УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2023, Т. 165, кн. 3
С. 182–189

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517

doi: 10.26907/2541-7746.2023.3.182-189

АНАЛИЗ ПЕНЛЕВЕ В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЯМ ТИПА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ И АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОЦЕНОК ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А. И. Аристов

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119991, Россия

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, г. Москва, 119333, Россия

МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, 119454, Россия

Аннотация

Неограниченные решения нелинейных уравнений в частных производных представляют значительный интерес. Во многих случаях энергетические оценки позволяют доказать, что решение обращается в бесконечность на ограниченном промежутке времени, и оценить размер этого промежутка. В настоящей работе рассмотрено уравнение, для которого энергетические оценки не позволяют выявить случаи такого качественного поведения решений, однако с помощью анализа Пенлеве удаётся изучить класс неограниченных решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение в частных производных, уравнение соболевского типа, тест Пенлеве, ряд Лорана, энергетическая оценка

Введение

Статья посвящена изучению обобщенного уравнения Осколкова–Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u + (\kappa;\nabla)u + (\lambda;\nabla)u^p + \theta u = 0. \qquad (1)$$

Здесь u зависит от трехмерного вектора пространственных переменных x и времени $t \geqslant 0$, а параметры $\kappa, \lambda \in R^3$, $b, \theta \in R$, $p \in N \setminus \{1\}$ постоянны. Поясним, что под выражениями $(\kappa;\nabla)$ и $(\lambda;\nabla)$ мы подразумеваем линейные комбинации первых производных по пространственным переменным. Если записать покоординатно $\kappa = (\kappa_1;\kappa_2;\kappa_3)$, то

$$(\kappa;\nabla) = \sum_{k=1}^{3} \kappa_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Аналогично зададим $(\lambda;\nabla)$. Приведенное уравнение может использоваться для описания нестационарных процессов в полупроводниковой среде: подробный вывод подобных уравнений дан в [1–3].

Интересен вопрос о качественном поведении неограниченных решений уравнений. Во многих случаях эффективны энергетические оценки: они позволяют установить условия, при которых решение разрушается, т. е. существует на промежутке $t \in [0; T)$ с некоторым конечным T, но не на луче $t \in [0; \infty)$. Кроме того, энергетические оценки позволяют оценить сверху и снизу время существования T. Однако, как будет показано, эти оценки не всегда позволяют получить результаты такого характера. Далее сузим множество изучаемых решений рассматриваемого уравнения до решений типа бегущей волны и применим к соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению тест Пенлеве. Такое исследование позволяет выяснить, при каких условиях общее решение уравнения можно записать в виде ряда Лорана с подвижным полюсом, порядок которого определяется видом уравнения.

1. О начально-краевой задаче

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u + (\kappa; \nabla)u + (\lambda; \nabla)u^p + \theta u = 0; \\ \hfill u(x; 0) = u_0(x); \\ \hfill u(x; t)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $x \in \Omega$, Ω – ограниченное подмножество R^3 с границей $\partial\Omega \in C^{(2;\delta)}$, $\delta \in (0; 1]$, $t \geqslant 0$, $u_0(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$; b и θ – действительные постоянные, κ и λ – постоянные трехмерные векторы.

Введем классы $X_T = C^1\left[0; T; H_0^1(\Omega)\right)$, $0 < T \leqslant \infty$.

Определение 1. Обобщенным решением задачи (2) назовем элемент u пространства X_T с некоторым T, для которого выполняются условия

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + b\Delta u + (\kappa; \nabla)u + (\lambda; \nabla)u^p + \theta u\right) w dx = 0; \\ \hfill u(x; 0) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

для всех $w \in H_0^1(\Omega)$ и $t \in [0; T)$.

Определение 2. Говорят, что решение задачи (2) разрушается за конечное время, если эта задача имеет решение $u \in X_T$ с некоторым конечным T, но не имеет решения из класса X_∞.

Теорема 1. *Для любого начального условия $u_0(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$ существует такое значение $T > 0$ (возможно, $T = \infty$), что существует единственное решение задачи (2) из класса X_T.*

Доказательство этого утверждения основано на принципе сжимающих отображений. Аналогичные рассуждения можно найти в [2, гл. 5, §11]. Обсудим подробнее, каким может быть время существования решения T.

Теорема 2. *Решение данной задачи не разрушается, т. е. $T = \infty$.*

Доказательство. Введем обозначения

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}, \ \Phi = \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2.$$

Выберем в интегральном тождестве (3) $w = u$ и упростим это равенство:

$$-\frac{\Phi'}{2} - b\|\nabla u\|^2 + \int_\Omega u(\kappa; \nabla)u dx + \int_\Omega u(\lambda; \nabla)u^p dx + \theta\|u\|^2 = 0.$$

С помощью формулы Остроградского–Гаусса можно показать, что члены с κ и λ равны нулю. Поэтому

$$\Phi' = 2\theta\|u\|^2 - 2b\|\nabla u\|^2.$$

Следовательно,

$$\Phi' \leqslant 2|\theta|\|u\|^2 + 2|b|\|\nabla u\|^2 \leqslant 2\max(|\theta|, |b|)(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2),$$

значит, $\Phi' \leqslant \mu\Phi$, где $\mu = 2\max(|\theta|, |b|)$. Из теоремы 1 видно, что тривиальным начальным данным соответствует неразрушающееся тривиальное решение, а если начальные данные нетривиальны, то $\Phi_0 \neq 0$. Положим $\Phi(t) = e^{\mu t}y(t)$, тогда после упрощений придем к неравенству $y' \leqslant 0$. Проинтегрировав его от 0 до t, получим

$$y(t) \leqslant y(0) \Leftrightarrow \Phi(t) \leqslant \Phi(0)e^{\mu t}.$$

Значит, в любой конечный момент времени функционал энергии Φ принимает конечное значение, хотя не исключается его стремление к бесконечности, когда $t \to \infty$. Заметим теперь, что

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\| \leqslant \sqrt{\Phi},$$

поэтому условие, что Φ принимает конечные значения, обеспечивает существование $u(\cdot)$ как элемента $H_0^1(\Omega)$ при любом положительном t. Следовательно, решение начально-краевой задачи не разрушается за конечное время, т. е. $T = \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание. При исследовании многих задач на разрушение важную роль играет функционал энергии Φ, поскольку он позволяет оценить $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ не только сверху, но и снизу. Действительно, теорема вложения Соболева позволяет утверждать, что существует такая постоянная k, что $\|u\| \leqslant k\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = k\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}$ для всех $u(\cdot) \in H_0^1(\Omega)$, поэтому

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \Phi \leqslant (1 + k^2)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

т. е. $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ принимает конечные значения тогда и только тогда, когда Φ принимает конечные значения.

2. Об анализе Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений

Теперь исследуем неограниченные решения типа бегущей волны уравнения (1).

Положим в (1) $u = v(z)$, где $z = (\alpha; x)+t+z_0$, а $\alpha = \text{const} \in R^N$ и $z_0 = \text{const} \in R$ произвольны. Придем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$v''' + bv'' + cv' + dv^{p-1}v' + \mu v = 0, \tag{4}$$

где $c = ((\kappa; \alpha) - 1)/(\alpha; \alpha)$, $d = p(\lambda; \alpha)/(\alpha; \alpha)$, $\mu = \theta/(\alpha; \alpha)$.

Дальнейшее исследование состоит в том, чтобы применить к уравнению (4) тест Пенлеве. Такое исследование обыкновенного дифференциального уравнения состоит в том, чтобы узнать, при каких условиях возможно представление его общего решения в виде ряда Лорана

$$v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(z - z_0)^{m-\nu},$$

где $\nu = \text{const} \in N$, а z_0 и какие-то два из коэффициентов A_m произвольны, т. е. общее количество произвольных параметров равно порядку уравнения (см. [4, гл. 10] и [3]). Исследование состоит из трех этапов.

- На первом этапе нужно найти начальный член разложения $A_0(z-z_0)^{-\nu}$. Если получим ненулевую постоянную A_0 и натуральную постоянную ν, то перейдем к следующему этапу, иначе тест не пройден.
- На втором этапе нужно найти индексы Фукса $m_1,\ldots,m_{N-1}$, где N – порядок уравнения, т. е. номера членов ряда, в которых могут быть произвольные коэффициенты. Для этого составим алгебраическое относительно m уравнение степени N, которое должно иметь корень $m=-1$ и $(N-1)$ различных целых неотрицательных корней (в противном случае тест не пройден).
- На третьем этапе нужно проверить, что коэффициенты с номерами $m=m_1,\ldots,m=m_{N-1}$ действительно произвольны.

Если все этапы пройдены корректно, то уравнение проходит тест, т. е. имеет общее решение требуемого вида, иначе – не имеет.

3. Предварительный анализ

Применим к уравнению (4) тест Пенлеве. На первом этапе подставим в уравнение «нулевое приближение» – только начальный член разложения: $v=A_0z^{-\nu}$ (пишем z, а не $(z-z_0)$, поскольку произвольная постоянная z_0 уже учтена в определении z). Тогда

$$\underline{A_0(-\nu)(-\nu-1)(-\nu-2)z^{-\nu-3}}+bA_0(-\nu)(-\nu-1)z^{-\nu-2}+cA_0(-\nu)z^{-\nu-1}+ \\ +\underline{dA_0^p(-\nu)z^{-\nu p-1}}+\mu A_0z^{-\nu}=0.$$

Здесь подчеркнуты ведущие члены, т. е. члены, соответствующие наибольшим по модулю отрицательным степеням z, на первых двух этапах существенную роль играют только они. «Укороченное уравнение», т. е. уравнение, содержащее только ведущие члены, должно выполняться тождественно:

$$A_0(-\nu)(-\nu-1)(-\nu-2)z^{-\nu-3}+dA_0^p(-\nu)z^{-\nu p-1}=0. \tag{5}$$

Следовательно, указанные здесь степени z должны быть равны: $-\nu-3=-\nu p-1 \Leftrightarrow \nu(p-1)=2$. Решив эти уравнения в натуральных числах, получим два варианта: $\nu=2,\ p=2$ или $\nu=1,\ p=3$. Упростив (5), получим в этих случаях соответственно $A_0=-12/d$ или $A_0=\sqrt{-6/d}$. Далее рассмотрим подробнее эти случаи.

4. Индексы Фукса

На втором этапе ищем индексы Фукса. Для этого нужно подставить двучлен $v=A_0z^{-\nu}+A_mz^{m-\nu}$ в «укороченное уравнение» ($v'''+dv^{p-1}v'=0$). После упрощений получим следующее.

- Если $\nu=2,\ p=2$, то

  $$A_mz^{m-5}\left[(m-2)(m-3)(m-4)-12(m-2)+24\right]+\ldots=0,$$

  где под многоточием подразумеваются члены, пропорциональные A_m в более чем первой степени, которые, как можно показать, существенной роли не играют. Значит, выражение в квадратных скобках должно быть равно нулю, откуда следует, что $m\in\{-1;4;6\}$, т. е. индексы Фукса равны 4 и 6.
- Если $\nu=1,\ p=3$, то аналогичным образом получим, что индексы Фукса равны 3 и 4.

5. Случай 1

В первом случае общее решение уравнения должно иметь вид

$$v = A_0 z^{-2} + A_1 z^{-1} + A_2 + A_3 z + A_4 z^2 + A_5 z^3 + A_6 z^4 + O(z^5), \tag{6}$$

где A_4 и A_6 могут быть произвольными. Найдем условия, при которых они действительно произвольны.

Из (6) видно, что v''' задается с точностью до $O(z^2)$, поэтому, подставив (6) в уравнение и раскрыв скобки, будем учитывать члены до первой степени z включительно. А именно, получим равенство вида

$$\sum_{k=-5}^{1} B_k z^k + O(z^2) = 0.$$

Оно должно выполняться тождественно, следовательно, $B_{-5} = B_{-4} = \ldots = B_1 = 0$. Приходим к системе равенств

$$\begin{cases} z^{-5} : -24A_0 - 2dA_0^2 = 0; \\ z^{-4} : -3dA_0A_1 - 6A_1 + 6bA_0 = 0; \\ z^{-3} : -dA_1^2 - 2dA_0A_2 - 2cA_0 + 2bA_1 = 0; \\ z^{-2} : \mu A_0 - dA_1A_2 - cA_1 - dA_0A_3 = 0; \\ z^{-1} : 0A_4 + \mu A_1 = 0; \\ \quad 1 : (6 + dA_0)A_5 + [2b + dA_1]A_4 + \mu A_2 + cA_3 + dA_2A_3 = 0; \\ \quad z : [24 + 2dA_0]A_6 + [2c + 2dA_2]A_4 + 6bA_5 + dA_3^2 + \mu A_3 + 2dA_1A_5 = 0. \end{cases}$$

Из первых четырех равенств последовательно получим, что

$$A_0 = -\frac{12}{d},\ A_1 = \frac{12b}{5d},\ A_2 = \frac{b^2}{25d} - \frac{c}{d},\ A_3 = \frac{\mu}{d} + \frac{b^3}{125d}.$$

Из пятого равенства получим, что A_4 будет произвольным при *первом* условии непротиворечивости $b\mu = 0$. Из шестого равенства следует

$$A_5 = \frac{11b}{15}A_4 + \frac{b^5}{6 \cdot 25 \cdot 125d} - \frac{c\mu}{6d}.$$

Подставив полученные выражения в седьмое равенство, получим, что A_6 будет произвольным при *втором* условии непротиворечивости

$$8b^2A_4 + \frac{9b}{5}\left(\frac{b^5}{25 \cdot 125d} - \frac{c\mu}{d}\right) + \left(\frac{\mu}{d} + \frac{b^3}{125d}\right)\left(2\mu + \frac{b^3}{125}\right) = 0.$$

Отсюда видно, что $b = 0$, поскольку в противном случае A_4 не будет произвольным. Равенство при этом упростится до $\mu = 0$. Первое условие непротиворечивости будет выполнено. Таким образом, получаем следующие коэффициенты

$$A_0 = -\frac{12}{d},\ A_2 = -\frac{c}{d},\ A_1 = A_3 = A_5 = 0,$$

$A_{4;6}$ произвольны (при условии непротиворечивости $b = \mu = 0$).

6. Случай 2

Во втором случае (т. е. при $p = 3$, $\nu = 1$) общее решение уравнения должно иметь вид

$$v = A_0 z^{-1} + A_1 + A_2 z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + O(z^4),$$

где A_3 и A_4 могут быть произвольными. Выясним, при каких условиях они действительно произвольны.

Рассуждая по аналогии с первым случаем, придем к следующим выражениям $A_0 = \sqrt{-\frac{6}{d}}$; $A_1 = 0$; $A_2 = \frac{A_0 c}{6}$, $A_{3;4}$ произвольны при условиях $b = \mu = 0$.

Заключение

Итак, показано, что решение начально-краевой задачи для уравнения (1) из введенных классов X_T не разрушается за конечное время. С другой стороны, рассмотрены неограниченные решения типа бегущей волны уравнения (1). Для их изучения применен анализ Пенлеве – сформулируем его результаты в виде следующих теорем.

Теорема 3. *Пусть $p = 2$, причем $b = \mu = 0$, т. е. уравнение (4) имеет вид*

$$v''' + cv' + dvv' = 0.$$

Тогда это уравнение проходит тест Пенлеве, причем его общее решение имеет вид

$$v = -\frac{12}{d} z^{-2} - \frac{c}{d} + A_4 z^2 + A_6 z^4 + O(z^5),$$

где A_4 и A_6 произвольны (напомним, что третья произвольная постоянная, явным образом здесь не указанная, соответствует сдвигу по z).

Теорема 4. *Пусть $p = 3$, причем $b = \mu = 0$, т. е. уравнение (4) имеет вид*

$$v''' + cv' + dv^2 v' = 0.$$

Тогда это уравнение проходит тест Пенлеве, причем его общее решение имеет вид

$$v = A_0 z^{-1} + \frac{A_0 c}{6} z + A_3 z^2 + A_4 z^3 + O(z^4),$$

где $A_0 = \sqrt{-6/d}$, а коэффициенты A_3 и A_4 произвольны.

Теорема 5. *При $p \geqslant 4$ уравнение (4) не проходит тест Пенлеве.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Литература

1. *Корпусов М. О.* Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: URSS, 2010. 374 с.

2. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. 736 с.

3. *Aristov A., Kholomeeva A., Moiseev E.* Application of the Painleve test to a nonlinear partial differential equation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 7. P. 1553–1556. https://doi.org/10.1134/S1995080222100031.

4. *Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

Поступила в редакцию 20.08.2023
Принята к публикации 14.09.2023

Аристов Анатолий Игоревич, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, занимается исследованием нелинейных уравнений в частных производных

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, г. Москва, 119333, Россия

МИРЭА – Российский технологический университет
просп. Вернадского, д. 78, г. Москва, 119454, Россия

E-mail: *ai_aristov@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 3, pp. 182–189

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.3.182-189

Painleve Analysis of Travelling Wave Solutions and Analysis of Energy Estimates for a Nonlinear Sobolev-Type Equation

A.I. Aristov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia
Federal Research Center "Computer Sciences and Control", Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia
MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
E-mail: *ai_aristov@mail.ru*

Received August 20, 2023; Accepted September 14, 2023

Abstract

There is considerable interest in studying unbounded solutions of nonlinear partial equations. In many cases, energy estimates can be used to prove that the solution tends to infinity in finite time, while also providing an estimate for the latter. Here, an equation in which energy estimates fail to gauge the cases when solutions exhibit such behavior was analyzed. A class of unbounded solutions was explored using the Painleve analysis.

Keywords: nonlinear partial equation, Sobolev-type equation, Painleve analysis, Laurent series

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the program of the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics (agreement no. 075-15-2022-284).

References

1. Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh nelokal'nykh uravneniyakh* [Blow-Up in Nonclassical Nonlocal Equations]. Moscow, URSS, 2010. 374 p. (In Russian)

2. Sveshnikov A.G., Al'shin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Lineynye i nelineinye uravneniya sobolevskogo tipa* [Linear and Nonlinear Sobolev-Type Equations]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 736 p. (In Russian)

3. Aristov A., Kholomeeva A., Moiseev E. Application of the Painleve test to a nonlinear partial differential equation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1553–1556. https://doi.org/10.1134/S1995080222100031.

4. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. *Metody resheniya nelineinykh uravnenii matematicheskoi fiziki i mekhaniki* [Methods for Solving Nonlinear Equations in Mathematical Physics and Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2005. 256 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Аристов А.И.* Анализ Пенлеве в применении к решениям типа бегущей волны и анализ энергетических оценок для нелинейного уравнения соболевского типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 3. С. 182–189. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.182-189. ⟩

⟨ ***For citation*:** Aristov A.I. Painleve analysis of travelling wave solutions and analysis of energy estimates for a nonlinear Sobolev-type equation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 3, pp. 182–189. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.182-189. (In Russian) ⟩