УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 3 ISSN 2541–7746 (Print)
С. 297–305 ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9 doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.297-305

О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ КОШИ – РИМАНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ НА ВСЕЙ ПЛОСКОСТИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С. Байзаев[1], *Р.Н. Баротов*[2]

[1] *Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан*

[2] *Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан*

Аннотация

В статье рассматривается обобщенная система Коши – Римана на всей комплексной плоскости. Коэффициент при сопряжении искомой функции принадлежит гёльдеровому пространству и для $|z| > 1$ равен $e^{im\varphi}$, m – целое. Оказывается, при $m \leq 0$ эта система не имеет ненулевых решений, растущих не быстрее полинома. Для $m \geq 0$ построено многообразие всех регулярных, т. е. не имеющих особенностей в конечной части плоскости решений. Эти решения записываются в виде рядов по бесселевым функциям мнимого аргумента. Из полученного многообразия выделены ограниченные во всей плоскости решения и определена размерность линейного вещественного пространства таких решений. Эта размерность равна числу m.

Ключевые слова: обобщенная система Коши – Римана, гёльдеровы пространства, ограниченные коэффициенты, ограниченные решения

Введение

Рассмотрим обобщенную систему Коши – Римана

$$Lw \equiv w_{\bar{z}} + a\,(z)\,w + b\,(z)\,\overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$. В случае, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C)$, $p > 2$, теория систем вида (1) разработана И.Н. Векуа [1], Л. Берсом [2] и их последователями. Система (1) с коэффициентами, определенными на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, исследовалась рядом авторов (см., например, [3, 4]), которые получили формулы представления решений, аналоги теоремы Лиувилля и др. В работах [5–7] системы вида (1) и равномерно эллиптические системы первого порядка изучены в пространстве Гёльдера (см. ниже). Получен критерий нётеровости соответствующего оператора L и формула для индекса.

Пусть C_α – банахово пространство функций $w(z):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, ограниченных на $\mathbb{C}$ и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha\in(0,1)$. Норма в C_α определяется равенством:

$$\|w\|_\alpha=\|w\|_0+H_\alpha(w),$$

где

$$\|w\|_0=\sup|\,w(z)|,\quad H_\alpha(w)=\sup_{z_1\neq z_2}|z_1-z_2|^{-\alpha}|w(z_1)-w(z_2)|;$$

C^1_α – банахово пространство функций $w(z)\in C_\alpha$ таких, что $w_z,w_{\bar z}\in C_\alpha$ с нормой

$$\|w\|_{1,\alpha}=\|w\|_\alpha+\|w_z\|_\alpha+\|w_{\bar z}\|_\alpha.$$

Класс непрерывно дифференцируемых во всей плоскости функций обозначим через C^1.

Говорят, что непрерывная на всей плоскости функция $f(z)$ слабо осциллирується в бесконечности, если выполняется условие

$$\lim_{z\to\infty}\max_{|\zeta-z|\le 1}|f(z)-f(\zeta)|=0. \tag{2}$$

Приведем ряд утверждений, установленных в работах [5,6] (см. также монографию [8, сс. 34, 73]).

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *принадлежат пространству* C_α *и удовлетворяют условию* (2). *Для того чтобы оператор* $L\colon C^1_\alpha\to C_\alpha$ *был нётеровым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\varepsilon_0=\varliminf_{z\to\infty}\left(|b(z)|-|a(z)|\right)>0.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $0<\varepsilon<2\varepsilon_0$. *Если функция* $w(z)$ *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет условию роста* $|w(z)|\le Ke^{\varepsilon|z|}$, *то она убывает на бесконечности как* $e^{-\varepsilon|z|}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда индекс оператора* $L\colon C^1_\alpha\to C_\alpha$ *равен индексу Коши функции* $b(z)$ *на бесконечности.*

Построение решений

Рассмотрим уравнение

$$L_m w\equiv w_{\overline{z}}+\varepsilon(z)\,e^{im\varphi}\overline{w}=0, \tag{3}$$

здесь $m\in\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $z=re^{i\varphi}$ и $\varepsilon(z)=\begin{cases}|z|, & \text{при } |z|\le 1,\\ 1, & \text{при } |z|>1.\end{cases}$

Коэффициент $\varepsilon(z)\,e^{im\varphi}$ этого уравнения принадлежит пространству C_α и удовлетворяет условию (2) (см. [9]), при этом $\varepsilon_0=1$. Поэтому в силу теоремы 1 оператор $L_m\colon C^1_\alpha\to C_\alpha$ будет нётеровым, причем индекс этого оператора будет равен индексу Коши коэффициента $\varepsilon(z)\,e^{im\varphi}$ на бесконечности, т. е.

$$\operatorname{ind}L_m=m. \tag{4}$$

Из работы [6] следует следующее утверждение.

1) При $m \leq 0$ уравнение (3) не имеет ненулевых решений, удовлетворяющих условию

$$|w(z)| \leq Ke^{2|z|},$$

здесь постоянная K, вообще говоря, зависит от $w(z)$. В частности, уравнение (3) для указанных значений m не имеет ненулевых ограниченных на всей плоскости или растущих на бесконечности не быстрее многочлена решений.

2) Из формулы (4) и предыдущего утверждения следует, что

$$\dim \operatorname{Ker} L_m = \begin{cases} m & \text{при } m > 0, \\ 0 & \text{при } m \leq 0. \end{cases}$$

Из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

3) При $m > 0$ каждое решение уравнения (3) из пространства C^1_α экспоненциально убывает на бесконечности, точнее, удовлетворяет условию

$$|w(z)| \leq Me^{-2|z|},$$

здесь постоянная M, вообще говоря, зависит от $w(z)$.

Отметим следующее свойство уравнений вида (3).

4) Если $w(z)$ – решение уравнения (3), то функция $\omega(z) = \frac{w(z)}{z}$ будет решением уравнения вида (3) с показателем $m-2$, а функция $zw(z)$ – соответствующего уравнения с показателем $m+2$.

В настоящий работе будет предложен метод построения регулярных во всей плоскости решений, т.е. принадлежащих классу C^1, в частности, ограниченных во всей плоскости решений уравнения (3). В полярных координатах уравнение (3) имеет вид:

$$w_r + \frac{i}{r}w_\varphi + 2\varepsilon(r)e^{i(m-1)\varphi}\overline{w} = 0.$$

Разыскивая регулярные решения в виде ряда

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(r)e^{in\varphi}$$

с условиями $w_n(0) = 0 \ \ \forall n \neq 0$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(w_n' - \frac{n}{r}w_n\right)e^{in\varphi} + 2\varepsilon(r)\overline{w}_n e^{i(m-1-n)\varphi}\right] = 0.$$

Заменяя в ряде $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{w}_n e^{i(m-1-n)\varphi}$ индекс n на $m-1-n$, для коэффициентов $w_n(r)$ получим уравнение вида

$$w_n' - \frac{n}{r}w_n + 2\varepsilon(r)\overline{w}_{m-1-n} = 0, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

В начале рассмотрим случай, когда m четное. Тогда $n \neq m-1-n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и в уравнение (5) входят две неизвестные функции $w_n(r)$ и $\omega_n(r) = \overline{w}_{m-1-n}(r)$. Так как при изменении n от $\frac{m}{2}$ до $+\infty$ выражение $m-1-n$ меняется от $\frac{m}{2}-1$ до $-\infty$, то достаточно считать, что $n \geq \frac{m}{2}$. Поэтому из (5) можно получить систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} w_n' = \frac{n}{r}w_n - 2\varepsilon\omega_n, \\ \omega_n' = -2\varepsilon w_n + \frac{m-1-n}{r}\omega_n, \end{cases} \quad n \geq \frac{m}{2}. \tag{6}$$

Стандартным образом из системы (6) переходим к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$w_n'' - \left(\frac{m-1}{r} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right) w_n' + \left(\frac{n(m-n)}{r^2} + \frac{\varepsilon' n}{\varepsilon r} - 4\varepsilon^2\right) w_n = 0. \tag{7}$$

Решения $w_n\,(r)$ уравнения (7) определим для индексов $n \geq \frac{m}{2}$, а остальные $w_{m-1-n}\,(r)$ находим из уравнения (5) по формуле

$$w_{m-1-n}\,(r) = \frac{1}{2\varepsilon\,(r)}\left[-w_n'\,(r) + \frac{n}{r} w_n\,(r)\right]. \tag{8}$$

Пусть $0 \leq r \leq 1$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$w_n'' - \frac{m}{r} w_n' + \left(\frac{n\,(1+m-n)}{r^2} - 4r^2\right) w_n = 0.$$

Это уравнение подстановкой $w_n\,(r) = r^{\frac{m+1}{2}} u_n\left(r^2\right)$ приводится к следующему уравнению:

$$\left(r^2\right)^2 u_n''\left(r^2\right) + r^2 u_n'\left(r^2\right) - \left(\left(\frac{n}{2} - \frac{m+1}{4}\right)^2 + \left(r^2\right)^2\right) u_n\left(r^2\right) = 0.$$

Находя общее решение этого уравнения (см. [10, с. 688]), определяем $w_n\,(r)$:

$$w_n\,(r) = r^{\frac{m+1}{2}}\left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}\left(r^2\right) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}\left(r^2\right)\right),\quad n \geq \frac{m}{2}, \tag{9}$$

A_n, B_n – произвольные комплексные постоянные, I_ν, K_ν – функции Бесселя мнимого аргумента.

Используя свойства бесселевых функций (см. [11, с. 93–95]), неизвестные w_{m-1-n} находим по формуле (8):

$$w_{m-1-n}\,(r) = r^{\frac{m+1}{2}}\left(-\overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right) + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right)\right),\ n \geq \frac{m}{2}. \tag{10}$$

Порядок полюса $r = 0$ функции $r^{\frac{m+1}{2}} K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right)$ равен $n - m + 1$. Поэтому для $n \geq m$ нужно взять $B_n = 0$, и тогда

$$\begin{gathered} w_n\,(r) = A_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}\left(r^2\right), \\ w_{m-1-n}\,(r) = -\overline{A}_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right) \quad \forall n \geq m. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, при $0 \leq r \leq 1$ мы нашли все $w_n\,(r)$, и они в зависимости от значений n определяются формулами (9)–(11).

Пусть теперь $r \in (1;\infty)$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$w_n'' - \frac{m-1}{r} w_n' + \left(\frac{n(m-n)}{r^2} - 4\right) w_n = 0.$$

Это уравнение подстановкой $w_n\,(r) = r^{\frac{m}{2}} u_n\,(2r)$ приводится к уравнению

$$(2r)^2 u''{}_n\,(2r) + 2r u_n'\,(2r) - \left(\left(n - \frac{m}{2}\right)^2 + (2r)^2\right) u_n\,(2r) = 0. \tag{12}$$

Находя общее решение этого уравнения (см. [10, с. 688]), для $w_n(r)$ получим формулу

$$w_n(r) = r^{\frac{m}{2}} \left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r)\right), \quad n \geq \frac{m}{2}, \tag{13}$$

C_n, D_n – произвольные комплексные постоянные.

Воспользуясь свойствами бесселевых функций, и с учетом того, что $\varepsilon(r) = 1$, неизвестные $w_{m-1-n}(r)$ определяем по формуле (8):

$$w_{m-1-n}(r) = r^{\frac{m}{2}} \left(-\overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) + \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r)\right), \quad n \geq \frac{m}{2}. \tag{14}$$

Таким образом, мы нашли регулярные решения уравнения (5) на промежутках $[0,\ 1]$ и $[1,\ +\infty)$. Для получения регулярных решений на полуоси $[0,\ +\infty)$, необходимо потребовать выполнения условий

$$w_n(1-0) = w_n(1+0), \quad w_{m-1-n}(1-0) = w_{m-1-n}(1+0), \quad n \geq \frac{m}{2}.$$

Эти условия, с учетом формул (9)–(14) для $w_n(r)$ и $w_{m-1-n}(r)$, примут вид

$$A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) + B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2), \ n \geq \frac{m}{2}, \tag{15}$$

$$\overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) - \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = \overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2), \ n \geq \frac{m}{2}, \tag{16}$$

$$A_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(1) = C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2), \ n \geq m, \tag{17}$$

$$\overline{A}_n r^{\frac{m+1}{2}} I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(1) = \overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2), \ n \geq m. \tag{18}$$

Задаем A_n произвольно для $n \geq \frac{m}{2}$, а B_n – для $\frac{m}{2} \leq n < m$. Тогда из (15), (16) однозначно определяем C_n и D_n через A_n и B_n для $\frac{m}{2} \leq n < m$, а из (17), (18) – через A_n для $n \geq m$. Можно поступить и по-другому, что мы будем делать при построении ограниченных во всей плоскости решений.

Таким образом, мы установили следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть m четное. Тогда регулярные решения уравнения* (3) *определяются формулой*

$$w(z) = \begin{cases} w_{r\leq 1} & \text{при } r \leq 1, \\ w_{r>1} & \text{при } r > 1, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$w_{r\leq 1} = r^{\frac{m+1}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2)\, e^{in\varphi} - \overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2)\, e^{i(m-1-n)\varphi}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} \left(B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}(r^2)\, e^{in\varphi} + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}(r^2)\, e^{i(m-1-n)\varphi}\right)\right], \tag{20}$$

$$w_{r>1} = r^{\frac{m}{2}} \left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{\infty} \left(C_n I_{n-\frac{m}{2}}(2r) + D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r)\right) e^{in\varphi} - \right.$$

$$\left. - \left(\overline{C}_n I_{n-\frac{m-2}{2}}(2r) - \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r)\right) e^{i(m-1-n)\varphi}\right]. \tag{21}$$

Теперь определим ограниченные во всей плоскости решения. На основе поведения бесселевых функций $I_\nu(2r)$ и $K_\nu(2r)$ при $r \to \infty$ заключаем, что нужно положить $C_n = 0, \ \ n \geq \frac{m}{2}$ Тогда из (17), (18) следует, что $A_n = D_n = 0, \ \ n \geq \frac{m}{2}$. Поэтому в первой сумме (20) и в (21) останутся слагаемые с номерами $n \in \left[\frac{m}{2}, m-1\right]$. Задавая D_n произвольными для таких n, из (15), (16) можно однозначно выразить A_n и B_n через D_n.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть m четное. Тогда ограниченные во всей плоскости решения уравнения* (3) *определяются формулой вида* (19), *в которой*

$$w_{r\leq 1} = r^{\frac{m+1}{2}}\left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1}\left(A_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}\left(r^2\right)e^{in\varphi} - \overline{A}_n I_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right)e^{i(m-1-n)\varphi}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1}\left(B_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m+1}{4}}\left(r^2\right)e^{in\varphi} + \overline{B}_n K_{\frac{n}{2}-\frac{m-3}{4}}\left(r^2\right)e^{i(m-1-n)\varphi}\right)\right], \tag{22}$$

$$w_{r>1} = r^{\frac{m}{2}}\left[\sum_{n=\frac{m}{2}}^{m-1} D_n K_{n-\frac{m}{2}}(2r)\,e^{in\varphi} + \overline{D}_n K_{n-\frac{m-2}{2}}(2r)\,e^{i(m-1-n)\varphi}\right], \tag{23}$$

причем, как было указано выше, произвольными являются D_n, $n \in [\frac{m}{2}, m-1]$, а A_n и B_n однозначно выражаются через эти постоянные.

Следовательно, размерность множества ограниченных во всей плоскости решений как линейное пространство над полем вещественных чисел равна m. Это согласуется с утверждением 2).

Теперь рассмотрим случай, когда m нечетное. Тогда $n = m-1-n$ при $n = \frac{m-1}{2} = s$ и уравнение (5) при таком значении n примет вид

$$w_s' - \frac{s}{r}w_s + 2\varepsilon(r)\,\overline{w}_s = 0.$$

Введя обозначение $w_s = u + iv$, где u, v – вещественные функции переменной r, имеем

$$u' + iv' - \frac{s}{r}(u+iv) + 2\varepsilon(r)(u-iv) = 0,$$

или, отделяя вещественные и мнимые части, получим уравнения

$$u' - \left[\frac{s}{r} - 2\,\varepsilon(r)\right]u = 0, \quad v' - \left[\frac{s}{r} + 2\varepsilon(r)\right]v = 0.$$

Отсюда

$$u = A_s r^s e^{-2\gamma(r)}, \quad v = B_s r^s e^{2\gamma(r)},$$

где $A_s,\ B_s \in \mathbb{R}$ и $\gamma(r) = \int_0^r \varepsilon(t)\,dt$. Поэтому

$$w_s = r^s\left[A_s e^{-2\gamma(r)} + iB_s e^{2\gamma(r)}\right].$$

Ограниченные при $r \to \infty$ решения имеют вид $w_s = A_s r^s e^{-2\gamma(r)}$.

Далее будем считать, что $n > s = \frac{m-1}{2}$, и повторяем схему, изложенную для случая четного m. В результате все формулы (9)–(23) будут справедливы с небольшими изменениями: ограничения вида $n \geq m$ сохраняются, а ограничения вида

$n \geq \frac{m}{2}$ заменяются на $n > \frac{m-1}{2}$, в формулах (20), (21) добавляется слагаемое $w_s e^{is\varphi}$, а в формулах (22), (23) – слагаемое $A_s r^s e^{-2\gamma(r)} e^{is\varphi}$.

В формулах для ограниченных во всей плоскости решений произвольными являются вещественная постоянная A_s и комплексные постоянные D_n, $n \in \left(\frac{m-1}{2}, m-1\right]$, а A_n и B_n однозначно выражаются через эти постоянные. Следовательно, размерность множества ограниченных во всей плоскости решений как линейное пространство над полем вещественных чисел равна $1 + 2 \cdot \frac{m-1}{2} = m$. Это согласуется с утверждением 2).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
2. *Bers L., Courant Institute of Mathematical Sciences.* Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York, NY: New York Univ., Inst. Math. Mech., 1953. iii, 187 p.
3. *Михайлов Л.Г.* Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Тр. АН Таджик. ССР, 1963. 183 с.
4. *Виноградов В.С.* О теоремах Лиувилля для уравнения обобщенных аналитических функций // Дифференц. уравнения, 1980. Т. 16, №1. С. 42–46.
5. *Мухамадиев Э., Байзаев С.* К теории ограниченных решений обобщенной системы Коши – Римана // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 280–283.
6. *Байзаев С., Мухамадиев Э.* Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
7. *Байзаев С., Мухамадиев Э.* О нормальной разрешимости эллиптических уравнений на плоскости в пространстве Гёльдера // Вестн. НГУ. Сер.: Матем. 2006. Т. 6, вып. 1. С. 3–13.
8. *Байзаев С.* Избранные труды. Худжанд, 2024. 350 с.
9. *Байзаев С., Баротов Р.Н.* О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 22–35. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35.
10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Учеб. пособие. 6-е изд., испр. и доп. М.: Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
11. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Пер. со 2-го англ. изд. В.С. Бермана. [Под ред. и с доп. Г. Шилова]. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.

Поступила в редакцию 21.05.2024
Принята к публикации 24.07.2024

Байзаев Саттор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
17 мкр-н., д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Баротов Рузибой Нумонжонович, докторант (PhD) математического факультета

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
пр. Мавлонбекова, д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан
E-mail: *ruzmet.tj@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2024, vol. 166, no. 3, pp. 297–305

ORIGINAL ARTICLE
doi: 10.26907/2541-7746.2024.3.297-305

On the Construction of Regular Solutions for a Class of Generalized Cauchy–Riemann Systems with Coefficients Bounded on the Entire Plane

S. Baizaev[a], *R.N. Barotov*[b*]

[a] *Tajik State University of Law, Business and Politics, Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

[b] *Khujand State University named after Academician B. Gafurov, Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

E-mail: **ruzmet.tj@mail.ru*

Received May 21, 2024; Accepted July 24, 2024

Abstract

This article explores the generalized Cauchy–Riemann system on the entire complex plane. The coefficient for the conjugation of the desired function belongs to the Hölder space and, for $|z| > 1$, equals $e^{im\varphi}$, where m is an integer. For $m \leq 0$, the system was shown to have no nonzero solutions that grow no faster than a polynomial. For $m \geq 0$, the complete set of regular solutions, i.e., those without singularities in the finite part of the plane, was constructed. The obtained solutions were expressed as series of Bessel functions of an imaginary argument. From the resulting set, the solutions bounded on the entire plane were distinguished, and the dimension of the real linear space of these solutions, which equals m, was determined.

Keywords: generalized Cauchy–Riemann system, Hölder spaces, bounded coefficients, bounded solutions

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, Gl. Red. Fiz.-Mat. Lit., 1988. 512 p. (In Russian)
2. Bers L., Courant Institute of Mathematical Sciences. *Theory of Pseudo-Analytic Functions.* New York, NY, New York Univ., Inst. Math. Mech., 1953. iii, 187 p.
3. Mikhailov L.G. *Novyi klass osobykh integral'nykh uravnenii i ego primeneniya k differentsial'nym uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami* [A New Class of Singular Integral Equations and Its Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, Tr. Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1963. 183 p. (In Russian)
4. Vinogradov V.S. Liouville theorems for an equation of generalized analytic functions. *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 42–46. (In Russian)
5. Muhamadiev E., Baizaev S. On the theory of bounded solutions of a generalized Cauchy–Riemann system. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 287, no. 2, pp. 280–283. (In Russian)
6. Baizaev S., Muhamadiev E. On the index of first-order elliptic operators in the plane. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 663–672.

7. Baizaev S., Muhamadiev E. On the normal solvability of elliptic equations in the Holder space functions on plane. *Vestn. NGU. Ser.: Mat.*, 2006, vol. 6, no. 1, pp. 3–13. (In Russian)

8. Baizaev S. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Khujand, 2024. 350 p. (In Russian)

9. Baizaev S., Barotov R.N. Some estimates for elliptic systems generalizing the Bitsadze system of equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35. (In Russian)

10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki. Ucheb. Posobie* [Equations of Mathematical Physics. A Study Guide]. 6th ed., revis. enlarged. Moscow, Izd. MGU, 1999. 799 p. (In Russian)

11. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funktsii* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions]. Berman V.S. (Trans.). Shilov G. (Ed.). Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1949. 799 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Байзаев С., Баротов Р.Н.* О построении регулярных решений одного класса обобщенных систем Коши – Римана с ограниченными на всей плоскости коэффициентами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 297–305. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.297-305.

***For citation*:** Baizaev S., Barotov R.N. On the construction of regular solutions for a class of generalized Cauchy–Riemann systems with coefficients bounded on the entire plane. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 3, pp. 297–305. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.297-305. (In Russian)