

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.724.2

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.306-319

ПРОПУСКНАЯ СПОСОБНОСТЬ КАНАЛА СВЯЗИ С КВАДРАТУРНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ И ФАЗОВЫМ КВАНТОВАТЕЛЕМ

Ю.А. Брычков¹, Н.В. Савищенко²

¹Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия

²Военная академия связи им. С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

Аннотация

Рассмотрено влияние на пропускную способность канала связи $C_{M,L}$ числа L уровней фазового квантования выхода канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) в системе связи, использующей сигналы квадратурной фазовой модуляции (ФМ-4).

Ключевые слова: пропускная способность, информационная ёмкость, матрица переходных вероятностей, квантование, сигналы QPSK (quadrature phase-shift keying), сигналы ФМ-4, функция Гаусса, функция Оуэна

Введение

Одной из характеристик канала связи является пропускная способность, которая представляет собой теоретический предел скорости, при которой потенциально возможна надежная передача информации. Канал связи, с точки зрения теории информации, представляет собой множество входных и выходных символов и соответствующую матрицу переходных вероятностей (распределение переходных вероятностей канала). Если рассматривается ситуация, когда переходные вероятности постоянны во времени и переходы различных символов независимы, то это случай дискретного канала связи без памяти [1, 2]. При использовании многопозиционных сигналов и аналого-цифрового преобразователя с квантованием по уровню (или по фазе) дискретный канал без памяти преобразуется в расширенный канал связи с M -ным входом и L -ным выходом. Такие схемы квантования применяются в современных системах декодирования с “мягким” решением, когда $L > M$ (мягкий квантователь или многоуровневое квантование). Случай $L = M$ соответствует “жесткому” решению (жесткий квантователь или двухуровневое квантование). Режим без квантования соответствует режиму с бесконечным числом уровней квантования $L \rightarrow \infty$. При больших значениях сигнал/шум “мягкое” декодирование эффективнее “жесткого” на 3 дБ, а при реальных значениях отношения сигнал/шум – на 2 дБ [1, 2].

Целью работы является решение задачи, позволяющей оценить влияние числа уровней квантования L на пропускную способность канала связи. Для многофазных сигналов может быть удобнее реализовывать не амплитудное квантование, а квантование по фазе.

Цифровая реализация декодера подразумевает использование квантования на конечном числе уровней L выхода канала $y(t)$, представляющего собой при использовании канала связи с АБГШ непрерывный гауссовский случайный процесс. Рассмотрим квантование по фазе (фазовое квантование) для многопозиционной фазовой модуляции (ФМ- M) [1–5] для случая $M = 4$, т.е. для сигналов квадратурной фазовой модуляции (QPSK, Quadrature Phase-Shift Keying). Канал связи без памяти с дискретным входом и аддитивным белым гауссовским шумом, представляющий собой канал без памяти с дискретными входным и непрерывным выходным алфавитами, с помощью квантования может быть сведен к дискретному каналу связи. Квантование выхода канала на L уровней преобразует АБГШ-канал в канал связи с конечными алфавитами на входе и выходе. При использовании в системе передачи M сигналов и L уровней квантования, $L \geq M$, полученный канал может быть описан матрицей переходных вероятностей размером $M \times L$.

1. Основные соотношения для канала связи с АБГШ, ФМ-4 и фазовым квантованием выхода

Пусть задан канал с детерминированными параметрами, АБГШ, дискретным (с шагом T_s) временем, L -уровневым (равномерным) симметричным фазовым квантованием выхода, где $L = 2^n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), и использованием сигнала ФМ-4 (QPSK) [1, 4, 5]. Пусть $T_s = T_b \log_2 M$ – длительность сигналов фазовой модуляции, $E_s = P_s T_s$ и P_s – средняя за время T_s энергия и мощность сигнала соответственно, N_0 – односторонняя спектральная плотность мощности АБГШ и, соответственно, $\lambda_s \stackrel{\text{def}}{=} P_s/N_0 = \text{const}(T_s)$, $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} E_s/N_0 = \lambda_s T_s$. Пусть $\Pi(\lambda_s T_s) = \|P(q_j/r)\|_{r=0;j=0}^{M-1,L-1} = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\|_{r=0;j=0}^{M-1,L-1}$ – заданная указанными условиями $M \times L$ -матрица переходных вероятностей канала, $M = 4$.

Математическая модель канала связи с АБГШ и QPSK: $y(t) = s_r(t) + n(t)$, $t \in [0, T_s]$; $s_r(t)$, $r = 0, \dots, 3$, – равновероятные сигналы QPSK с максимальной (средней) энергией E_s . Здесь $n(t)$ – аддитивный белый гауссовский шум с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma_n^2 = N_0/2$.

Основное внимание сосредоточено ниже на пропускной способности в единицу времени канала $C_{M,L}$ (для системы сигналов с $M = 4$) с неограниченной полосой и очень большим шумом (определяемым неравенством $N_0 \gg \lambda_s T_s$) [1, с. 152], для чего в рассматриваемой модели канала достаточно перейти к исследованию перехода, предельного для $T_s \rightarrow 0$. Цель и содержание настоящей работы состоят в формулировке и доказательстве следующей теоремы.

Пусть $C_{4,L}^*(\lambda_s T_s)$ – информационная ёмкость канала связи.

Теорема 1. Пропускная способность в единицу времени неограниченного по полосе канала с четверичным ($M = 4$) входом, АБГШ, сигналом QPSK и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, \dots$) равномерным фазовым квантованием выхода при заданной этими условиями матрице переходных вероятностей $\Pi(\lambda_s T_s) = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\|$ и любом фиксированном $\lambda_s = P_s/N_0$ определяется соотношением

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = g_{M,q}^{(p)}(L) \frac{\lambda_s}{\ln 2} = g_{M,q}^{(p)} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F),$$

где $C_{\text{нк}}(F)$ – пропускная способность непрерывного канала связи с АБГШ, $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F) = \lim_{F \rightarrow \infty} F \log_2(1 + \lambda_s/F) = \lambda_s/\ln 2$.

Для множителя $g_{M,q}^{(p)}(L) \stackrel{\text{def}}{=} g_{4,q}^{(p)}(L)$ справедливо выражение

$$g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{1}{8} \sec \frac{\pi}{2L} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2L} \left(\pi \operatorname{sinc} \frac{\pi}{L} + 2 \right),$$

и $\operatorname{sinc} x = \sin x/x$.

Из теоремы следует, что $g_{4,q}^{(p)}(4) = \frac{2}{\pi}$ и $\lim_{L \rightarrow \infty} g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{\pi+2}{8} = 0.642699 \dots < 1$. Случай $L = M = 4$ соответствует “жесткому” решению.

При доказательстве теоремы необходимо все ограничения для рассматриваемой модели канала, оговоренные выше, формализовано отобразить в $M \times L$ -матрице переходных вероятностей $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\lambda_s T_s)$ и показать, что модели соответствует четверичный по входу и L -уровневый строго симметричный канал по входу.

2. Пропускная способность для канала связи с ФМ-М и АБГШ. Жесткий квантователь

2.1. Матрица переходных вероятностей для сигналов ФМ-М. Рассмотрим канал с детерминированными параметрами и аддитивным белым шумом. Предположим, что задана система сигналов с фазовой модуляцией. Определим для этого случая одномерные условные вероятности при оптимальном когерентном приеме: $\pi_{r,r^*} = P(r^*/r)$, где $r = 0, \dots, M-1$ – переданные M -ные символы; $r^* = 0, \dots, M-1$ – принятые по ним решения. Совокупность одномерных условных вероятностей определяет матрицу переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$. Можно показать, что [4]

$$\begin{aligned} \pi_{00}(\gamma) &= \pi_{kk}(\gamma) = 1 - Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}\right) - 2T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right), \\ \pi_{0k}(\gamma) &= \frac{1}{2} \left[Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k-1)\pi}{M}\right) - Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k+1)\pi}{M}\right) \right] + \\ &\quad + T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k-1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2k-1)\pi}{M}\right) - \\ &\quad - T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{(2k+1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2k+1)\pi}{M}\right), \quad k = 1, \dots, \operatorname{ent}[(M-1)/2]; \\ \pi_{0k}(\gamma) &= \pi_{0,M-k}(\gamma), \quad k = \operatorname{ent}[(M-1)/2] + 1, \dots, M-1; \\ \pi_{0,M/2}(\gamma) &= Q\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}\right) - 2T\left(\sqrt{2\gamma} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), \\ T(z, a) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{1+t^2} e^{-z^2(1+t^2)/2} dt, \quad |\arg a| < \pi \end{aligned}$$

– функции Гаусса и Оуэна соответственно [6, 7].

Матрица переходных вероятностей относится к классу матриц тёплицева типа, т. е. является симметричной относительно двух главных диагоналей, в частности,

$$\begin{aligned} \pi_{km}(\gamma) &= \pi_{mk}(\gamma), \quad k, m = 0, \dots, M-1, \\ \pi_{km}(\gamma) &= \pi_{0,|k-m|}(\gamma), \quad k, m = 1, \dots, M/2-1, \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\mathbf{\Pi}(\gamma) = \begin{pmatrix} \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{02}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-1}(\gamma) \\ \pi_{01}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-2}(\gamma) \\ \pi_{02}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) & \dots & \pi_{0,M-3}(\gamma) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{0,M-1}(\gamma) & \pi_{0,M-2}(\gamma) & \pi_{0,M-3}(\gamma) & \dots & \pi_{0,0}(\gamma) \end{pmatrix}.$$

2.2. Информационная ёмкость и пропускная способность симметричного дискретного канала связи. Дискретный канал называется симметричным по входу, если все строки матрицы переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первой строки, и симметричным по выходу, если все столбцы матрицы $\mathbf{\Pi}$ образованы перестановками элементов первого столбца [3]. Дискретный канал называется симметричным, если он симметричен и по входу, и по выходу. Проанализировав матрицу переходных вероятностей $\mathbf{\Pi}$, нетрудно убедиться в том, что данный дискретный канал является симметричным. Информационная ёмкость $C_{M,M}^*(\lambda_s, T_s)$ и соответствующая ей пропускная способность $C_{M,M}(\lambda_s, T_s)$ симметричного дискретного канала без памяти имеют вид [3]

$$C_M^*(\lambda_s, T_s) \stackrel{\text{def}}{=} C_{M,M}^*(\lambda_s, T_s) = \log_2 M + \sum_{k=0}^{M-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma), \quad [\text{бит/символ}],$$

$$C_M(\lambda_s, T_s) = \frac{1}{T_s} C_M^*(\lambda_s, T_s), \quad [\text{бит/с}],$$

где $\pi_{0k}(\gamma)$, $k = 0, \dots, M-1$, – элементы первой строки матрицы переходных вероятностей.

При фиксированном значении $\lambda_s = P_s/N_0$ можно так изменять длительность канальных символов T_s и, соответственно, скорость передачи, что будет обеспечиваться наибольшая пропускная способность канала связи:

$$\begin{aligned} C_M^{\max}(\lambda_s) &= \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_M^*(\lambda_s, T_s) = \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} \left[\log_2 M + \sum_{k=0}^{M-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) \right] = \\ &= \lambda_s \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \left[\log_2 M + \pi_{00}(\gamma) \log_2 \pi_{00}(\gamma) + \right. \\ &\quad \left. + \pi_{0,M/2}(\gamma) \log_2 \pi_{0,M/2}(\gamma) + 2 \sum_{k=0}^{M/2-1} \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Нетрудно убедиться, что для $k = 1, \dots, M/2 - 1$

$$\begin{aligned} \pi_{00}(\gamma) \log_2 \pi_{00}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} + \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1 - \ln M}{\pi} \cos \frac{\pi}{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} \right] \sin \frac{\pi}{M} \gamma + O(\gamma^{3/2}), \\ \pi_{0,M/2}(\gamma) \log_2 \pi_{0,M/2}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} - \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \frac{1}{\ln 2} \left[\frac{1 - \ln M}{\pi} \cos \frac{\pi}{M} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{M} \right] \sin \frac{\pi}{M} \gamma + O(\gamma^{3/2}), \\ \pi_{0k}(\gamma) \log_2 \pi_{0k}(\gamma) &= -\frac{\log_2 M}{M} + \frac{1 - \ln M}{\sqrt{\pi} \ln 2} \sin \frac{\pi}{M} \cos \frac{2k\pi}{M} \sqrt{\gamma} + \\ &+ \frac{1}{2\pi \ln 2} \left[M \sin^2 \frac{\pi}{M} \cos^2 \frac{2k\pi}{M} + (1 - \ln M) \sin \frac{2\pi}{M} \cos \frac{4k\pi}{M} \right] \gamma + O(\gamma^{3/2}). \end{aligned}$$

Подставив эти формулы в (1), получим

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lambda_s = \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \frac{P_s}{N_0},$$

где $M = 2^K$, $K = 2, 3, \dots$. Случай $M = 2$ рассматривается отдельно и приводит к результату $C_2^{\max}(\lambda_s) = \frac{2}{\pi \ln 2} \lambda_s$. Таким образом, окончательно получим

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \begin{cases} \frac{\pi}{4 \ln 2} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lambda_s, & M \geq 3; \\ \frac{2}{\pi \ln 2} \lambda_s, & M = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{C_M^{\max}(\lambda_s)}{C_2^{\max}(\lambda_s)} = \frac{\pi^2}{8} = 1.2337 \dots$. Таким образом, переход от двоичных сигналов ФМ-2 (BPSK) к многопозиционным сигналам ФМ- M (MPSK) при $M \gg 1$ и $\gamma \ll 1$ увеличивает пропускную способность дискретного канала $C_M^{\max}(\lambda_s)$ не более чем в $\pi^2/8$ раз. При этом, если $\gamma \gg 1$, то пропускная способность дискретного канала возрастает практически пропорционально $\log_2 M$. Кроме того, пропускная способность данного дискретного канала (при условии, что в непрерывном канале $F \rightarrow \infty$) меньше в $\frac{4}{\pi} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M}$ при $M > 3$ и в $\frac{\pi}{2}$ при $M = 2$ по сравнению с пропускной способностью $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)$, соответствующей непрерывному каналу с АБГШ при $F \rightarrow \infty$:

$$C_M^{\max}(\lambda_s) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi}{M} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F),$$

так как $\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F) = \lim_{F \rightarrow \infty} F \log_2(1 + \lambda_s/F) = \lambda_s / \ln 2$. В частности, для сигналов ФМ-4 (QPSK) $C_4^{\max}(\lambda_s) = \frac{2}{\pi} \lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)$.

Кроме того, отсюда следует, что $\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{C_M^{\max}(\lambda_s)}{\lim_{F \rightarrow \infty} C_{\text{нк}}(F)} = \frac{\pi}{4} = 0.785398 \dots$. Таким образом, при $F \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ и неограниченной сложности корректирующего (помехоустойчивого) кодирования существенное ограничение на выбор сигнальной конструкции, выражающееся в применении сигналов ФМ- M , уменьшает пропускную способность дискретного канала лишь в $\frac{4}{\pi} = 1.273$ раз по сравнению со случаем, когда нет никаких ограничений на выбор сигнальных конструкций.

3. Матрица переходных вероятностей для канала связи с АБГШ, ФМ-4 и фазовым квантованием выхода

Фазовый квантователь. При использовании фазового квантователя (рис. 1), применив [4], получим, что элементы матрицы переходных вероятностей примут вид

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = & 2 \left[T \left(\sin \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \right) - \right. \\ & \left. - T \left(\sin \frac{(L/M - k)\pi}{L} \sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(L/M - k)\pi}{L} \right) \right] + \\ & + Q \left(\sin \frac{(L/M - k - 1)\pi}{L} \sqrt{2\gamma} \right) - Q \left(\sin \frac{(L/M - k)\pi}{L} \sqrt{2\gamma} \right), \end{aligned}$$

$$k = 0, \dots, L/M - 2;$$

$$\pi_{0,L/M-1}(\gamma) = 1 - 2T\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{\pi}{L}\right) - Q\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right);$$

$$\pi_{0,k}(\gamma) = 2\left[T\left(\sin \frac{k\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{k\pi}{L}\right) - T\left(\sin \frac{(k+1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{(k+1)\pi}{L}\right)\right],$$

$$k = L/M, \dots, 2L/M - 2;$$

$$\pi_{0,2L/M-1}(\gamma) = 2T\left(\cos \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{\pi}{L}\right);$$

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = & 2\left[T\left(\cos \frac{(L/M-k)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(L/M-k)\pi}{L}\right) - \right. \\ & \left. - T\left(\cos \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\right)\right] + \\ & + Q\left(\cos \frac{(L/M-k)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right) - Q\left(\cos \frac{(L/M-k-1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right), \end{aligned}$$

$$k = 2L/M, \dots, 3L/M - 2;$$

$$\pi_{0,3L/M-1}(\gamma) = Q\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}\right) - 2T\left(\sin \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \cot \frac{\pi}{L}\right);$$

$$\begin{aligned} \pi_{0,k}(\gamma) = \pi_{0,k-2L/M} = & 2\left[T\left(\cos \frac{(k+1)\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{(k+1)\pi}{L}\right) - \right. \\ & \left. - T\left(\cos \frac{k\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{k\pi}{L}\right)\right], \quad k = 3L/M, \dots, 4L/M - 2; \end{aligned}$$

$$\pi_{0,4L/M-1}(\gamma) = \pi_{2L/M-1,0}(\gamma) = 2T\left(\cos \frac{\pi}{L}\sqrt{2\gamma}, \tan \frac{\pi}{L}\right).$$

Учитывая свойства сигналов QPSK, получим, что

$$\pi_{1,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1; \end{cases}$$

$$\pi_{2,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+2L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-2L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-2L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1; \end{cases}$$

$$\pi_{3,k}(\gamma) = \begin{cases} \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = 0, \dots, L/M - 1; \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma), & k = L/M, \dots, 2L/M - 1; \\ \pi_{0,k-L/M}(\gamma), & k = 2L/M, \dots, 3L/M - 1; \\ \pi_{0,k-3L/M}(\gamma), & k = 3L/M, \dots, 4L/M - 1. \end{cases}$$

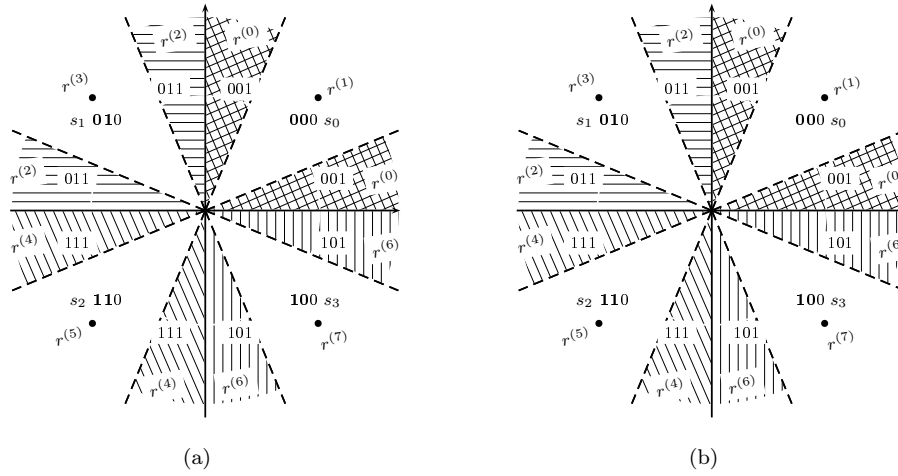


Рис. 1. Сигнал QPSK: а) Фазовый квантователь $L = 8$; б) Фазовый квантователь $L = 16$ (для секторов принято обозначение вида $r^{(\ell)} = r_k \& r^{*(\ell)}$, $\ell = 0, \dots, L-1$, $k = 0, \dots, M-1$, где r_k – код отображения Грея для сигналов QPSK ($M = 4$), $r^{(\ell)}$ – код квантования)

4. Информационная ёмкость симметричного в широком смысле канала связи

Информационная ёмкость [бит/символ] канала с M -ным входом, АБГШ и L -уровневым квантованием выхода при заданной этими условиями матрице переходных вероятностей $\Pi = \|\mathbf{P}(q_j/r)\|$ определена К. Шенноном [1, 3] соотношением

$$C_{M,L}^*(\gamma) = \max_{\mathbf{P}(r)} I(R, Q) = H(Q) - H(Q/R) = \max_{\mathbf{P}(r)} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} \mathbf{P}(r) \mathbf{P}(q_j/r) \log_2 \frac{\mathbf{P}(q_j/r)}{\sum_{r'=0}^{M-1} \mathbf{P}(r') \mathbf{P}(q_j/r')}.$$

В канале с АБГШ и ФМ-4 (QPSK) матрица переходных вероятностей $\Pi(\gamma) = \|\mathbf{P}(q_j/r)\| = \|\pi_{rj}(\lambda_s T_s)\| = \|\pi_{rj}(\gamma)\| \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{rj}\|$ имеет следующий вид:

$$\Pi(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_{00}(\gamma) & \pi_{01}(\gamma) & \pi_{02}(\gamma) & \pi_{03}(\gamma) & \dots & \pi_{0,L-2}(\gamma) & \pi_{0,L-1}(\gamma) \\ \pi_{10}(\gamma) & \pi_{11}(\gamma) & \pi_{12}(\gamma) & \pi_{13}(\gamma) & \dots & \pi_{1,L-2}(\gamma) & \pi_{1,L-1}(\gamma) \\ \pi_{20}(\gamma) & \pi_{21}(\gamma) & \pi_{22}(\gamma) & \pi_{23}(\gamma) & \dots & \pi_{2,L-2}(\gamma) & \pi_{2,L-1}(\gamma) \\ \pi_{30}(\gamma) & \pi_{31}(\gamma) & \pi_{32}(\gamma) & \pi_{33}(\gamma) & \dots & \pi_{3,L-2}(\gamma) & \pi_{3,L-1}(\gamma) \end{bmatrix}.$$

С учетом полученных результатов получим, что матрица переходных вероятностей $\Pi(\gamma)$ примет вид $\Pi(\gamma) = [\Pi_1(\gamma) \mid \Pi_2(\gamma) \mid \Pi_3(\gamma) \mid \Pi_4(\gamma)]$:

$$\Pi(\gamma) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \end{matrix} & \begin{matrix} \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \end{matrix} \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{c|c} \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,2L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,3L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) & \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) \\ \pi_{0,L/M}(\gamma) \dots \pi_{0,2L/M-1}(\gamma) & \pi_{00}(\gamma) \dots \pi_{0,L/M-1}(\gamma) \end{array} \right].$$

Пусть $\pi_k(\gamma) = (\pi_{0,k}(\gamma), \dots, \pi_{0,k+L/M-1}(\gamma))$, $k = 0, L/M, 2L/M$ – вектор-строка, тогда матрица переходных вероятностей может быть представлена в виде

$$\Pi(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) \\ \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) \\ \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) \\ \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_{2L/M}(\gamma) & \pi_{L/M}(\gamma) & \pi_0(\gamma) \end{bmatrix}.$$

При таком представлении матрица переходных вероятностей $\Pi(\gamma)$ является бисимметричной (симметричной относительно главной и побочной диагоналей) и относится к типу матриц Тёплица (на диагоналях, параллельных главной, находятся одинаковые элементы – в данном случае вектора).

Дискретный канал является симметричным по входу, так как, используя элементы первой строки, можно образовать строки со второй по четвертую.

Для расчета пропускной способности (информационной ёмкости) по точной формуле необходимо показать, что матрица переходных вероятностей может быть представлена в виде $\Pi = [\mathbf{P}_0 \ \mathbf{P}_1 \ \dots]$, где $\mathbf{P}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – матрицы, соответствующие симметричному каналу связи (симметричность по входу и выходу).

Для этого матрицы $\mathbf{P}_k$ строятся следующим образом. Из каждой матрицы $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ выбираются столбцы с одинаковыми номерами. Следовательно, из матрицы Π выбираются столбцы с номерами $k, k + L/M, k + 2L/M, k + 3L/M$, где $k = 0, \dots, L/M - 1$. Перестановкой столбцов матрица $\Pi(\gamma)$ представима в виде клеточной матрицы $\Pi(\gamma) = [\mathbf{P}_0(\gamma) \ \mathbf{P}_1(\gamma) \ \dots \ \mathbf{P}_{L/M-1}(\gamma)]$, где матрица $\mathbf{P}_k(\gamma)$ при $k = 0, \dots, L/M - 1$

$$\mathbf{P}_k(\gamma) = \begin{bmatrix} \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) \\ \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) & \pi_{0,k+L/M}(\gamma) & \pi_{0,k}(\gamma) \end{bmatrix} \quad (3)$$

удовлетворяет условию симметрии и по входу, и по выходу канала, т.е. матрице Π соответствует определение понятия “строго симметричного канала по входу” дискретного канала [3] или понятие “симметричного в широком смысле” канала [8]. Для такого канала максимум взаимной информации достигается при равновероятных символах входного алфавита $P(r) = 1/M$ [3, 8].

Найдем $H(Q)$, учитывая, что при равномерном распределении на входе канала и применении формулы полной вероятности выражение для энтропии будет равно

$$H(Q) = -M \sum_{k=0}^{L/M-1} P(q_k) \log_2 P(q_k),$$

где

$$P(q_k) = \sum_r P(r) P(q_k/r) = \frac{1}{M} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)].$$

Аналогично

$$H(Q/R) = - \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)].$$

В соответствии с (2), (3) информационная ёмкость [бит/символ] канала с четверичным ($M = 4$) входом, АБГШ и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, 4, \dots$) симметричным и равномерным фазовым квантованием выхода примет вид

$$C_{4,L}^*(\gamma) = \log_2 M - \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \quad (4) \\ \times \log_2 [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] + \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma) \log_2 \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)],$$

где выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] = 1.$$

После несложных преобразований получим, что для сигналов QPSK и L -уровневым фазовым квантованием выхода

$$C_{M,L}^*(\gamma) = \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \quad (5) \\ \times \left[\log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \right. \\ \rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ \left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right],$$

где

$$\mathcal{H}_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -x_1 \log_2 x_1 - x_2 \log_2 x_2 - \dots - \\ - (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}) \log_2 (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots,$$

– энтропийная функция.

При $\gamma = E_s/N_0 \rightarrow \infty$ и $\lambda_s = P_s/N_0 \rightarrow \infty$ из (4) и (5) следует, что информационная ёмкость канала ([бит/символ]) с четверичным ($M = 4$) входом, сигналом ФМ-4 (QPSK), АБГШ и $L = 2^n$ -уровневым ($n = 2, 3, 4, \dots$) фазовым квантованием выхода и, соответственно, его пропускная способность в единицу времени ([бит/с]) приобретают значения

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} C_{M,L}^*(\gamma) = \log_2 M, \quad \lim_{\lambda_s \rightarrow \infty} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = \frac{\log_2 M}{T_s}.$$

5. Фазовый квантователь. Предельная информационная ёмкость и пропускная способность

Пропускная способность для сверхширополосного канала связи, т.е. при $T_s \rightarrow 0$, может быть определена как

$$\begin{aligned} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) &= \lambda_s \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^{L/M-1} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] \times \\ &\times \left[\log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \right. \\ &\rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ &\left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как при $\gamma \rightarrow 0$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} [\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)] = \frac{M}{L}, \quad k = 0, \dots, \frac{L}{M} - 1,$$

получим, что ($M = 4$)

$$\begin{aligned} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) &= \frac{M}{L} \lambda_s \sum_{k=0}^{L/M-1} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\gamma} \left[\log_2 M - \right. \\ &- \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \right. \\ &\rightarrow \frac{\pi_{0,k+L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}, \rightarrow \\ &\left. \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}(\gamma)}{\pi_{0,k}(\gamma) + 2\pi_{0,k+L/M}(\gamma) + \pi_{0,k+2L/M}(\gamma)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя разложение в ряд

$$\begin{aligned} \log_2 M - \mathcal{H}_4 \left(\frac{\pi_{0,k}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}}, \frac{\pi_{0,k+L/M}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}}, \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{\pi_{0,k+2L/M}}{\pi_{0,k} + 2\pi_{0,k+L/M} + \pi_{0,k+2L/M}} \right) = \\ = \begin{cases} \frac{L^2}{8\pi \ln 2} [2 - \sin \frac{2k\pi}{L} - \sin \frac{2(k+1)\pi}{L} + 2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{L} - 2 \cos \frac{\pi}{L}] \gamma + O(\gamma^{3/2}), & k = 0, \dots, L/M - 2; \\ \frac{L^2}{4\pi \ln 2} \sin^2 \frac{\pi}{L} \gamma + O(\gamma^{3/2}), & k = L/M - 1, \end{cases} \end{aligned}$$

после элементарных преобразований получим, что

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^* (\lambda_s T_s) = \frac{L}{4\pi \ln 2} \left(L \sin \frac{\pi}{L} + 2 \right) \tan \frac{\pi}{2L} \frac{P_s}{N_0} = g_{M,q}^{(p)}(L) \frac{\lambda_s}{\ln 2},$$

где ($M = 4$)

$$g_{4,q}^{(p)}(L) = \frac{1}{8} \sec \frac{\pi}{2L} \operatorname{sinc} \frac{\pi}{2L} \left(\pi \operatorname{sinc} \frac{\pi}{L} + 2 \right).$$

Табл. 1

Значения $g_{4,q}^{(p)}(L)$ [в раз и дБ] при фазовом квантовании на $L = 4, \dots, 512, \dots$ уровней

L	4	8	16	32	64
$g_q^{(p)}(L)$	0.636620	0.640941	0.642245	0.642585	0.642670
$10 \lg g_q^{(p)}(L)$	-1.96120	-1.93182	-1.92299	-1.92070	-1.92012
L	128	256	512	1024	∞
$g_q^{(p)}(L)$	0.642692	0.642697	0.642699	0.642699	0.642699
$10 \lg g_q^{(p)}(L)$	-1.91997	-1.91994	-1.91993	-1.91992	-1.91992

В частности, при $L = 4$, $L = 8$ и $L = 16$ (табл. 1)

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,4}^*(\lambda_s T_s) = \frac{2}{\pi \ln 2} \frac{P_s}{N_0} = 0.636620 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0},$$

$$\lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,8}^*(\lambda_s T_s) = 0.640941 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}, \quad \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{4,16}^*(\lambda_s T_s) = 0.642245 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}$$

соответственно.

При четверично-квантованном выходе канала, т.е. при $L = M = 4$, получим нижнюю границу $\frac{2}{\pi}$, соответствующую жесткому декодированию. При теоретическом пределе по динамическому диапазону, т.е. при $L \rightarrow \infty$,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{T_s \rightarrow 0} \frac{1}{T_s} C_{M,L}^*(\lambda_s T_s) = \frac{\pi + 2}{8} \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0} = 0.642699 \frac{1}{\ln 2} \frac{P_s}{N_0}.$$

Заключение

Проведено исследование пропускной способности дискретного канала связи при использовании многопозиционных сигналов ФМ- M . Получена точная формула пропускной способности, справедливая во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум и произвольной позиционности сигналов.

Для канала связи, использующего сигналы QPSK (ФМ-4) и фазовое квантование на L уровней, доказано точное соотношение для пропускной способности (информационной ёмкости), корректное во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум. Получены предельные соотношения, характерные для канала связи с очень большим шумом. Показано, что потери в пропускной способности при фазовом квантовании являются незначительными, но при этом использование “мягкого” декодирования может дать энергетический выигрыш 2–3 дБ. Целью дальнейших исследований является рассмотрение влияния фазового квантования, используемого для сигналов ФМ-8, на пропускную способность.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Витерби А.Д., Омура Дж.К. Принципы цифровой связи и кодирования. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1982. 536 с.
2. Кларк Дж., мл., Кейн Дж. Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи. Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
3. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. М.: Наука, 1982. 416 с.

4. *Savischenko N.V.* Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. Singapore: World Sci., 2014. 640 p.
5. *Бураченко Д.Л., Савищенко Н.В.* Геометрические модели сигнально-кодовых конструкций. СПб.: ВАС, 2020. 390 с.
6. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* A special function of communication theory // Integr. Transforms Spec. Funct. 2015. V. 26, No 6. P. 470–484.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1020307>.
7. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Some properties of the Owen T -function // Integr. Transforms Spec. Funct. 2016. V. 27, No 2.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1111889>. P. 163–180.
8. *Кудряшов Б.Д.* Теория информации. СПб.: Питер, 2009. 320 с.

Поступила в редакцию 20.04.2024

Принята к публикации 20.05.2024

Брычков Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук

ул. Вавилова, д. 40, г. Москва, 119333, Россия

E-mail: yua@rambler.ru

Савищенко Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин

Военная академия связи им. С.М. Будённого

Тихорецкий пр., д. 3, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

E-mail: snikaspb@mail.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.306-319

**Capacity of a Communication Channel with Quadrature
Phase-Shift Keying and Phase Quantization**Yu.A. Brychkov^{a*}, N.V. Savischenko^{b**}^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*^b*Military Telecommunications Academy, St. Petersburg, 194064 Russia*E-mail: ^{*}yua@rambler.ru, ^{**}email2@yandex.ru

Received April 20, 2024; Accepted May 20, 2024

Abstract

The influence of the number of phase quantization levels L on the capacity $C_{M,L}$ of a communication channel with additive white Gaussian noise (AWGN) was studied in a communication system using QPSK (4-PSK).

Keywords: channel capacity, information capacity, transition probability matrix, quantization, QPSK (quadrature phase-shift keying) signals, Gaussian function, Owen function

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. QPSK signal: *a*) Phase quantization level $L = 8$; *b*) Phase quantization level $L = 16$ (sectors are labeled as $r^{(\ell)} = r_k \& r^{*(\ell)}$, $\ell = 0, \dots, L - 1$, $k = 0, \dots, M - 1$, where r_k is the Gray code for QPSK signals ($M = 4$), $r^{(\ell)}$ is the quantization code).

References

1. Viterbi A.J., Omura J.K. *Printsipy tsifrovoy svyazi i kodirovaniya* [Principles of Digital Communication and Coding]. Moscow, Radio Svyaz', 1982. 536 p. (In Russian)
2. Clark G.C., Jr., Cain J.B. *Kodirovanie s ispravleniem oshibok v sistemakh tsifrovoy svyazi* [Error-Correction Coding for Digital Communications]. Moscow, Radio Svyaz', 1987. 392 p. (In Russian)
3. Kolesnik V.D., Poltyrev G.Sh. *Kurs teorii informatsii* [A Course in Information Theory]. Moscow, Nauka, 1982. 416 p. (In Russian)
4. Savischenko N.V. *Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory*. Singapore, World Sci., 2014. 640 p.
5. Burachenko D.L., Savischenko N.V. *Geometricheskie modeli signal'no-kodovykh konstruktov* [Geometric Models of Signal-Code Sequences]. St. Petersburg, VAS, 2020. 390 p. (In Russian)

6. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. A special function of communication theory. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, 2015, vol. 26, no. 6, pp. 470–484.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1020307>.
7. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Some properties of the Owen T -function. *Integr. Transforms Spec. Funct.*, 2016, vol. 27, no. 2, pp. 163–180.
<https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1111889>.
8. Kudryashov B.D. *Teoriya informatsii* [Information Theory]. St. Petersburg, Piter, 2009. 320 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Брычков Ю.А., Савищенко Н.В. Пропускная способность канала связи с квадратурной фазовой модуляцией и фазовым квантователем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 306–319. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.306-319>. ⟩

⟨ **For citation:** Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Capacity of a communication channel with quadrature phase-shift keying and phase quantization. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 306–319. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.306-319>. (In Russian) ⟩