FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*

²*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia*

³*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

✉ muhammedova-inzilija@mail.ru

Abstract

A mathematical model for calculating the stress-strain state (SSS) of a cyclic shell with a defect in the form of a local non-through depression on the inner surface was constructed using a three-dimensional spline version of the finite element method (FEM). An approach was proposed that combines the parameterization of the region under consideration and the cubic approximation of the target variables. The findings on the stress distribution in the defective region were presented for different locations of the depression zone. The patterns of change in the SSS of a cyclic shell with variations in the geometric parameters of the depression were established.

Keywords: cyclic shell, method, parameterization, three-dimensional finite element model, local deepening, stress intensity, numerical experiment

Acknowledgments. S.N. Yakupov's work on the influence of vibration was supported by a grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan "Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan."

For citation: Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Modeling of a cyclic shell with a local deepening on the inner surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 1, pp. 196–208.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.1.196-208>. (In Russian)

Введение

В настоящее время при создании архитектурных форм городской и загородной застройки, спортивных и развлекательных сооружений применяют многообразные виды циклических оболочек [1]. В технике такие оболочки в виде трубчатых винтовых и спиральных

поверхностей используют в нагревательных элементах электроплит, аппаратах по перегонке жидкостей, в современных энергосберегающих электролампах. В промышленном строительстве циклические оболочки используют в трубопроводах и их соединительных элементах, сосудах высокого давления [2, 3]. При создании названных конструкций проводят поиск рациональной геометрии их элементов, прежде всего исходя из их функционального назначения, а также технологических и экономических возможностей [4–6].

В процессе эксплуатации оболочечных конструкций возникают внутренние дефекты типа разрывов, расслоений, растрескиваний, наружные дефекты проката (пережог, пористость, усадочные раковины), коррозия, а также механические повреждения поверхности. Количество, размер, глубина проникновения и место расположения дефекта ведут к концентрации напряжений в области дефекта, что определяет техническое состояние и долговечность конструкции в целом. В связи с этим представляет интерес исследование распределения НДС в оболочках при изменении геометрических параметров, в частности, в области локальных углублений. Экспериментальное и теоретическое исследование оболочечных конструкций с дефектами различного рода, а также построение математических моделей для оценки их НДС рассмотрены, например, в работах [7–13].

Для расчета НДС оболочек сложной геометрии используют различные численные методы, например, метод конечных разностей, метод коллокации, МКЭ, метод граничных элементов, а также применяют вариационные методы. Методы расчета НДС оболочек сложной геометрии, а также разработка подходов параметризации области приведены, в частности, в работах авторов [14–21].

В [22–24] изложен метод расчета тонкостенных оболочечных конструкций сложной формы и со сложным контуром – сплайновый вариант МКЭ в двумерной постановке. Метод обеспечивает геометрическую неразрывность между конечными элементами (КЭ), а также непрерывность искомых величин и их первых производных по линии соприкосновения элементов. Однако предложенный подход на основе двумерных КЭ не позволяет с достаточной степенью точности определять НДС элементов конструкций в области локальных углублений и дефектов. Поэтому возникает необходимость использования трехмерных моделей.

В [25–28] предложен сплайновый вариант МКЭ для оболочек сложной геометрии в трехмерной постановке. Синтезированный вариант включает в одно целое двумерные и трехмерные КЭ [28–30]. Вопросы сходимости этого метода и достоверности результатов расчета рассмотрены в [31, 32].

1. Основные соотношения трехмерного сплайнового варианта МКЭ

Трехмерный сплайновый вариант МКЭ сочетает параметризацию рассматриваемой трехмерной области и кубическую аппроксимацию искомых переменных. Срединная поверхность циклической оболочки может быть описана поверхностями [14], которые образуются движением окружности переменного радиуса вдоль направляющей кривой эллиптической формы (рис. 1):

$$r(\alpha, \varphi) = \rho(\alpha) + R(\alpha)[e_0(\alpha) \cos \varphi + g_0(\alpha) \sin \varphi],$$

$$\rho(\alpha) = \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_2^2 \sin^2 \alpha + R_1^2 \cos^2 \alpha}}, \quad R(\alpha) = R_b + \frac{2\alpha}{\pi}(R_a - R_b),$$

где $r(\alpha, \varphi)$ – радиус-вектор циклической поверхности; $\rho(\alpha)$ – радиус-вектор линии центров образующих поверхностей; φ – угол наклона окружности; $e_0(\alpha)$, $g_0(\alpha)$ – орты прямоугольной системы координат в плоскости линии центров образующих окружностей.

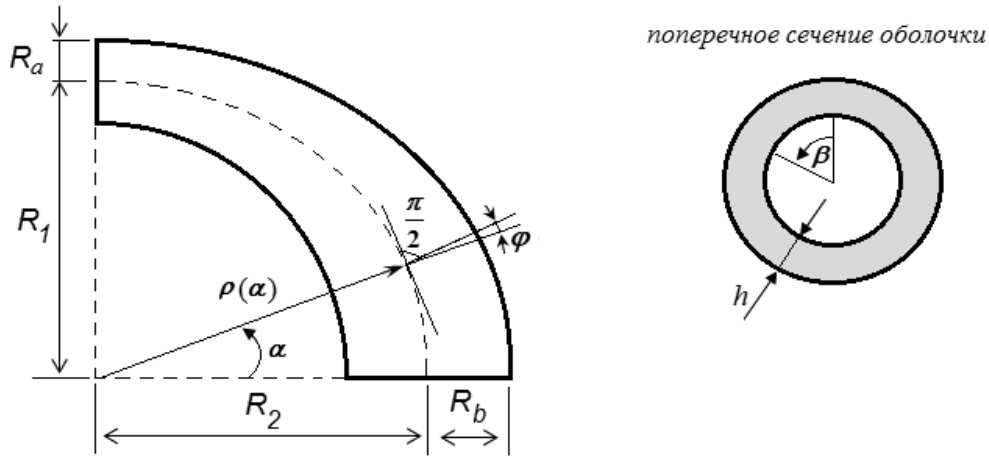


Рис. 1. Геометрическая модель циклической оболочки

Fig. 1. Geometric model of a cylindrical shell

Циклическая оболочка объемом V может быть представлена через параметры прямоугольного параллелепипеда объема V_0 таким образом, чтобы прямоугольной сетке в области параллелепипеда соответствовала криволинейная пространственная сетка оболочки:

$$\begin{aligned} x &= [\rho(\pi t^3/2) + (R(\pi t^3/2) + t^1) \cos(\pi t^2) \cos \varphi] \cos(\pi t^3/2), \\ y &= [\rho(\pi t^3/2) + (R(\pi t^3/2) + t^1) \cos(\pi t^2) \cos \varphi] \sin(\pi t^3/2), \\ z &= [R(\pi t^3/2) + t^1] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Срединная поверхность оболочки может быть выражена через параметры t^1, t^2, t^3 по формулам $\alpha = \pi t^3/2$, $\beta = \pi t^2$, $z = h t^1$; h – толщина оболочки; $t^1 \in [0; 1]$, $t^2 \in [-1; 1]$, $t^3 \in [0; 1]$.

Согласно соотношениям (1) определим координатные векторы

$$\bar{r}_1 = \partial \bar{r} / \partial t^1, \quad \bar{r}_2 = \partial \bar{r} / \partial t^2, \quad \bar{r}_3 = \partial \bar{r} / \partial t^3. \quad (2)$$

Далее, исходя из (2), найдем ковариантные компоненты метрического тензора g_{ij} :

$$g_{11} = \bar{r}_1 \bar{r}_1, \quad g_{12} = \bar{r}_1 \bar{r}_2, \quad g_{22} = \bar{r}_2 \bar{r}_2, \quad g_{13} = \bar{r}_1 \bar{r}_3, \quad g_{23} = \bar{r}_2 \bar{r}_3, \quad g_{33} = \bar{r}_3 \bar{r}_3 \quad (3)$$

и дискриминант метрического тензора

$$g = g_{33} (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) - g_{32} (g_{11} g_{23} - g_{21} g_{13}) + g_{31} (g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22}). \quad (4)$$

Из (3) и (4) определим символы Кристоффеля

$$G_{jk}^i = \frac{g^{it}}{2} \left(\frac{\partial g_{jt}}{\partial t^k} + \frac{\partial g_{kt}}{\partial t^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial t^t} \right).$$

Пусть на внутренней поверхности рассматриваемой оболочки имеется локальное (коррозионное) углубление (рис. 2), которое зададим в виде элемента эллиптической формы в плане с полуосями a и b :

$$\begin{aligned} x &= \{\rho(\pi t^3/2) + [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\cos(\pi t^2)\cos\varphi\}\cos(\pi t^3/2), \\ y &= \{\rho(\pi t^3/2) + [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\cos(\pi t^2)\sin\varphi\}\sin(\pi t^3/2), \\ z &= [R(\pi t^3/2) + (t^1 - h_{cor}(t^2, t^3)(t^1 - t_p^1))]\sin\varphi, \quad h_{cor}(t^2, t^3) = h_p e^\chi, \\ \chi &= \gamma((t^3 - t_p^3)^2/a^2 + (t^2 - t_p^2)^2/b^2), \quad t^1 \in [0; 1], \quad t^2 \in [-1; 1], \quad t^3 \in [0; 1], \end{aligned}$$

где γ – степень сжатия-растяжения эллипса по координатам t^2 и t^3 ; h_p – минимальная толщина оболочки в дефектной области; $t^1 = t_p^1$, $t^2 = t_p^2$, $t^3 = t_p^3$ – координаты центра дефектной области.

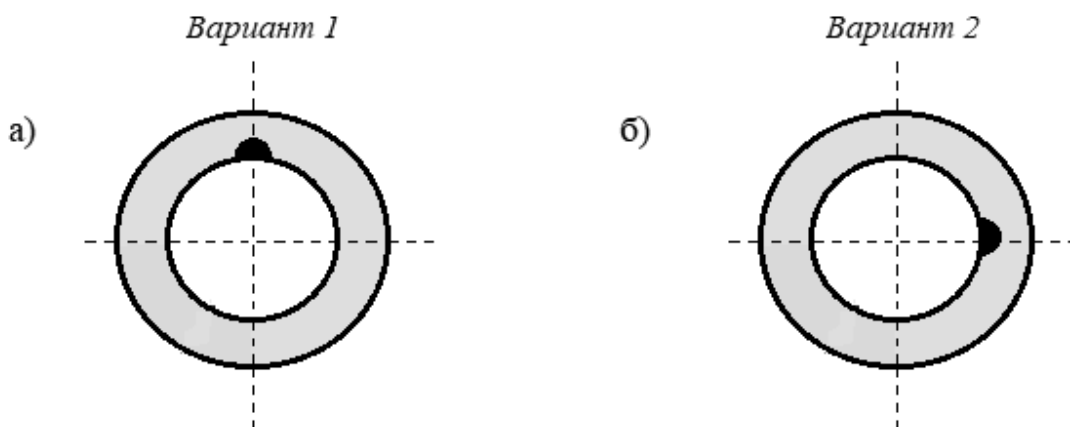


Рис. 2. Области расположения углубления на внутренней поверхности: а) при $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$; б) при $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$

Fig. 2. Locations of the depression zone on the inner surface: а) $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$; б) $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$

Далее определим координатные векторы $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$, параметры метрического тензора g_{ij} и символы Кристоффеля G_{jk}^i для дефектной области.

Разрешающие соотношения выведем из вариационного уравнения Лагранжа [33]:

$$\delta \int_V W dV = \int_V \rho f^i \delta u_i dV + \int_S p^i \delta u_i dS,$$

где W – удельная потенциальная энергия деформации трехмерного тела; f^i , p^i – контравариантные компоненты вектора массовых и поверхностных сил; ρ – массовая плотность; u_i – ковариантные компоненты вектора искомых переменных; S – поверхность боковых граней тела.

Рассматриваемую область разобьем на КЭ, а решение $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$ в каждом из них представим в виде интерполяционного кубического сплайна трех переменных [24]:

$$\begin{aligned} u &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_U, \\ v &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_V, \\ w &= \left[\psi_1 \left(\frac{t^1 - t_i^1}{t_{i+1}^1 - t_i^1} \right) \psi_2 \left(\frac{t^2 - t_j^2}{t_{j+1}^2 - t_j^2} \right) \psi_3 \left(\frac{t^3 - t_k^3}{t_{k+1}^3 - t_k^3} \right) \right] \otimes F_W, \end{aligned}$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 – векторы координатных функций по трем соответствующим координатным линиям; F_U, F_V, F_W – трехмерные матрицы компонент искоемых неизвестных u, v, w и их производных соответственно.

Подставив вариации перемещений и деформаций и учитывая независимость узловых перемещений и их производных, после ряда преобразований сведем решаемую задачу к системе алгебраических уравнений вида

$$[A] \{U\} = \{R\},$$

где $[A]$ – симметричная матрица жесткости системы ленточной структуры, $\{U\}$ – вектор неизвестных, а $\{R\}$ – вектор нагрузки. При формировании матрицы жесткости все операции выполняем в матричной форме, при этом структура всех интегралов одинакова, а подынтегральные выражения для каждого КЭ вычисляем одновременно.

Алгоритм, представленный выше, был реализован в виде программного комплекса, на базе которого были решены тестовые задачи. Анализ полученных результатов показал их достоверность [14, 28, 30].

На базе разработанной математической модели [25, 26] были выполнены расчеты НДС циклической оболочки без дефекта, а также с дефектом в виде локального несквозного углубления на внутренней поверхности. Приведем некоторые результаты исследования распределения напряжений в дефектной области при варьировании геометрических параметров локального углубления, а также результаты расчетов при различном расположении зоны углубления.

2. Вычислительные эксперименты

Исследовано НДС циклической оболочки при воздействии внутреннего давления $p = 10$ МПа, закрепленной на обоих торцах по внутреннему контуру (см. рис. 1). Механические характеристики оболочки таковы: модуль упругости $E = 20000$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Геометрические параметры оболочки согласно рис. 1: толщина оболочки $h = 2$ см; радиусы $R_a = 50$ см, $R_b = 70$ см, $R_1 = 320$ см, $R_2 = 250$ см. Область разбита на 64 объемных КЭ в виде криволинейных параллелепипедов (всего 144 узла). Вычислительные эксперименты проведены при варьировании глубины дефекта t на внутренней поверхности: $t = 4$ мм, 8 мм, 12 мм и 16 мм.

Рассмотрены два варианта расположения центра дефекта на внутренней поверхности, как показано на рис. 2: при $\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$ (вариант 1) и при $\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$ (вариант 2).

Вариант 1. Расположение центра дефекта ($\alpha = \pi/4$, $\beta = 0$).

Исследовано изменение интенсивности напряжений σ_i в области углубления по толщине оболочки h . Рассмотрены слой, близкий к внутренней поверхности, при котором $h = 2$ мм, а также слой, близкий к наружной поверхности, при котором $h = 18$ мм. Получены зависимости изменения σ_i по толщине оболочки в зоне углубления. Установлено, что в слое $h = 2$ мм, близком к внутренней поверхности, напряжения σ_i больше, чем в слое $h = 18$ мм, близком к наружной поверхности на 28.8 %.

Получены зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от варьирования угла β в области углубления: $\alpha = \pi/4$, $-58^\circ \leq \beta \leq 58^\circ$. Вычислительные эксперименты показали, что при увеличении глубины дефекта t интенсивность напряжений уменьшается на 6 % в слое, где $h = 2$ мм. При $h = 18$ мм, наоборот, происходит незначительное увеличение σ_i на 4 %.

На рис. 3 показаны зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в слое, близком к внутренней поверхности (см. рис. 3 а)), и слое, близком к внешней поверхности (см. рис. 3 б)) в зоне углубления, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$. Получено, что при увеличении глубины дефекта t в слое, близком к внутренней поверхности, интенсивность напряжений уменьшается на 5.5 %, а в слое, близком к наружной поверхности, увеличивается на 3.5 %.

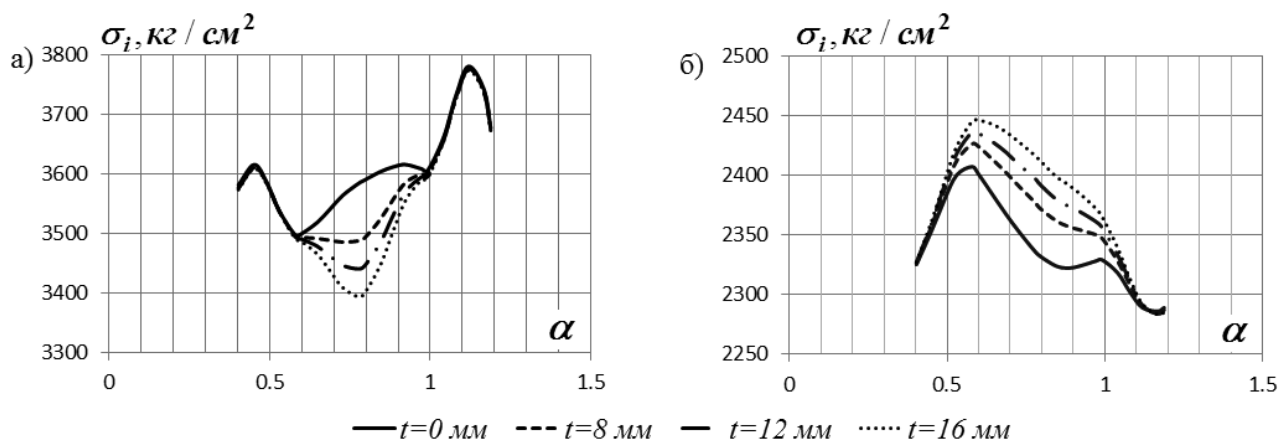


Рис. 3. Зависимость изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в зоне дефекта $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$: а) в слое, близком к внутренней поверхности; б) в слое, близком к наружной поверхности

Fig. 3. Change in stress intensity σ_i depending on the angle α in the defective region for $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = 0$: а) in the layer adjacent to the inner surface; б) in the layer adjacent to the outer surface

Вариант 2. Расположение центра дефекта ($\alpha = \pi/4$, $\beta = -\pi/2$).

На рис. 4 представлены рассчитанные зависимости изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в области, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$. Видно, что увеличение глубины дефекта приводит к уменьшению напряжений σ_i на 18 % для слоя, близкого к внутренней поверхности. В слое, близком к наружной поверхности, напряжения σ_i незначительно увеличиваются (на 3 %).

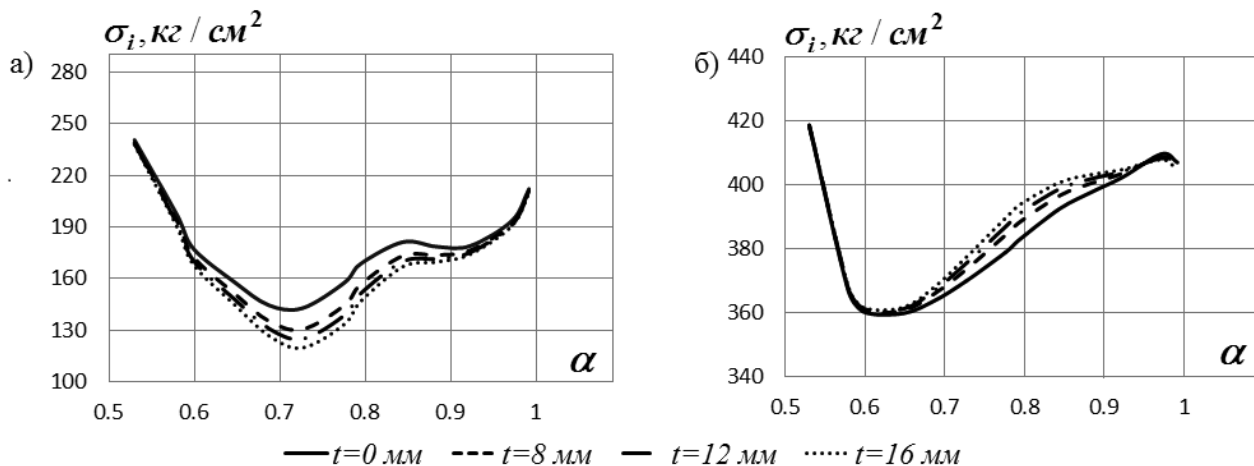


Рис. 4. Зависимость изменения интенсивности напряжений σ_i от угла α в области углубления, где $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$: а) в слое, близком к внутренней поверхности; б) в слое, близком к наружной поверхности

Fig. 4. Change in stress intensity σ_i depending the angle α in the depression zone for $33^\circ \leq \alpha \leq 57^\circ$, $\beta = -\pi/2$: а) in the layer adjacent to the inner surface; б) in the layer adjacent to the outer surface

Закключение и выводы

1. Разработана численная модель поведения циклической оболочки с локальным углублением на ее внутренней поверхности на основе трехмерного сплайнового варианта МКЭ для оценки уровня концентрации напряжений, возникающих как в области локального углубления, так и оболочке в целом.

2. Проведены вычислительные эксперименты по определению НДС в области дефекта в виде локального углубления, расположенного на внутренней поверхности оболочки, в зависимости от расположения и параметров углубления.

3. Установлены закономерности изменения НДС циклической оболочки при варьировании геометрических параметров углубления.

4. Показано, что при изменении геометрических параметров и зоны расположения дефекта происходит существенное перераспределение напряжений как по толщине, так и по всей поверхности оболочки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Иванов В.Н., Рыжковская М.И. Применение циклических поверхностей в архитектуре зданий, конструкций и изделий // Вестн. РУДН. Сер. Инженер. исслед. 2015. № 3. С. 111–118.
2. Bock Hyeng C.A., Yamb E.B. Application of cyclic shells in architecture, machine design, and bionics // Int. J. Mod. Eng. Res. 2012. V. 2, No 3. P. 799–806.
3. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий. М.: Либроком, 2012. 328 с.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Гайдайчук В.В. Расчет оболочек сложной формы. Киев: Будивэльнык, 1990. 192 с.

5. *Кривошапко С.Н., Иванов В.Н.* Классификация циклических поверхностей // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2006. № 2. С. 25–34.
6. *Иванов В.Н., Шмелева А.А.* Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2016. № 6. С. 3–8.
7. *Кокодеев А.В., Шейн А.А.* Определение напряженно-деформированного состояния горизонтальных цилиндрических стальных резервуаров с учетом повреждений коррозионного происхождения // Техн. регулир. в трансп. строит. 2015. № 1 (9). С. 2–10.
8. *Седова О.С.* Новая модель механохимической коррозии тонкостенных оболочек // Проц. управл. и устойч. 2016. Т. 3, № 1. С. 265–269.
9. *Яковлев А.С.* Тонкостенные оболочки с несквозными трещиновидными дефектами в приближении Дагдейла // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. 2013. № 9/2 (110). С. 140–146.
10. *Игнатик А.А.* Экспериментальное и теоретическое исследование деформированного состояния дефектных зон трубопровода // Наука и технол. трубопров. трансп. нефти и нефтепрод. 2018. Т. 8, № 2. С. 147–153.
11. *Яковлев А.С.* Оценка влияния несквозных трещин (царапин) на прочность конструкций при проектировании летательных аппаратов // Вестн. Самарск. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. С.П. Королёва (нац. исслед. ун-та). 2012. № 4 (35). С. 193–197.
12. *Якупов С.Н., Насибуллин Т.Р.* Анализ концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций с локальным углублением // Строит. мех. инж. констр. и соор. 2016. № 1. С. 30–36.
13. *Гришин В.А., Гришина В.А., Реут В.В.* Напряженное состояние коробчатой оболочки при вдавливании в нее двух включений // Тр. Одесск. политех. ун-та. 2015. Т. 1, № 1 (45). С. 21–27.
14. *Krivoshapko S.N., Ivanov V.N.* Encyclopedia of Analytical Surfaces. Cham: Springer, 2015. xxix, 752 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7>.
15. *Немиш Ю.Н.* Трехмерные граничные задачи теории упругости для неканонических областей // Прикл. мех. 1980. № 16 (2). С. 3–39.
16. *Арбош И., Бабель Г.В., Баттерман С.Ч. и др.* Тонкостенные оболочечные конструкции. Теория, эксперимент и проектирование. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1980. 607 с.
17. *Якупов Н.М.* О некоторых работах по расчету оболочек сложной геометрии // Исслед. по теор. обол.: Тр. семинара. Казань: КФТИ КФАН СССР, 1990. Вып. 25. С. 43–55.
18. *Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Снигирев В.Ф.* Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек. М.: Наука, 1989. 208 с.
19. *Вахитов М.Б., Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* К решению плоской задачи подкрепленных панелей переменной жесткости // Изв. вузов. Авиац. техн. 1978. № 2. С. 9–16.
20. *Корнишин М.С., Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* Гибкие двусвязные пластины со сложным очертанием контура // Стат. и динам. обол.: Тр. семинара. Казань, 1979. Вып. 12. С. 80–91.
21. *Паймушин В.Н., Якупов Н.М.* Большие прогибы эллиптических и круглых пластин с круглыми и эллиптическими отверстиями // Теор. и мет. расч. нелин. пластин и обол. Саратов, 1981. С. 10–12.

22. Корнишин М.С., Якупов Н.М. Сплайновый вариант метода конечных элементов для расчета оболочек сложной геометрии // Прикл. мех. 1987. Т. 23, № 3. С. 38–44.
23. Якупов Н.М. Прикладные задачи механики упругих тонкостенных конструкций. Казань: ИММ КНЦ РАН, 1994. 124 с.
24. Якупов Н.М., Киямов Х.Г., Якупов С.Н., Киямов И.Х. Моделирование элементов конструкций сложной геометрии трехмерными конечными элементами // МКМК. 2011. Т. 17, № 1. С. 145–154.
25. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Mukhamedova I.Z. A new variant of the FEM for evaluation the strenght of structures of complex geometry with heterogeneous material structure // Case Stud. Constr. Mater. 2023. V. 19. Art. 02360. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02360>.
26. Корнишин М.С., Якупов Н.М. К расчету оболочек сложной геометрии в цилиндрических координатах на основе сплайнового варианта МКЭ // Прикл. мех. 1989. Т. 25, № 8. С. 53–60.
27. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Simulation of toroidal shell with local defect // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 7. P. 1310–1314. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070434>.
28. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 9. P. 22635–2271. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>.
29. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // Int. J. Numer. Methods Eng. 1970. V. 2, No 3. P. 419–451. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020310>.
30. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1158, No 4. Art. 042038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042038>.
31. Даутов Р.З. Оценка точности схем МКЭ на основе прямоугольных элементов с численным интегрированием для оболочек сложной геометрии // Иссл. по теор. обол.: Тр. семинара. Казань, 1992. Вып. 27. С. 22–36.
32. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Studies about solution convergence of the spline version of the finite element method in two-dimensional and three-dimensional formulations // Lobachevskii J. Math. 2022,. V. 43, No 5. P. 1218–1223. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080364>.
33. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 1: The basis. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.

References

1. Ivanov V.N., Rynkovskaya M.I. Using circular surfaces in the architecture of the buildings, structures, and products. *Vestn. RUDN. Ser. Inzh. Issled.*, 2015, no. 3, pp. 111–118. (In Russian)
2. Bock Hyeng C.A., Yamb E.B. Application of cyclic shells in architecture, machine design, and bionics. *Int. J. Mod. Eng. Res.*, 2012. vol. 2, no. 3, pp. 799–806.
3. Krivoshapko S.N., Mamieva I.A. *Analiticheskie poverkhnosti v arkhitekture zdanii, konstruksii i izdelii* [Analytical Surfaces in the Architecture of Buildings, Structures, and Products]. Moscow, Librokom, 2012. 328 p. (In Russian)

4. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Gotsulyak E.A., Gaidaichuk V.V. *Raschet obolochek slozhnoi formy* [Calculation of Complex Shells]. Kyiv, Budiviel'nyk, 1990. 192 p. (In Russian)
5. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. Classification of cyclic surfaces. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2006, no. 2, pp. 25–34. (In Russian)
6. Ivanov V.N., Shmeleva A.A. Geometry and formation of the thin-walled shell structures based on normal cyclic surfaces. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2016, no. 6, pp. 3–8. (In Russian)
7. Kokodeev A.V., Shein A.A. Determining the stress-strain state of horizontal cylindrical steel tanks in connection with corrosion-induced damages. *Tekh. Regul. Transp. Stroit.*, 2015, no. 1 (9), pp. 2–10. (In Russian)
8. Sedova O.S. A new model of mechanochemical corrosion in thin-walled shells. *Protsessy Upr. Ustoich.*, 2016, vol. 3, no. 1, pp. 265–269. (In Russian)
9. Yakovlev A.S. Thin-walled shells with surface crack defects in the Dugdale approximation. *Vestn. SamGU. Estestvennonauchn. Ser.*, 2013, no. 9/2 (110), pp. 140–146. (In Russian)
10. Ignatik A.A. Experimental and theoretical study of the strain state in damaged pipeline sections. *Nauka Tekhnol. Truboprovodn. Transp. Nefti Nefteprod.*, 2018, vol. 8, no. 2, pp. 147–153. (In Russian)
11. Yakovlev A.S. Assessing the impact of non-through cracks (scratches) on the structural strength when designing aircraft. *Vestn. Samar. Gos. Aerokosm. Univ. im. Akad. S.P. Koroleva (Nats. Issled. Univ.)*, 2012, no. 4 (35), pp. 193–197. (In Russian)
12. Yakupov S.N., Nasibullin T.R. Analysis of the stress concentration in thin-walled elements of structures with local in-depth. *Stroit. Mekh. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, 2016, no. 1, pp. 30–36. (In Russian)
13. Grishin V.A., Grishina V.A., Reut V.V. Stress state of a box shell under the indentation of two inclusions. *Tr. Odess. Politekh. Univ.*, 2015, vol. 1, no. 1 (45), pp. 21–27. (In Russian)
14. Krivoshapko S.N., Ivanov V.N. *Encyclopedia of Analytical Surfaces*. Cham, Springer, 2015. xxix, 752 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7>.
15. Nemish Yu.N. Three-dimensional boundary-value problems of the theory of elasticity for noncanonical regions. *Sov. Appl. Mech.*, 1980, vol. 16, no. 2, pp. 85–116. <https://doi.org/10.1007/BF00885101>.
16. Arbocz J., Babel G.V., Batterman S.C., et al. *Tonkostennye obolochecnyye konstruksii. Teoriya, eksperiment i proektirovanie* [Thin-Shell Structures. Theory, Experiment and Design]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 607 p. (In Russian)
17. Yakupov N.M. On some works about the calculation of shells with complex geometry. In: *Issled. po teor. obol.: Tr. seminara* [Studies on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 25. Kazan, KFTI KFAN SSSR, 1990, pp. 43–55. (In Russian)
18. Kornishin M.S., Paimushin V.N., Snigirev V.F. *Vychislitel'naya geometriya v zadachakh mekhaniki obolochek* [Computational Geometry in Shell Mechanics Problems]. Moscow, Nauka, 1989. 208 p. (In Russian)
19. Vakhitov M.B., Paimushin V.N., Yakupov N.M. On solution of the plane problem of reinforced panels of variable stiffness. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Aviats. Tekh.*, 1978, no. 2, pp. 9–16. (In Russian)

20. Kornishin M.S., Paimushin V.N., Yakupov N.M. Flexible doubly-connected plates with complex contours. In: *Stat. i dinam. obol.: Tr. seminara* [Statics and Dynamics of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 12. Kazan, 1979, pp. 80–91. (In Russian)
21. Paimushin V.N., Yakupov N.M. Large deflections of elliptical and circular plates with circular and elliptical holes. In: *Teor. i met. rasch. neline. plastin i obol.* [Theory and Methods of Calculating Nonlinear Plates and Shells]. Saratov, 1981, pp. 10–12. (In Russian)
22. Kornishin M.S., Ykupov N.M. Spline variant of the finite element method for calculating shells of complex geometry. *Prikl. Mekh.*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 38–44. (In Russian)
23. Yakupov N.M. *Prikladnye zadachi mekhaniki uprugikh tonkostennykh konstruksii* [Applied Problems of the Mechanics of Elastic Thin-Walled Structures]. Kazan, IMM KNTs Ross. Akad. Nauk, 1994. 124 p. (In Russian)
24. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N., Kiyamov I.H. Modelling of elements of designs of difficult geometry by three-dimensional finite elements. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 145–154. (In Russian)
25. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M., Mukhamedova I.Z. A new variant of the FEM for evaluation the strenght of structures of complex geometry with heterogeneous material structure. *Case Stud. Constr. Mater.*, 2023, vol. 19, art. 02360. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2023.e02360>.
26. Kornishin M.S., Yakupov N.M. Calculation of shells of complex geometry in cylindrical coordinates on the basis of a spline version of the finite-element method. *Sov. Appl. Mech.*, 1989, vol. 25, no. 8, pp. 784–790. <https://doi.org/10.1007/BF00887642>.
27. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Simulation of toroidal shell with local defect. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1310–1314. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070434>.
28. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 9, pp. 22635–2271. <https://doi.org/10.1134/S1995080221090316>.
29. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 1970, vol. 2, no. 3, pp. 419–451. <https://doi.org/10.1002/nme.1620020310>.
30. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Yakupov S.N. Modelling of cyclic shells with complex geometry three-dimensional finite elements. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 4, art. 042038. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042038>.
31. Dautov R.Z. Accuracy evaluation of finite element schemes based on rectangular elements with numerical integration for complex geometry shells. In: *Issl. po teor. obol.: Tr. seminara* [Studies on the Theory of Shells: Proceedings of the Seminar]. Vol. 27. Kazan, 1992, pp. 22–36. (In Russian)
32. Yakupov N.M., Kiyamov H.G., Mukhamedova I.Z. Studies about solution convergence of the spline version of the finite element method in two-dimensional and three-dimensional formulations. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1218–1223. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080364>.
33. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method*. Vol. 1: The basis. Butterworth-Heinemann, 2000. 689 p.

Информация об авторах

Самат Нухович Якупов, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: *tamas_86@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0047-3679>

Хаким Габдрахманович Киямов, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: *Kijamov.hakim@yandex.ru*

Инзилия Заудатовна Мухамедова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет; старший научный сотрудник Института механики и машиностроения, Федеральный исследовательский центр «Казанский научный центр Российской академии наук»; старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *Muhamedova-inziliya@mail.ru*

Буллат Фэридович Тазюков, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6049-6827>

Author Information

Samat N. Yakupov, Cand. Sci. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: *tamas_86@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0047-3679>

Hakim G. Kiyamov, Cand. Sci. (Engineering), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: *Kijamov.hakim@yandex.ru*

Inziliya Z. Mukhamedova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mechanics, Kazan State University of Architecture and Engineering; Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences; Senior Researcher, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *Muhamedova-inziliya@mail.ru*

Bulat F. Tazyukov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Deputy Director for Research, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6049-6827>

Поступила в редакцию 17.09.2024

Принята к публикации 23.10.2024

Received September 17, 2024

Accepted October 23, 2024

