

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5: 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.220-237

**НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕНКИ
ПЛОСКОГО КАНАЛА, ЗАПОЛНЕННОГО ВЯЗКИМ
ГАЗОМ И УСТАНОВЛЕННОГО НА ВИБРИРУЮЩЕМ
ОСНОВАНИИ**

В.С. Попов^{1,2}, А.А. Попова¹

¹*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
г. Саратов, 410054, Россия*

²*Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, 410028, Россия*

Аннотация

Рассмотрена задача аэроупругих колебаний стенки канала, имеющей подвес с жесткой кубической нелинейностью, возбуждаемых вибрацией основания, на котором установлен канал. Исследован плоский узкий канал, заполненный пульсирующим вязким газом, с параллельными жесткими стенками, одна из которых неподвижна, а вторая имеет нелинейно-упругий подвес. Дана постановка задачи аэроупругости для случая изотермического состояния газа и стенок канала. В предположении узости канала осуществлен переход к уравнениям динамики тонкого слоя вязкого газа с учетом инерции его движения и проведен асимптотический анализ поставленной задачи методом возмущений. С использованием метода итераций определен закон распределения давления вязкого газа в канале и получено уравнение аэроупругих колебаний стенки в виде обобщения уравнения Дуффинга. Уравнение решено методом гармонического баланса и найдены в виде неявных функций: основной нелинейный аэроупругий отклик стенки канала и нелинейная характеристика фазового сдвига на вибрацию основания. Проведено численное исследование названных характеристик с целью оценки влияния нелинейно-упругого подвеса стенки канала, инерции движения вязкого газа и его сжимаемости на нелинейные колебания стенки канала.

Ключевые слова: нелинейное аэроупругое колебание, упруго закрепленная стенка, вязкий газ, нелинейно-упругий подвес, жесткая кубическая нелинейность, метод возмущений, метод гармонического баланса, аэроупругий отклик, фазовый сдвиг

Введение

Изучение взаимодействия упруго податливых стенок канала с пульсирующей жидкостью или газом, заполняющими канал, связано с постановкой и исследованием начально-краевых задач аэрогидроупругости [1, 2]. Первоначально рассматривались задачи в линейной постановке – одним из первых было исследование И.С. Громеки [3], в котором сделана попытка оценить влияние инерции движения упругой круглой трубки на скорость волны давления в пульсирующей вязкой жидкости, заполняющей ее. В рамках модели идеальной жидкости Н.Е. Жуковским [4] решена задача о гидроударе в трубе круглого сечения с учетом упругой

деформации ее стенок. Движение вязкой жидкости в упругой трубе за счет гармонически пульсирующего перепада давления исследовано Дж.Р. Уомерсли [5] с использованием метода изучения такого движения, предложенного им в [6], и параметра подобия – числа Уомерсли. Современное состояние исследований проблем гидроупругости цилиндрических конструкций отражено в [7, 8].

Среди работ по исследованию гидроупругих колебаний пластин отметим следующие.

Собственные колебания круглой пластины, жестко закрепленной по контуру и с одной ее стороны контактирующей с неограниченным объемом идеальной жидкости, исследованы энергетическим методом в [9]. Рассмотрена основная форма колебаний пластины и установлено уменьшение ее собственной частоты по сравнению со случаем колебаний пластины в вакууме за счет увеличения инерционных свойств колебательной системы, оцениваемого так называемой присоединенной массой.

В [10] осуществлено обобщение исследования [9]: решена связанная задача гидроупругости пластины и рассмотрены последующие формы колебаний, а также шарнирное и свободное опирания пластины на контуре.

В [11] предложено дальнейшее развитие исследования [9] за счет учета вязкости жидкости и показано увеличение присоединенной массы по сравнению со случаем идеальной жидкости. Такое увеличение оказалось пропорциональным введенному автором безразмерному параметру, который фактически является обратным значением числа Уомерсли.

Гидроупругие колебания круглой пластины, закрепленной по контуру на торце жесткой трубы конечного размера, заполненной пульсирующей идеальной несжимаемой жидкостью, исследованы в [12]. На основе рассмотрения связанной задачи гидроупругости получено интегро-дифференциальное уравнение колебаний пластины и проведено его численно-аналитическое исследование.

Колебания стенок канала, образованного двумя параллельными прямоугольными пластинами и заполненного идеальной сжимаемой жидкостью, исследованы численно методом конечных элементов в [13]. Авторами смоделирована возможность демпфирования таких колебаний путем воздействия на пластины посредством электромагнитной катушки; на основе этих расчетов были также проведены натурные эксперименты.

С другой стороны, известен ряд работ, в которых исследовано взаимодействие жестких элементов конструкций, образующих подвижные стенки каналов, с заполняющими их жидкостью или газом.

В [14] рассмотрен мелкий безнапорный канал с идеальной несжимаемой жидкостью, часть дна которого образована штампом на линейно-упругом подвесе. Установлено, что на поверхности жидкости вблизи штампа возникают бегущие и стоячие волны, а амплитуда последних может быть сведена к нулю изменением частоты колебаний штампа. В [15] предложена модель газового демпфера в виде узкого плоского канала, заполненного вязким газом и имеющего параллельные жесткие стенки, поперек которого с постоянной скоростью движется жесткая пластина, параллельная стенкам канала. Рассмотрено взаимодействие пластины со сжимаемым вязким газом в канале с учетом его теплопроводности и дана оценка демпфирующих свойств указанной конструкции для микромеханических приборов.

Динамика взаимодействия газового заполнения динамически настраиваемого гироскопа с элементами его конструкции исследована в [16]. Движение газа рассмотрено в рамках модели ползущей вязкой несжимаемой жидкости в изотермическом состоянии, определены возмущающие моменты от взаимодействия газа с

элементами гироскопа, образующими торцевые и радиальные зазоры, и дана оценка их влияния на характеристики прибора.

В [17] исследована динамика взаимодействия смазочного слоя вязкой несжимаемой жидкости с направляющей и ползуном упорного подшипника. Динамика смазочного слоя изучена в рамках ползущего движения тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрен случай ползуна с адаптированным профилем для повышения несущей способности подшипника при задании экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от давления и температуры.

Приближенный подход к учету влияния упругой деформации стенки газодинамического подшипника при ее взаимодействии со слоем газовой смазки предложен в [18]. Авторами осуществлен переход от кольцевого бесконечно длинного смазочного слоя сжимаемого газа к плоской задаче, а учет упругой деформации стенки подшипника осуществлен добавлением к толщине смазочного слоя дополнительного члена, пропорционального давлению, с коэффициентом пропорциональности, определяемым модулем упругости материала стенки.

В работах [19, 20] рассмотрены вопросы численного моделирования взаимодействия вязкого теплопроводного газа с запорным элементом предохранительного клапана. Запорный элемент в виде жесткого диска на линейно-упругом подвесе рассмотрен в рамках модели массы на пружине, а численное моделирование движения газа реализовано модифицированным методом Годунова. Дано сравнение вычислительных экспериментов с данными натурных испытаний.

В [21, 22] исследованы гидроупругие колебания стенок узких каналов, имеющих упругий подвес с кубической нелинейностью и взаимодействующих с пульсирующей вязкой несжимаемой жидкостью, заполняющей каналы. Нелинейные колебания торцевой стенки, возбуждаемые вибрацией верхней стенки канала в виде жесткого штампа, исследованы в [21], а в [22] изучены нелинейные колебания жесткого дна канала за счет пульсации давления на торцах канала. В этих работах рассмотрено ползущее движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном параллельными стенками, получены уравнения гидроупругих колебаний стенок в виде обобщения уравнения Дуффинга, решение которого проведено методом гармонического баланса.

В работе [23] проведено исследование, аналогичное [22], для случая заполнения канала вязким сжимаемым газом при его изотермическом состоянии. Определен и численно исследован нелинейный аэроупругий отклик нижней стенки канала на подвесе с жесткой кубической нелинейностью.

В настоящей работе, в отличие от исследований, указанных выше, изучены нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала с вязким газом, обусловленные вибрацией основания, на котором он установлен.

1. Постановка задачи аэроупругости для плоского канала

Рассмотрим узкий канал, заполненный вязким газом и образованный двумя параллельными стенками, схематически представленный на рис. 1. Стенки канала считаются абсолютно жесткими и заключенными в единый жесткий корпус, установленный на вибрирующем основании, совершающем гармонические колебания по вертикали. В корпусе предполагается наличие торцевых полостей достаточно большого объема, примыкающих слева и справа к торцевым сечениям канала и заполненных тем же газом. Поверхности стенок канала, контактирующие с газом, являются прямоугольниками со сторонами $2l$ и b .

Рассмотрим плоскую задачу, считая, что $2l \ll b$, и пренебрегая силой тяжести. Верхняя стенка имеет нелинейно-упругий подвес и может перемещаться в вертикальном направлении, не испытывая сил трения со стороны корпуса, а нижняя стенка жестко закреплена и совершает колебания вместе с основанием и корпусом. Положим, что подвес – с нелинейной характеристикой жесткости, а именно, его восстанавливающая сила имеет две составляющие: линейную и нелинейную с жесткой кубической нелинейностью [24]. Свяжем начало декартовой системы координат Oxz с центром внутренней поверхности нижней пластины. В невозмущенном состоянии основание неподвижно, в канале и торцевых полостях поддерживается постоянное давление газа p_0 , принимаемое за начало отсчета давления в вязком газе ($p_0 = 0$); газ находится в равновесии, а зазор между стенками канала $\delta_0 \ll l$. В возмущенном состоянии верхняя стенка совершает нелинейные установившиеся колебания, т. к. переходные процессы за счет вязкости газа быстро затухают.

Положим амплитуду колебаний $z_m \ll \delta_0$, а состояние газа и стенок канала изотермическим и рассмотрим газ как баротропную среду. В рассматриваемой постановке вязкость газа примем постоянной и независимой от давления, как традиционно принято при изучении динамики вязкого газа [25, 26]. Считаем, что при вибрации основания в торцевых полостях над уровнем давления p_0 также поддерживается гармонически пульсирующее давление p_1 , частота пульсации которого совпадает с частотой вибрации основания. Влиянием на газ объемной силы за счет виброускорения основания будем пренебрегать в силу незначительной плотности газа, малых вертикальных размеров торцевых полостей и узости канала.

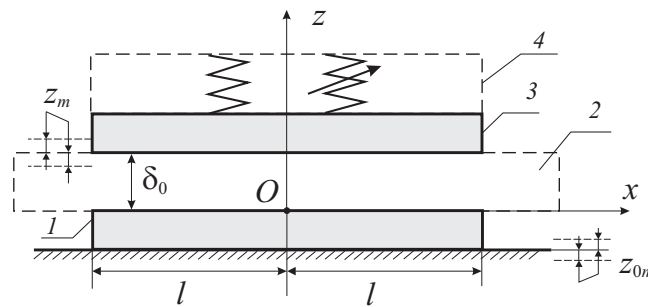


Рис. 1. Узкий плоский канал, установленный на вибрирующем основании: 1 – нижняя стенка (дно канала), установленная на вибрирующем основании; 2 – вязкий газ, заполняющий канал и торцевые полости, примыкающие к торцам канала; 3 – верхняя стенка канала, имеющая нелинейно-упругий подвес; 4 – корпус канала

Положим, что закон пульсации давления в торцевых полостях задан в виде

$$p_1 = p_m \sin(\omega t), \quad (1)$$

а закон вибрации основания определен как

$$z_0 = z_{0m} f_0(\omega t) = z_{0m} \sin(\omega t). \quad (2)$$

Тогда виброускорение основания

$$\frac{d^2 z_0}{dt^2} = -z_{0m} \omega^2 f_0(\omega t) = -z_{0m} \omega^2 \sin(\omega t) = -k g \sin(\omega t), \quad (3)$$

здесь p_m – амплитуда пульсации давления, z_{0m} – амплитуда колебаний основания, ω – заданная частота, t – время, k – коэффициент виброперегрузки, а амплитуда виброускорения задается в единицах g (ускорение свободного падения), т. е. $z_{0m} \omega^2 = g$.

Закон движения верхней стенки в подходе Лагранжа представим в форме $z = z_m f(\theta t)$, где z_m – амплитуда колебаний верхней стенки, θ – характерная частота нелинейных колебаний верхней стенки. Динамика газа в канале в подходе Эйлера описана уравнениями Навье – Стокса для сжимаемой вязкой жидкости [26]

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right), \quad (4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) +$$

$$+ \left(\mu' + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right).$$

Эту систему уравнений замкнем следующими уравнениями неразрывности и состояния для баротропной сжимаемой среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{p}{\rho} = c^2, \quad (6)$$

здесь p – давление газа, V_z – проекция скорости газа на ось Oz , V_x – проекция скорости газа на ось Ox , μ – коэффициент динамической вязкости газа, μ' – вторая или объемная вязкость газа, ρ – плотность газа, c – изотермическая скорость звука в газе.

Уравнения (3)–(6) дополним следующими граничными условиями: – условиями прилипания газа к ограничивающим его подвижной и неподвижной стенкам, записанными в лагранжево-эйлеровом подходе [26, 27]

$$V_x = 0, \quad V_z + z_m f(\theta t) \frac{\partial V_z}{\partial z} = z_m \frac{df(\theta t)}{dt} \quad \text{при } z = \delta_0 + z_m f(\theta t), \quad V_x = V_z = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad (7)$$

– условиями совпадения давлений в сечениях на концах канала слева и справа с давлением в торцевых полостях

$$p = p_1(\omega t) \quad \text{при } x = -l, \quad p = p_1(\omega t) \quad \text{при } x = l. \quad (8)$$

Совместно с (1)–(8) запишем в подходе Лагранжа уравнение движения верхней стенки как массы, подвешенной на пружине, с нелинейно-упругой характеристикой жесткости [24, 28]

$$m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) + n_1 z + n_3 z^3 = F_g, \quad (9)$$

здесь m – масса верхней стенки канала, F_g – сила со стороны вязкого газа в канале, n_1 – коэффициент при линейной составляющей характеристики жесткости подвеса, n_3 – коэффициент при кубической составляющей характеристики жесткости подвеса (т. к. рассматривается жесткая кубическая нелинейность, $n_3 > 0$).

Возмущающая сила F_g определяется нормальным напряжением газа q_n на внутренней поверхности верхней стенки и может быть представлена как [23]

$$F_g = - \int_0^b \int_{-l}^l \left(q_n + z \frac{\partial q_n}{\partial z} \right)_{z=\delta_0+z_m f(\theta t)} dx dy = \\ = b \int_{-l}^l \left(1 + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(p - 2\mu \frac{\partial V_z}{\partial z} + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu' \right) \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) \right)_{z=\delta_0+z_m f(\theta t)} dx. \quad (10)$$

2. Асимптотический анализ сформулированной задачи

Согласно рассматриваемой постановке можно выделить два независимых малых параметра: относительный зазор канала в невозмущенном состоянии $\psi = \delta_0/l \ll 1$ и относительную амплитуду колебаний стенки канала $\lambda = z_m/\delta_0 \ll 1$. Положим $\psi/\lambda = O(1)$, $\mu'/\mu = O(1)$ и введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{\delta_0}, \quad \tau = \theta t, \quad V_x = \frac{z_m \theta}{\psi} U_\xi, \quad V_z = z_m \theta U_\zeta, \quad p = \frac{\lambda \mu \theta}{\psi} P. \quad (11)$$

Примем во внимание, что плотность газа может быть представлена как $\rho = \rho_0 + \rho^*$, где ρ_0 – плотность, соответствующая постоянному давлению p_0 в невозмущенном состоянии, ρ^* – плотность газа в возмущенном состоянии (ниже индекс * опущен). С учетом (11) давление в торцевых полостях будет иметь вид $p_1 = \lambda \mu \theta \psi^{-2} P_1(\tau \omega / \theta)$. Тогда в безразмерных переменных (11) задача (4)–(10) примет вид

$$\begin{aligned} & (Wo^2 + \lambda Mo^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \xi} + \\ & + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2} + \psi^2 \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right), \\ & \psi^2 (Wo^2 + \lambda Mo^2 P) \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = - \frac{\partial P}{\partial \zeta} + \\ & + \psi^2 \left(\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{\partial^2 U_\zeta^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi \partial \zeta} \right) \right), \\ & Mo^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda Mo^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + [Wo^2 + \lambda Mo^2 P] \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) = 0, \\ & \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau \omega / \theta)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 = \frac{bl\mu}{mz_m\theta\psi} \int_{-1}^1 \left(1 + \right. \\ & \left. + \lambda f(\tau) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left[\frac{\lambda}{\psi} P + \lambda \psi \left(\left(\frac{2}{3} - \frac{\mu'}{\mu} \right) \left(\frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} \right) - 2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right]_{\zeta=1+\lambda f(\tau)} d\xi \end{aligned} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta + \lambda f(\tau) \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f(\tau), \quad U_\xi = V_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (14)$$

$$P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = -1, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = 1. \quad (15)$$

Здесь выделены параметры подобия: $Wo = \delta_0 \sqrt{\rho_0 \theta / \mu}$ – число Уомерсли [5, 6], $Mo = \theta l / c$ – число подобия, предложенное Л.И. Могилевичем в [23] и представляющее собой произведение чисел Струхалия и Маха.

В уравнениях (12), (13), аналогично теории гидродинамической смазки [26], пренебрежем членами порядка ψ^2 , однако удержим инерционные члены. В результате получим систему уравнений

$$(Wo^2 + \lambda Mo^2 P) \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Mo^2 \frac{\partial P}{\partial \tau} + \lambda Mo^2 \left(U_\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) + [Wo^2 + \lambda Mo^2 P] \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau\omega/\theta)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 &= \\ = \frac{\lambda}{\psi} \frac{bl\mu}{mz_m\theta} \frac{1}{\psi} \int_{-1}^1 \left(P + \lambda f(\tau) \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1+\lambda f(\tau)} d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Применим к (16), (17) с граничными условиями (14), (15) метод возмущений [29]. Для этого рассмотрим следующие асимптотические разложения искомых функций по малому параметру λ

$$U_\xi = U_\xi^{(0)} + \lambda U_\xi^{(1)} + \dots, \quad U_\zeta = U_\zeta^{(0)} + \lambda U_\zeta^{(1)} + \dots, \quad P = P^{(0)} + \lambda P^{(1)} + \dots \quad (18)$$

Ограничившись в (18) первым членом (опустив индекс (0)) и учитывая, что согласно (16) давление P не зависит от ζ , окончательно получим следующую задачу аэроупругости

$$Wo^2 \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{Mo^2}{Wo^2} \frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{n_1}{m\theta^2} f(\tau) + \frac{n_3 z_m^2}{m\theta^2} f(\tau)^3 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{bl\mu}{mz_m\theta} \frac{1}{\psi} \int_{-1}^1 P d\xi = -\frac{z_{0m}}{z_m} \frac{d^2 f_0(\tau\omega/\theta)}{d\tau^2} \quad (20)$$

с граничными условиями

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = V_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (21)$$

3. Закон распределения давления газа в канале и нелинейный аэроупругий отклик стенки на вибрацию основания канала

Решим уравнение (19) с граничными условиями (21), используя метод итераций [23]. Проведя первую итерацию, рассмотрим ползущее движение несжимаемого вязкого газа, т. е. считаем, что $Wo^2 \rightarrow 0$ и $Mo^2/Wo^2 \rightarrow 0$, и исключаем из (19) члены при параметрах подобия. В этом случае решение имеет вид

$$U_\xi = \frac{\zeta^2 - \zeta}{2} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad U_\zeta = \frac{3\zeta^2 - 2\zeta^3}{12} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \quad P = P_1(\omega\tau/\theta) + 6(\zeta^2 - 1) \frac{df(\tau)}{d\tau}. \quad (22)$$

Проведя вторую итерацию, определим члены, исключенные из рассмотрения на первой итерации при использовании (22), и найдем решение полученных уравнений. В результате определим закон распределения давления вязкого газа вдоль

канала в виде

$$P = P_1(\omega\tau/\theta) + 6\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2}(\xi^2 - 1)\frac{dP_1(\omega\tau/\theta)}{d\tau} + \frac{(\xi^2 - 1)}{2}\left(12\frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{5}{6}\text{Wo}^2\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}\right) + \quad (23)$$

$$+ 6\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2}(5 + \xi^4 - \xi^6)\frac{d^2f(\tau)}{d\tau^2}.$$

Подставив (23) в уравнение движения стенки (20), запишем его в размерном виде

$$(m + M_{g1} - M_{g2})\frac{d^2z}{dt^2} + K_g\frac{dz}{dt} + n_1z + n_3z^3 = 2lb\left(p_1 - T_g\frac{dp_1}{dt}\right) - \frac{d^2z_0}{dt^2}, \quad (24)$$

$$\text{где } M_{g1} = \frac{12}{15}\frac{b\mu}{\theta}\frac{l^3}{\delta_0^3}\text{Wo}^2 = \frac{12}{15}\frac{b}{\delta_0}l^3\rho_0, \quad M_{g2} = \frac{192}{5}\frac{b\mu}{\theta}\frac{l^3}{\delta_0^3}\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = \frac{192}{5}\frac{l^5}{\delta_0^5}\frac{b\mu^2}{c^2\rho_0},$$

$$K_g = 8\frac{\mu bl^3}{\delta_0^3}, \quad T_g = \frac{4}{\theta}\frac{\text{Mo}^2}{\text{Wo}^2} = 4\frac{\mu l^2}{c^2\rho_0\delta_0^3}.$$

Уравнение (24) – это уравнение аэроупругих колебаний стенки канала, установленного на вибрирующее основание, и его можно рассматривать как обобщение уравнения Дуффинга [24, 28]. Учитывая (1) и (3), запишем (24) в виде

$$(m + M_{g1} - M_{g2})\frac{d^2z}{dt^2} + K_g\frac{dz}{dt} + n_1z + n_3z^3 = A(\omega)\sin(\omega t - \varphi(\omega)), \quad (25)$$

здесь

$$A(\omega) = \sqrt{(mkg)^2 + 4lbp_m mkg + 4(1 + (T_g\omega)^2)(lbp_m)^2}, \quad \text{tg } \varphi(\omega) = \frac{2lbp_m T_g\omega}{mkg + 2lbp_m}.$$

Неоднородное уравнение Дуффинга с гармонической возмущающей силой в правой части допускает периодическое решение [28]. Получим такое решение для основной частоты, т. е. для частоты переносного виброускорения основания, используя метод гармонического баланса [24, 30]. В этом случае вид искомого решения определим в виде $z = z_m\sin(\omega t - \varphi)$. Вязкость газа обуславливает в (25) член с вязким трением и ведет к фазовому сдвигу ϕ в отклике стенки на возмущение – вибрацию основания. Сдвиг учтем в правой части (25), т. е. представим правую часть (25) в виде $A(\omega)\sin(\omega t - \varphi + \phi)$ [24]. Проведя после этого процедуру метода гармонического баланса, получим систему двух алгебраических уравнений

$$\left[n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2 + (m + M_{g1} - M_{g2})\omega^2\right]z_m = A(\omega)\cos\phi, \quad K_g\omega z_m = A(\omega)\sin\phi. \quad (26)$$

Из (26) найдем выражения основного аэроупругого отклика и фазового сдвига для стенки канала, установленного на вибрирующем основании:

$$z_m = \frac{A(\omega)}{\sqrt{\left[n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2 + (m + M_{g1} - M_{g2})\omega^2\right]^2 + K_g^2\omega^2}}, \quad (27)$$

$$\text{tg } \phi(\omega) = \frac{K_g\omega/(m + M_{g1} - M_{g2})}{(n_1 + \frac{3}{4}n_3z_m^2)/(m + M_{g1} - M_{g2}) - \omega^2}. \quad (28)$$

Введя в рассмотрение безразмерную частоту $\eta = \omega / \sqrt{n_1(m + M_{g1} - M_{g2})}$ и обозначение $B = \frac{K_g}{\sqrt{n_1(m + M_{g1} - M_{g2})}}$, представим (27) и (28) в виде

$$z_m = \frac{mkg}{n_1} \frac{\sqrt{1 + 4\frac{lbpm}{mkg} + 4(1 + \frac{n_1}{m + M_{g1} - M_{g2}}(T_g\eta)^2)(\frac{lbpm}{mkg})^2}}{\sqrt{(\eta_*^2 - \eta^2)^2 + B^2\eta^2}}, \quad (29)$$

$$\operatorname{tg} \phi(\omega) = \frac{B\eta}{\eta_*^2 - \eta^2}. \quad (30)$$

Здесь выделена безразмерная скелетная кривая $\eta_*^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{n_3}{n_1} z_m^2$. Эта кривая представляет характеристику изменения собственных безразмерных частот рассматриваемой нелинейной колебательной системы без демпфирования при $K_g = 0$, т. е. нелинейной консервативной колебательной системы.

4. Результаты вычислений

Выражения (29) и (30) являются неявными функциями, что затрудняет их непосредственное использование, однако они могут быть исследованы численно. Заметим, что полученные выражения для аэроупругого отклика и фазового сдвига допускают переходы к следующим частным случаям.

Если положить $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$, что эквивалентно $\text{Mo}^2/\text{Wo}^2 \rightarrow 0$, то исключим сжимаемость пульсирующего вязкого газа и осуществим переход к рассмотрению несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости).

Если положить $M_{1g} = 0$, что эквивалентно $\text{Wo}^2 \rightarrow 0$, то исключим из рассмотрения силы инерции пульсирующего газа и осуществим переход к ползущему движению вязкого газа.

При $M_{1g} = 0$ и $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$ осуществим переход к рассмотрению ползущего движения несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости). Кроме того, если принять $n_3 = 0$, то осуществим переход к случаю, когда подвес стенки канала имеет линейную характеристику жесткости, а выражения (29), (30) являются явными функциями.

Приведем пример численного исследования аэроупругого отклика стенки канала по выражениям (29), (30) для канала с параметрами: $l = 0.12$ м, $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $b = 2l$, $m = 3$ кг, $\rho_{g0} = 1.2$ кг/м³, $\mu = 18.1 \cdot 10^{-6}$ Па·с, $c = 290$ м/с, $n_1 = 8 \cdot 10^6$ Н/м, $n_3 = 7 \cdot 10^{14}$ Н/м³, $p_m = 2.4 \cdot 10^4$ Па. Были рассмотрены случаи:

- 1) канал заполнен вязким газом при учете сжимаемости и инерции его движения;
- 2) ползущее движение сжимаемого вязкого газа, т. е. случай, когда $M_{1g} = 0$;
- 3) канал заполнен несжимаемым вязким газом (вязкой жидкостью) при учете инерции его движения, т. е. случай, когда $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$;
- 4) ползущее движение несжимаемого вязкого газа (вязкой жидкости), т. е. случай, когда $M_{1g} = 0$ и $M_{2g} = 0$, $T_g = 0$.

Результаты расчетов кривых нелинейного аэроупругого отклика и фазового сдвига представлены на рис. 2–5. На рис. 6 для примера приведены кривые линейного аэроупругого отклика, т. е. отклика (29) при $n_3 = 0$. Кривые фазового сдвига (30) для этого случая совпадают друг с другом и имеют классический вид фазовых характеристик гармонического осциллятора [24].

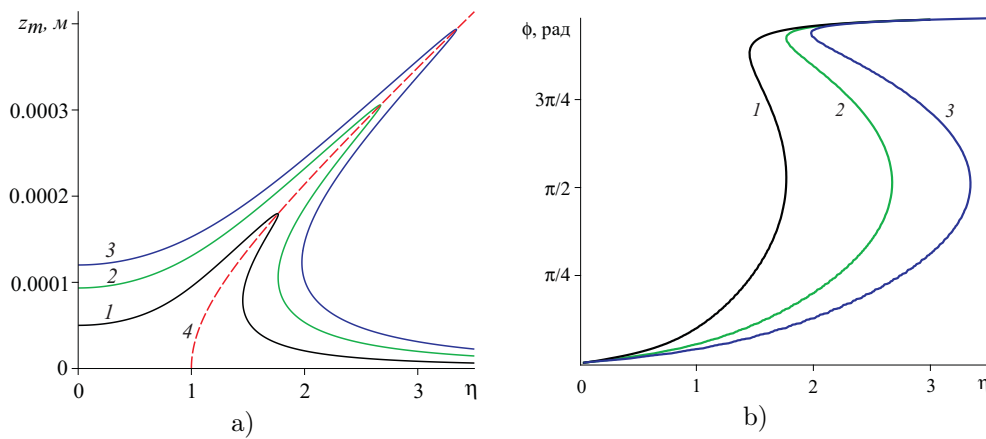


Рис. 2. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при учете инерции движения и сжимаемости газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1273.72$ рад/с)

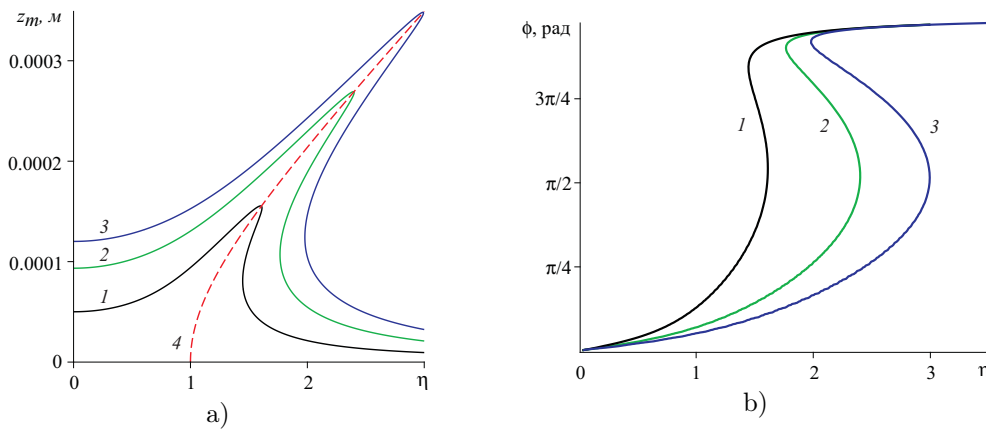


Рис. 3. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при ползущем движении сжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1649.45$ рад/с)

5. Выводы и заключение

Для рассматриваемого канала сформулирована плоская связанная задача аэроупругости. Проведенный асимптотический анализ поставленной задачи позволил получить уравнение аэроупругих колебаний стенки канала (24) в виде обобщения уравнения Дуффинга. Анализ уравнения показал, что учет инерции движения вязкого газа ведет к появлению дополнительной инерционной силы, которая пропорциональна так называемой присоединенной массе M_{g1} . Следовательно, учет влияния инерции движения вязкого газа ведет к увеличению инерционных свойств рассматриваемой колебательной системы. С другой стороны, учет сжимаемости газа обуславливает появление силы, пропорциональной дополнительной массе M_{g2} , направленной в противоположную силам инерции движения стенки канала и вязкого газа сторону. Эта сила обусловлена изменением плотности сжимаемого вязкого газа при его торможении/ускорении и ведет к уменьшению инерционных свойств рассматриваемой аэроупругой колебательной системы. Найденные основной аэро-

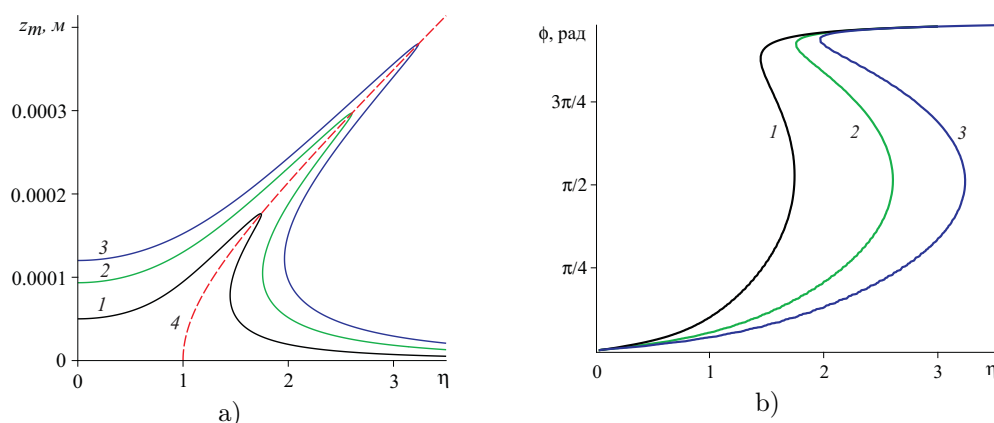


Рис. 4. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при учете инерции движения несжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1266.09$ рад/с)

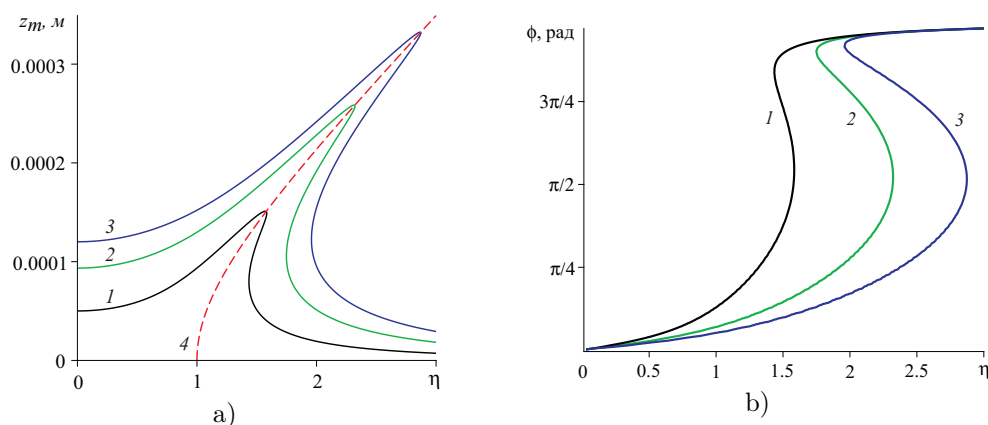


Рис. 5. Расчетные кривые отклика стенки а) и фазового сдвига б) при ползущем движении несжимаемого газа: (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 5 g, (3) виброперегрузка 10 g, (4) скелетная кривая η_* ($\eta_* = 1$ соответствует $\omega_* = 1632.99$ рад/с)

упругий отклик стенки канала (29) и фазовый сдвиг (30) позволяют численно исследовать влияние указанных факторов, а также нелинейности подвеса стенки канала.

Расчеты указанных характеристик, представленные на рис. 2–5, показали важность учета сжимаемости и инерции движения вязкого газа в канале. Принятие во внимание инерции движения газа ведет к возрастанию инерционных свойств и уменьшению резонансных частот, сопровождаемые возрастанием амплитуд колебаний. Учет изменения плотности газа обуславливает снижение инерционных свойств и приводит к незначительному возрастанию значений резонансных частот, сопровождаемому снижением амплитуд колебаний. Такое поведение характерно как для нелинейно-упругого подвеса, так и для линейного подвеса стенки канала.

При учете жесткой кубической нелинейности подвеса стенки канала наблюдается изгиб кривых аэроупругого отклика и фазового сдвига. В результате происходит рост значений резонансных частот при увеличении коэффициента виброперегрузок. При вынужденных нелинейных колебаниях осцилля-

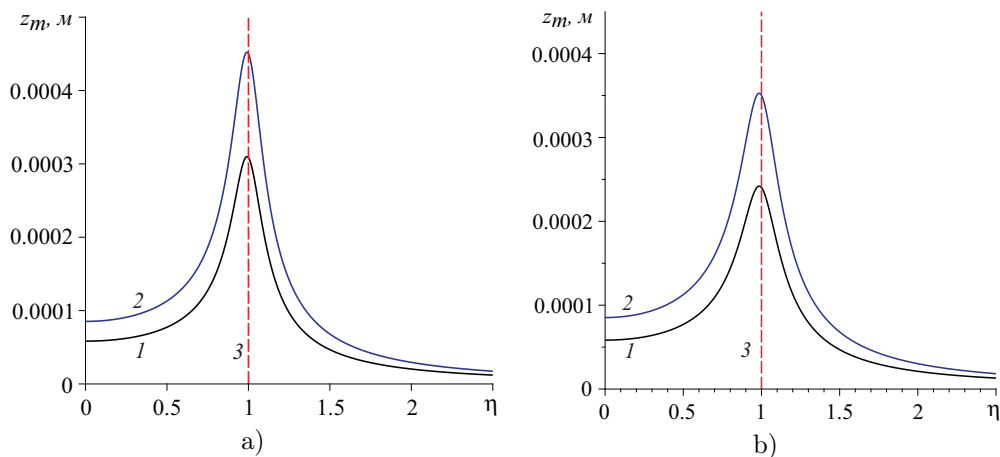


Рис. 6. Аэроупругий отклик стенки канала на линейно-упругом подвесе ($n_3 = 0$) при учете инерции движения и сжимаемости газа а) и ползущем движении сжимаемого газа б): (1) виброперегрузка 1 g, (2) виброперегрузка 2 g, (3) безразмерная собственная частота ($\eta = 1$ соответствует $\omega = 1273.72$ рад/с для а), $\omega = 1649.45$ рад/с для б))

тора Дуффинга с вязким трением в зоне изгиба характеристик амплитудного отклика вблизи резонансных частот возникают неустойчивые колебания [24, 28]. Эти колебания характеризуются скачкообразным изменением амплитуд. Проведенные расчеты показали, что такие колебания возможны для рассматриваемой стенки канала. В случае линейного подвеса ($n_3 = 0$) выражения для аэроупругого отклика и фазового сдвига принимают классический вид, соответствующий гармоническому осциллятору с вязким трением.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа вибрационной устойчивости чувствительных элементов датчиков давления, аэростатических опор, систем газового демпфирования микромеханических приборов, а также стенок каналов, имеющих нелинейно- и линейно-упругие подвесы.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание по теме 122030100145-3).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 592 с.
2. Païdoussis M.P. Fluid-Structure Interactions. V. 2: Slender structures and axial flow. 2nd ed. London: Acad. Press, 2016. xviii, 923 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>.
3. Громека И.С. О скорости распространения волнообразного движения жидкостей в упругих трубках // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1952. С. 172–183.
4. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 103 с.

5. *Womersley J.R.* XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube — I: The linear approximation for long waves // London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7. 1955. V. 46, No 373. P. 199–221.
<https://doi.org/10.1080/14786440208520564>.
6. *Womersley J.R.* Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known // J. Physiol. 1955. V. 127, No 3. P. 553–563.
<https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>.
7. *Païdoussis M.P.* Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review // J. Fluids Struct. 2021. V. 107. Art. 103374. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>.
8. *Païdoussis M.P.* Pipes conveying fluid: A fertile dynamics problem // J. Fluids Struct. 2022. V. 114. Art. 103664. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103664>.
9. *Lamb H.* On the vibrations of an elastic plate in contact with water // Proc. R. Soc. A. 1920. V. 98, No 690. P. 205–216. <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>.
10. *Amabili M., Kwak M.K.* Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem // J. Fluids Struct. 1996. V. 10, No 7. P. 743–761.
<https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>.
11. *Kozlovsky Y.* Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb’s model // J. Sound Vib. 2009. V. 326, No 1–2. P. 332–339.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
12. *Velmisov P.A., Pokladova Yu.V.* Mathematical modelling of the “Pipeline-pressure sensor” system // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1353. Art. 012085.
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
13. *Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V.* Control of hydro-elastic vibrations of two parallel plates by electromagnetic coil // AIP Conf. Proc. 2020. V. 2239. Art. 020020.
<https://doi.org/10.1063/5.0008384>.
14. *Indeitsev D.A., Osipova E.V.* Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water // Tech. Phys. 2000. V. 45, No 12. P. 1513–1517.
<https://doi.org/10.1134/1.1333186>.
15. *Шевцова Е.В.* Газовое демпфирование в микромеханических приборах // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2006. № 2 (63). С. 100–111.
16. *Цинь Ц., Подчезерцев В.П.* Влияние конструктивных особенностей и параметров газового заполнения на характеристики динамически настраиваемых гироскопов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 2 (113). С. 4–20.
<https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>.
17. *Хасьянова Д.У., Мукутадзе М.А.* Оптимизация опорной поверхности подшипника скольжения по параметру несущей способности с учетом зависимости вязкости смазочного материала от давления и температуры // ПМНМ. 2018. № 4. С. 66–72.
<https://doi.org/10.31857/S023571190000592-2>.
18. *Турчак Л.И., Шидловский В.П.* Математическое моделирование проблем газовой смазки // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51, № 2. С. 329–348.
19. *Редер Т., Тенев В.А., Чернова А.А.* Численное моделирование неустойчивых режимов работы предохранительного клапана // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. 2020. № 68. С. 141–157. <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>.
20. *Raeder T., Tenenev V.A., Koroleva M.R., Mishchenkova O.V.* Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state // Russ. J. Nonlinear Dyn. 2021. V. 17, No 1. P. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>.

21. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations // Mathematics. 2022. V. 10, No 20. Art. 3844. <https://doi.org/10.3390/math10203844>.
22. Попов В.С., Попова А.А. Моделирование гидроупругих колебаний стенки канала, имеющей нелинейно-упругую опору // Комп. исслед. и моделир. 2022. Т. 14, № 1. С. 79–92. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>.
23. Попов В.С., Мозилевич Л.И., Попова А.А. Колебания стенки канала на нелинейно-упругом подвесе под воздействием пульсирующего слоя вязкого газа, находящегося в канале // Изв. вузов. Радиофизика. 2023. Т. 66, № 10. С. 821–834.
24. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.
25. Константиnescу В.Н. Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
26. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
27. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: ЛГУ, 1978. 296 с.
28. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. New York, NY: Wiley, 1979. xiv, 704 p.
29. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Stanford, CA: The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.
30. Krack M., Gross J. Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems. Ser.: Mathematical Engineering. Schröder J., Weigand B. (Eds.). New York, NY: Springer, 2019. xii, 159 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.

Поступила в редакцию 24.04.2024

Принята к публикации 26.04.2024

Попов Виктор Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры «Прикладная математика и системный анализ»; главный научный сотрудник

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия

Институт проблем точной механики и управления РАН

ул. Рабочая, д. 24, г. Саратов, 410028, Россия

E-mail: vic_p@bk.ru

Попова Анна Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Прикладная математика и системный анализ»

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, 410054, Россия

E-mail: anay_p@bk.ru

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
 SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
 (Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
 2024, vol. 166, no. 2, pp. ...

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2...-...

**Nonlinear Aeroelastic Oscillations in the Wall of a Flat Channel
 Filled with Viscous Gas and Resting on a Vibrating Foundation**

V.S. Popov^{a,}, A.A. Popova^{a,**}*

^a *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054 Russia*

^b *Institute of Precision Mechanics and Control, Russian Academy of Sciences,
 Saratov, 410028 Russia*

E-mail: ^{*}*vic_p@bk.ru*, ^{**}*anay_p@bk.ru*

Received April 24, 2024; Accepted April 26, 2024

Abstract

This article considers the problem of aeroelastic oscillations in the channel wall having a suspension with hardening cubic nonlinearity, which were induced by the vibration of the channel foundation. The narrow flat channel formed by two parallel rigid walls and filled with pulsating viscous gas was examined. The bottom wall was stationary, while the opposite one had a nonlinear elastic suspension. The aeroelasticity problem was formulated for the isothermal state of the gas and channel walls. Considering the narrowness of the channel, the equations of dynamics were derived for a thin layer of the viscous gas, and the asymptotic analysis of the problem was performed by the perturbation method. Using the method of iterations, the law of viscous gas pressure distribution in the channel was determined, and the equation of aeroelastic oscillations in the channel wall was obtained as a generalization of the Duffing equation. This equation was solved by the harmonic balance method. The primary nonlinear aeroelastic response of the channel wall and the nonlinear phase shift were expressed as implicit functions. These characteristics were studied numerically to evaluate the influence of the nonlinear elastic suspension of the channel wall and the viscous gas inertia and compressibility on the nonlinear oscillations in the channel wall.

Keywords: nonlinear aeroelastic oscillation, elastically fixed wall, viscous gas, nonlinear elastic suspension, hardening cubic nonlinearity, perturbation method, harmonic balance method, aeroelastic response, phase shift

Acknowledgments. This study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as part of the state assignment (theme no. 122030100145-3).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Narrow flat channel resting on a vibrating foundation: 1 – bottom wall (channel bottom) on a vibrating foundation; 2 – viscous gas filling the channel and end cavities adjacent to the channel ends; 3 – upper wall with a nonlinear elastic suspension; 4 – channel body.

Fig. 2. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the inertia and compressibility of gas: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1273.72$ rad/s).

Fig. 3. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the compressible gas creep: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1649.45$ rad/s).

Fig. 4. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the inertia of incompressible gas: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1266.09$ rad/s).

Fig. 5. Calculated curves of the wall response a) and phase shift b) considering the incompressible gas creep: (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 5 g, (3) vibration overload 10 g, (4) backbone curve η_* ($\eta_* = 1$ corresponds to $\omega_* = 1632.99$ rad/s).

Fig. 6. Aeroelastic response of the channel wall with a linear elastic suspension ($n_3 = 0$) considering the inertia and compressibility of gas a) and the compressible gas creep b): (1) vibration overload 1 g, (2) vibration overload 2 g, (3) non-dimensional eigenfrequency ($\eta = 1$ corresponds to $\omega = 1273.72$ rad/s for a), $\omega = 1649.45$ rad/s for b)).

References

1. Gorshkov A.G., Morozov V.I., Ponomarev A.T., Shklyarchuk F.N. *Aerogidrouprugost' konstruktsii* [Aerohydroelasticity of Structures]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 592 p. (In Russian)
2. Païdoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions*. Vol. 2: Slender structures and axial flow. 2nd ed. London, Acad. Press, 2016. xviii, 923 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-08058-4>.
3. Gromeka I.S. Wave velocities of fluid in elastic pipes. In: *Sobr. soch.* [Collected Works]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1952, pp. 172–183. (In Russian)
4. Joukowsky N.E. *O gidravlicheskom udare v vodoprovodnykh trubakh* [Water Hammer in Pipes]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1949. 103 p. (In Russian)
5. Womersley J.R. XXIV. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube — I: The linear approximation for long waves. *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., Ser. 7*, 1955, vol. 46, no. 373, pp. 199–221. <https://doi.org/10.1080/14786440208520564>.
6. Womersley J.R. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J. Physiol.*, 1955, vol. 127, no. 3, pp. 553–563. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1955.sp005276>.
7. Païdoussis M.P. Dynamics of cylindrical structures in axial flow: A review. *J. Fluids Struct.*, 2021, vol. 107, art. 103374. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2021.103374>.
8. Païdoussis M.P. Pipes conveying fluid: A fertile dynamics problem. *J. Fluids Struct.*, 2022, vol. 114, art. 103664. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2022.103664>.
9. Lamb H. On the vibrations of an elastic plate in contact with water. *Proc. R. Soc. A*, 1920, vol. 98, no. 690, pp. 205–216. <https://doi.org/10.1098/rspa.1920.0064>.
10. Amabili M., Kwak M.K. Free vibrations of circular plates coupled with liquids: Revising the Lamb problem. *J. Fluids Struct.*, 1996, vol. 10, no. 7, pp. 743–761. <https://doi.org/10.1006/jfls.1996.0051>.
11. Kozlovsky Y. Vibration of plates in contact with viscous fluid: Extension of Lamb's model. *J. Sound Vib.*, 2009, vol. 326, nos. 1–2, pp. 332–339. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.04.031>.
12. Velmisov P.A., Pokladova Yu.V. Mathematical modelling of the “Pipeline-pressure sensor” system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1353, art. 012085. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.

13. Kamenskikh A.O., Lekomtsev S.V. Control of hydro-elastic vibrations of two parallel plates by electromagnetic coil. *AIP Conf. Proc.*, 2020, vol. 2239, art. 020020. <https://doi.org/10.1063/5.0008384>.
14. Indeitsev D.A., Osipova E.V. Nonlinear effects in trapped modes of standing waves on the surface of shallow water. *Tech. Phys.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 1513–1517. <https://doi.org/10.1134/1.1333186>.
15. Shevtsova E.V. Gas damping in micromechanical instruments. *Vestn. MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostr.*, 2006, no. 2 (63), pp. 100–111. (In Russian)
16. Qin Z., Podchertzsev V.P. Influence of design features and gas filling parameters on dynamically tuned gyroscope characteristics. *Vestn. MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostr.*, 2017, no. 2 (113), pp. 4–20. <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2017-2-4-20>.
17. Mukutadze M.A., Khasyanova D.U. Optimization of the supporting surface of a slider bearing according to the load-carrying capacity taking into account the lubricant viscosity depending on pressure and temperature. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2018, vol. 47, no. 4, pp. 356–361. <https://doi.org/10.3103/S1052618818040106>.
18. Turchak L.I., Shidlovskii V.P. Mathematical modeling of gas lubrication problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 2, pp. 308–325. <https://doi.org/10.1134/S0965542511020151>.
19. Raeder T., Tenenev V.A., Chernova A.A. Numerical simulation of unstable safety valve modes. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2020, no. 68, pp. 141–157. <https://doi.org/10.17223/19988621/68/13>. (In Russian)
20. Raeder T., Tenenev V.A., Koroleva M.R., Mishchenkova O.V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2021, vol. 17, no. 1, pp. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>.
21. Barulina M., Santo L., Popov V., Popova A., Kondratov D. Modeling nonlinear hydroelastic response for the endwall of the plane channel due to its upper-wall vibrations. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 20, art. 3844. <https://doi.org/10.3390/math10203844>.
22. Popov V.S., Popova A.A. Modeling of hydroelastic oscillations for a channel wall possessing a nonlinear elastic support. *Komp'yut. Issled. Model.*, 2022, vol. 14, no. 1, pp. 79–92. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2022-14-1-79-92>. (In Russian)
23. Popov V.S., Mogilevich L.I., Popova A.A. Vibrations of the channel wall on a nonlinear elastic suspension under the influence of a pulsating layer of viscous gas located in the channel. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz.*, 2023, vol. 66, no. 10, pp. 821–834. (In Russian)
24. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy* [Introduction to the Theory of Mechanical Vibrations]. Moscow, Nauka, 1991. 256 p. (In Russian)
25. Constantinescu V.N. *Gazovaya smazka* [Gas Lubrication]. Moscow, Mashinostroenie, 1968. 718 p. (In Russian)
26. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow, Drofa, 2003. 840 p. (In Russian)
27. Vallander S.V. *Lektsii po gidroaeromekhanike* [Lectures in Hydroaeromechanics]. Leningrad, LGU, 1978. 296 p. (In Russian)
28. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*. New York, NY, Wiley, 1979. xiv, 704 p.
29. Van Dyke M. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Stanford, CA, The Parabolic Press, 1975. xiv, 271 p.

-
30. Krack M., Gross J. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Ser.: Mathematical Engineering. Schröder J., Weigand B. (Eds.). New York, NY, Springer, 2019. xii, 159 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14023-6>.
-

⟨ **Для цитирования:** Попов В.С., Попова А.А. Нелинейные аэроупругие колебания стенки плоского канала, заполненного вязким газом и установленного на вибрирующем основании // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 220–237. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237>. ⟩

⟨ **For citation:** Popov V.S., Popova A.A. Nonlinear aeroelastic oscillations in the wall of a flat channel filled with viscous gas and resting on a vibrating foundation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 220–237. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.220-237>. (In Russian) ⟩