

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.200-219

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ
ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ С НАКЛАДКАМИ
ПРИ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ**

*В.Н. Паймушин^{1,2}, С.А. Холмогоров¹, М.В. Макаров^{1,2},
Н.В. Левшонкова¹*

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, 420111, Россия*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

Аннотация

Сформулирована задача об испытаниях трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями и трансверсально-мягким наполнителем на четырёхточечный изгиб. Предполагается, что локализованная внешняя нагрузка от нагружающих роликов на несущий слой тест-образца передаётся через композитные накладки, позволяющие уменьшить концентрацию напряжений в сжатом несущем слое. Механика деформирования внешних несущих слоёв описана кинематической моделью С.П. Тимошенко с учётом поперечного обжатия, а накладок – без учёта обжатия. Наполнитель отнесён к классу трансверсально-мягких, в котором тангенциальные напряжения приняты равными нулю. Накладки сопрягаются с несущими слоями через клеящие прослойки, а векторы перемещений лицевых поверхностей накладок подчинены условиям кинематического сопряжения с векторами перемещений лицевых поверхностей несущих слоёв. Зависимости между поперечными касательными напряжениями и поперечными сдвиговыми деформациями в несущих слоях приняты физически нелинейными, в которые модуль сдвига входит как функция от сдвиговых деформаций.

На основе обобщенного вариационного принципа возможных перемещений получена система нелинейных дифференциальных уравнений равновесия несущих слоёв и накладок, которая замыкается еще тремя уравнениями, представляющими собой условия кинематического сопряжения несущих слоёв с наполнителями по тангенциальным перемещениям. Для численного решения сформулированной задачи использован метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц), в соответствии с которым исходная краевая задача сведена к интегро-алгебраическим уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Алгоритм разработанного метода реализован в виде прикладного программного обеспечения, с помощью которого проведён ряд вычислительных экспериментов. Полученные результаты верифицированы с результатами экспериментальных исследований на четырёхточечный изгиб трёхслойных тест-образцов с несущими слоями, изготовленными из однонаправленного волокнистого композита с заданными геометрическими и физико-механическими характеристиками,

при наличии накладок под нагружающими роликами. Показано, что использование накладок значительно повышает значения предельных разрушающих напряжений сжатия в несущих слоях.

Ключевые слова: трёхслойная пластина, тест-образец, четырёхточечный изгиб, волокнистый композит, метод конечных сумм, предельные напряжения сжатия, физическая и геометрическая нелинейность

Введение

Трёхслойные конструкции имеют широкое применение в судостроительной и аэрокосмической отраслях. Как правило, такие конструкции состоят из двух жёстких несущих слоёв, воспринимающих тангенциальные напряжения, и относительно маложесткого заполнителя, воспринимающего напряжения поперечного обжатия и поперечные касательные напряжения. Выбор материалов для несущих слоёв и заполнителя зависит от специфики работы трёхслойных конструкций. В аэрокосмической отрасли, как правило, применяется сотовый заполнитель на основе лёгких алюминиевых сплавов или полимерной бумаги. Такие заполнители обладают наиболее высокими удельными жесткостными и прочностными характеристиками при малом удельном весе. В трёхслойных конструкциях, применяющихся в кораблестроении, используется пористый металлический заполнитель. От таких заполнителей требуются высокая удельная ударная вязкость и высокая способность поглощать энергию удара. В качестве материалов для несущих слоёв используются как металлы, так и композитные материалы на основе стекло- и углепластиков.

Разрушение трёхслойных конструкций может быть обусловлено реализацией разных механизмов деформирования и разрушения их составных элементов в процессе их нагружения [1–4]: разрушение заполнителя по причине достижения предельных значений формирующимися в них поперечными касательными напряжениями [5,6], усталостные разрушения заполнителя [3,7], отслоение несущих слоёв от заполнителя [8,9], достижение предельных поперечных напряжений обжатия в заполнителе [10], потеря устойчивости несущих слоёв [11,12].

В сверхлёгких трёхслойных конструкциях несущие слои, как правило, изготавливаются из волокнистых композитов на основе углепластиков. Однонаправленные углепластики могут обладать даже большей прочностью при растяжении, чем высокопрочные стали. Поэтому основной причиной разрушения таких конструкций может являться потеря устойчивости несущих слоёв по той или иной форме в условиях формирующихся сжимающих напряжений. В частности, при формировании таких напряжений возможна реализация поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости. Как известно [13,14], при сжатии в направлении волокон тест-образцов из однонаправленных волокнистых композитов за предельные сжимающие напряжения могут быть приняты значения модуля поперечного сдвига. В цикле работ [15,16] было показано, что теоретическое выявление сдвиговой формы потери устойчивости композитных тест-образцов при трёхточечном изгибе возможно при использовании уравнений, основанных на простейшей кинематической модели С.П. Тимошенко.

Настоящая работа является продолжением исследований [15,16] и посвящена теоретическим и экспериментальным исследованиям процессов деформирования и разрушения трёхслойных тест-образцов с композитными несущими слоями при четырёхточечном изгибе с целью выявления возможности реализации сдвиговой формы потери устойчивости в несущих слоях из однонаправленного композита.

1. Уточненная модель деформирования и уравнения равновесия трёхслойного тест-образца с накладками

На рис. 1 представлена схема испытаний на четырехточечный изгиб трехслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем, в которой кроме внешних слоев и наполнителя в окрестностях нагружающих роликов введены в рассмотрение упругие накладки, соединяемые с внешними слоями через адгезионные (клеевые) слои, моделируемые трансверсально-мягкими наполнителями. Для моделирования процесса четырехточечного изгиба образцов рассматриваемого класса предложен редуцированный вариант уравнений равновесия, построенных ранее в статье [17] для многослойной оболочки с чередующимися жесткими слоями, которые в дальнейшем именуются несущими, и маложесткими слоями, называемыми наполнителями.

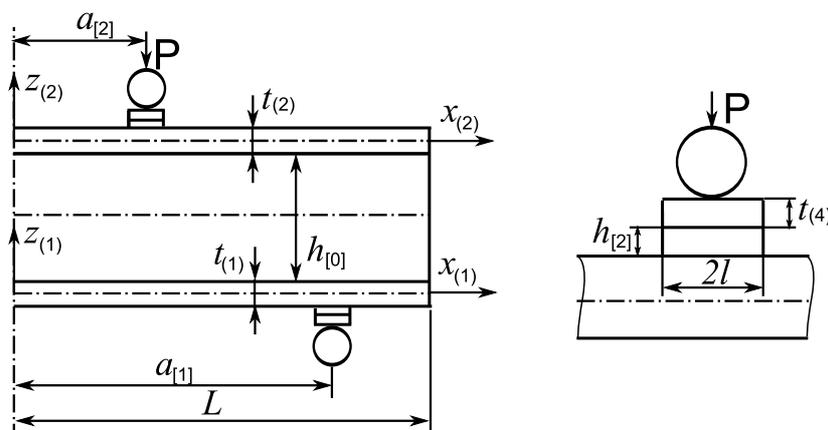


Рис. 1. Схема нагружения на четырехточечный изгиб трехслойного тест-образца с накладками

В рамках использования описанной схемы испытаний при разработке математической модели деформирования трехслойного образца для описания механики деформирования несущих слоев ($k = 1, 2$) и накладок ($k = 3, 4$) принята уточненная кинематическая модель С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для векторов перемещений приняты представления

$$\mathbf{U}^{(k)} = u^{(k)} \mathbf{e}^1 + w^{(k)} \mathbf{e}^3 + z_{(k)} (\gamma^{(k)} \mathbf{e}^1 + \varphi^{(k)} \mathbf{e}^3). \quad (1)$$

В рамках принятой модели (1) при слабом и среднем изгибах рассматриваемой конструкции компоненты тензоров деформаций в несущих слоях ($k = 1, 2$) будут определяться по формулам [18]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(k)} &= \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2} \left(w_{,x}^{(k)} \right)^2 \right) + z_{(k)} \gamma_{,x}^{(k)}, \\ \varepsilon_{33}^{(k)} &= \varphi^{(k)}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(k)} = \left(\gamma^{(k)} + w_{,x}^{(k)} \right) + z_{(k)} \varphi_{,x}^{(k)}, \end{aligned} \quad (2)$$

а в накладках ($j = 3, 4$) компоненты деформации будут описаны упрощенными кинематическими соотношениями

$$\varepsilon_{11}^{(j)} = u_{,x}^{(j)} + z_{(j)} \gamma_{,x}^{(j)}, \quad 2\varepsilon_{13}^{(j)} = \left(\gamma^{(j)} + w_{,x}^{(j)} \right), \quad (3)$$

следующими из (2) при $\varphi^{(3)} = \varphi^{(4)} = 0$ и соответствующими использованию простейшей сдвиговой модели С.П. Тимошенко без учета поперечного обжатия.

При использовании (2), (3) для усилий и моментов, формирующихся в несущих слоях ($k = 1, 2$) и накладках ($j = 3, 4$) будут иметь место соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{(k)}^{11} &= B_1^{(k)} \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2}(w_{,x}^{(k)})^2 + \nu_{31} \varphi^{(k)} \right), \\ T_{(k)}^{33} &= B_3^{(k)} \left(\nu_{13} \left(u_{,x}^{(k)} + \frac{1}{2}(w_{,x}^{(k)})^2 \right) + \varphi^{(k)} \right), \\ T_{(k)}^{13} &= B_{13}^{(k)} \left(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)} \right), \quad M_{(k)}^{11} = D_1^{(k)} \gamma_{,x}^{(k)}, \quad M_{(k)}^{13} = D_{13}^{(k)} \varphi_{,x}^{(k)}, \\ T_{(j)}^{11} &= B_1^{(j)} u_{,x}^{(j)}, \quad T_{(j)}^{13} = B_{13}^{(j)} \left(w_{,x}^{(j)} + \gamma^{(j)} \right), \\ M_{(j)}^{11} &= D_1^{(j)} \gamma_{,x}^{(j)}, \quad T_{(j)}^{33} = M_{(j)}^{13} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где введены обозначения: $B_1^{(k)} = t_{(k)} E_1^{(k)} / (1 - \nu_{13}^{(k)} \nu_{31}^{(k)})$ – жесткость k -го слоя на растяжение-сжатие, $D_1^{(k)} = B_{(k)} t_{(k)}^2 / 12$ – изгибная жесткость, $B_3^{(k)} = t_{(k)} E_3^{(k)} / (1 - \nu_{13}^{(k)} \nu_{31}^{(k)})$, $B_{13}^{(k)} = G_{13}^{(k)} t_{(k)}$, $D_{13}^{(k)} = B_{13}^{(k)} t_{(k)}^2 / 12$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Исходя из результатов, полученных ранее [17], для описания плоского равновесного состояния исследуемого тест-образца относительно введенных в рассмотрение усилий и моментов (4), а также неизвестных касательных напряжений $q^{[k]}$ и напряжений обжатия $\tilde{\sigma}_{33}^{[k]}$ в заполнителе (при $k = 0$) и адгезионных (клеевых) слоях накладок (при $k = 1, 2$) может быть составлена система четырнадцати дифференциальных уравнений равновесия следующего вида

$$\begin{cases} T_{11,x}^{(k)} + \delta_{(k)}(q^{[0]} - q^{[k]}) = 0, \quad M_{11,x}^{(k)} - T_{13}^{(k)} + \frac{t_{(k)}}{2}(q^{[0]} + q^{[k]}) = 0, \\ \left(T_{13}^{(k)} + T_{11}^{(k)} w_{,x}^{(k)} + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]} + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]} \right)_{,x} + \delta_{(k)}(\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \\ \left(M_{13}^{(k)} + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]} t_{(k)}}{4} q^{[0]} - \frac{h_{[k]} t_{(k)}}{4} q^{[k]} \right) \right)_x - T_{33}^{(k)} + \\ + \frac{t_{(k)}}{2}(\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2; \quad (5)$$

$$\begin{cases} T_{11,x}^{(j)} + \delta_{(j-2)} q^{[j-2]} = 0, \quad M_{11,x}^{(j)} - T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} q^{[j-2]} = 0, \\ \left(T_{13}^{(j)} + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]} \right)_{,x} + \delta_{(j-2)} \tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + X_3^{(j)} = 0, \end{cases} \quad j = 3, 4; \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} q^{[k]}(x) &\neq 0, \quad \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}(x) \neq 0 \quad \text{при } x \in [a_{[k]} - l, a_{[k]} + l], \\ q^{[k]}(x) &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{33}^{[k]}(x) = 0 \quad \text{при } x \notin [a_{[k]} - l, a_{[k]} + l], \end{aligned}$$

а также введены обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{33}^{[0]} &= \sigma_{33}^{[0]}(x, 0) = E_3 \left(\frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{h} - \frac{t_{(1)}}{2h} \varphi^{(1)} - \frac{t_{(2)}}{2h} \varphi^{(2)} \right), \\ \tilde{\sigma}_{33}^{[1]} &= \sigma_{33}^{[1]}(x, 0) = E_3^{[1]} \left(\frac{w^{(1)} - w^{(3)}}{h} - \frac{t_{(1)}}{2h} \varphi^{(1)} \right), \\ \tilde{\sigma}_{33}^{[2]} &= \sigma_{33}^{[2]}(x, 0) = E_3^{[2]} \left(\frac{w^{(4)} - w^{(2)}}{h} - \frac{t_{(2)}}{2h} \varphi^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Система уравнений (5), (6) замыкается тремя уравнениями, представляющими собой условия кинематического сопряжения несущих слоев с заполнителями по тангенциальным перемещениям

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(1)} - u^{(2)} - \frac{h_{[0]}}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) + \frac{1}{2} (t_{(1)}\gamma^{(1)} + t_{(2)}\gamma^{(2)}) + \frac{h_{[0]}}{G_{13}^{[0]}} q^{[0]} - \\ - \frac{h_{[0]}^3}{12E_3^{[0]}} q_{,xx}^{[0]} - \frac{h_{[0]}}{4} (t_{(1)}\varphi_{,x}^{(1)} - t_{(2)}\varphi_{,x}^{(2)}) = 0, \\ u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{h_{[1]}}{2} (w_{,x}^{(3)} + w_{,x}^{(1)}) + \frac{1}{2} (t_{(3)}\gamma^{(3)} + t_{(1)}\gamma^{(1)}) + \frac{h_{[1]}}{G_{13}^{[1]}} q^{[1]} - \\ - \frac{h_{[1]}^3}{12E_3^{[1]}} q_{,xx}^{[1]} + \frac{h_{[1]}t_{(1)}}{4} \varphi_{,x}^{(1)} = 0, \\ u^{(2)} - u^{(4)} - \frac{h_{[2]}}{2} (w_{,x}^{(2)} + w_{,x}^{(4)}) + \frac{1}{2} (t_{(2)}\gamma^{(2)} + t_{(4)}\gamma^{(4)}) + \frac{h_{[2]}}{G_{13}^{[2]}} q^{[2]} - \\ - \frac{h_{[2]}^3}{12E_3^{[2]}} q_{,xx}^{[2]} - \frac{h_{[2]}t_{(2)}}{4} \varphi_{,x}^{(2)} = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

В силу симметрии задачи относительно центрального сечения $x = 0$ граничные условия и условия симметрии будут сформулированы относительно правой части трехслойного тест-образца (рис. 1). Граничные условия в сечениях $x = L$ при испытаниях по схеме рис. 1 сформулированы в виде условий для свободных краев ($2L$ – длина пластины)

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}^{(k)}(L) = 0, \quad M_{11}^{(k)}(L) = 0, \\ T_{13}^{(k)}(L) + T_{11}^{(k)}(L)w_{,x}^{(k)}(L) + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]}(L) + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]}(L) = 0, \quad k = 1, 2; \\ M_{13}^{(k)}(L) + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]}t_{(k)}}{4} q^{[0]}(L) - \frac{h_{[k]}t_{(k)}}{4} q^{[k]}(L) \right) = 0, \\ q^{[0]}(L) = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

а при $x = 0$ – условий симметрии относительно центрального сечения

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(k)}(0) = 0, \quad \gamma^{(k)}(0) = 0, \\ T_{13}^{(k)}(0) + T_{11}^{(k)}(0)w_{,x}^{(k)}(0) + \frac{h_{[0]}}{2} q^{[0]}(0) + \frac{h_{[k]}}{2} q^{[k]}(0) = 0, \quad k = 1, 2; \\ M_{13}^{(k)}(0) + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]}t_{(k)}}{4} q^{[0]}(0) - \frac{h_{[k]}t_{(k)}}{4} q^{[k]}(0) \right) = 0, \\ q^{[0]}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Пусть $a_{[1]}, a_{[2]}$ – координаты центров накладок по оси x , отсчитываемые от центра пластины. В сечениях $x = (a_{[1]} - l), (a_{[1]} + l), (a_{[2]} - l), (a_{[2]} + l)$ сформулированы условия в виде свободных краев накладок

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{11}^{(j)}(x) = 0, \quad M_{11}^{(j)}(x) = 0, \quad T_{13}^{(j)}(x) + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]}(x) = 0, \quad j = 3, 4, \\ q^{[j-2]}(x) = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

К сформулированным условиям (8)–(10) необходимо добавить условия равенства нулю прогибов (перемещений в направлении оси z) опорных накладок в центрах опорных роликов

$$w^{(3)}(\pm a_{[1]}) = 0. \quad (11)$$

Для моделирования внешнего нагружения распределенная нагрузка $X_3^{(4)}$, приложенная к нижнему слою, на участке контакта нагружающего ролика с внешним слоем длины $2R$ задается функцией косинуса с амплитудным значением p .

Для моделирования контактного взаимодействия опор и верхнего несущего слоя в опорном сечении $x = a_{[1]}$ задавались условия вида (10), а неизвестные реакции от опорных роликов $X_3^{(3)}$ аппроксимировались функцией косинуса с амплитудным значением p_z , которое подлежит определению из решения задачи:

$$X_3^{(4)}(x) = \begin{cases} p (1/2 \cos(\pi(x - a_{[4]}/2)/R) + 1/2), & x \in (a_{[2]} - R, a_{[2]} + R), \\ 0, & x \notin (a_{[2]} - R, a_{[2]} + R). \end{cases}$$

$$X_3^{(3)}(x) = \begin{cases} p_z (1/2 \cos(\pi(x - a_{[3]}/2)/R) + 1/2), & x \in (a_{[1]} - R, a_{[1]} + R), \\ 0, & x \notin (a_{[1]} - R, a_{[1]} + R). \end{cases}$$

2. Метод конечных сумм для решения краевой задачи

Для приближенного решения краевой задачи будем использовать метод конечных сумм (метод интегрирующих матриц [19]). В соответствии с этим методом исходную краевую задачу (5)–(11) сведем к интегро-алгебраическим уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода с дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования. Заметим, что исходная краевая задача имеет вид дифференциальной задачи второго порядка, в то время как интегро-алгебраические уравнения будут содержать лишь первые производные искомых функций, т. е. сведение задачи к интегральному виду осуществим таким образом, чтобы искомой неизвестной в интегральной постановке задачи стала вектор-функция $U = (U^{(1)}, U^{(2)}, q^{[0]})$, $U^{(k)} = (u_{,x}^{(k)}, w_{,x}^{(k)}, \gamma_{,x}^{(k)}, \varphi_{,x}^{(k)}, u_{,x}^{(k+2)}, w_{,x}^{(k+2)}, \gamma_{,x}^{(k+2)}, q^{[k]})$. Такое сведение выполнено путем интегрирования уравнений (5)–(7) и удовлетворения условиям (8)–(11).

Сначала введем интегральные операторы вида

$$L(f) = \int_0^x f(\xi)d\xi, \quad R(f) = \int_x^L f(\xi)d\xi, \quad D(f) = \int_0^L f(\xi)d\xi,$$

$$L^{[j]}(f) = \begin{cases} \int_{a_{[j]}-l}^x f(\xi)d\xi, & x \in (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \\ 0, & x \notin (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \end{cases}$$

$$R^{[j]}(f) = \begin{cases} \int_x^{a_{[j]}+l} f(\xi)d\xi, & x \in (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \\ 0, & x \notin (a_{[j]} - l, a_{[j]} + l), \end{cases} \tag{12}$$

$$D(f) = \int_0^{a_{[1]}-l} f(\xi)d\xi + \int_{a_{[1]}-l}^{a_{[1]}+l} f(\xi)d\xi + \int_{a_{[1]}+l}^{a_{[2]}-l} f(\xi)d\xi + \int_{a_{[2]}-l}^{a_{[2]}+l} f(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_{a_{[2]}+l}^a f(\xi)d\xi = D_1(f) + D^{[3]}(f) + D_2(f) + D^{[4]}(f) + D_5(f),$$

$$D^{[j]}(f) = \int_{a_{[j-2]}-l}^{a_{[j-2]}+l} f(\xi)d\xi, \quad j = 3, 4.$$

Затем, проинтегрировав производные от искомым функций и удовлетворив граничным условиям первого рода в (9), выразим искомые функции следующим образом

$$\begin{aligned}
 u^{(k)} &= Lu_{,x}^{(k)}, \quad \gamma^{(k)} = L\gamma_{,x}^{(k)}, \quad w^{(k)} = Lw_{,x}^{(k)} + w_0^{(k)}, \\
 \varphi^{(k)} &= L\varphi_{,x}^{(k)} + \varphi_0^{(k)}, \quad q^{[0]} = Lq_{,x}^{[0]}, \quad k = 1, 2, \\
 u^{(j)} &= L^{[j]}u_{,x}^{(j)} + u_0^{(j)}, \quad \gamma^{(j)} = L^{[j]}\gamma_{,x}^{(j)} + \gamma_0^{(j)}, \quad w^{(j)} = L^{[j]}w_{,x}^{(j)} + w_0^{(j)}, \\
 \varphi^{(j)} &= L^{[j]}\varphi_{,x}^{(j)} + \varphi_0^{(j)}, \quad q^{[j-2]} = L^{[j]}q_{,x}^{[j-2]}, \quad j = 3, 4;
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $w_0^{(k)} = w^{(k)}(0)$, $\varphi_0^{(k)} = \varphi^{(k)}(0)$, $u_0^{(j)} = u^{(j)}(0)$, $w_0^{(j)} = w^{(j)}(0)$, $\gamma_0^{(j)} = \gamma^{(j)}(0)$ – константы интегрирования, входящие в разрешающую систему в виде неизвестных.

Проинтегрируем уравнения системы (5)–(7) от x до L и удовлетворим граничным условиям (8)

$$\left\{ \begin{aligned}
 & -T_{11}^{(k)} + \delta_{(k)} (Rq^{[0]} - R^{[k+2]}q^{[k]}) = 0, \quad -M_{11}^{(k)} - RT_{13}^{(k)} + \\
 & + \frac{t_{(k)}}{2} (Rq^{[0]} + R^{[k+2]}q^{[k]}) = 0, \\
 & \left(-T_{13}^{(k)} + R \left(T_{11}^{(k)} w_{,x}^{(k)} \right) + \frac{h_{[0]}}{2} Rq^{[0]} + \frac{h_{[k]}}{2} R^{[k+2]}q^{[k]} \right)_{,x} + \\
 & + \delta_{(k)} \left(R\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - R^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \quad k = 1, 2; \\
 & \left(-M_{13}^{(k)} + \delta_{(k)} \left(\frac{h_{[0]}t_{(k)}}{4} Rq^{[0]} - \frac{h_{[k]}t_{(k)}}{4} R^{[k+2]}q^{[k]} \right) \right)_x - RT_{33}^{(k)} + \\
 & + \frac{t_{(k)}}{2} \left(R\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + R^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \\
 & -T_{11}^{(j)} + \delta_{(j-2)} R^{[j]}q^{[j-2]} = 0, \\
 & -M_{11}^{(j)} - R^{[j]}T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} R^{[j]}q^{[j-2]} = 0, \quad j = 3, 4; \\
 & - \left(T_{13}^{(j)} + \frac{h_{[j-2]}}{2} q^{[j-2]} \right) + \delta_{(j-2)} R^{[j]}\tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + R^{[j]}X_3^{(j)} = 0, \tag{14}
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{h_{[0]}^3}{12E_3^{[0]}} \left(q_{,x}^{[0]} - q_{,x}^{[0]}(L) \right) + R \left[u^{(1)} - u^{(2)} - \frac{h_{[0]}}{2} \left(w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(t_{(1)}\gamma^{(1)} + t_{(2)}\gamma^{(2)} \right) + \frac{h_{[0]}}{G_{13}^{[0]}} q^{[0]} - \frac{h_{[0]}}{4} \left(t_{(1)}\varphi_{,x}^{(1)} - t_{(2)}\varphi_{,x}^{(2)} \right) \right] = 0, \\
 & \frac{h_{[1]}^3}{12E_3^{[1]}} \left(q_{,x}^{[1]} - q_{,x}^{[1]}(L) \right) + R^{[3]} \left[u^{(3)} - u^{(1)} - \frac{h_{[1]}}{2} \left(w_{,x}^{(3)} + w_{,x}^{(1)} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(t_{(3)}\gamma^{(3)} + t_{(1)}\gamma^{(1)} \right) + \frac{h_{[1]}}{G_{13}^{[1]}} q^{[1]} + \frac{h_{[1]}t_{(1)}}{4} \varphi_{,x}^{(1)} \right] = 0, \\
 & \frac{h_{[2]}^3}{12E_3^{[2]}} \left(q_{,x}^{[2]} - q_{,x}^{[2]}(L) \right) + R^{[4]} \left[u^{(2)} - u^{(4)} - \frac{h_{[2]}}{2} \left(w_{,x}^{(2)} + w_{,x}^{(4)} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(t_{(2)}\gamma^{(2)} + t_{(4)}\gamma^{(4)} \right) + \frac{h_{[2]}}{G_{13}^{[2]}} q^{[2]} - \frac{h_{[2]}t_{(2)}}{4} \varphi_{,x}^{(2)} \right] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

При подстановке в полученную систему уравнений соотношений (13) система дифференциальных уравнений (5)–(7) сведется к интегральным уравнениям с операторами типа Вольтерра второго рода относительно вектор-функции неизвестных U и неизвестных констант интегрирования $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, q_{,x}^{[0]}(L))$, где $v^{(k)} = (w_0^{(k)}, \varphi_0^{(k)}, u_0^{(k+2)}, \gamma_0^{(k+2)}, w_0^{(k+2)}, \varphi_0^{(k+2)}, q_{,x}^{[k]}(L))$, $k = 1, 2$. Построенную систему (14) относительно вектора неизвестных (U, v) замкнем дополнительными соотношениями для определения неизвестных констант интегрирования путем удовлетворения

оставшимся в (8)–(10) граничным условиям второго рода

$$\begin{cases} \delta_{(k)} \left(D\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} - D^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \\ -DT_{33}^{(k)} + \frac{t_{(k)}}{2} \left(D\tilde{\sigma}_{33}^{[0]} + D^{[k+2]}\tilde{\sigma}_{33}^{[k]} \right) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2; \\ \begin{cases} \delta_{(j-2)} D^{[j]} q^{[j-2]} = 0, \quad -D^{[j]} T_{13}^{(j)} + \frac{t_{(j)}}{2} D^{[j]} q^{[j-2]} = 0, \\ \delta_{(j-2)} D^{[j]} \tilde{\sigma}_{33}^{[j-2]} + D^{[j]} X_3^{(j)} = 0, \end{cases} \quad j = 3, 4; \\ Dq_{,x}^{[0]} = 0, \quad D^{[3]}q_{,x}^{[1]} = 0, \quad D^{[4]}q_{,x}^{[2]} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

и уравнением (11), которое в соответствии с введенным вектором неизвестных будет иметь вид

$$\int_0^{a_{[3]}} w_{,x}^{(3)}(x) dx + w_0^{(3)} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, имеем задачу, эквивалентную задаче (5)–(11): найти вектор-функцию (U, v) , которая удовлетворяет разрешающей системе интеграл-алгебраических уравнений (14)–(16).

В работе [19] для реализации метода конечных сумм предложены метод коллокаций по гауссовским узлам и способ построения интегрирующих матриц. В соответствии с результатами этой работы интегральные операторы (12) заменим их конечномерными аналогами в виде интегрирующих матриц. Для построения интегрирующих матриц была проведена декомпозиция области с применением кусочно-лагранжевой интерполяции. С этой целью область интегрирования $[0, L]$ разбита на пять отрезков: $e_1 = [0, a_{[2]} - l]$, $e_2 = [a_{[2]} - l, a_{[2]} + l]$, $e_3 = [a_{[2]} + l, a_{[1]} - l]$, $e_4 = [a_{[1]} - l, a_{[1]} + l]$, $e_5 = [a_{[1]} + l, L]$ с введением глобальной сетки $\omega_h = \{x_i : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < L\}$ на отрезке $[0, L]$ следующим образом: на каждом отрезке e_i введены независимые узлы Гаусса, связанные с корнями полинома Лежандра; количество узлов на указанных отрезках было принято равным $N_1 = N_3 = N_5 = 30$, $N_2 = N_4 = 45$ соответственно.

В работе [20] были проведены натурные эксперименты с целью определения модуля сдвига волокнистых композитных материалов, используемых для несущих слоев трехслойной пластины. В результате были получены осредненные экспериментальные зависимости $\sigma_{13} = G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})2\varepsilon_{13}^{(k)}$ касательных напряжений от сдвиговых деформаций (рис. 2), на основе которых построены зависимости секущего модуля поперечного сдвига от соответствующих деформаций сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)})$ (рис. 3). Последние зависимости в используемой математической модели деформирования входят как слагаемые, учитываемые в виде физически нелинейной зависимости $G_{13}(2\varepsilon_{13}^{(k)}) = G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$.

Для учета в решении задачи физической нелинейности на основе зависимостей, полученных в [20], предварительно была построена кусочно-линейная интерполяция $G_{13}(w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)})$ и модифицирован итерационный процесс:

$$A'_{(n)}(U^{(n)}) (U^{(n+1)} - U^{(n)}) + (A_1^{(n)} + A_2^{(n)}) U^{(n)} = F.$$

Нелинейная зависимость модуля поперечного сдвига G_{13} от величины сдвиговой деформации $2\varepsilon_{13}^{(k)} = w_{,x}^{(k)} + \gamma^{(k)}$, полученная экспериментальным методом в работе [21], входит при решении задачи как зависимость операторов $A'_{(n)}$, $A_1^{(n)}$,

$A_2^{(n)}$ от $U^{(n)}$, где $A_1^{(0)} U^{(0)}$ – заданное начальное приближение, то есть на каждом n -ом итерационном шаге приходится заново вычислять матрицу жесткости в зависимости от n -го приближения решения $(U^{(n)}, (2\varepsilon_{13}^{(k)})^{(n)})$.

В работах [11, 16, 22] подробно описано конструктивное применение метода интегрирующих матриц в варианте [19] для решения линейных и нелинейных задач теории пластин и оболочек. В этих работах также предложены итерационные алгоритмы, такие как метод Ньютона–Рафсона, которые используются для учета как физических, так и геометрических нелинейностей. Эти алгоритмы применяются и в данной работе.

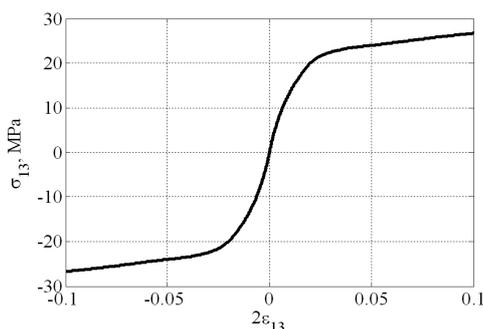


Рис. 2. Зависимость касательных напряжений от деформаций сдвига

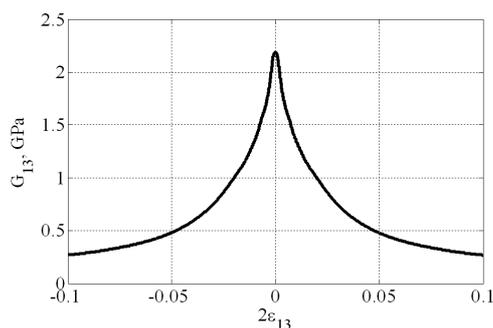


Рис. 3. Зависимость модуля сдвига от деформаций сдвига

3. Результаты вычислительных экспериментов

Для численного решения упругие характеристики внешних несущих слоев ($k = 1, 2$) приняты равными $E_1^{(k)} = 103$ ГПа, $E_3^{(k)} = 5.9$ ГПа, $\nu_{13}^{(k)} = 0.3$, $\nu_{31}^{(k)} = 0.0172$; трансверсально-мягкого заполнителя: $E_3^{[0]} = 690$ МПа, $G_{13}^{[0]} = 780$ МПа; накладок: $E_1^{[j]} = 40$ ГПа, $G_{13}^{[j]} = 1.5$ ГПа, $\nu_{13}^{(j)} = 0.3$, $\nu_{31}^{(j)} = 0.0172$ ($j = 1, 2$); клеевого слоя в виде эпоксидной смолы ХТ-118: $E_3^{[n]} = 2.5$ ГПа, $G_{13}^{[n]} = 960$ МПа ($n = 1, 2$). Толщина накладок $t^{(j)} = 4$ мм, толщина адгезионных слоев $h^{[n]} = 0.4$ мм, общая длина $2L = 270$ мм, длина рабочей части $2a_{[2]} = 70$ мм, расстояние между опорными роликами $2a_{[1]} = 250$ мм, ширина пластины $b = 25$ мм, средняя толщина несущих слоёв $t^{(k)} = 0.75$ мм, толщина заполнителя $h^{[0]} = 5$ мм.

Диаграмма нагружения в виде зависимости прикладываемой нагрузки от максимальных значений поперечных сдвиговых деформаций $2\varepsilon_{13}$ в верхнем сжатом несущем слое представлена на рис. 4. Важно отметить, что эта зависимость является сильно нелинейной и имеет чётко выраженное на диаграмме бифуркационное значение при $P = 1.08$ кН, в то время как зависимость « $P - w^{(2)}$ » с высокой степенью точности является линейной. На рис. 5 представлены максимальные значения нормальных сжимающих напряжений $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ и модуля сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ в несущем слое.

Пересечение двух кривых на графиках рис. 5 при значении $2\varepsilon_{13} \approx 0.014$ указывает на реализацию поперечно-сдвиговой формы потери устойчивости несущего

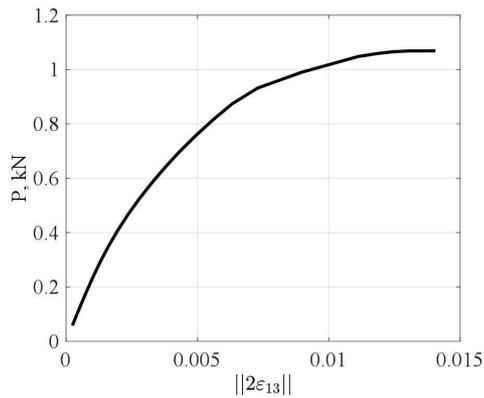


Рис. 4. Диаграмма «нагрузка – касательные деформации»

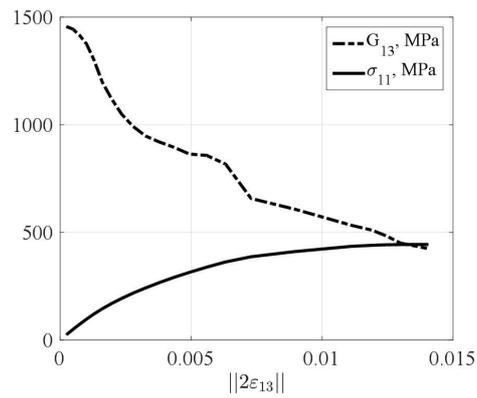


Рис. 5. Зависимости касательного модуля сдвига $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ и нормальных напряжений $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ от деформаций сдвига, МПа

слоя, при которой $\sigma_{11} = G_{13}$. Распределение нормальных сжимающих напряжений вдоль оси тест-образца в верхнем несущем слое при максимальной нагрузке можно видеть на рис. 6. Между нагружающими роликами значения нормальных сжимающих напряжений остаются постоянными на уровне 444 МПа.

На основе разработанной методики проведены также вычислительные эксперименты в задаче изгиба тест-образца без накладок, когда ролик контактно нагружал непосредственно несущий слой. С целью сравнения результатов, соответствующих двум расчетным схемам, на рис. 7, 8 представлено распределение поперечных усилий T_{33} и поперечных касательных напряжений σ_{13} от накладок (красная линия) и непосредственно от нагружающих роликов (синяя линия). Отметим лишь небольшое отличие в величине обжимающих усилий T_{33} при двух вариантах реализации передачи нагрузки. Однако пиковые величины поперечных касательных напряжений, как видно из рис. 8, при использовании накладок уменьшаются в 2.5 раза.

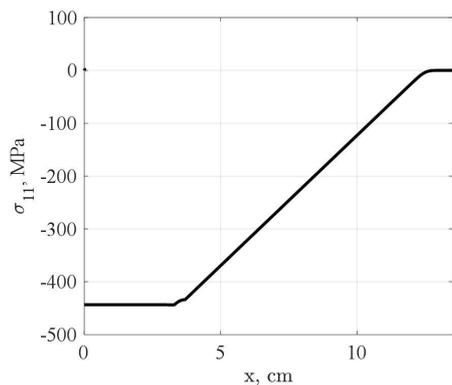


Рис. 6. Распределение по длине нормальных напряжений в несущем слое σ_{11}

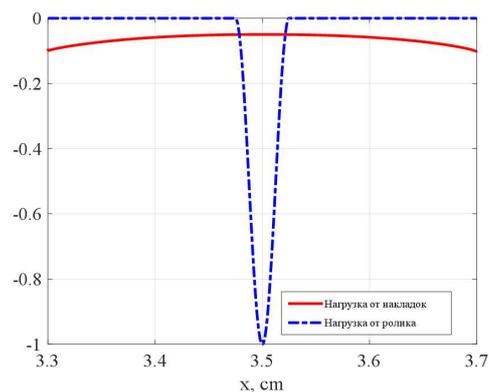


Рис. 7. Распределение поперечных усилий T_{33} в зоне нагружения (синяя линия – без накладки, красная линия – с накладкой)

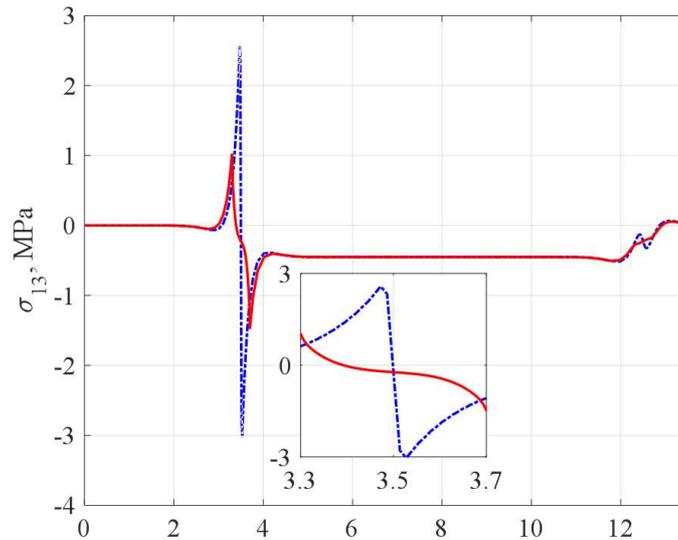


Рис. 8. Распределение касательных напряжений σ_{13} в несущих слоях (синяя линия – без наклейки, красная линия – с наклейкой)

4. Экспериментальные исследования на четырехточечный изгиб трёхслойных тест-образцов с жестким наполнителем

4.1. Трёхслойные тест-образцы без накладок. Для испытаний были изготовлены тест-образцы с жёстким наполнителем из древесины породы липа ($E_3^{[0]} = 690$ МПа, $G_{13}^{[0]} = 780$ МПа) по всей длине образца. Внешние несущие слои тест-образцов изготовлены из углеродной ЭЛУР-П и эпоксидного связующего холодного отверждения ХТ-118 методом вакуумного формования. Общая длина тест-образцов составила $2L = 270$ мм, ширина $b = 25$ мм, толщина наполнителя $H = h^{[0]} = 5$ мм, толщина несущих слоёв $t = t^{(1)} = t^{(2)} = 1$ мм, расстояние между опорными роликами равно $2a_{[1]} = 250$ мм, а между нагружающими – $2a_{[2]} = 70$ мм. Направление укладки волокон в несущих слоях составляет 0° к продольной оси образца Ox . Несущие слои состоят из восьми монослоёв толщиной 0.10 мм. Эскиз образца с основными геометрическими характеристиками, направлением осей образца и направлением осей ортотропии несущих слоёв представлен на рис. 1.

Диаграммы нагружения трёх тест-образцов с наполнителем приведены на рис. 9 и 10. Нормальные напряжения при изгибе σ_{\max}^{bend} вычислялись по формуле

$$\sigma_{\max}^{bend} = M_z^{\max} / W_z, \quad M_z^{\max} = P_{\max} (a_{[1]} - a_{[2]}), \quad (17)$$

в которой значение момента сопротивления W_z определяется выражением

$$W_z = [(b(H + 2t)^3 - bH^3) / 12] / [(H + 2t) / 2]. \quad (18)$$

Касательные напряжения вычислены по формуле $\tau_{\max} = P_{\max} / (Hb)$ из условия постоянного их распределения по высоте тест-образца. Найденные значения σ_{\max}^{bend} и τ_{\max} также приведены в таблице 1 для каждого образца.

Табл. 1

Результаты испытаний тест-образцов без накладок

№ образца	$2P_{\max}$, кН	σ_{\max}^{bend} , МПа	τ_{\max} , МПа
1	1.043	292.436	2.980
2	0.943	269.012	2.694
3	0.999	284.847	2.854
Среднее	0.995	282.098	2.843

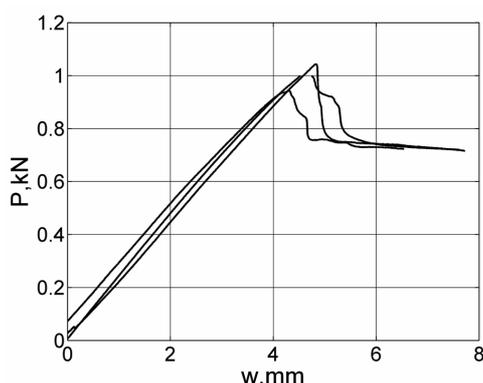


Рис. 9. Диаграмма «нагрузка – прогиб»

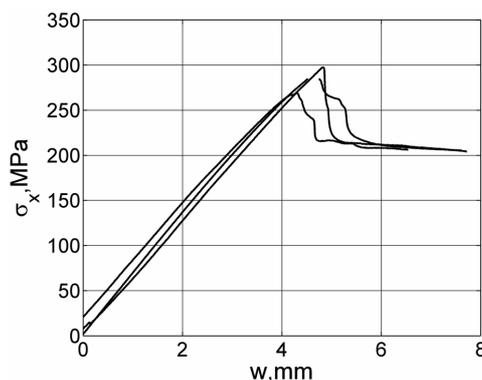


Рис. 10. Диаграмма «напряжение – прогиб»

4.2. Трёхслойные тест-образцы с накладками. Осреднённые по результатам испытаний трёх тест-образцов значения осевых сжимающих напряжений при изгибе без накладок оказались равными $\sigma_{\max}^{bend} = 282$ МПа, что существенно меньше, чем значение, полученное в работе [21] при сжатии $\sigma_1^- = 529$ МПа для композита на основе углеродной эпоксидной смолы ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Разрушение при изгибе без накладок также преимущественно происходит в районе нагружающих роликов, что косвенно свидетельствует о разрушении по причине концентрации в этой области касательных напряжений [23].

Для уменьшения концентрации напряжений в окрестности нагружающих роликов проведены те же испытания на четырехточечный изгиб с приклеенными накладками из текстолита, через которые нагрузка передавалась от нагружающего ролика к верхнему несущему слою (рис. 11 и 12). Тест-образцы были идентичны тест-образцам, описанным в п. 4.1.

В результате серии из трех экспериментов по формулам (17), (18) определены разрушающие напряжения σ_x^- в сжатом несущем слое, которые получились равными $\sigma_x^- \approx 466$ МПа (см. таблицу 2).

Табл. 2

Результаты испытаний тест-образцов с накладками

№ образца	$2P_{\max}$, кН	σ_{\max}^{bend} , МПа	τ_{\max} , МПа
1	0.897	420.907	2.760
2	1.075	504.439	3.3082
3	1.005	471.690	3.093
Среднее	0.992	465.679	3.054



Рис. 11. Испытания на четырёхточечный изгиб тест-образца со структурой несущих слоёв [0°]

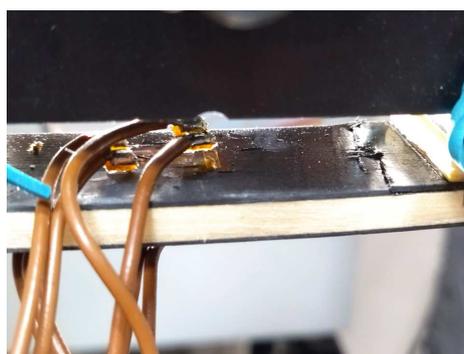


Рис. 12. Характер разрушения сжатого несущего слоя

В таблице 3 для сравнения приведены значения предельных сжимающих напряжений для трёхслойных тест-образцов с накладками и без них, полученные при испытаниях, а также на основе вычислительных экспериментов при четырёхточечном изгибе. В последнюю строку таблицы внесены значения напряжений, полученных при осевом сжатии сплошных образцов в соответствии с методом испытаний ASTM D3410. Видно, что передача поперечной изгибающей нагрузки через накладки позволяет значительно увеличить предельные напряжения в сжатом несущем слое трёхслойного тест-образца, которые при этом приближаются к предельным напряжениям при сжатии сплошных тест-образцов. Определение предельных сжимающих напряжений с помощью эксперимента на четырёхточечный изгиб, рассмотренного в данной статье, в отличие от экспериментов на сжатие сплошных тест-образцов, позволяет определять механические характеристики довольно тонких пластин в составе трёхслойных тест-образцов. Такие тонкие пластины при сжатии теряют устойчивость по изгибной форме, что делает невозможным трактовку экспериментальных данных и искажает определяемые на основе них механические характеристики.

Табл. 3

Сравнение результатов физических и численных экспериментов

	Вид эксперимента	σ_1^{-*} (МПа)
Четырёхточечный изгиб с накладками	Физический	466
	Численный	444
Четырёхточечный изгиб без накладок	Физический	282
	Численный	341
ASTM D3410 Сжатие	Физический	529

Заключение

Проведенные в работе исследования показали, что передача поперечной нагрузки через накладки из текстолита при четырёхточечном изгибе трёхслойных тест-образцов позволяет значительно уменьшить концентрацию поперечных касательных и напряжений обжатия в окрестности нагружающих роликов и повысить осевые предельные напряжения сжатия в несущих слоях. При этом предельные

напряжения в сжатом несущем слое приближаются к предельным напряжениям, определяемым при сжатии сплошных тест-образцов значительно большей толщины по методике ASTM D3410.

Величины разрушающей экспериментальной нагрузки и нагрузки, полученной в ходе численных экспериментов, показали хорошее согласование, подтверждая эффективность применяемого для решения задачи численного метода конечных сумм. Метод может быть применим в задачах, где искомые функции имеют большие градиенты на коротких участках. Реализованный в работе итерационный алгоритм на основе метода Ньютона – Рафсона показал свою эффективность при решении физически и геометрически нелинейной задачи.

Результаты исследования, полученные в работе, подтверждают возможность применения предложенной экспериментальной методики для определения механических характеристик композитных материалов сравнительно малой толщины в составе трёхслойных пластин.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 19-79-10018, постановка задачи, эксперименты), Программы стратегического академического лидерства КФУ ("ПРИОРИТЕТ-2030"), а также в рамках госзадания FZSU-2024-0010 Министерства науки и высшего образования (численное решение).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Petras A., Sutcliffe M.P.F.* Failure mode maps for honeycomb sandwich panels // *Compos. Struct.* 1999. V. 44, No 4. P. 237–252. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00123-8](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00123-8).
2. *Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A.* Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process // *J. Sandwich Struct. Mater.* 2019. V. 21, No 8. P. 2654–2679. <https://doi.org/10.1177/1099636217722052>.
3. *Shi H., Liu W., Fang H.* Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending // *Composites, Part A.* 2018. V. 109. P. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.04.005>.
4. *Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R.* Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams // *Compos. Struct.* 2003. V. 60, No 2. P. 219–229. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00293-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00293-3).
5. *Banghai J., Zhibin L., Fangyun L.* Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending // *Compos. Struct.* 2015. V. 133. P. 739–745. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.056>.
6. *Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R.* An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options // *J. Sandwich Struct. Mater.* 2013. V. 15, No 5. P. 487–508. <https://doi.org/10.1177/1099636213487004>.
7. *Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F.* Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich // *J. Sandwich Struct. Mater.* 2020. V. 22, No 6. P. 2049–2074. <https://doi.org/10.1177/1099636218792729>.

8. *Piovár S., Kormaníková E.* Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models // *Adv. Mater. Res.* 2014. V. 969. P. 316–319. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316>.
9. *Russo A., Zuccarello B.* Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels // *Compos. Struct.* 2007. V. 81, No 4. P. 575–586. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.10.007>.
10. *Crupi V., Epasto G., Guglielmino E.* Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam // *Mar. Struct.* 2013. V. 30. P. 74–96. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.11.002>.
11. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A.* Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge // *Shell Structures: Theory and Applications*. V. 4 / Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (Eds.). Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), Oct. 11–13, 2017, Gdansk, Poland. Leiden: CRC Press/Balkema, 2018. P. 267–270. <http://dx.doi.org/10.1201/9781315166605-59>.
12. *Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core // *Russ. Math.* 2015. V. 59, No 10. P. 57–60. <https://doi.org/10.3103/S1066369X15100072>.
13. *Budiansky B., Fleck N. A.* Compressive failure of fibre composites // *J. Mech. Phys. Solids*. 1993. V. 41, No 1. P. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).
14. *Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A.* Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading // *Compos. Struct.* 2010. V. 92, No 2. P. 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
15. *Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В., Холмогоров С.А.* О неклассической форме потери устойчивости и разрушении композитных тестобразцов в условиях трёхточечного изгиба // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2016. Т. 158, кн. 3. С. 350–375.
16. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A.* Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests // *Z. Angew. Math. Mech.* 2019. V. 99, No 1. Art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
17. *Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Levshonkova N.V.* Refined equations of the theory of composite multilayered shells with transversally soft core under medium bending // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 7. P. 2845–2855. <https://doi.org/10.1134/S1995080223070338>.
18. *Галлимов К.З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. 326 с.
19. *Dautov R.Z., Paimushin V.N.* On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations // *Russ. Math.* 1996. V. 40, No 10. P. 11–23.
20. *Paimushin V.N., Kholmogorov S.A.* Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder // *Mech. Compos. Mater.* 2018. V. 54, No 1. P. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
21. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2015. Т. 157, кн. 4. С. 112–132.

22. *Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N.* Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate // *Appl. Math. Sci.* 2015. V. 9, No 78. P. 3887–3895. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.54354>.
23. *Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В.* Численное исследование напряженно-деформированного состояния слоистого композитного тест-образца при трехточечном изгибе // *Тр. второй междунаро. конф. “Деформирование и разрушение композиционных материалов и конструкций”*, 18–20 октября 2016 г., Москва / Под ред. А.М. Думанского, А.Н. Романова, М.А. Алимова, А.Н. Русланцева. М.: Столица, 2016. С. 126–128.

Поступила в редакцию 26.04.2024
Принята к публикации 3.05.2024

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: vpajmushin@mail.ru

Холмогоров Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прочности конструкций

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева-КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: hkazan@yandex.ru

Макаров Максим Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: makarovmaksim@mail.ru

Левшонкова Наталья Витальевна, ведущий инженер

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ
E-mail: dsm@dsm.kstu-kai.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.200-219

**Experimental and Theoretical Study on the Failure
of Sandwich Specimens with Tabs under Four-Point Bending***V.N. Paimushin^{a,b*}, S.A. Kholmogorov^{a**}, M.V. Makarov^{a,b***}, N.V. Levshonkova^{a****}*^a*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
Kazan, 420111 Russia*^b*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*E-mail: ^{*}*vpajmushin@mail.ru*, ^{**}*hkazan@yandex.ru*, ^{***}*makarovmaksim@mail.ru*,
^{****}*dsm@dsm.kstu-kai.ru*

Received April 26, 2024; Accepted May 3, 2024

Abstract

The problem of testing sandwich specimens with composite facing layers and a transversally soft core for four-point bending was formulated. The localized external load from the loading rollers to the facing layer of the specimen was assumed to be transmitted through composite tabs, which reduced the stress concentration in the compressed facing layer. The external facing layers and tabs were analyzed for deformation mechanics using S.P. Timoshenko's kinematic model. The model considered compression in the facing layers but not in the tabs. The core was classified as transversally soft with zero tangential stresses. The tabs were connected to the facing layers through adhesive interlayers, and the displacement vectors of the front surfaces of the tabs were coupled kinematically with the displacement vectors of the front surfaces of the facing layers. The relationships between the transverse shear stresses and strain in the facing layers were assumed to be physically nonlinear, with the shear modulus being a function of the shear strain.

Using the generalized variational principle of virtual displacements, a system of nonlinear differential equilibrium equations for the facing layers and tabs was derived. The system was closed by three more equations, which were the conditions for the kinematic coupling of the facing layers with the core based on tangential displacements. To numerically solve the formulated problem, the finite sum method, also known as the method of integrating matrices, was employed. This method involved reducing the original boundary value problem to integro-algebraic equations with Volterra-type operators of the second kind and additional relations for determining the unknown integration constants. The algorithm of the developed method was implemented as an application software, which facilitated a series of computational experiments. The results obtained were compared with the experimental data on the four-point bending of sandwich specimens with the facing layers made of a unidirectional fiber-reinforced composite characterized by specific geometric and physico-mechanical properties, as well as with tabs under the loading rollers. It was shown that the use of tabs significantly increases the ultimate compressive failure stresses in the facing layers.

Keywords: sandwich plate, specimen, four-point bending, fiber-reinforced composite, finite sum method, ultimate compressive stress, physical and geometric nonlinearity

Acknowledgements. The work was supported by the RSF (project No. 19-79-10018, problem statement, experiments), the KFU Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030"), and within the framework of the state assignment FZSU-2024-0010 of the Ministry of Science and Higher Education (numerical solution).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

- Fig. 1. Schematic diagram of loading a sandwich specimen with tabs for four-point bending.
Fig. 2. Shear stress dependence on shear strain.
Fig. 3. Shear modulus dependence on shear strain.
Fig. 4. "Load–shear strain" curve.
Fig. 5. Shear modulus $G_{13}(2\varepsilon_{13})$ and normal stress $\sigma_{11}(2\varepsilon_{13})$ dependence on shear strain, МПа.
Fig. 6. Normal stress distribution along the length of the facing layer σ_{11} .
Fig. 7. Transverse stress distribution T_{33} in the loading zone (blue line – without tab, red line – with tab).
Fig. 8. Shear stress distribution σ_{13} in the facing layers (blue line – without tab, red line – with tab).
Fig. 9. "Load–deflection" curve.
Fig. 10. "Stress–deflection" curve.
Fig. 11. Four-point bending test of a specimen with the facing layer structure of $[0^\circ]$.
Fig. 12. Failure of the compressed facing layer.

References

1. Petras A., Sutcliffe M.P.F. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Compos. Struct.*, 1999, vol. 44, no. 4, pp. 237–252. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00123-8](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00123-8).
2. Rupp P., Elsner P., Weidenmann K.A. Failure mode maps for four-point-bending of hybrid sandwich structures with carbon fiber reinforced plastic face sheets and aluminum foam cores manufactured by a polyurethane spraying process. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2019, vol. 21, no. 8, pp. 2654–2679. <https://doi.org/10.1177/1099636217722052>.
3. Shi H., Liu W., Fang H. Damage characteristics analysis of GFRP-Balsa sandwich beams under four-point fatigue bending. *Composites, Part A*, 2018, vol. 109, pp. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2018.04.005>.
4. Sokolinsky V.S., Shen H., Vaikhanski L., Nutt S.R. Experimental and analytical study of nonlinear bending response of sandwich beams. *Compos. Struct.*, 2003, vol. 60, no. 2, pp. 219–229. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00293-3](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00293-3).
5. Banghai J., Zhibin L., Fangyun L. Failure mechanisms of sandwich beams subjected to three-point bending. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 133, pp. 739–745. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.056>.
6. Fathi A., Woff-Fabris F., Altstädt V., Gätzi R. An investigation of the flexural properties of balsa and polymer foam core sandwich structures: Influence of core type and contour finishing options. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2013, vol. 15, no. 5, pp. 487–508. <https://doi.org/10.1177/1099636213487004>.
7. Alila F., Fajoui J., Gerard R., Casari P., Kchaou M., Jacquemin F. Viscoelastic behaviour investigation and new developed laboratory slamming test on foam core sandwich. *J. Sandwich Struct. Mater.*, 2020, vol. 22, no. 6, pp. 2049–2074. <https://doi.org/10.1177/1099636218792729>.

8. Piovár S., Kormaníková E. Sandwich beam in four-point bending test: Experiment and numerical models. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 969, pp. 316–319. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.969.316>.
9. Russo A., Zuccarello B. Experimental and numerical evaluation of the mechanical behaviour of GFRP sandwich panels. *Compos. Struct.*, 2007, vol. 81, no. 4, pp. 575–586. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.10.007>.
10. Crupi V., Epasto G., Guglielmino E. Comparison of aluminium sandwiches for lightweight ship structures: Honeycomb vs. foam. *Mar. Struct.*, 2013, vol. 30, pp. 74–96. <https://doi.org/10.1016/j.marstruc.2012.11.002>.
11. Paimushin V.N., Makarov M.V., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Geometrically nonlinear strain and buckling analysis of sandwich plates and shells reinforced on their edge. In: Pietraszkiewicz W., Witkowski W. (Eds.) *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 4. Proc. 11th Int. Conf. “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), Oct. 11–13, 2017, Gdansk, Poland. Leiden, CRC Press/Balkema, 2018, pp. 267–270. <http://dx.doi.org/10.1201/9781315166605-59>.
12. Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core. *Russ. Math.*, 2015, vol. 59, no. 10, pp. 57–60. <https://doi.org/10.3103/S1066369X15100072>.
13. Budiansky B., Fleck N.A. Compressive failure of fibre composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 1, pp. 183–211. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(93\)90068-Q](https://doi.org/10.1016/0022-5096(93)90068-Q).
14. Jumahat A., Soutis C., Jones F.R., Hodzic A. Fracture mechanisms and failure analysis of carbon fibre/toughened epoxy composites subjected to compressive loading. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 92, no. 2, pp. 295–305. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.010>.
15. Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. On non-classical buckling mode and failure of composite laminated specimens under the three-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 350–375. (In Russian)
16. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Tarlakovskii D.V., Lukaszewicz A. Mechanics of fiber composites: Forms of loss of stability and fracture of test specimens resulting from three-point bending tests. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2019, vol. 99, no. 1, art. e201800063. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800063>.
17. Paimushin V.N., Makarov M.V., Kholmogorov S.A., Levshonkova N.V. Refined equations of the theory of composite multilayered shells with transversally soft core under medium bending. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 7, pp. 2845–2855. <https://doi.org/10.1134/S1995080223070338>.
18. Galimov K.Z. *Osnovy nelineinoi teorii tonkikh obolochek* [Principles of the Nonlinear Theory of Thin Shells]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1975. 326 p. (In Russian)
19. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices for the solution of boundary value problems for fourth-order ordinary equations. *Russ. Math.*, 1996, vol. 40, no. 10, pp. 11–23.
20. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.*, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 2–12. <https://doi.org/10.1007/s11029-018-9712-1>.
21. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)

22. Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate. *Appl. Math. Sci.*, 2015, vol. 9, no. 78, pp. 3887–3895. <http://dx.doi.org/10.12988/ams.2015.54354>.
23. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V. Numerical investigation of the stress-strain state of a layered composite specimen under three-point bending. *Tr. vtoroi mezhdunarod. konf. "Deformirovanie i razrushenie kompozitsionnykh materialov i konstruksii"*, 18–20 oktyabrya 2016 g., Moskva [Proc. 2nd Int. Conf. "Deformation and Failure of Composite Materials and Structures (DFCMS-2016)", Oct. 18–20, 2016, Moscow]. Dumanskii A.M., Romanov A.N., Alimov M.A., Ruslantsev A.N. (Eds.). Moscow, Stolitsa, 2016, pp. 126–128. (In Russian)

Для цитирования: Паймушин В.Н., Холмогоров С.А., Макаров М.В., Левшонкова Н.В. Экспериментальные и теоретические исследования разрушения трехслойных тест-образцов с накладками при четырехточечном изгибе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 200–219.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.200-219>.

For citation: Paimushin V.N., Kholmogorov S.A., Makarov M.V., Levshonkova N.V. Experimental and theoretical study on the failure of sandwich specimens with tabs under four-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 200–219.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.200-219>. (In Russian)