

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.395-406

АЛГОРИТМ ПОИСКА НЕОДНОРОДНОСТЕЙ В ОБРАТНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

А.О. Лапич, М.Ю. Медведик

Пензенский государственный университет, г. Пенза, 440026, Россия

Аннотация

Цель данного исследования – решение обратной задачи для определения неоднородности объекта. Измерение рассеянного поля производится за его пределами в некотором наборе точек наблюдения. Предполагается, что источник излучения и точки наблюдения находятся за пределами исследуемого объекта. Рассеяное поле моделируется как результат решения прямой задачи. Для решения обратной задачи применен двухшаговый метод. Рассмотрены нелинейности различного типа. При построении расчетной сетки использован метод обобщенных сеток. Предложен и реализован численный метод решения задачи. Представленные численные результаты иллюстрируют решение задачи для заданных экспериментальных данных.

Ключевые слова: двухшаговый метод, интегральное уравнение, нелинейная задача дифракции, метод коллокаций, численный метод

Введение

Многие вопросы современной науки и техники приводят к задачам определения внутренней структуры объектов. К таким относятся, например, вопросы медицинской диагностики, в которых зачастую необходимо производить обследование неинвазивными методами для выявления различных заболеваний без необходимости проникновения в тело пациента. Эти методы включают в себя такие процедуры, как ультразвуковое исследование (УЗИ), рентгеноскопия и магнитно-резонансная томография (МРТ). Они позволяют врачам получить информацию о состоянии органов и тканей, делая диагностику более безопасной и удобной для пациентов. Неинвазивные методы и методы неразрушающего контроля используются для оценки объектов без их повреждения. Они позволяют проверить целостность и качество материалов, не требуя разрушительных тестов. Эти методы включают ультразвуковую дефектоскопию, радиографию, тепловизию и магнитную дефектоскопию. Неинвазивные методы широко применяются в промышленности, медицине, археологии и других областях. Они обеспечивают надежную диагностику и контроль без повреждения исследуемых объектов и также позволяют улучшить эффективность процессов контроля и диагностики.

Среди множества способов решения названных проблем стоит отметить акустические и электродинамические методы, которые активно развиваются в последние годы [1, 2]. Исследования в этой области привели к созданию множества различных устройств и алгоритмов для идентификации структуры объектов,

но зачастую качество идентификации таких устройств оставляет желать лучшего. В связи с этим поиск новых подходов в решении рассматриваемой задачи остается актуальным.

Задачи медицинской диагностики являются более сложными, поскольку существуют значительные ограничения на выбор диапазона используемых частот. Согласно нормам СанПиН 2.2.4/2.1.8.055-96 диапазон частот в устройствах медицинской диагностики не должен превышать 10 ГГц, однако большинство диагностирующих устройств использует частоты, значительно превышающие указанные значения. Речь идет о диагностике методами рентгенографии, высокочастотной томографии, а также применении других устройств, использующих схожие принципы. Следует отдельно отметить методы ультразвуковой диагностики, диапазон допустимых частот которых значительно ниже. Но такие сканеры нельзя рассматривать как точный вид диагностики, поскольку для получения качественного изображения структуры исследуемого объекта необходимо вручную подстраивать частоты работы сканирующего устройства. В связи с этим в работе предложен метод, позволяющий решать указанные задачи с использованием широкого диапазона частот.

1. Постановка задачи

Рассмотрим воздействие поля U^0 на двумерный объект Q , расположенный в пространстве R^2 , с целью определения поля U , рассеянного на этом объекте, в рамках решения прямой задачи.

Поле индуцировано точечным источником, находящимся вне изучаемого объекта. На рис. 1 графически представлены неоднородный объект и источник излучения. Используя решение неоднородного уравнения Гельмгольца [3]

$$\Delta u + k^2(x) u = f(x), \quad (1)$$

можно определить поведение рассеянного поля U . Функция $k^2(x)$ является непрерывной вещественной и определяет волновые параметры внутри объекта Q . Известная функция с компактным носителем $f(x)$ является правой частью уравнения (1).

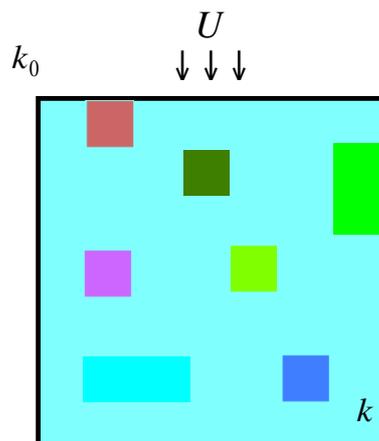


Рис. 1. Исследуемый объект

Справедливо выполнение условий сопряжения на границе раздела сред, которые имеют вид

$$[u]_{\partial Q} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (2)$$

где символ $[\cdot]$ определяет скалярную функцию, представляющую собой разность значений функции с разных сторон ∂Q .

Уравнение (1) имеет не единственное решение в классе (обобщенных) функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Поэтому для обеспечения единственности решения поставленной задачи запишем условия излучения Зоммерфельда [4]

$$\frac{\partial u}{\partial r} = ik_0 u + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Представим уравнения (1)–(3) как задачу Θ , ее решение единственно [6]. Решение задачи Θ , удовлетворяющее условиям непрерывности, называется классическим решением прямой задачи рассеяния в дифференциальной постановке. Задачу Θ можно свести к интегральному уравнению, используя вторую формулу Грина

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy, \quad (4)$$

где $f^0(x)$ – функция, задающая падающее поле, $k(y)$ – волновая функция внутри тела, $u(x)$ – искомая функция, а $G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|x-y|)$ – функция Ханкеля первого рода. Уравнение (1) является уравнением Фредгольма второго рода. Хорошо известны многочисленные приложения данного интегрального уравнения. Оно играет важную роль не только в задачах дифракции, но также в квантовой механике и многих других областях физики.

Перепишем уравнение в операторном виде и сформулируем ряд утверждений. Пусть

$$Au := \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy.$$

Запишем $u := u(y)$, $F := f^0(x)$, тогда уравнение (4) примет следующий операторный вид

$$Lu := u - Au := F. \quad (5)$$

Оператор (5) фредгольмов и непрерывно обратим [5]. В работах [6–12] проведены численные исследования интегрального уравнения (4). Получить решение задачи Θ также можно путем применения численного метода.

2. Решение обратной задачи восстановления

Для идентификации структуры исследуемого объекта необходимо знать значение поля в определенных точках, расположенных за пределами объекта. В настоящее время существуют многочисленные приборы, позволяющие измерить данные параметры. В случае отсутствия таких приборов излучаемое поле может быть смоделировано численно. Для этого необходимо решить прямую задачу Θ . Далее, используя значение поля $u(x)$ внутри тела, следует произвести перерасчет поля во внешних точках по формуле пересчета. Данная процедура должна быть выполнена с высокой степенью точности, поскольку используется численный метод расчета, а рассматриваемая задача чувствительна к изменению исходных данных.

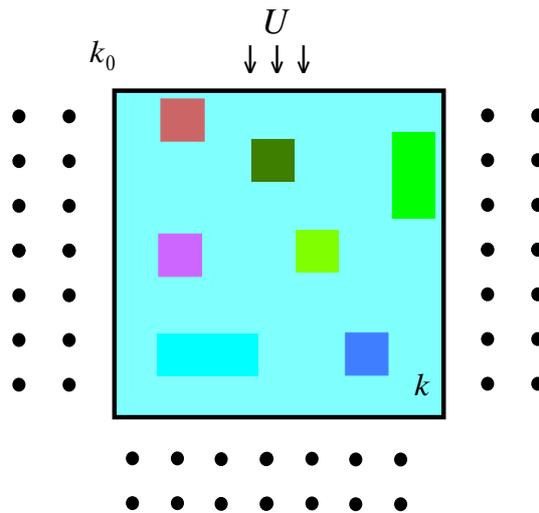


Рис. 2. Пример обратной задачи. Объект, источник излучения и точки наблюдения

Точки наблюдения, в которых измеряется или рассчитывается значение поля, размещаются равномерно вдоль границ исследуемого объекта на небольшом расстоянии друг от друга в несколько слоев (рис. 2). Волна, распространяющаяся от точечного источника излучения, является падающим полем. В такой постановке для решения задачи возможно применение двухшагового алгоритма для идентификации неоднородностей.

Разобьем тело плоской формы на ячейки Π_i , где $i = (i_1, i_2)$. Введем допущение, что параметры неоднородности внутри каждой ячейки не изменяются $k(x) = k_i$. Применим двухшаговый алгоритм [7, 9, 10], который можно записать следующим способом.

1. На первом шаге используем значения поля $u(y_{\text{merg}})$, измеренные в точках наблюдения y_{merg} , которые находятся за пределом объекта на некотором расстоянии. Рассчитаем значение поля внутри объекта, решив уравнение

$$u(y_{\text{merg}}) - f^0(y) = \int_Q G(x, y_{\text{merg}}) u(x) dx. \quad (6)$$

Отметим, что решение уравнения (6) является самой сложной частью двухшагового метода, поскольку это уравнение является уравнением 1-го рода. Система линейных алгебраических уравнений, получаемая в результате решения интегрального уравнения (6), является плохо обусловленной, что приводит к сильно зашумленным восстановленным данным.

2. На втором шаге пересчитаем значение параметров неоднородности $k(y)$, используя значение $u(y)$, по формуле пересчета

$$k^2(y) - k_0^2 = \frac{u(y)}{f(y) + \int_Q G(x, y_{\text{merg}}) u(x) dx}.$$

Для снижения числа обусловленности матрицы можно использовать различные предобуславливатели или методы регуляризации. Это позволяет в некоторых случаях решить системы линейных алгебраических уравнений больших размеров.

В связи с некорректностью задачи малые изменения входных данных (например, наличие шума) приводят к существенным отклонениям в решении задачи. Для борьбы с зашумленными данными можно применять различные методы обработки шума для его снижения и фильтрации, а также нейронные сети для улучшения результатов.

3. Численный метод

Для применения численного метода следует дополнить Q до фигуры прямоугольного вида $P = \{x : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, x_3 = c\}$. Построим на P равномерную обобщенную прямоугольную сетку. Будем нумеровать все элементарные прямоугольники $\Pi_{kl} \in P$. Это связано с тем, что нам не известны местоположение, размер и форма неоднородности. Площадь любого элементарного прямоугольника Π_{kl} равна V . Будем называть элементарный прямоугольник носителем базисной функции.

Используем кусочно-постоянные базисные функции и определим их на носителе следующим образом

$$v_{kl} = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Pi}_{kl}, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{kl}. \end{cases} \quad (7)$$

Данная функция удовлетворяет условию аппроксимации в пространстве $L_2(Q)$. В качестве метода решения выберем метод коллокации и рассмотрим его применение для уравнения

$$Au = f. \quad (8)$$

Метод коллокации состоит в нахождении приближенного решения уравнения посредством приравнивания значений функций в левой и правой частях в конечном числе точек, называемых точками коллокации, которые обычно выбираются как центры носителей базисных функций: $x_j = \left\{ \frac{x_{1,j} + x_{1,j+1}}{2}, \frac{x_{2,j} + x_{2,j+1}}{2}, c \right\}$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $A : X \rightarrow Y$. Метод коллокации решения уравнения (8) состоит в нахождении приближенного решения $u \in X_n$, удовлетворяющего уравнению

$$(Au_n)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n.$$

Рассмотрим линейную оболочку $X_n = \text{span} \{v_1 \dots v_n\}$, состоящую из базисных функций (7). Выразим элемент u_n в виде линейной комбинации

$$u_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k v_k.$$

В этом случае метод коллокации приводит к СЛАУ следующего вида

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Av_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1 \dots n. \quad (9)$$

Приравнивание левой и правой частей уравнений (9) в конечном числе точек коллокации эквивалентно уравнению проекционного метода $P_n Au_n = P_n f$ с некоторым оператором интерполяции P_n , являющимся проекционным оператором.

Поскольку решение уравнения 1-го рода (6) приводит к сильно зашумленным данным, для его эффективного решения будем использовать объединенные расчетные сетки. Для построения такой сетки необходимо ввести в каждом носителе дополнительные коллокационные точки и добавить носители, окружающие их.

Проще всего это сделать путем сдвига ранее описанной регулярной прямоугольной сетки в нескольких направлениях. Более подробное описание подхода представлено в работе [6].

На рис. 3 представлена одна из элементарных ячеек расчетной сетки. Синий квадрат является исходным вариантом ячейки. Зелеными квадратами отмечены смещенные положения ячейки “Верх–лево” и “Низ–право”, красными – “Верх–право” и “Низ–лево”. Середина смещенной ячейки выбирается как положение точек колокации, которые отмечены на рисунке черным цветом. При выходе ячейки за пределы исходной фигуры интегрирование проводится только по внутренним точкам объекта.

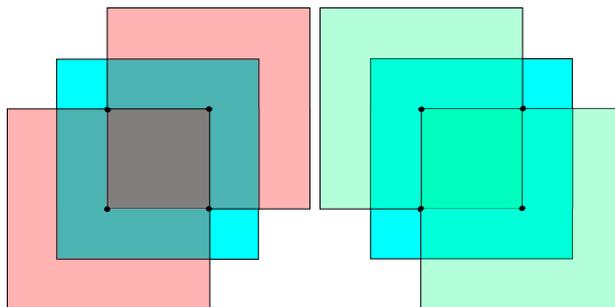


Рис. 3. Сдвиг ячейки сетки

Будем предполагать, что решение задачи получено, и в нашем распоряжении находится матрица, составленная методом Галеркина. Для решения задачи дифракции волны на объекте сложной формы необходимо, чтобы он целиком вмещался в прямоугольник и состоял из элементов сетки. Субиерархический метод [11, 12] позволяет составить матрицу для определения полей внутри объекта сложной формы, используя матрицу, составленную для прямоугольника. В построенной фигуре введем новую нумерацию элементарных прямоугольников. Произведя полный перебор, получим новую сетку. Эту сетку будем использовать для расчета поля на объекте сложной формы. Решив СЛАУ для матрицы, составленной с использованием новой сетки, найдем значения поля внутри фигуры сложной формы. Скорость построения новой матрицы будет напрямую зависеть от размеров фигуры и сетки. Субиерархический подход позволяет избежать длительных расчетов, связанных с повторным вычислением матричных элементов.

4. Нелинейный случай

Рассмотрим некоторые варианты задания нелинейного поля. Возьмем нелинейное интегральное уравнение

$$f^0(x) = u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y; u(y))) u(y) dy, \quad (10)$$

где волновая функция зависит от $u(y)$. Данное уравнение описывает процесс дифракции волны внутри Q . Для определения нелинейной структуры объекта используем формулу

$$k^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u(x)|^2}{1 + \beta |u(x)|}, \quad (11)$$

где $k_1 - const$, $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ – некоторые коэффициенты нелинейности.

Моделирование нелинейного поля будем производить итерационно, разбив процесс на два этапа. На первом этапе положим, что тело однородно, т. е. волновая функция является константой: $k^2(x) = k_1 = \text{const}$ (запуск итерационного процесса также возможен при условии, что волновая функция является неоднородной).

Неявный алгоритм. Решим интегральное уравнение

$$u_0(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u_0(y) dy$$

и рассчитаем поле $u_0(x)$. На последующих шагах пересчитаем значения волновой функции по следующей формуле

$$k_n^2(x) = k_1^2 + \frac{k_0 \alpha |u_n(x)|^2}{1 + \beta |u_n(x)|}. \quad (12)$$

Далее решим линейное уравнение

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_{n+1}(y) dy. \quad (13)$$

Повторим шаги (12)–(13) до достижения необходимой точности. Задача рассматривается в частотной области. Алгоритм считается неявным, так как требуется решение нелинейного уравнения на каждом этапе. Для решения уравнения используем метод коллокаций.

Явный алгоритм. Данный алгоритм заключается в построении явного итерационного процесса, который можно также расписать по шагам. На первом шаге для задания начального приближения решим линейное объемное интегральное уравнение (10) и тем самым определим значение $u_0(x)$. На следующих этапах произведем пересчет значения волновой функции, используя формулу (12) и уравнение пересчета

$$u_{n+1}(x) = f^0(x) + \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k_{n+1}^2(y; u_n(y))) u_n(y) dy,$$

и найдем решение на новом шаге. Достижение необходимой точности вычисления будет обеспечено путем повторения итерационного процесса.

Данный метод имеет свои недостатки: необходим выбор достаточно точного начального приближения, иначе итерационный процесс не будет сходящимся.

Численное сравнение двух представленных алгоритмов показало, что неявный метод работает в более широком диапазоне значений k , однако уступает явному методу по скорости вычисления.

5. Численные результаты

На рис. 4–6 приведены результаты, которые иллюстрируют решения прямой и обратной задач для некоторых объектов, имеющих как линейную, так и нелинейную структуру. Объединенная расчетная сетка для данной задачи выбрана из 50×50 ячеек. При помощи субиерархического метода [12] из квадрата был “вырезан” эллипс. Данный метод позволяет использовать ранее рассчитанную матрицу для фигур канонического вида и выделять из объекта требуемые формы. Более подробные применение и описание можно также найти в работах [6, 8, 11].

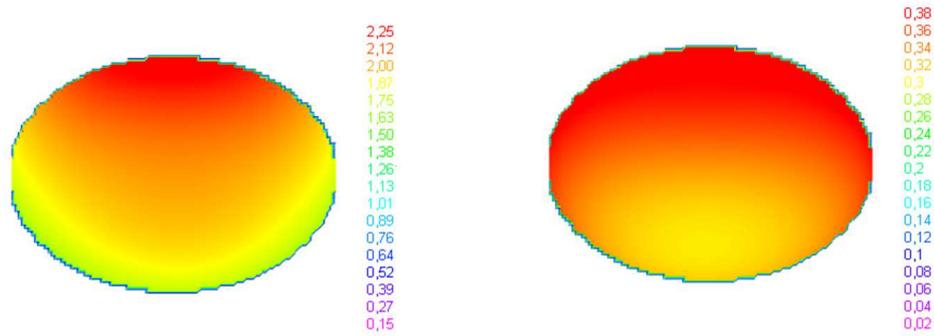


Рис. 4. Линейный случай. Решение прямой и обратной задач на теле в форме эллипса

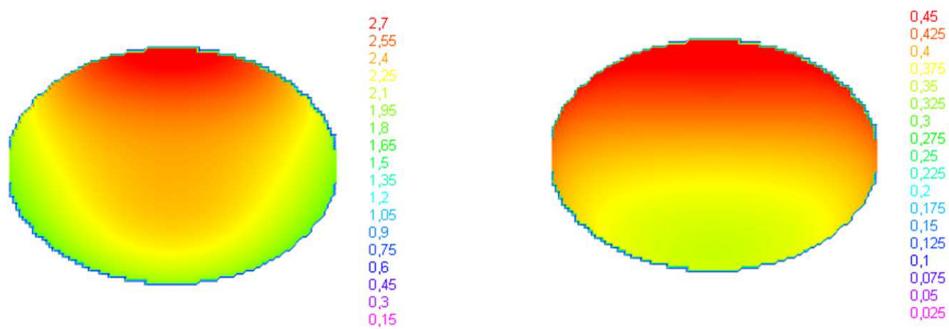


Рис. 5. Нелинейный случай (11) при $\alpha > \beta$. Решение задачи на теле в форме эллипса

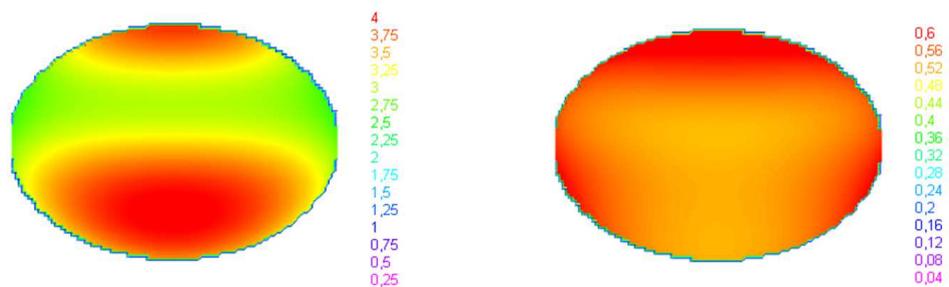


Рис. 6. Нелинейный случай (11) при $\alpha < \beta$. Решение прямой и обратной задач на теле в форме эллипса

Рис. 4 представляет решение прямой (слева) и обратной (справа) задач для объекта в форме эллипса.

На всех рисунках слева показаны значения поля при решении прямой задачи, справа – значения волновой функции. В табл. 1 представлено сравнение результатов решения прямой и обратной задач в некоторых ячейках, которые были выбраны по мере удаления от источника излучения. Сходство этих результатов позволяет

сказать, что данный метод может применяться в подобных задачах. На рис. 7 показано сравнение графиков сходимости итерационного процесса задания нелинейности для разных случаев. По горизонтали указано количество шагов, по вертикали – модуль разности решений обратной задачи на новом и предыдущем шагах.

Табл. 1

Точность решения обратной задачи

Номер слоя	10	20	30	40
Погрешность решения	0.001	0.001	0.01	0.01

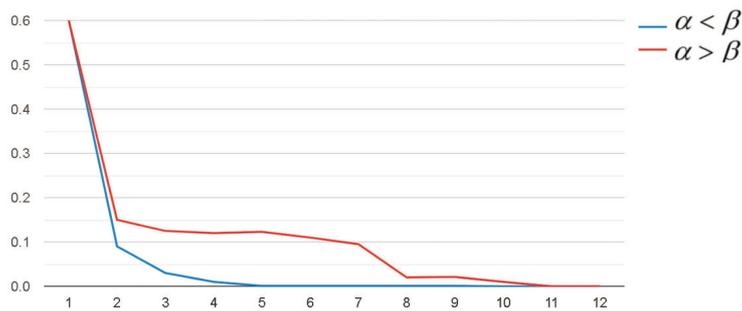


Рис. 7. График сходимости итерационного процесса задания нелинейности

Заключение

Рассмотрено поведение скалярного поля при решении нелинейной задачи дифракции. Использованы различные модели нелинейности. Подбор неоднородностей проведен в итерационной процедуре. Решение задачи восстановления неоднородностей показало хороший результат для всех рассматриваемых случаев, что говорит о возможности применения данного подхода во многих прикладных задачах диагностики. Применение субиерархического метода и задание нелинейности описанными вариантами позволяют моделировать поведение поля на более сложных структурах. Представленные графики сходимости итерационного процесса задания нелинейности показали устойчивость решения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 124020200015-7.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Корженевский А.В. Исследовательский электроимпедансный томограф, доступный для изготовления в нестандартных условиях // Журн. радиоэлектрон. 2021. № 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.5>.
2. Zarafshani A., Bach T., Chatwin C.R., Tang S., Xiang L., Zheng B. Conditioning electrical impedance mammography system // Measurement. 2018. V. 116. P. 38–48. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.10.052>.

3. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
4. *Sommerfeld A.* Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung // Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 1912. Bd. 21. S. 309–353.
5. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: Русайнс, 2018. 223 с.
6. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 167–177.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>.
7. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, сист., сети в эконом., техн., прир. и общ. 2023. № 4. С. 142–153.
<https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>.
8. *Лапич А.О., Медведик М.Ю.* Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана–Швингера методом Галеркина // Изв. высш. учебн. завед. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки. 2023. № 3. С. 66–73.
<https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-5>.
9. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 3. P. 427–447.
<https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
10. *Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Probl. Sci. Eng. 2020. V. 28, No 10. P. 1474–1492. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
11. *Medvedik M.Yu.* A subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes // J. Commun. Technol. Electron. 2012. V. 57, No 2. P. 158–163. <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
12. *Medvedik M.Y.* Solution of integral equations by means of subhierarchical method for generalized computational grids // Math. Models Comput. Simul. 2015. V. 7, No 6. P. 570–580. <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.

Поступила в редакцию 31.05.2024

Принята к публикации 13.07.2024

Лапич Андрей Олегович, аспирант, ассистент кафедры “Математика и суперкомпьютерное моделирование”

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Медведик Михаил Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры “Математика и суперкомпьютерное моделирование”

Пензенский государственный университет
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, 440026, Россия
E-mail: medv@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.395-406

**Algorithm for Searching Inhomogeneities
in Inverse Nonlinear Diffraction Problems***A.O. Lapich**, *M.Y. Medvedik****Penza State University, Penza, 440026 Russia*E-mail: **lapich.a@yandex.ru, **medv@mail.ru*

Received May 31, 2024; Accepted July 13, 2024

Abstract

This study aims to solve the inverse problem for determining the heterogeneity of an object. The scattered field was measured outside its boundaries at a set of observation points. Both the radiation source and observation points were assumed to be located outside the object. The scattered field was modeled by solving the direct problem. The inverse problem was solved using a two-step method. Nonlinearities of various types were considered. When introducing the computational grid, the generalized grid method was applied. A numerical method for solving the problem was proposed and implemented. The numerical results obtained illustrate how the problem is solved for specified experimental data.

Keywords: two-step method, integral equation, nonlinear diffraction problem, collocation method, numerical method

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of state assignment no. 124020200015-7.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Object under study.

Fig. 2. Example of an inverse problem. Object, radiation source, and observation points.

Fig. 3. Grid cell displacement.

Fig. 4. Linear case. Solution of the direct and inverse problems for an elliptical body.

Fig. 5. Nonlinear case (11) at $\alpha > \beta$. Solution of the problem for an elliptical body.

Fig. 6. Nonlinear case (11) at $\alpha < \beta$. Solution of the direct and inverse problems for an elliptical body.

Fig. 7. Convergence graph of the iterative process for nonlinearity adjustment.

References

1. Korjenevsky A.V. Electrical impedance tomography system suitable for manufacturing in non-standard conditions. *Zh. Radioelektron.*, 2021, no. 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.9.5>. (In Russian)

2. Zarafshani A., Bach T., Chatwin C.R., Tang S., Xiang L., Zheng B. Conditioning electrical impedance mammography system. *Measurement*, 2018, vol. 116, pp. 38–48. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.10.052>.
3. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 400 p. (In Russian)
4. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 1912, Bd. 21, S. 309–353. (In German)
5. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel* [Mathematical Theory of Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids]. Moscow, Ru-Science, 2018. 223 p. (In Russian)
6. Lapich A.O., Medvedik M.Y. Solution of a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem for objects of arbitrary shape. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 167–177. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.167-177>. (In Russian)
7. Lapich A.O., Medvedik M.Y. Method for restoring the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements. *Modeli, Sist., Seti Ekon., Tekh., Prir. O-vo.*, 2023, no. 4, pp. 142–153. <https://doi.org/10.21685/2227-8486-2023-4-9>. (In Russian)
8. Lapich A.O., Medvedik M.Y. An iterative scheme for solving a Lippmann–Schwinger nonlinear integral equation by the Galerkin method. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, no. 3, pp.66–73. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-3-5>. (In Russian)
9. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The two-step method for determining a piecewise-continuous refractive index of a 2D scatterer by near field measurements. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 427–447. <https://doi.org/10.1080/17415977.2019.1597872>.
10. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2020, vol. 28, no. 10, pp. 1474–1492. <https://doi.org/10.1080/17415977.2020.1727466>.
11. Medvedik M.Yu. A subhierarchical method for solving the Lippmann–Schwinger integral equation on bodies of complex shapes. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 158–163. <https://doi.org/10.1134/S1064226912010123>.
12. Medvedik M.Y. Solution of integral equations by means of subhierarchical method for generalized computational grids. *Math. Models Comput. Simul.*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 570–580. <https://doi.org/10.1134/S207004821506006X>.

Для цитирования: Лапич А.О., Медведик М.Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 395–406. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.395-406>.

For citation: Lapich A.O., Medvedik M.Y. Algorithm for searching inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 395–406. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.395-406>. (In Russian)