УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 2
С. 250–261

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 512.643.8, 517.954, 517.968

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.250-261

О ЗАДАЧЕ $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С.В. Рогозин, Л.П. Примачук, М.В. Дубатовская

Белорусский государственный университет, г. Минск, 220050, Беларусь

Аннотация

Исследована разрешимость задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (задачи Маркушевича) на единичной окружности. Эта задача эквивалентна векторно-матричной краевой задаче Римана. Ее коэффициент в параболическом случае вырождается (является треугольной матрицей-функцией). В этом случае дано полное описание факторизации матричного коэффициента и вычислены частные индексы этой факторизации. Основной метод исследования развит в серии статей авторов и основан на алгоритме Г.Н. Чеботарева. Построенная факторизация позволяет представить картину разрешимости задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на единичной окружности в параболическом случае.

Ключевые слова: $\mathbb{R}$-линейное сопряжение, параболический случай, факторизация матриц-функций, алгоритм Г.Н. Чеботарева, частный индекс

Введение

Пусть Γ – простая замкнутая гладкая кривая, которая делит расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на две области $D^+ \ni \{0\}$ и $D^- \ni \{\infty\}$. Задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (или $\mathbb{R}$-линейная краевая задача, или задача Маркушевича) заключается в нахождении двух функций $\varphi^+(z), \varphi^-(z)$, аналитических в D^+, D^- соответственно, удовлетворяющих следующему краевому условию

$$\varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

Иное название этой задачи связано со статьей А.И. Маркушевича [1], в которой изучен вырожденный случай задачи (1)

$$\varphi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}.$$

Задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения имеет долгую историю. Это связано в основном с ее многочисленными приложениями (см. исторический обзор [2]). В частности, эта задача описывает потенциальный тепловой поток в $2D$-композиционных материалах (см., например, [2–4]), а также применяется для изучения задач теории оболочек (см., например, [5]).

Если $b(t) \equiv 0$, то задача (1) совпадает с известной краевой задачей Римана (см. [6]), разрешимость которой полностью определяется индексом Коши первого коэффициента, т. е. $\mathrm{Ind}_\Gamma\, a(t)$. Если $a(t) \neq 0$, то задача (1) нормально разрешима. Л.Г. Михайлов [7] выделил три случая разрешимости задачи (1): 1) $|a(t)| > |b(t)|$; 2) $|a(t)| \equiv |b(t)|$; 3) $|a(t)| < |b(t)|$, названные им эллиптическим, параболическим и гиперболическим случаями соответственно. Первое точное решение задачи (1) в эллиптическом случае было получено Б. Боярским [8] при достаточно строгих ограничениях и с использованием специфического искусственного метода. Приближенный метод решения применен в [9] (в частности, при некоторых ограничениях на коэффициенты, соответствующих параболическому случаю). Задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1) исследовалась многими авторами (см. краткое описание результатов в [10, §20], а также [2, 4].) В частности, в [11] доказано, что задача (1) на единичной окружности (т. е. с $\mathcal{L} = \mathbb{T}$) эквивалентна векторно-матричной задаче $\mathbb{C}$-линейного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{T}, \tag{2}$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(t)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\overline{a(t)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$g(t) = \frac{1}{\overline{a(t)}} \begin{pmatrix} \overline{a(t)} f(t) - b(t)\overline{f(t)} \\ -\overline{f(t)} \end{pmatrix},$$

и неизвестные аналитические векторы связаны с φ^+, φ^- соотношениями

$$\Phi^+(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^+(z) \\ \Phi_2^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^+(z) \\ \overline{\varphi^-\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \end{pmatrix}, \quad \Phi^-(z) = \begin{pmatrix} \Phi_1^-(z) \\ \Phi_2^-(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^-(z) \\ \overline{\varphi^+\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Следовательно, в этом случае решение задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1) эквивалентно сводится к факторизации матричного коэффициента $G(t)$ векторно-матричной задачи (2) (см., например, [12, 13]), последнее означает представление матрицы $G(t)$ в следующем виде

$$G(t) = G^+(t)\Lambda(t)G^-(t), \tag{5}$$

где $G^+(t)$, $G^-(t)$ – невырожденные квадратные матрицы-функции, аналитически продолжимые вместе со своими обратными $[G^+(t)]^{-1}$, $[G^-(t)]^{-1}$ в области $D^+ = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ соответственно, и $\Lambda(t) = diag\{t^{æ_1}, t^{æ_2}\}$ с целыми числами $æ_1, æ_2$. Числа $æ_1, æ_2$ называют частными индексами факторизации (5) или частными индексами матрицы $G(t)$.

Задача факторизации $n \times n$-матриц-функций заключается в нахождении множителей $G^+(t)$, $G^-(t)$ и вычислении частных индексов $æ_1, æ_2, \dots, æ_n$ (согласно представлению, аналогичному (5)). Это старая задача, первоначально связанная с решением векторно-матричных краевых задач, но теперь связанная со многими другими математическими проблемами и имеющая множество приложений (см. обзорную статью [14], а также статьи [15–17], в которых специальное внимание уделено мероморфным матрицам-функциям). Предложено несколько методов конструктивного решения задачи факторизации, в том числе подход Г.Н. Чеботарева [18], который факторизовал треугольную матрицу-функцию второго порядка, применив метод цепных дробей.

В настоящей статье мы уделим внимание параболическому случаю задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на единичной окружности. Использовав обобщение метода Чеботарева, мы получим явную факторизацию коэффициента $G(t)$ соответствующей краевой задачи Римана (2) и вычислим частные индексы. Это позволит получить полное описание картины разрешимости задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1). Обсуждена также устойчивость частных индексов рассматриваемой задачи. Всюду ниже будем предполагать, что коэффициенты задачи (1) удовлетворяют условию Гёльдера (см., например, [6]). Это обусловлено тем, что при решении используются свойства сингулярного интегрального оператора, ограниченно действующего в пространствах Гёльдера. В принципе, предлагаемый ниже алгоритм может быть использован и в случае более общих предположений на коэффициенты (см., например, [12]), однако это потребовало бы расширения технического аппарата статьи. Такой подход предполагается применить в последующих публикациях.

1. Об устойчивости краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения

Напомним определение факторизации и частных индексов.

В классической постановке задача факторизации заключается в представлении квадратной невырожденной матрицы-функции $G \in \mathcal{G}(\mathcal{M}(\Gamma))^{n\times n}$ (вообще говоря, непрерывной), определенной на простой замкнутой гладкой кривой Γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в следующем виде

$$G(t) = G^{+}(t)\Lambda(t)G^{-}(t), \tag{6}$$

где невырожденные матрицы $G^{+}(t)$, $G^{-}(t)$ допускают аналитическое продолжение в D^{+} и D^{-} соответственно. Здесь D^{+}, D^{-} – области на сфере Римана, лежащие слева и справа от кривой Γ в соответствии с ориентацией, выбранной на Γ. $\Lambda(t)$ – $n \times n$-диагональная матрица,

$$\Lambda(t) = diag\left\{\left(\frac{t-t^{+}}{t-t^{-}}\right)^{æ_1}, \ldots, \left(\frac{t-t^{+}}{t-t^{-}}\right)^{æ_n}\right\},$$

и $t^{+} \in D^{+}$, $t^{-} \in D^{-}$ – некоторые (фиксированные) точки. В частности, если $\Gamma = \mathbb{R}$, то можно выбрать $t^{+} = i,\ t^{-} = -i$, и если Γ – ограниченная кривая и $0 \in D^{+}$, то

$$\frac{t-t^{+}}{t-t^{-}} = t.$$

Целые числа $æ_1, \ldots, æ_n$ называют частными индексами, а матрицы $G^{-}(t)$, $G^{+}(t)$ – минус-, плюс-факторами. Факторизация типа (6) называется левосторонней или классической левосторонней факторизацией. Если она существует, то частные индексы определяются однозначно с точностью до порядка, т. е. являются инвариантами задачи факторизации. Поменяв местами $G^{+}(t)$ и $G^{-}(t)$ в (6), мы придем к определению правой факторизации. В приведенном выше определении сиволом $\mathcal{M}(\Gamma))^{n\times n}$ обозначен класс всех квадратных $n\times n$-матриц-функций, определенных на Γ, а символом $\mathcal{G}$ – класс обратимых матриц-функций. Для описания результатов, касающихся конструктивных методов факторизации, мы отсылаем читателя к недавним статьям [13, 14, 19] и ссылкам в них.

Одним из важных вопросов, связанных с исследованием разрешимости векторно-матричных краевых задач, является исследование устойчивости частных индексов их матричных коэффициентов. Этот вопрос ставился и обсуждался еще в ранних работах Б. Боярского [20], а также И.Ц. Гохбергом и М.Г. Крейном [21]. Говорят (например, [22, с. 50]), что неособенная $n \times n$-матрица-функция $G(x)$ имеет устойчивое множество частных индексов, если существует такое число $\delta > 0$, что любая матрица-функция $F(x)$ из δ-окрестности $G(x)$ (т. е. $\|F - G\| < \delta$) имеет такое же множество частных индексов (правых или левых), что и матрица $G(x)$. Если это не так, то $G(x)$ имеет неустойчивое множество частных индексов. В зависимости от устойчивости/неустойчивости множества частных индексов матричного коэффициента векторно-матричной задачи последняя также называется устойчивой/неустойчивой соответственно. Было доказано (см. [20–22], а также [11]), что множество частных индексов $æ_1, \ldots, æ_n$ устойчиво тогда и только тогда, когда $\max_j æ_j - \min_j æ_j \leq 1$. В неустойчивом случае небольшая деформация матрицы-функции $G(x)$ может привести к изменению частных индексов. В силу этого применение некоторых приближенных методов решения векторно-матричных краевых задач в неустойчивом случае не всегда приводит к правильному результату (с подробным обсуждением можно познакомиться в [23]).

Обсудим ниже специфику понятия устойчивости в случае задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на единичной окружности и эквивалентной ей задачи $\mathbb{C}$-линейного сопряжения (2). Предположим для определенности, что коэффициенты $a(t), b(t)$ и $c(t)$ в краевом условии (1) непрерывны по Гёльдеру на единичной окружности $\mathbb{T}$ и $a(t) \neq 0$ на $\mathbb{T}$. Матричный коэффициент задачи (3) может быть переписан в виде $G(t) = G_1(t)G_2(t)$, где

$$G_1(t) = \begin{pmatrix} 1/\overline{a(t)} & 0 \\ 0 & 1/\overline{a(t)} \end{pmatrix}, \quad G_2(t) = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 - |b(t)|^2 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\det G_2(t) = |a(t)|^2$ и, таким образом, $\operatorname{ind}_{\mathbb{T}} \det G_2(t) = 0$. Следовательно, частные индексы матрицы $G_2(t)$ (которые обозначены $\tilde{æ}_i, i = 1, 2$) равны $\widetilde{æ}_i = \pm\kappa$ при некотором $\kappa \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, частные индексы матрицы $G(t)$ равны $(æ - \kappa, æ + \kappa)$ при $æ = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$.

Общий результат, описывающий устойчивость задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, представлен в следующем утверждении.[1]

Теорема 1 ([11, Thms. 3–5]).

- Краевая задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1) является устойчивой в эллиптическом случае, т. е. когда $|a(t)| > |b(t)|$.
- Краевая задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1) является устойчивой в параболическом случае, т. е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$, при выполнении дополнительного условия $æ_b = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} b(t) \geq 0$.
- Краевая задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (1) является устойчивой в параболическом случае, т. е. когда $|a(t)| \equiv |b(t)|$), при выполнении дополнительного условия $æ_b = \operatorname{ind}_{\mathbb{T}} b(t) < 0$.

2. Факторизация матричного коэффициента в параболическом случае

В этом разделе мы получим явную факторизацию матричного коэффициента задачи (2), использовав некоторое обобщение подхода Г.Н. Чеботарева [18]. В параболическом случае матрица $G_2(t)$ в коэффициенте имеет вид

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix}.$$

[1]Заметим, что явная факторизация задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения не построена в [11]. Точная оценка так называемых дефектных чисел, т. е. чисел линейно независимых решений и условий разрешимости (1), приведена, например, в [24].

Удобно переписать эту матрицу в форме

$$G_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ -\overline{b(t)} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t) & 0 \\ 1 & -\overline{b(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: A(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и изучить в дальнейшем факторизацию матрицы $A(t)$, для которой частные индексы равны частным индексам матрицы $G_2(t)$.

Обозначим через $x^{\pm}(z)$, $y^{\pm}(z)$ канонические функции (см. [6]) следующих краевых задач:

$$x^+(t) = b(t)x^-(t),$$

$$y^+(t) = -\overline{b(t)}y^-(t).$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{x^-(t)}{y^+(t)} \frac{dt}{t-z}.$$

Тогда следующая кусочно-аналитическая матрица-функция

$$X(z) = \begin{pmatrix} x(z) & 0 \\ y(z)\sigma(z) & y(z) \end{pmatrix}$$

удовлетворяет краевому условию (2), т. е.

$$X^+(t) = A(t)X^-(t), \quad t \in \mathbb{T}.$$

Ниже представлены порядки компонент матрицы $X^-(z)$ на бесконечности:

$$\begin{pmatrix} æ_b & \infty \\ -æ_b + p & -æ_b \end{pmatrix},$$

где $p \geq 1$ – порядок $\sigma^-(z)$ на бесконечности. Заметим, что $\mathrm{ind}_{\mathbb{T}} \det A(t) = 0$.

Если $æ_b \leq -æ_b + p$ (т. е. $2æ_b \leq p$), то матрица $X^-(z)$ имеет нормальную форму на бесконечности (см., например, [25]), и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(æ_b, -æ_b)$.

Утверждение 1. Если $æ_b \leq 0$, то частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(æ_b, -æ_b)$.

Доказательство. Действительно, если $æ_b \leq 0$, то $æ_b \leq -æ_b + p$. □

Из теоремы 1 следует, что в случае $æ_b < 0$ задача (1) неустойчива, но в случае $æ_b = 0$ она устойчива.

В случае $æ_b > 0$ представим отношение $\frac{1}{\sigma^-(z)}$ в виде непрерывной дроби в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{1}{\sigma^-(z)} = Q_0(z) + \cfrac{1}{Q_1(z) + \cfrac{1}{Q_2(t) + \cfrac{1}{\ddots}}}. \tag{7}$$

Здесь $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ – полиномы, имеющие на бесконечности порядки, равные λ_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, с $\lambda_0 = p$ и $\lambda_j \geq 1$, $j = 1, 2, \ldots$. Представление (7) эквивалентно следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{\sigma^-(z)} = Q_0(z) + R_1(z) & \Leftrightarrow & 1 - \sigma^-(z)Q_0(z) = \sigma^-(z)R_1(z), \\ \frac{1}{R_1(z)} = Q_1(z) + R_2(z) & \Leftrightarrow & 1 - R_1(z)Q_1(z) = R_1(z)R_2(z), \\ \frac{1}{R_2(z)} = Q_2(z) + R_3(z) & \Leftrightarrow & 1 - R_2(z)Q_2(z) = R_2(z)R_3(z), \\ & \ldots & \end{array} \tag{8}$$

Здесь $R_j(z)$, $j=1,2,3,\ldots$, – функции, аналитические в окрестности бесконечно удаленной точки и имеющие там порядки λ_j, $j=1,2,3,\ldots$, соответственно. Следовательно, мы построили семейство полиномов $Q_j(z)$, $j\in\mathbb{N}_0$, и семейство функций $R_j(z)$, $j\in\mathbb{N}$, аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки.

Утверждение 2. Пусть $æ_b=\operatorname{ind}_{\mathbb{T}} b(t)>0$ и $(\widetilde{æ}_1,\widetilde{æ}_2)$ – частные индексы матрицы $A(t)$. Если величина $æ_b$ равна одному из следующих чисел: $p=\lambda_0$, $p+\lambda_1=\lambda_0+\lambda_1$, $p+\lambda_1+\lambda_2=\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2,\ldots$, то частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(\widetilde{æ}_1,\widetilde{æ}_2)=(0,0)$.

Доказательство. Пусть $æ_b=p$. Тогда порядки матрицы $X^-(z)$ на бесконечности имеют вид

$$\begin{pmatrix} p & \infty \\ 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу $X^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_1(z)=\begin{pmatrix} 1 & -Q_0(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и воспользуемся первым соотношением (8). Тогда

$$X_1^-(z)=X^-(z)T_1(z)=\begin{pmatrix} x^-(z) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z) & y^-(z)\left[1-\sigma^-(z)Q_0(z)\right] \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^-(z) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z) & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix}.$$

Порядки матрицы $X_1^-(z)$ на бесконечности таковы:

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_1\geq 0$, то порядки на бесконечности обоих столбцов матрицы $X_1^-(z)$ равны 0. Таким образом, эта матрица имеет нормальную форму на бесконечности, и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(0,0)$.

Пусть $æ_b=p+\lambda_1=\lambda_0+\lambda_1$. Умножим матрицу $X_1^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_2(z)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -Q_1(z) & 1 \end{pmatrix}$$

и используем второе соотношение (8). Получим

$$X_2^-(z)=X_1^-(z)T_2(z)=\begin{pmatrix} x^-(z)(1+Q_0(z)Q_1(z)) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z)\left[1-Q_1(z)R_1(z)\right] & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x^-(z)(1+Q_0(z)Q_1(z)) & -x^-(z)Q_0(z) \\ y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z)R_2(z) & y^-(z)\sigma^-(z)R_1(z) \end{pmatrix}.$$

Порядки матрицы $X_2^-(z)$ на бесконечности

$$\begin{pmatrix} \lambda_0+\lambda_1-(\lambda_0+\lambda_1) & \lambda_0+\lambda_1-\lambda_0 \\ -\lambda_0-\lambda_1+\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2 & -\lambda_0-\lambda_1+\lambda_0+\lambda_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_j\geq 0$, то порядки на бесконечности обоих столбцов матрицы $X_2^-(z)$ равны 0. Таким образом, эта матрица имеет нормальную форму на бесконечности, и частные индексы матрицы $A(t)$ равны $(0,0)$.

Если $æ_b = p + \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$, то умножим матрицу $X_2^-(z)$ справа на полиномиальную матрицу

$$T_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & -Q_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и используем третье соотношение (8). В результате получим тот же результат для частных индексов матрицы $A(t)$.

И так далее. □

Замечание 1. Из [11, Thm. 2] следует, что утверждение об устойчивости частных индексов (значит, и устойчивости задачи) также имеет место для всех оставшихся нерассмотренными значений индекса второго коэффициента $æ_b$, а именно, при $æ_b \in (p/2, p) \cup (p, p+1) \cup (p+1, p+2), \ldots$. Тем не менее нам пока неизвестен прямой способ доказательства данного утверждения, подобный приведенному в утверждении 2. Таким образом, вопрос о прямом доказательстве утверждения об устойчивости в указанных случаях в настоящее время является открытым.

3. Разрешимость краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения

На основе метода, описанного выше, были вычислены частные индексы матричного коэффициента $G(t)$ краевой задачи (2). Следовательно, можно полностью описать картину разрешимости как задачи (2), так и исходной краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения. Следуя [7, 11, 12], сформулируем соответствующие результаты в терминах так называемых дефектных чисел l и l' (первое из них означает количество линейно-независимых решений однородной задачи, т. е. при $c(t) \equiv 0$, над полем вещественных чисел, а второе – количество независимых вещественных условий разрешимости неоднородной задачи). Как было указано в разделе 1, частные индексы матрицы $G(t)$ равны $(æ + \kappa, æ - \kappa)$, где $æ = \mathrm{ind}_{\mathbb{T}} a(t)$ и κ – некоторое неотрицательное целое число. Дальнейший анализ показал, что $\kappa = 0$ в устойчивом случае и $\kappa = æ_b = \mathrm{ind}_{\mathbb{T}} b(t)$ в неустойчивом случае. Таким образом, получен следующий результат (который согласуется с [12, Sec. 9.2]).

Теорема 2. (i) Пусть либо $|a(t)| > |b(t)|$, либо $|a(t)| = |b(t)|$ и $æ_b \geq 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = \max\{0, 2æ\}$, $l' = \max\{0, -2æ\}$.

(ii) Пусть $|a(t)| = |b(t)|$ и $æ_b < 0$, $\lambda = æ + æ_b < 0$, $\mu = æ - æ_b > 0$. Тогда дефектные числа краевой задачи (2) равны $l = 2æ - 2æ_b$, $l' = 2æ + 2æ_b$.

Замечание 2. Данное утверждение справедливо также и для краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, поскольку имеется взаимно-однозначное соответствие между решениями задач 2 и 1, а именно, соотношения (4).

Замечание 3. В неустойчивом случае краевой задачи $\mathbb{R}$-линейного сопряжения (случай (ii) теоремы 2) возникает следующий вопрос: возможно ли удовлетворить условия разрешимости за счет подходящего выбора произвольных постоянных, описывающих множество линейно независимых решений однородной задачи? Общая постановка такой задачи приведена в [7], а ряд частных случаев обсужден в [12].

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Государственной программы научных исследований Республики Беларусь “Конвергенция-2025”, проект № 1.7.01.4.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. *Маркушевич А.И.* Об одной краевой задаче теории аналитических функций // Уч. зап. Моск. ун-та. 1946. Т. 1, № 100. С. 20–30.
2. *Mityushev V.V.* $\mathbb{R}$-linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains // Advances in Applied Analysis / Rogosin S.V., Koroleva A.A. (Eds.). Ser.: Trends in Mathematics. Basel: Birkhäuser, 2012. P. 147–176. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0417-2_4.
3. *Drygaš P., Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec, W.* Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Results for Materials Scientists and Engineers. Ser.: Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Cambridge: Woodhead Publ., 2020. 372 p. https://doi.org/10.1016/C2017-0-03743-6.
4. *Mityushev V.V., Rogosin S.V.* Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications. Ser.: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. V. 108. Boca Raton, FL, London, New York, NY, Washington, DC: Chapman & Hall/CRC, 1999. 296 p.
5. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286 с.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи, 3-е изд. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Михайлов Л.Г.* Общая задача сопряжения аналитических функций и ее применения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1963. Т. 27, № 5. С. 969–992.
8. *Боярский Б.* Об обобщенной граничной задаче Гильберта // Сообщ. АН ГрузССР. 1960. Т. 25, № 4. С. 385–390.
9. *Сабитов И.Х.* Об общей краевой задаче линейного сопряжения на окружности // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5, № 1. С. 124–129.
10. *Litvinchuk G.S.* Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift. Ser.: Mathematics and Its Applications. V. 523. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. xvi, 378 p. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9.
11. *Литвинчук Г.С.* Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение // Изв. вузов. Матем. 1967. № 12. С. 47–57.
12. *Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M.* Factorization of Measurable Matrix Functions / Heinig G. (Ed.). Ser.: Operator Theory: Advances and Applications. V. 25. Basel: Birkhäuser, 1987. 372 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6266-0.
13. *Rogosin S.V., Mishuris G.* Constructive methods for factorization of matrix-functions// IMA J. Appl. Math. 2016. V. 81, No 2. P. 365–391. https://doi.org/10.1093/imamat/hxv038.
14. *Kisil A.V., Abrachams I.D., Mishuris G., Rogosin S.V.* The Wiener–Hopf technique, its generalizations and applications: Constructive and approximate methods // Proc. R. Soc. A. 2021. V. 477, No 2254. Art. 20210533. https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0533.
15. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, вып. 1. С. 54–74.
16. *Адуков В.М.* Факторизация Винера – Хопфа кусочно мероморфных матриц-функций // Матем. сб. 2009. Т. 200, № 8. С. 3–24.
17. *Câmara M.C., Malheiro M.T.* Meromorphic factorization revisited and application to some groups of matrix functions // Compl. Anal. Oper. Theory. 2008. V. 2, No 2. P. 299–326. https://doi.org/10.1007/s11785-008-0054-1.

18. *Чеботарев Г.Н.* Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // УМН. 1956. Т. 11, вып. 3 (69). С. 192–202.

19. *Primachuk L., Rogosin S.V.* Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, No 6. P. 809–817. https://doi.org/10.1134/S1995080218060148.

20. *Боярский Б.* Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора // Сообщ. АН ГрузССР. 1958. Т. 21, № 4. С. 391–398.

21. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций // Докл. АН СССР. 1958. Т. 119, № 5. С. 854–857.

22. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13, вып. 2 (80). С. 3–72.

23. *Mishuris G., Rogosin S.* Approximate factorization of a class of matrix-function with unstable set of partial indices // Proc. R. Soc. A. 2018. V. 474, No 2209. Art. 20170279. https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0279.

24. *Литвинчук Г.С., Спитковский И.М.* Точные оценки дефектных чисел обобщенной краевой задачи Римана, факторизация эрмитовых матриц-функций и некоторые проблемы приближения мероморфными функциями // Матем. сб. 1982. Т. 117 (159), № 2. С. 196–215.

25. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд. М.: Наука, 1968. 512 с.

Поступила в редакцию 10.04.2024
Принята к публикации 2.05.2024

Рогозин Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь
E-mail: *rogosinsv@gmail.com*

Примачук Леонид Платонович, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь
E-mail: *rosanovas@yahoo.fr*

Дубатовская Марина Валерьевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220050, Беларусь
E-mail: *marina.dubatovskaya@gmail.com*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 250–261

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.250-261

$\mathbb{R}$-Linear Conjugation Problem on the Unit Circle in the Parabolic Case

*S.V. Rogosin** , *L.P. Primachuk*** , *M.V. Dubatovskaya****

Belarusian State University, Minsk, 220050 Belarus
E-mail: **rogosinsv@gmail.com*, ***rosanovas@yahoo.fr*,
****marina.dubatovskaya@gmail.com*

Received April 10, 2024; Accepted May 2, 2024

Abstract

A solution to the $\mathbb{R}$-linear conjugation problem (Markushevich boundary value problem) on the unit circle was proposed. This problem is analogous to the vector-matrix Riemann boundary value problem with the coefficient degenerating in the parabolic case (the coefficient is a triangular matrix function). A complete description of the factorization of the matrix coefficient was provided. Its partial indices were calculated. The method used is based on G.N. Chebotarev's algorithm and has been developed in a series of author's articles. The resulting factorization confirms the solvability of the $\mathbb{R}$-linear conjugation problem on the unit circle in the parabolic case.

Keywords: $\mathbb{R}$-linear conjugation, parabolic case, factorization of matrix functions, G.N. Chebotarev's algorithm, partial index

Acknowledgements: This study was supported in part by the State Program for Scientific Research of the Republic of Belarus "Convergence-2025" (project no. 1.7.01.4).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Markushevich A.I. On a boundary value problem of analytic function theory. *Uch. Zap. Mosk. Univ.*, 1946, vol. 1, no. 100, pp. 20–30. (In Russian)

2. Mityushev V.V. $\mathbb{R}$-linear and Riemann–Hilbert problems for multiply connected domains. In: Rogosin S.V., Koroleva A.A. (Eds.) *Advances in Applied Analysis*. Ser.: Trends in Mathematics. Basel, Birkhäuser, 2012, pp. 147–176. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0417-2_4.

3. Drygaš P., Gluzman S., Mityushev V., Nawalaniec W. *Applied Analysis of Composite Media: Analytical and Computational Results for Materials Scientists and Engineers*. Ser.: Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Cambridge, Woodhead Publ., 2019. 372 p. https://doi.org/10.1016/C2017-0-03743-6.

4. Mityushev V.V., Rogosin S.V. *Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications*. Ser.: Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Vol. 108. Boca Raton, FL, London, New York, NY, Washington, DC, Chapman & Hall/CRC, 1999. 296 p.

5. Vekua I.N. *Nekotorye obshchie metody postroeniya razlichnykh variantov teorii obolochek* [Some General Methods of Constructing Various Versions of the Shell Theory]. Moscow, Nauka, 1982. 286 p. (In Russian)

6. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. 3rd ed. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)

7. Mikhailov L.G. The general conjugation problem for analytic functions and its applications. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 1963, vol. 27, no. 5, pp. 969–992. (In Russian)

8. Bojarski B. On generalized Hilbert boundary value problem. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1960, vol. 25, no. 4, pp. 385–390. (In Russian)

9. Sabitov I.Kh. A general boundary value problem for the linear conjugate on the circle. *Sib. Mat. Zh.*, 1964, vol. 5, no. 1, pp. 124–129. (In Russian)

10. Litvinchuk G.S. *Solvability Theory of Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with Shift.* Ser.: Mathematics and Its Applications. Vol. 523. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2000. xvi, 378 p. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4363-9.

11. Litvinchuk G.S. Two theorems on the stability of the partial indices of Riemann boundary value problem and their application. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1967, no. 12, pp. 47–57. (In Russian)

12. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. *Factorization of Measurable Matrix Functions.* Heinig G. (Ed.). Ser.: Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 25. Basel, Birkhäuser, 1987. 372 p. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-6266-0.

13. Rogosin S.V., Mishuris G. Constructive methods for factorization of matrix-functions. *IMA J. Appl. Math.*, 2016, vol. 81, no. 2, pp. 365–391. https://doi.org/10.1093/imamat/hxv038.

14. Kisil A.V., Abrachams I.D., Mishuris G., Rogosin S.V. The Wiener–Hopf technique, its generalizations and applications: Constructive and approximate methods. *Proc. R. Soc. A*, 2021, vol. 477, no. 2254, art. 20210533. https://doi.org/10.1098/rspa.2021.0533.

15. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *St. Petersburg Math. J.*, 1993, vol. 4, no. 1, pp. 51–69.

16. Adukov V.M. Wiener-Hopf factorization of piecewise meromorphic matrix-valued functions. *Sb.: Math.*, 2009, vol. 200, no. 8, pp. 1105–1126. https://doi.org/10.1070/SM2009v200n08ABEH004030.

17. Câmara M.C., Malheiro M.T. Meromorphic factorization revisited and application to some groups of matrix functions. *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, vol. 2, no. 2, pp. 299–326. https://doi.org/10.1007/s11785-008-0054-1.

18. Chebotarev G.N. Partial indices for the Riemann boundary value problem with a triangular matrix of the second order. *Usp. Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 3 (69), pp. 192–202. (In Russian)

19. Primachuk L., Rogosin S.V. Factorization of triangular matrix-functions of an arbitrary order. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 6, pp. 809–817. https://doi.org/10.1134/S1995080218060148.

20. Bojarski B. Stability of the Hilbert problem for a holomorphic vector. *Soobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR*, 1958, vol. 21, no. 4, pp. 391–398. (In Russian)

21. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. On the stable system of partial indices in the Hilbert problem for many unknown functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1958, vol. 119, no. 5, pp. 854–857. (In Russian)

22. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Systems of integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of the arguments. *Usp. Mat. Nauk*, 1958, vol. 13, no. 2 (80), pp. 3–72. (In Russian)
23. Mishuris G., Rogosin S. Approximate factorization of a class of matrix-function with unstable set of partial indices. *Proc. R. Soc. A*, 2018, vol. 474, no. 2209, art. 20170279. https://doi.org/10.1098/rspa.2017.0279.
24. Litvinchuk G.S., Spitkovskii I.M. Sharp estimates of defect numbers of a generalized Riemann boundary value problem, factorization of Hermitian matrix-valued functions and some problems of approximation by meromorphic functions. *Math. USSR – Sb.*, 1983, vol. 45, no. 2, pp. 205–224. https://doi.org/10.1070/sm1983v045n02abeh002595.
25. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations]. 3rd ed. Moscow, Nauka, 1968. 512 p. (In Russian)

Для цитирования: *Рогозин С.В., Примачук Л.П., Дубатовская М.В.* О задаче $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на единичной окружности в параболическом случае // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 250–261. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.250-261.

For citation: Rogosin S.V., Primachuk L.P., Dubatovskaya M.V. $\mathbb{R}$-linear conjugation problem on the unit circle in the parabolic case. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 250–261. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.250-261. (In Russian)