

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.364-376

О ЗАДАЧЕ ДЕГРАДАЦИИ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК
ПРИ ПРОДОЛЬНОМ ИЗГИБЕ И МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Р.А. Каюмов¹, И.З. Мухамедова^{1,2}, Л.И. Хайдаров¹, Б.Ф. Тазюков²

¹Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Казань, 420043, Россия

²Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Предложены определяющие соотношения и методика анализа поведения стеклопластика при совместном воздействии силовых факторов и щелочной среды при продольном изгибе. Описаны модели натурного и численного экспериментов. Предложен новый подход к решению задачи о продольном изгибе балки с начальной прогибью без привлечения геометрически нелинейных соотношений. Такой подход может быть использован в тех случаях, когда результирующая конфигурация балки представляет собой пологую кривую. Приведены результаты числовых расчетов. В первом случае рассмотрен брус с начальной прогибью на основе предложенного подхода и с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Для верификации во втором случае решена задача в геометрически нелинейной постановке. Установлено характерное согласование полученных результатов.

Ключевые слова: стеклопластик, конечно-элементная модель, геометрическая нелинейность, щелочная среда, параметр поврежденности, вычислительный эксперимент

Введение

Процесс деформирования и деградации композитов имеет особенности в зависимости от структуры и типа компонент материала, а также от вида нагружения [1, 2]. В общем случае уровень деградации учитывается не только при оценке прочности, но и в физических соотношениях, описывающих упругие и реологические процессы. Например, в [3] рассмотрена связанная задача теории пластического течения и теории поврежденности, в [4] использованы физические соотношения для параметра поврежденности, которые содержат деформацию ползучести. Существуют теории, в которых в качестве меры деградации используется величина интенсивности накопленных деформаций ползучести (см. в [5]). Различные формы соотношений для параметра деградации описаны в работах [6–9]. Вопросы влияния различных дефектов и накопления повреждений на механические характеристики композитных конструкций рассмотрены в работах [10–18]. В них проведен обзор существующих математических и экспериментальных методов, предложены модели деградации свойств композитов, дана оценка влияния поврежденности на изменение свойств композита и распределение напряжений.

Задача определения механических характеристик композитных материалов по известным входным и выходным данным, называемая задачей идентификации, является обратной задачей, которая, как правило, не может быть решена точно. Кроме того, она может оказаться неустойчивой к исходным данным. Некоторые подходы к определению параметров, характеризующих нелинейно-упругое поведение волокнистых композитных материалов (ВКМ), рассмотрены в [19–21]. В случае линейно-упругих композитов были установлены условия невырожденности разрешающей системы уравнений и предложены способы её нормировки, улучшающие обусловленность задачи. В [22, 23] такая же задача рассмотрена для определения линейно-упругих характеристик ВКМ. В [24, 25] предложен метод идентификации линейно-упругих характеристик ВКМ по замерам деформаций тонкой многослойной пластины, изготовленной наложением слоев ВКМ с различной ориентацией волокон. В [26, 27] идентификация линейно-упругих характеристик ВКМ произведена по результатам динамических испытаний оболочек и пластин. В [28, 29] в качестве объектов испытаний рассмотрены намоточные оболочки вращения. В [19] предложен подход, при котором вводятся дополнительные неизвестные, представляющие собой независимые вариации как исходных, так и искомых параметров. Показано, что получаемое при этом решение гораздо точнее удовлетворяет всем разрешающим уравнениям задачи. Обнаружено также, что при больших различиях в значениях неизвестных даже незначительные (в пределах $\pm 5\%$) возмущения исходных данных весьма существенно влияют на определяемые значения малых параметров. Методам регуляризации таких задач идентификации посвящена достаточно обширная литература (см., например, обзоры в [30, 31]).

1. Определяющие соотношения для наследственно-упругого материала с учетом деградации

Рассмотрим модель стеклопластикового образца толщины H_0 и длины l , находящегося в щелочной среде при продольном изгибе (рис. 1). Щелочь, как химическая агрессивная среда, приводит к изменению механических свойств композита, а именно, накоплению микровреждений в материале. Это явление в дальнейшем будем называть деградацией композитного материала [32–34].

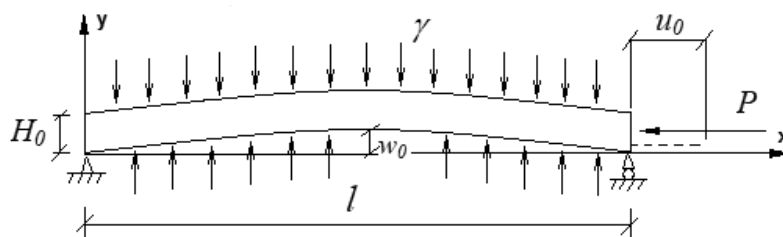


Рис. 1. Модель стеклопластикового образца, находящегося в щелочной среде с концентрацией γ

Согласно [35] введем скалярный параметр поврежденности ω , который будет описывать накопление в материале дефектов типа микротрещин и микропор. Поскольку далее рассматривается изгиб балок, то использование скалярного параметра вполне оправдано. Следуя работам Ю.Н. Работнова [4, 35], кинетическое

уравнение относительно ω примем в простейшем виде

$$\dot{\omega} = \frac{B_{\omega}\sigma_x}{(1-\omega)}(1+W). \quad (1)$$

Здесь постоянную B_{ω} нужно находить из экспериментов. В (1) входит второй параметр состояния W , определяющий концентрацию щелочи в материале.

Будем использовать определяющие соотношения для стеклопластика с учетом вязкоупругих свойств полимерного материала по линейной теории наследственности. Примем гипотезу Качанова [36], согласно которой механизмы процессов вязкоупругости и накопления повреждений, в общем, различны и независимы. Тогда для деформации вязкоупругости можно записать следующее определяющее соотношение

$$\varepsilon^{visco} = \int_0^t H(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau.$$

Ядро ползучести H примем в виде ядра Абеля [37], которое хорошо описывает ползучесть различных полимерных материалов:

$$H(t-\tau) = \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha}}, \quad C \geq 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Здесь константы C и α определяются из экспериментов.

Дискретизацию задачи осуществим методом конечных элементов (МКЭ), в качестве которых приняты шестиузловые треугольные элементы с квадратичной аппроксимацией перемещений. Для численного интегрирования по времени применим метод Эйлера.

Для вектора деформации, возникающего от наличия поврежденности, примем кинетическую зависимость

$$\{\dot{\varepsilon}^{\omega}\} = [D]^{-1}\{\sigma\}z\omega^k. \quad (3)$$

Здесь $[D]$ – матрица упругих постоянных для плоского напряженного состояния; z и k – некоторые постоянные величины, определяемые из экспериментов.

С учетом процесса накопления микроповреждений и вязкоупругих свойств стеклопластика, полная деформация ε примет вид

$$\varepsilon = e + \varepsilon^{visco} + \varepsilon^{\omega},$$

где e – упругая часть деформации. С учетом вышеизложенного закон Гука примет форму:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{visco}\} - \{\varepsilon^{\omega}\}).$$

Согласно принципу Лагранжа можно записать соотношение

$$\int_V \delta \varepsilon^T \{\sigma\} dV = \delta \{U\}^T \{P\}.$$

Здесь $\{U\}$ – вектор перемещений, $\{P\}$ – вектор внешних сил, знак « T » означает операцию транспонирования.

Таким образом, по методу конечных элементов разрешающее уравнение равновесия примет вид

$$[K]\{U\} = \{P\} + \{P^{visco}\} + \{P^{\omega}\}.$$

Здесь $[K]$ – глобальная матрица жесткости. В узлах сетки, кроме вектора внешних узловых сил, действуют компоненты, отвечающие за процесс вязкоупругости $\{P^{visco}\}$ и процесс деградации: $\{P^\omega\}$:

$$\{P^{visco}\} = \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon^{visco}\} dV, \quad \{P^\omega\} = \int_V [B]^T [D] \{\varepsilon^\omega\} dV.$$

2. Модель натурального эксперимента

Исследуем полимерный композитный материал в виде плоских протяженных элементов, армированных стекловолокном.

Для экспериментов была выбрана щелочная среда, в которую погружаются образцы из стеклопластика, закрепленные шарнирно, как показано на рис. 1.

Деформирование исследуемых образцов проводилось следующим образом. Задавалось продольное перемещение правого торца на величину u_0 . Затем правый торец закреплялся как шарнирно неподвижный. При этом максимальный прогиб w_0 будет посередине образца (рис. 1). Далее образцы в таком зафиксированном изогнутом состоянии выдерживались в щелочной среде несколько суток с проведением промежуточных замеров нагрузки. Для этого при $t = t_n$ образцы вынимались из щелочной среды, а правый торец считался шарнирно подвижным, чтобы он мог свободно перемещаться в продольном направлении. Далее, как показано на рис. 1, справа прикладывалась нагрузка P , и вновь образец изгибался так, чтобы его правый торец получил исходное продольное перемещение u_0 . С помощью динамометра производился замер промежуточной нагрузки P_i .

Прогиб запишем в следующем виде:

$$w_0 = w^e + w^{visco} + w^\omega.$$

Здесь w^e – прогиб, зависящий от упругих свойств стеклопластика, w^{visco} – прогиб, вызванный вязкоупругостью, w^ω – прогиб, вызванный накоплением микроразрушений. В начальный момент времени при $t = 0$ [38]

$$w_0 = w^e = \frac{2}{\pi} \sqrt{l u_0}.$$

При промежуточных замерах выражения для прогиба посередине образца примут вид

$$t = t_n : \quad w_n = \frac{2}{\pi} \sqrt{l u_0} - w_n^{visco} - w_n^\omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, с течением времени параметры w^{visco} и w^ω , вызванные вязкоупругостью и деградацией, будут увеличиваться. В итоге получим серию экспериментальных данных, по которым методом идентификации можно определить механические характеристики, входящие в формулы (2) и (3).

3. Метод численного решения

Предложен подход к решению задачи о продольном изгибе балки, который может значительно уменьшить время расчета. Он будет полезен и в задачах оптимизации, а не только при идентификации механических характеристик материала балки, поскольку в этих задачах обычно требуется большое количество расчетов с разными вариантами исходных данных. Этот подход может быть использован и в тех случаях, когда результирующая конфигурация балки представляет собой

пологую кривую, поскольку следующие ниже соотношения (4) и (5) получены с использованием этого предположения [38].

Рассмотрим изогнутый стержень, как показано на рис. 2. При продольном изгибе в случае упругого деформирования параметры P и w_0 связаны приближенным соотношением [35, 38]

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \left(1 + \frac{\pi^2 w_0^2}{8l^2} \right), \quad (4)$$

где EJ – жесткость стержня.

Зададим изогнутую форму оси стержня по формуле

$$w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (5)$$

Продольное перемещение правого торца будет иметь вид [38]

$$u = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l}.$$

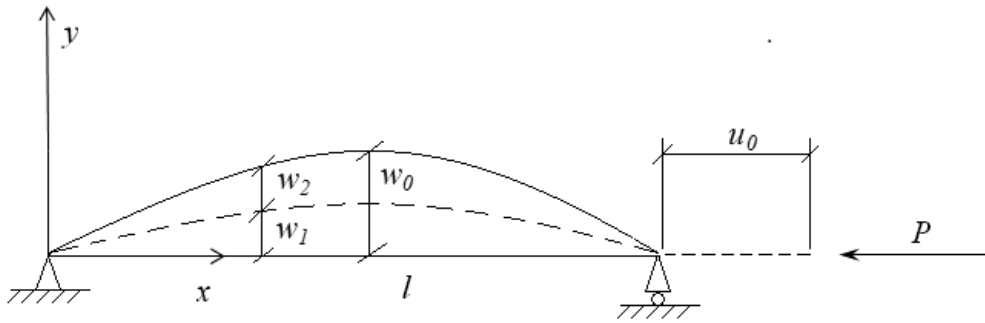


Рис. 2. Модель изгиба стержня продольной силой P

Сведем задачу к геометрически линейной постановке. Считаем, что

$$w_0 = w_1 + w_2.$$

Из соотношения (4) выразим w_0 :

$$w_0 = \frac{l 2\sqrt{2}}{\pi^2} \sqrt{\frac{Pl^2 - \pi^2 EJ}{EJ}}.$$

Согласно закону Гука можно записать выражение для изгибающего момента в виде

$$M = EJw_2''. \quad (6)$$

Если задача сформулирована в геометрически линейной постановке, то согласно рис. 2 изгибающий момент примет вид

$$M = -Pw_1. \quad (7)$$

Тогда согласно выражениям (6) и (7) можно записать в форме

$$EJw_2'' = -Pw_1,$$

$$w_0 \left(\sin \frac{\pi x}{l} \right)'' = \frac{1}{EJ} P w_1 + w_1'' \quad (8)$$

Решив дифференциальное уравнение (8) с учетом условий закрепления, получим аналитическое решение в виде

$$w_1(x) = [w_0 EJ \pi^2 / (Pl^2 + EJ \pi^2)] \sin \frac{\pi x}{l} \quad (9)$$

Далее решим задачу численно МКЭ. Зададим начальный прогиб w_1 согласно (9) и определим w_2 . В итоге получим выражение

$$w_0 = w_1(l/2) + w_2(l/2).$$

Таким образом, предложенная методика позволяет получать прогибы при продольном изгибе на основе численного решения линейной задачи, например, МКЭ.

Для верификации предложенного подхода рассмотрим задачу о продольном изгибе, которую решим МКЭ в двух постановках. Граничные условия в численных моделях выберем так, чтобы они соответствовали шарнирно-опертой балке. В первой постановке используем двумерную модель. Рассмотрим брус с начальной погибью, которая определялась по формуле (9).

Во втором варианте задача решалась в геометрически нелинейной постановке МКЭ с помощью пакета ANSYS. Второй вариант задачи был просчитан двумя типами конечных элементов (КЭ): балочными и пластинчатыми. Решения с этими типами КЭ дали отличия не более 3 %. Для обеспечения изгиба бруса была задана начальная погибь, но она принималась малой: $w_1 \ll w_0$ ($w_1 < 0.02 w_{\max}$).

На рис. 3 приведены зависимости P/P_{cr} от u_0/l для аналитического решения и решения в геометрически нелинейной постановке (P_{cr} – это критическое напряжение, вычисляемое по формуле Эйлера для шарнирно-опертого стержня). Входные данные: модуль упругости $E = 500000$ кг/см²; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; высота образца $h = 0.6$ см; ширина образца $b = 1$ см. Вычислительные эксперименты проводились для разных длин образца: $l = 18$ см, $l = 30$ см, $l = 42$ см. Расчеты показали, что аналитическое решение и решение, полученное для задачи в первой постановке, оказались близкими. Сравнение результатов расчетов показало, что отличие численного решения задачи в геометрически нелинейной постановке от решения предложенным методом для $l = 18$ см составляет 7%, а для длины $l = 42$ см – 5.3 %.

Отметим, что нарушение условия пологости не очень сильно ухудшает результат. Например, при $l = 18$ см угол наклона получается равным $\arctan(1.48) = 56^\circ$. При этом результаты, полученные аналитически и численно в геометрически нелинейной постановке, отличаются всего на 7 %.

Заключение и выводы

Таким образом, предложена методика решения задачи продольного изгиба при расчете балки с начальной погибью без привлечения геометрически нелинейных соотношений, которая позволяет получать хорошие результаты даже при больших перемещениях. Как видно из рис. 3, продольное перемещение составляет 56 % от длины балки, а отличие нагрузки, полученной при этом предложенным методом, – 7 %.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета (“ПРИОРИТЕТ-2030”).

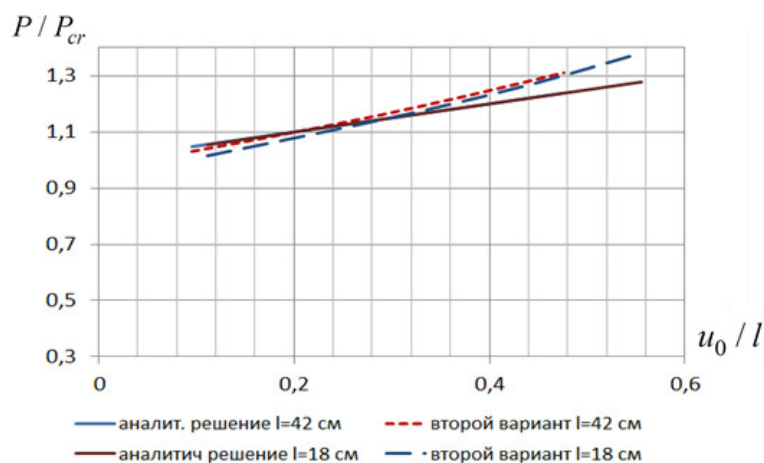


Рис. 3. Зависимость P/P_{cr} от u_0/l для аналитического решения и решения в геометрически нелинейной постановке

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Васильев В.В., Дудченко А.А., Елпатьевский А.Н. Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении // Механ. полимеров. 1970. № 1. С. 144–147.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.
3. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Самарск. ун-т, 2001. 631 с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
5. Cocks A.C.F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material // Scr. Metall. 1982. V. 16, No 1. P. 109–114. [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(82\)90413-6](https://doi.org/10.1016/0036-9748(82)90413-6).
6. Ахундов М.Б. Повреждаемость и деформирование нелинейных наследственных сред при сложнапряженном состоянии // Мех. композ. матер. 1991. № 2. С. 235–239.
7. Суворова Ю.В. О критерии прочности, основанном на накоплении повреждений, и его приложениях к композитам // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 4. С. 107–111.
8. Думанский А.М., Финогенов Г.Н. Методика оценки поврежденности полимерных волокнистых композитов при длительном статическом нагружении // Завод. лаб. 1993. № 4. С. 60–62.
9. Москвитин В.В. Некоторые вопросы длительной прочности вязко-упругих тел // Пробл. прочн. 1972. № 2. С. 55–58.
10. Луат Д.Ч., Лурье С.А., Дудченко А.А. Моделирование деградации свойств композита при растрескивании и расслоении при статическом и циклическом нагружении // МКМК. 2008. Т. 14, № 4. С. 623–637.
11. Божоева Л.А. Особенности расчёта на прочность элементов конструкций из изотропных и композиционных материалов с допустимыми дефектами. Улан-Удэ: ВСГТУ, 2007. 192 с.

12. *Брянский А.А., Башков О.В., Проценко А.Е., Малышева Д.П.* Исследование кинетики накопления повреждений в стеклопластике при испытании изгибом и растяжением // Матер. IV Всерос. нац. научн. конф. студ., аспирант. и молод. учен. В 4-х частях. 2021. С. 12–15.
13. *Локощенок А.М., Агахи К.А., Фомин Л.В.* Изгиб балки при ползучести с учетом поврежденности и разносопротивляемости материала // Машиностр. инженер. образов. 2012. № 3. С. 29–35.
14. *Болотин В.В.* Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов // Мех. композ. матер. 1984. № 2. С. 239–255.
15. *Bottega W.J., Maewal A.* Delamination buckling and growth in laminates // J. Appl. Mech. 1983. V. 50, No 1. P. 184–189. <https://doi.org/10.1115/1.3166988>.
16. *Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G.* One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling // Int. J. Solids Struct. 1981. V. 27, No 11. P. 1069–1083. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90014-7).
17. *Muc A., Stawiarski A.* Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations // Compos. Struct. 2012. V. 94, No 5. P. 1871–1879. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.11.026>.
18. *Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A.* Degradation of the mechanical properties of fiber reinforced plastic under cyclic loading // Mech. Compos. Mater. 2023. V. 59, No 2. P. 371–380. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10101-1>.
19. *Каюмов Р.А.* Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 2. С. 94–103.
20. *Терегулов И.Г., Бутенко Ю.И., Каюмов Р.А., Сафиуллин Д.Х., Алексеев К.П.* К определению механических характеристик нелинейно-упругих композитных материалов // Прикл. мех. техн. физ. 1996. Т. 37, № 6. С. 170–180.
21. *Терегулов И.Г., Каюмов Р.А., Бутенко Ю.И., Сафиуллин Д.Х.* Определение механических характеристик композитов по результатам испытаний многослойных образцов // Мех. композ. матер. 1995. Т. 31, № 5. С. 607–615.
22. *Воронцов Г.В., Плющев Б.И., Резниченко А.И.* Определение приведенных упругих характеристик армированных композитных материалов методами обратных задач тензометрирования // Мех. композ. матер. 1990. № 4. С. 733–747.
23. *Суворова Ю.В., Добрынин В.С., Статников И.Н., Барт Ю.Я.* Определение свойств композита в конструкции методом параметрической идентификации // Мех. композ. матер. 1989. № 1. С. 150–157.
24. *Алфутов Н.А., Таирова Л.П.* Возможности определения свойств монослоя в композите // Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов. Рига: Зинатне, 1986. С. 212–215.
25. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Таирова Л.П.* Идентификация упругих характеристик однонаправленных материалов по результатам испытаний многослойных композитов // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. Т. 30. С. 16–31.
26. *Рикардс Р., Чате А.* Идентификация механических свойств композитных материалов на основе планирования экспериментов // Мех. композ. матер. 1998. Т. 34, № 1. С. 3–16.
27. *Frederiksen P.S.* Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates // J. Compos. Mater. 1997. V. 31, No 4. P. 360–382. <https://doi.org/10.1177/002199839703100403>.
28. *Каюмов Р.А.* Связанная задача расчета механических характеристик материалов и конструкций из них // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 6. С. 118–127.

29. Тергулов И.Г., Каюмов Р.А., Фазрутдинов И.Х. Идентификация механических характеристик композитного материала по результатам испытаний оболочек вращения // Мех. композ. матер. 1998. Т. 34, № 6. С. 771–776.
30. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач. М.: МГУ, 1987. 216 с.
31. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
32. Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Тазюков Б.Ф. Моделирование процесса деградации стеклопластика под действием напряжений и щелочной среды // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2. С. 194–205.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.194-205>.
33. Kayumov R.A., Suleymanov A.M., Muhamedova I.Z. Estimation of the durability of polymer composites on a fabric basis, taking into account the influence of non-force factors // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. V. 934, No 1. Art. 012041.
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012041>.
34. Kayumov R.A., Strakhov D.E., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Mathematical models of inelastic behavior of flat fiberglass samples under three-point bending // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, No 10. P. 4448–4456.
<https://doi.org/10.1134/S1995080223100207>.
35. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
36. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
37. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
38. Каюмов Р.А., Нежданов Р.О., Тазюков Б.Ф. Определение характеристик волокнистых композитных материалов методами идентификации. Казань: Изд-во КГУ, 2005. 258 с.

Поступила в редакцию 21.06.2024

Принята к публикации 31.07.2024

Каюмов Рашид Абдулхакович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: Kayumov@rambler.ru

Мухамедова Инзилия Заудатовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики, старший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.Л. Лобачевского

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: Muhamedova-inzilija@mail.ru

Хайдаров Ленар Ильнурович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры металлических конструкций и испытания сооружений

Казанский государственный архитектурно-строительный университет
ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия
E-mail: haidarov_lenar@mail.ru

Тазюков Булат Фэридович, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной деятельности Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 3, pp. 364–376

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.364-376

On the Problem of Composite Beam Degradation under Longitudinal Bending and the Solution Method for Large Displacements

R.A. Kayumov^{a}, I.Z. Mukhamedova^{a,b**}, L.I. Khaidarov^{a***}, B.F. Tazyukov^{b****}*

^a*Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia*

^a*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*

E-mail: **Kayumov@rambler.ru*, ***Muhamedova-inziliya@mail.ru*, ****haidarov_lenar@mail.ru*,
*****Bulat.Tazioukov@kpfu.ru*

Received June 21, 2024; Accepted July 31, 2024

Abstract

Constitutive relations and a method for analyzing the behavior of fiberglass during longitudinal bending under the combined influence of force factors and an alkaline medium were proposed. Both natural and numerical experimental designs were outlined. A new approach to solving the problem of longitudinal bending of a fiberglass beam with initial failure was introduced, without involving geometrically nonlinear relations. This approach proved to be applicable when the resulting beam configuration is a flat curve. The results of numerical calculations were presented. In the first case, the beam with initial failure was studied using the new approach along with the finite element method (FEM). In the second case, for verification, the problem was solved in a geometrically nonlinear formulation. The results obtained showed a strong agreement.

Keywords: fiberglass, finite element model, geometric nonlinearity, alkaline medium, failure parameter, numerical experiment

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Model of a fiberglass sample placed in an alkaline medium with the concentration γ .

Fig. 2. Model of a beam bending under the longitudinal force P .

Fig. 3. Dependence of P/P_{cr} on u_0/l for the analytical and geometrically nonlinear solutions.

References

1. Vasil'ev V.V., Dudchenko A.A., Elpat'evskii A.N. Analysis of the tensile deformation of glass-reinforced plastics. *Polym. Mech.*, 1970, vol. 6, no. 1, pp. 127–130. <https://doi.org/10.1007/BF00860460>.
2. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogosloinykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov* [Design of Multilayered Plates and Shells Made of Composite Materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 263 p. (In Russian)
3. Astaf'ev V.I., Radaev Yu.N., Stepanova L.V. *Nelineinaya mekhanika razrusheniya* [Non-linear Fracture Mechanics]. Samara, Samar. Univ., 2001. 631 p. (In Russian)
4. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksii* [Creep of Structural Elements]. Moscow, Nauka, 1966. 752 p. (In Russian)
5. Cocks A.C.F., Ashby M.F. The growth of dominant crack in a creeping material. *Scr. Metall.*, 1982, vol. 16, no. 1, pp. 109–114. [https://doi.org/10.1016/0036-9748\(82\)90413-6](https://doi.org/10.1016/0036-9748(82)90413-6).
6. Akhundov M.B. Damage and deformation of nonlinear hereditary media in a complex stress state. *Mech. Compos. Mater.*, 1991, vol. 27, no. 2, pp. 155–158. <https://doi.org/10.1007/BF00614731>.
7. Suvorova Yu.V. Strength criterion based on defectiveness buildup and its application to composite materials. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1979, no. 4, pp. 107–111. (In Russian)
8. Dumanskii A.M., Finogenov G.N. Methodology for assessing the damage in polymer fiber composites during prolonged static loading. *Zavod. Lab.*, 1993, no. 4, pp. 60–62. (In Russian)
9. Moskvitin V.V. Some problems of the long-term strength of viscoelastic media. *Probl. Prochn.*, 1972, no. 2, pp. 55–58. (In Russian)
10. Luat D. C., Lurie S. A., Dudchenko A. A. Modeling the degradation of composite properties due to cracking and delamination under static and cyclic loadings. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2008, vol. 14, no. 4, pp. 623–637. (In Russian)
11. Bokhoeva L.A. *Osobennosti rascheta na prochnost' elementov konstruksii iz izotropnykh i kompozitsionnykh materialov s dopustimymi defektami* [Strength Calculation for Structural Elements Made of Isotropic and Composite Materials with Minor Defects]. Ulan-Ude, VSGTU, 2007. 192 p. (In Russian)
12. Bryanskii A.A., Bashkov O.V., Protsenko A.E., Malysheva D.P. A study of damage accumulation kinetics in fiberglass during buckling and stretching tests. *Mater. IV Vseros. nats. nauchn. konf. stud., aspir. i molod. uchen.* [Proc. IV All-Russ. Natl. Sci. Conf. of Students, Graduate Students, and Young Researchers]. 2021, pp. 12–15. (In Russian)
13. Lokoshchenko A.M., Agakhi K.A., Fomin L.V. Beam bending under creep conditions considering material failure and varying resistance. *Mashinostr. Inzh. Obraz.*, 2012, no. 3, pp. 29–35. (In Russian)
14. Bolotin V.V. Defects of the delamination type in composite structures. *Mech. Compos. Mater.*, 1984, vol. 20, no. 2, pp. 173–188. <https://doi.org/10.1007/BF00610358>.
15. Bottega W.J., Maewal A. Delamination buckling and growth in laminates. *J. Appl. Mech.*, 1983, vol. 50, no. 1, pp. 184–189. <https://doi.org/10.1115/1.3166988>.
16. Chai H., Babcock C.D., Knauss W.G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling. *Int. J. Solids Struct.*, 1981, vol. 27, no. 11, pp. 1069–1083. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(81\)90014-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(81)90014-7).
17. Muc A., Stawiarski A. Identification of damages in composite multilayered cylindrical panels with delaminations. *Compos. Struct.*, 2012, vol. 94, no. 5, pp. 1871–1879. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.11.026>.

18. Paimushin V.N., Kayumov R.A., Kholmogorov S.A. Degradation of the mechanical properties of fiber reinforced plastic under cyclic loading. *Mech. Compos. Mater.*, 2023, vol. 59, no. 2, pp. 371–380. <https://doi.org/10.1007/s11029-023-10101-1>.
19. Kayumov R.A. Extended problem of the identification of mechanical characteristics of materials on the basis of testing of structures. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 2004, no. 2, pp. 94–103. (In Russian)
20. Teregulov I.G., Butenko Yu.I., Kayumov R.A., Safiullin D.Kh., Alekseev K.P. On determining the mechanical properties of nonlinear-elastic composite materials. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1996, vol. 37, no. 6, pp. 917–925. <https://doi.org/10.1007/BF02369273>.
21. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Butenko Yu.I., Safiullin D.Kh. Determination of the mechanical indices of composite materials by testing multilayered samples. *Mech. Compos. Mater.*, 1996, vol. 31, no. 5, pp. 446–452. <https://doi.org/10.1007/BF00617127>.
22. Vorontsov G.V., Plyushchev B.I., Reznichenko A.I. Determining the reduced elastic characteristics of reinforced composite materials using the methods of inverse tensometric problems. *Mech. Kompoz. Mater.*, 1990, no. 4, pp. 733–747. (In Russian)
23. Suvorova Yu.V., Dobrynin V.S., Statnikov I.N. Determining the properties of a composite in a structure by the parametric-identification method. *Mech. Compos. Mater.*, 1989, vol. 25, no. 1, pp. 130–136. <https://doi.org/10.1007/BF00608463>.
24. Alfutov N.A., Tairova L.P. Possibilities for determining the properties of a composite monolayer. In: *Metody i sredstva diagnostiki nesushchei sposobnosti izdelii iz kompozitov* [Methods and Tools for Determining the Load-Bearing Capacity of Composite Products]. Riga, Zinatne, 1986, pp. 212–215. (In Russian)
25. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Tairova L.P. Identification of elastic characteristics of unidirectional materials by testing multilayer composites. In: *Raschety na prochnost'* [Strength Calculations]. Vol. 30. Moscow, Mashinostroenie, 1989, pp. 16–31. (In Russian)
26. Rikards R., Chate A. Identification of mechanical properties of composites based on design of experiments. *Mech. Compos. Mater.*, 1998, vol. 34, no. 1, pp. 1–11. <https://doi.org/10.1007/BF02256137>.
27. Frederiksen P.S. Experimental procedure and results for the identification of elastic constants of thick orthotropic plates. *J. Compos. Mater.*, 1997, vol. 31, no. 4, pp. 360–382. <https://doi.org/10.1177/002199839703100403>.
28. Kayumov R.A. Identification of mechanical characteristics of materials and design of structures made of these materials. *Izv. Ross. Akad. Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1999, no. 6, pp. 118–127. (In Russian)
29. Teregulov I.G., Kayumov R.A., Fakhрутдинov I.H. Identification of the mechanical characteristics of composite materials from experimental data of shells of revolution. *Mech. Compos. Mater.*, 1998, vol. 34, no. 6, pp. 545–548. <https://doi.org/10.1007/BF02254663>.
30. Morozov V.A. *Metody regulyarizatsii neustoichivyykh zadach* [Regular Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, MGU, 1987. 216 p. (In Russian)
31. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnyykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka, 1979. 285 p. (In Russian)
32. Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Modeling of fiberglass degradation process under stresses and alkaline environment. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 194–205. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.194-205>. (In Russian)
33. Kayumov R.A., Suleymanov A.M., Muhamedova I.Z. Estimation of the durability of polymer composites on a fabric basis, taking into account the influence of non-force factors. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 934, no. 1, art. 012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/934/1/012041>.

34. Kayumov R.A., Strakhov D.E., Mukhamedova I.Z., Tazyukov B.F. Mathematical models of inelastic behavior of flat fiberglass samples under three-point bending. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 10, pp. 4448–4456. <https://doi.org/10.1134/S1995080223100207>.
35. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow, Nauka, 1979. 744 p. (In Russian)
36. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Principles of Fracture Mechanics]. Moscow, Nauka, 1974. 312 p. (In Russian)
37. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied Theory of Plasticity and Creep]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 400 p. (In Russian)
38. Kayumov R.A., Nezhdanov R.O., Tazyukov B.F. *Opredelenie kharakteristik voloknistykh kompozitnykh materialov metodami identifikatsii* [Determining Fiber Composite Material Characteristics by the Identification Methods]. Kazan, Izd. KGU. 2005. 258 p. (In Russian)

Для цитирования: Каюмов Р.А., Мухамедова И.З., Хайдаров Л.И., Тазюков Б.Ф.

О задаче деградации композитных балок при продольном изгибе и методе решения при больших перемещениях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 364–376. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.364-376>.

For citation: Kayumov R.A., Mukhamedova I.Z., Khaidarov L.I., Tazyukov B.F.

On the problem of composite beam degradation under longitudinal bending and the solution method for large displacements. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 364–376. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.364-376>. (In Russian)