

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 514.822

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.262-272

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОГО ОСАЖДЕНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ФИЛЬТРЕ СМЕШАННОГО ТИПА

*Д.А. Сафин, Ш.Х. Зарипов, Р.Ф. Марданов, Е.А. Костерина*

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

### Аннотация

Представлена математическая модель движения взвешенных аэрозольных частиц в фильтре смешанного типа. Для несущей среды принята модель течения несжимаемой жидкости в пористом периодическом элементе, состоящем из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. Краевая задача Стокса для функции тока течения решена с помощью метода граничных элементов. В найденном поле скоростей несущей среды рассчитаны траектории взвешенных частиц для нахождения эффективности их осаждения в результате инерционной импакции и механизма зацепления. Для различных соотношений массовых долей нано- и микроволокон рассчитаны зависимости эффективности осаждения от числа Стокса.

**Ключевые слова:** аэрозольный фильтр, инерционное осаждение, лагранжевы уравнения движения частиц, метод Рунге–Кутты, число Стокса

### Введение

Волокнистые аэрозольные фильтры являются одними из широко распространенных устройств воздухоочистки от мелкодисперсных взвешенных частиц. В настоящее время наряду с фильтрами из монодисперсных микро- и нановолокон начинают активно применять фильтры нового типа, состоящие из комбинации микро- и нановолокон. Волокнистые среды смешанного типа имеют преимущества по сравнению с фильтрами с монодисперсными волокнами в результате высокой эффективности улавливания аэрозольных частиц нановолокнами и их низкого аэродинамического сопротивления, а также управляемой однородности пористой среды за счет вкрапления микроволокон в нановолокнистую среду. В [1, 2] проведены экспериментальные исследования характеристик таких фильтров. В [3] предложена математическая модель гидродинамического течения несущей среды для волокнистого фильтра смешанного типа из микро- и нановолокон. Проведены расчетные исследования и построена приближенная формула для силы сопротивления элемента пористой среды из микро- и нановолокон.

Фильтрация аэрозолей заключается в улавливании взвешенных частиц на волокнах фильтра под действием диффузионного механизма, инерционной импакции и эффекта зацепления [4–7]. Тип механизма улавливания частиц определяется главным образом размером частиц и скоростью несущей среды. В [1] для оценки эффективности осаждения частиц в результате диффузии и механизма зацепления

применены формулы классической теории фильтрации аэрозолей монодисперсными волокнами. В целом для условий экспериментов [1] эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными кривыми осаждения. Однако для строгого исследования эффективности улавливания аэрозольных частиц фильтрами смешанного типа необходимо решать задачу о движении взвешенных частиц в его гидродинамическом поле скоростей. В настоящей работе для восполнения указанного пробела разработана математическая модель осаждения аэрозольных частиц внутри периодического элемента фильтра смешанного типа с множеством нано- и микроволокон на основе численного решения лагранжевых уравнений движения инерционных частиц и рассчитана эффективность инерционного осаждения. Инерционность частиц определяется значением числа Стокса  $St$ , включающего в себя размер частиц, характерную (или среднюю) скорость течения несущей среды, а также вязкость среды.

### 1. Модель течения несущей среды

В [3] развита математическая модель течения несжимаемой жидкости в пористой области, состоящей из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. В качестве области течения выбрана прямоугольная периодическая ячейка со стороной  $H$  (рис. 1) с одним микроволокном радиуса  $R_m$  в центре ячейки и  $N$  нановолокон радиуса  $R_n$ . На границах ячейки приняты условия симметрии. Пористая среда всего фильтра получается симметричным отражением выбранной периодической ячейки.

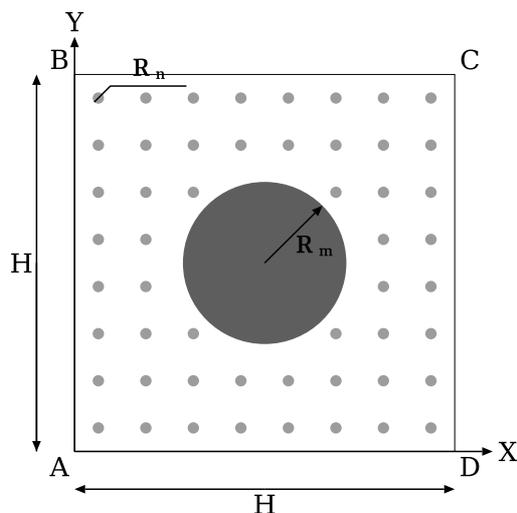


Рис. 1. Схема периодического элемента фильтра смешанного типа

Общую плотность упаковки  $\alpha$  определим как отношение объема всех волокон  $V_f$  к объему ячейки  $V$

$$\alpha = \frac{V_f}{V} = \frac{\pi R_m^2 + N\pi R_n^2}{H^2} = \frac{\pi R_m^2}{H^2} \frac{N + k^2}{k^2}, \quad (1)$$

где  $k = R_m/R_n$ . Массовую фракцию  $\gamma$  нановолокон зададим как отношение массы

нановолокон  $M_n$  к общей массе волокон

$$\gamma = \frac{M_n}{M_n + M_m},$$

где  $M_m = \rho_f V_{mf}$  – масса микроволокна,  $\rho_f$  – плотность вещества волокон,  $V_{mf}$  – объем микроволокна,  $M_n = \rho_f V_{nf}$ ,  $V_{nf}$  – объем нановолокон.

## 2. Уравнения движения аэрозольных частиц

В приближении Стокса аэродинамического сопротивления лагранжевы уравнения движения сферической взвешенной частицы записываются в виде

$$\frac{d\bar{V}}{dT} = \frac{\bar{U} - \bar{V}}{\tau}, \quad \frac{d\bar{R}}{dT} = \bar{V}, \quad (2)$$

где  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$  – скорости несущей среды и частицы соответственно,  $T$  – время,  $\bar{R}$  – радиус-вектор положения частицы,  $\tau = \rho_p d_p^2 / (18\mu)$  – время релаксации аэрозольной частицы,  $\mu$  – вязкость среды,  $\rho_p$  и  $d_p$  – плотность и диаметр частицы. Для рассматриваемой двумерной задачи уравнения (2) представим в безразмерном виде

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{u_x - v_x}{St}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{u_y - v_y}{St}, \quad \frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad (3)$$

где  $u_x$ ,  $u_y$  и  $v_x$ ,  $v_y$  – декартовы составляющие скоростей несущей среды и частицы соответственно,  $St = U_0 \tau / H$  – число Стокса,  $U_0$  – характерная (или средняя) скорость течения в фильтре. Величины  $U_0$  и  $H$  выбраны в качестве масштаба скорости длины. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3) в найденном поле скоростей несущей среды с начальными условиями, соответствующими точке старта частиц  $v_x(0) = u_x(x_0, y_0)$ ,  $v_y(0) = u_y(x_0, y_0)$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ , позволяет рассчитать траекторию отдельной частицы.

## 3. Результаты расчетов

В качестве области для расчета траекторий частиц выбрана полоса прямоугольных периодических элементов, состоящих из одного микроволокна и  $N$  нановолокон (рис. 1,  $r_m = R_m/H = 0.215$ ,  $r_n = R_n/H = 0.015$ ,  $N = 52$ ). Описание постановки и метода граничных элементов решения задачи о течении несущей среды в периодическом элементе в приближении Стокса даны в [3]. Указанным методом найдено численное решение для функции тока течения в периодическом элементе. При интегрировании уравнений движения частиц необходимо знать составляющие скорости несущей среды в произвольной точке области течения. Для определения этих составляющих построено подробное сеточное разбиение области течения в периодическом элементе (рис. 2). Полученное численное решение задачи в приближении Стокса использовано для вычисления значений скорости течения в точках упомянутого разбиения. В найденном поле скоростей задача Коши для системы уравнений (3) движения частиц решалась численно методом Рунге–Кутты пятого порядка со встроенной оценкой погрешности Цитураса [8], который автоматически обеспечивает возможность получения промежуточных значений путем интерполяции 4-го порядка. Значения составляющих скорости газа в текущей точке траектории частицы были найдены на основе билинейной интерполяции во множестве значений, полученных из численного решения уравнений течения несущей среды. Частицы стартуют с левой границы первой периодической ячейки с начальной

скоростью, равной скорости течения несущей среды. При достижении частицами границ периодического элемента траектории продолжают свое движение в том же поле скоростей, но с нового начального положения, соответствующего предыдущей крайней точке достижения частицей границы элемента. Реализованный таким образом алгоритм позволяет рассчитывать движения частиц для произвольного числа периодических элементов, т. е. смешанного фильтра заданной толщины, определяемой как произведение количества ячеек на ширину одной ячейки.

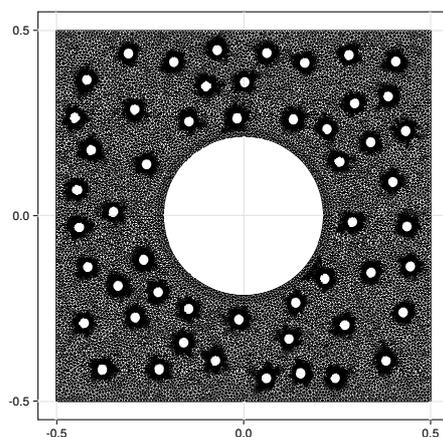


Рис. 2. Разбиение области периодического элемента

Частица считается осажденной при пересечении траекторией цилиндрических волокон. Для учета эффективности улавливания частиц за счет эффекта зацепления граница, при пересечении которой траекторией частица считается уловленной, проводится на расстоянии безразмерного радиуса аэрозольной частицы  $\delta$  от поверхности волокон. Примеры траекторий частиц для различных чисел Стокса без учета и с учетом эффекта зацепления представлены на рис. 3. Видно, что при малом числе Стокса частицы не попадают на поверхность волокон, в то время как с ростом  $St$  часть частиц сталкивается с волокнами и оказывается отделенной от основного потока.

Для определения эффективности инерционного захвата частиц с левой границы первого периодического элемента стартуют 2000 частиц. Эффективность  $E$  инерционного осаждения определялась как отношение количества частиц, осевших на волокнах, к числу стартовавших частиц. Параметрические расчеты проводились для различных случайных расположений нановолокон относительно микроволокна. Варьировались число Стокса  $St$ , массовая доля нановолокон, число периодических элементов по потоку и радиус частиц. Для построения кривых  $E(St)$  расчеты проведены для диапазона значений числа Стокса  $St \in [0.0001, 100]$  и различного числа  $p$  периодических ячеек. Общее число необходимых расчетов (до 2 тысяч траекторий для одного варианта упаковки и одного числа Стокса) обеспечено использованием высокопроизводительного компьютера PC (CPU AMD Ryzen 9 5950X 16x3.4GHz, RAM 64 Gb). Построены зависимости эффективности осаждения  $E(St)$  частиц от числа Стокса. Было проведено до 10 расчетов для различных вариантов расположения нановолокон относительно микроволокна в периодическом элементе и выполнено осреднение их результатов по методу Монте-Карло (рис. 5). В целом кривые  $E(St)$  незначительно отличаются друг от друга. Наблюдается характерная для инерционного осаждения зависимость

эффективности осаждения от числа Стокса. При малых числах Стокса инерционное оседание практически отсутствует. С ростом  $St$  величина  $E$  растет, достигая максимума, и далее падает до значения 0.9, соответствующего относительной проекции миделева сечения волокон. Зависимости  $E(St)$  также сближаются при росте числа  $p$  рассчитываемых периодов (рис. 6). Начиная с  $p = 10$ , кривые практически не изменяются, поэтому все расчеты в дальнейшем проводились для десяти периодов.

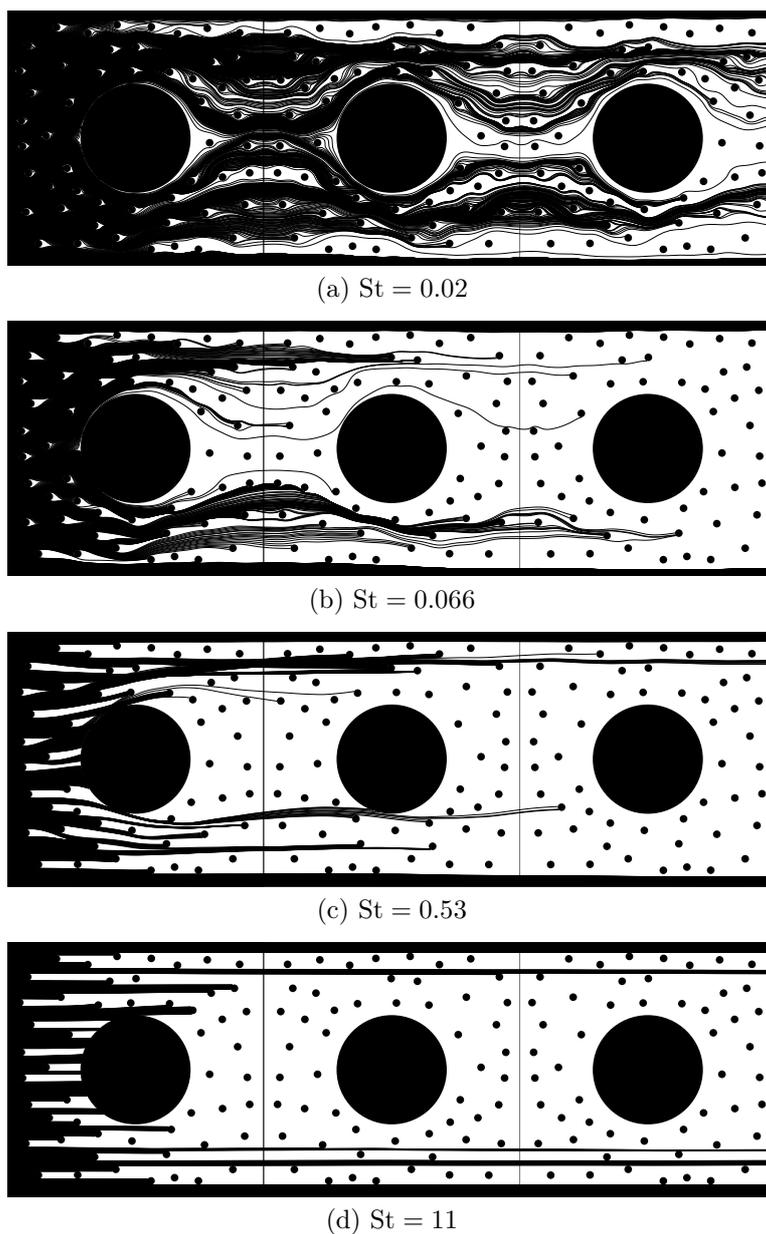


Рис. 3. Траектории частиц для различных чисел Стокса

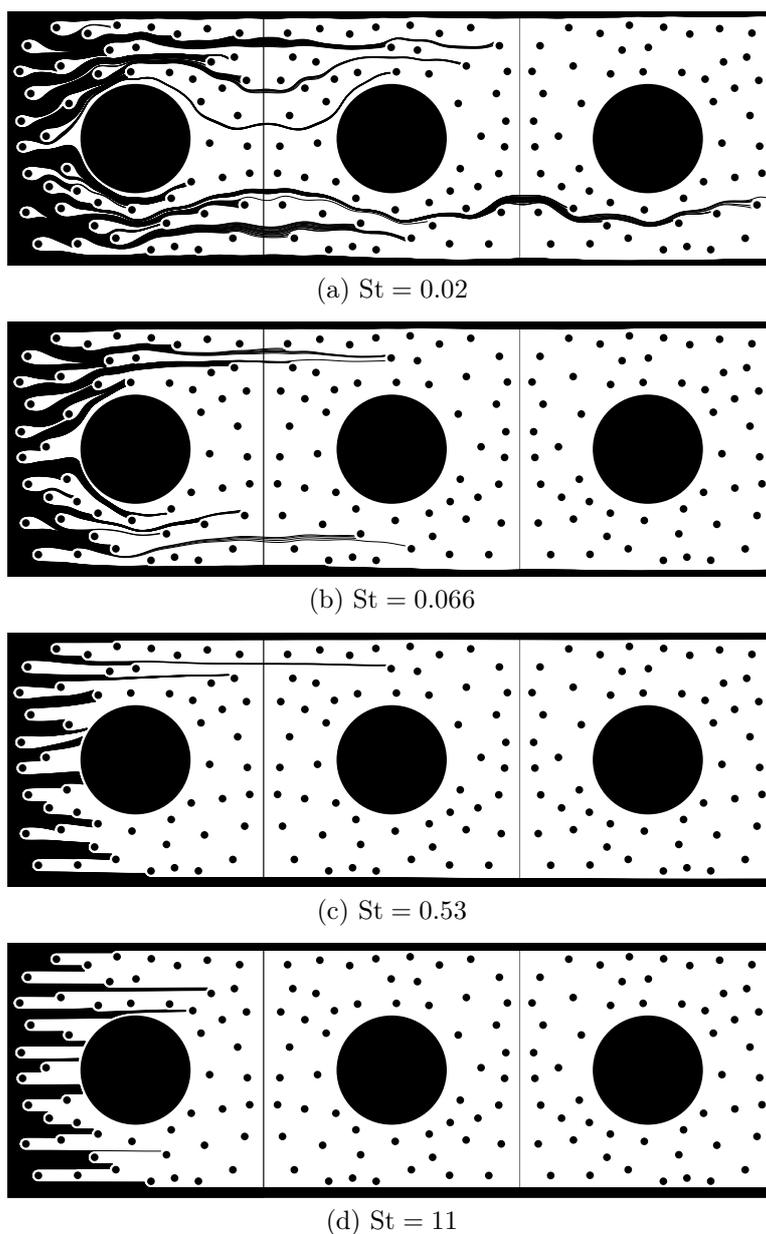


Рис. 4. Траектории частиц с учетом зацепления для различных чисел Стокса

Для случайного расположения нановолокон эффективность осаждения частиц растет от нулевого значения до максимального, зависящего от массовой доли нановолокон (рис. 7). При больших числах Стокса эффективность осаждения для случайного расположения нановолокон стремится к значению, соответствующему значению общей проекции миделева сечения всех волокон, отнесенной к высоте полосы. Наблюдается рост величины  $E(St)$  с увеличением массовой доли нановолокон. Учет зацепления частиц волокнами дает ненулевые значения эффективности и для безинерционных частиц ( $St = 0$ ) (рис. 8).

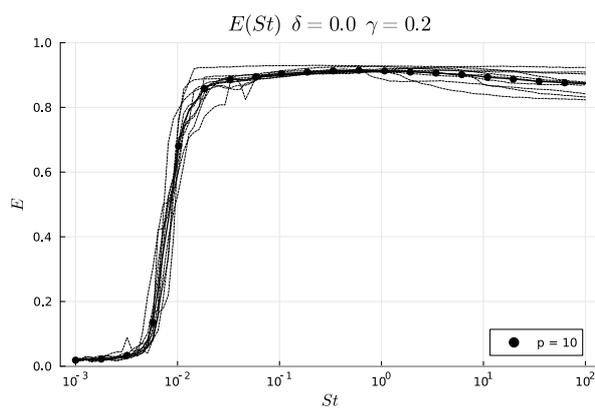


Рис. 5. Зависимость  $E(St)$  для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон  $\gamma = 0.2$  для десяти периодов. Выделенная кривая – осредненная зависимость

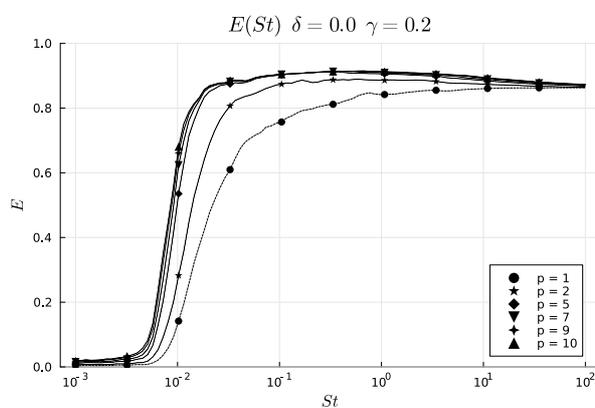


Рис. 6. Зависимость  $E(St)$  для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон  $\gamma = 0.2$  для различного числа периодов

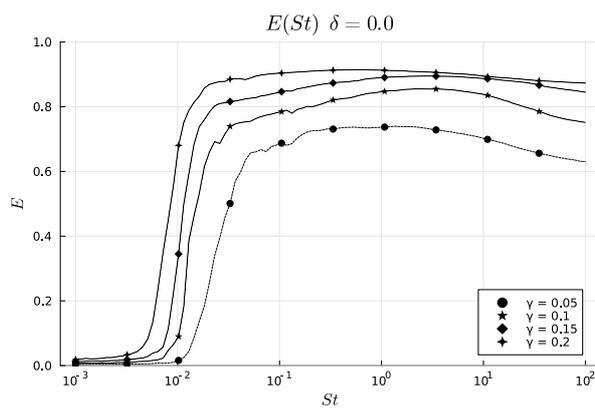


Рис. 7. Зависимость  $E(St)$  для случайного расположения нановолокон для различных значений массовой доли нановолокон

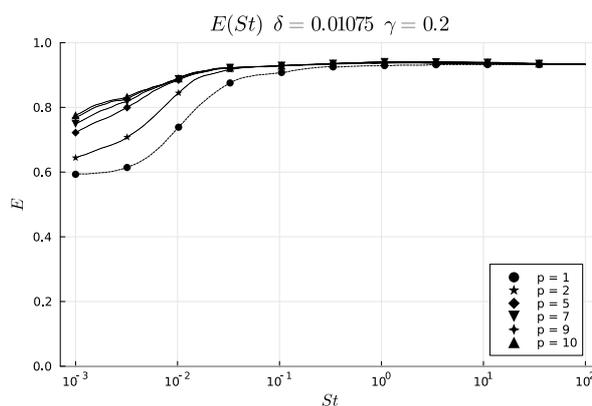


Рис. 8. Зависимость  $E(St)$  с учетом эффекта зацепления для случайного расположения нановолокон при значении массовой доли нановолокон  $\gamma = 0.2$  для различного числа периодов

### Заключение

Представлена математическая модель движения взвешенных аэрозольных частиц в фильтре смешанного типа. Для несущей среды принята модель течения несжимаемой жидкости в пористом периодическом элементе, состоящем из множества цилиндров различного диаметра в диапазоне нано- и микрометров. Краевая задача Стокса для функции тока течения решена с помощью метода граничных элементов. В найденном поле скоростей несущей среды рассчитаны траектории взвешенных частиц для нахождения эффективности их осаждения за счет инерционной импакции и механизма зацепления. Для различных соотношений массовых долей нано- и микроволокон рассчитаны зависимости эффективности осаждения от числа Стокса.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-00176.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### Список литературы

1. Choi H.-J., Kumita M., Hayashi S., Yuasa H., Kamiyama M., Seto T., Tsai C.-J., Otani Y. Filtration properties of nanofiber/microfiber mixed filter and prediction of its performance // *Aerosol Air Qual. Res.* 2017. V. 17, No 4. P. 1052–1062. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2016.06.0256>.
2. Liu Y., Qian X., Zhang H., Wang L., Zou C., Cui Y. Preparing micro/nano-fibrous filters for effective PM 2.5 under low filtration resistance // *Chem. Eng. Sci.* 2020. V. 217. Art. 115523. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115523>.
3. Panina E., Mardanov R., Zaripov S. Mathematical model of the flow in a nanofiber/microfiber mixed aerosol filter // *Mathematics.* 2023. V. 11, No 16. Art. 3465. <https://doi.org/10.3390/math11163465>.
4. Liu Z.G., Wang P.K. Pressure drop and interception efficiency of multifiber filters // *Aerosol Sci. Technol.* 1997. V. 26, No 4. P. 313–325. <https://doi.org/10.1080/02786829708965433>.

5. *Hosseini S.A., Tafreshi H.V.* Modeling particle filtration in disordered 2-D domains: A comparison with cell models // *Sep. Purif. Technol.* 2010. V. 74, No 2. P. 160–169. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2010.06.001>.
6. *Yang H., Fu H., Zhu H.* A new expression for inertial particle collection efficiency by nanofibers with slip effect // *Chem. Eng. Sci.* 2022. V. 263. Art. 118061. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2022.118061>.
7. *Kirsh V.A.* Inertial deposition of submicron aerosols in model fibrous filters composed of ultrafine fibers // *Colloid J.* 2023. V. 85, No 3. P. 377–388. <https://doi.org/10.1134/S1061933X23600331>.
8. *Tsitouras Ch., Famelis I.Th.* On phase-fitted modified Runge-Kutta pairs of order 6 (5) // *Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (INCAAM 2006): Ext. Abstr.* / Simos T., Psihoyios G., Tsitouras C. (Eds.). Weinheim: Wiley-VCH, 2006. P. 1962–1965.

Поступила в редакцию 15.05.2024

Принята к публикации 24.05.2024

---

**Сафин Дамир Айдарович**, магистрант кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: [damirsafin2000@mail.ru](mailto:damirsafin2000@mail.ru)

**Зарипов Шамиль Хузеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экологических систем

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: [Shamil.Zaripov@kpfu.ru](mailto:Shamil.Zaripov@kpfu.ru)

**Марданов Ренат Фаритович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: [Renat.Mardanov@kpfu.ru](mailto:Renat.Mardanov@kpfu.ru)

**Костерина Екатерина Александровна**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры моделирования экологических систем

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: [Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru](mailto:Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru)

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.262-272

**Modeling the Inertial Deposition of Aerosol Particles  
in a Mixed-Type Filter***D.A. Safin\**, *Sh.Kh. Zaripov\*\**, *R.F. Mardanov\*\*\**, *E.A. Kosterina\*\*\*\***Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: *\*damirsafin2000@mail.ru*, *\*\*Shamil.Zaripov@kpfu.ru*,*\*\*\*Renat.Mardanov@kpfu.ru*, *\*\*\*\*Ekaterina.Kosterina@kpfu.ru*

Received May 15, 2024; Accepted May 24, 2024

**Abstract**

This article presents a mathematical model that describes the movement of suspended aerosol particles in a mixed-type filter. For the carrier medium, a model of incompressible fluid flow in a porous periodic element consisting of many cylinders with diameters in the nano- and micrometer range was adopted. The Stokes boundary value problem for the flow function was solved using the boundary element method. The efficiency of the deposition of suspended particles was determined by calculating their trajectories in the identified velocity field of the carrier medium. For various ratios of mass fractions of nano- and microfibers, the dependences of the deposition efficiency due to the inertial impact and interception mechanism on the Stokes number were found.

**Keywords:** aerosol filter, inertial deposition, Lagrangian equations of particle motion, Runge–Kutta method, Stokes number

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00176).

**Conflicts of Interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Figure Captions**

- Fig. 1. Schematic representation of the periodic element in a mixed-type filter.  
Fig. 2. Partition of the periodic element area.  
Fig. 3. Particle trajectories for different Stokes numbers.  
Fig. 4. Particle trajectories considering interception for different Stokes numbers.  
Fig. 5.  $E(St)$  dependence for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of  $\gamma = 0.2$  for ten periods. The highlighted curve shows the average dependence.  
Fig. 6.  $E(St)$  dependence for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of  $\gamma = 0.2$  for different numbers of periods.  
Fig. 7.  $E(St)$  dependence for the random arrangement of nanofibers for various mass fractions of nanofibers.  
Fig. 8.  $E(St)$  dependence considering the interception effect for the random arrangement of nanofibers assuming a nanofiber mass fraction of  $\gamma = 0.2$  for different numbers of periods.

## References

1. Choi H.-J., Kumita M., Hayashi S., Yuasa H., Kamiyama M., Seto T., Tsai C.-J., Otani Y. Filtration properties of nanofiber/microfiber mixed filter and prediction of its performance. *Aerosol Air Qual. Res.*, 2017, vol. 17, no. 4, pp. 1052–1062. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2016.06.0256>.
2. Liu Y., Qian X., Zhang H., Wang L., Zou C., Cui Y. Preparing micro/nano-fibrous filters for effective PM 2.5 under low filtration resistance. *Chem. Eng. Sci.*, 2020, vol. 217, art. 115523. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2020.115523>.
3. Panina E., Mardanov R., Zaripov S. Mathematical model of the flow in a nano-fiber/microfiber mixed aerosol filter. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 16, art. 3465. <https://doi.org/10.3390/math11163465>.
4. Liu Z.G., Wang P.K. Pressure drop and interception efficiency of multifiber filters. *Aerosol Sci. Technol.*, 1997, vol. 26, no. 4, pp. 313–325. <https://doi.org/10.1080/02786829708965433>.
5. Hosseini S.A., Tafreshi H.V. Modeling particle filtration in disordered 2-D domains: A comparison with cell models. *Sep. Purif. Technol.*, 2010, vol. 74, no. 2, pp. 160–169. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2010.06.001>.
6. Yang H., Fu H., Zhu H. A new expression for inertial particle collection efficiency by nanofibers with slip effect. *Chem. Eng. Sci.*, 2022, vol. 263, art. 118061. <https://doi.org/10.1016/j.ces.2022.118061>.
7. Kirsh V.A. Inertial deposition of submicron aerosols in model fibrous filters composed of ultrafine fibers. *Colloid J.*, 2023, vol. 85, no. 3, pp. 377–388. <https://doi.org/10.1134/S1061933X23600331>.
8. Tsitouras Ch., Famelis I.Th. Phase-fitted modified Runge-Kutta pairs of order 6 (5). *Proc. Int. Conf. on Numerical Analysis and Applied Mathematics (INCAAM 2006): Ext. Abstr.* Simos T., Psihoyios G., Tsitouras C. (Eds.). Weinheim, Wiley-VCH, 2006, pp. 1962–1965.

---

**Для цитирования:** Сафин Д.А., Зарипов Ш.Х., Марданов Р.Ф., Костерина Е.А. Моделирование инерционного осаждения взвешенных частиц в фильтре смешанного типа // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 262–272. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.262-272>.

**For citation:** Safin D.A., Zaripov Sh.Kh., Mardanov R.F., Kosterina E.A. Modeling the inertial deposition of aerosol particles in a mixed-type filter. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 262–272. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.262-272>. (In Russian)