

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.589, 519.231

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.127-146

МНОГОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЛЕЯ, РАЙСА, НАКАГАМИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ СВЯЗИ

Ю.А. Брычков¹, Н.В. Савищенко²

¹*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, г. Москва, 119333, Россия*

²*Военная академия связи им. С.М. Будённого, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия*

Аннотация

Представлена методика вычисления символьной и битовой вероятностей ошибок при когерентном разнесенном приеме многопозиционных сигнальных конструкций в канале связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) и общими замираниями, описываемыми многомерными распределениями Релея, Накагами и двумерным распределением Райса.

Ключевые слова: многомерное распределение Релея, многомерное распределение Накагами, двумерное распределение Райса, замирание, потенциальная помехоустойчивость, специальная функция, функция Оуэна

Введение

Одним из факторов, в значительной мере влияющих на принимаемый сигнал, является многолучевое его распространение. Основная идея борьбы с этим фактором заключается в применении метода разнесения, состоящем в организации нескольких независимых каналов (ветвей) разнесения. В системах с разнесенным приемом обеспечивается параллельная передача одной и той же информации по нескольким каналам: принимается L различных образцов сигнала, каждый из которых соответствует одному и тому же дискретному сообщению с одинаковыми информационными параметрами. В зависимости от характеристик среды распространения радиоволн в системах радиосвязи существует несколько методов построения ветвей разнесения, которые могут быть разбиты на следующие группы: пространственное, угловое, поляризационное, частотное и временное разнесения. Применяют также несколько методов комбинирования сигналов при разнесенном приеме, среди которых можно выделить три основных: оптимального сложения (оптимальность по критерию максимального отношения сигнал/шум), сложения с равными весами, автовыбора.

Ниже предложена методика анализа помехоустойчивости приема сигнальных конструкций в канале связи с общими замираниями Релея, Райса и Накагами. Представляет интерес анализ помехоустойчивости приема сигналов для коррелированных каналов (ветвей), что в большей степени может соответствовать реальной ситуации.

1. Разнесенный прием

Из всех методов разнесенного приема только прием на разнесенные антенны не приводит к потере мощности сигнала и реальной пропускной способности. Снижение скорости передачи информации (например, при разнесении во времени) эквивалентно потере мощности. Для корректного сравнения помехоустойчивости различных систем разнесенного приема необходимо учитывать эту потерю мощности.

Пусть величина γ_0 есть среднее отношение энергии сигнала к эквивалентной спектральной плотности помехи, которое имело бы место, если бы то же передающее устройство использовалось для одиночного приема. В зависимости от вида разнесенного приема справедливо соотношение $\gamma_L = \gamma_0/L^\kappa$, $\kappa \in [0, 2]$ [1].

Для любого $\ell = 1, 2, \dots, L$ помеха $n_\ell(t)$ является аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ) с односторонней спектральной плотностью мощности шума $N_{0,\ell}$ в каждой ветви с коэффициентом α_ℓ передачи ℓ -го канала. Соответственно, в каждой из ветвей разнесения отношение сигнал/шум есть величина $\gamma_\ell = E_\ell/N_{0,\ell}$, $\ell = 1, 2, \dots, L$.

При использовании оптимального когерентного приема результирующее отношение сигнал/помеха равно сумме всех отношений в ветвях разнесения: $\gamma_\Sigma = \sum_{\ell=1}^L \gamma_\ell = \gamma \sum_{\ell=1}^L \delta_\ell^2$, где $\delta_\ell^2 = \frac{\gamma_\ell}{\gamma_1}$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ и $\gamma = \gamma_1$. Предположим, что ветви разнесения пронумерованы в порядке убывания интенсивности сигнала $\delta_1^2 = 1 \geq \delta_2^2 \geq \dots \geq \delta_L^2$.

Известно, что вероятность ошибки при оптимальном когерентном приеме двумерных многопозиционных сигналов в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ по правилу максимального правдоподобия равна алгебраической сумме T -функций Оуэна [1]

$$P_{e/b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\sqrt{2g_k \gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (1)$$

где $\gamma_{bc} = E_{bc}/N_0$ – отношение средней энергии E_{bc} , затрачиваемой на передачу одного бита, к односторонней спектральной плотности мощности шума N_0 и $T(z, a)$ – интегральная функция Оуэна, определяемая как [1, 2]

$$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a e^{-(1+t^2)z^2/2} \frac{dt}{1+t^2}, \quad |\arg a| < \pi.$$

Анализ помехоустойчивости при разнесенном приеме и использовании метода оптимального сложения (Maximal ratio combining (MRC)) сводится к задаче вычисления математического ожидания вероятности ошибки (1) с учетом того, что коэффициенты передачи в каждой из ветвей разнесения являются случайными величинами и их совместная плотность распределения вероятности $f(\boldsymbol{\alpha}) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_L)$. В итоге задача вычисления символьной и битовой вероятностей сводится к вычислению [1, 2]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) &= \int_0^\infty T(a\sqrt{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}^T}, \eta) f(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty T(a\sqrt{p_1\alpha_1^2 + \dots + p_L\alpha_L^2}, \eta) f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) d\alpha_1 \dots d\alpha_L, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $a^2 = 2g$ определяется в зависимости от сигнальной конструкции; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_L)$, $\mathbf{P} = [p_{k\ell}]_1^L$; $p_{k\ell} = \gamma \frac{\delta_\ell^2}{\mathbb{E}\alpha_\ell^2} \delta_{k\ell}$ – диагональная матрица; $\delta_{k\ell}$ – символ Кронекера; $\mathbb{E}\alpha_\ell^2$ – начальный момент второго порядка, $k, \ell = 1, \dots, L$.

2. Релеевские замирания

Двумерная релеевская плотность распределения. Двумерная плотность распределения вероятностей для коррелированных релеевских замираний определяется как [3, (3.9)]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \exp \left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right) I_0 \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right),$$

где ρ – коэффициент корреляции, $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя ν -го порядка.

Математическое ожидание функции Оуэна имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \int_0^\infty \int_0^\infty T \left(a \sqrt{\delta_1^2 \frac{\alpha_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma + \delta_2^2 \frac{\alpha_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma}, \eta \right) f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{a^2 \gamma}{2} (1+x^2) \left(\frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \alpha_1^2 + \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \alpha_2^2 \right) \right) f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Внутренний интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha_1 \alpha_2 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(a^2 p_1 (1+x^2) + \frac{1}{\sigma_1^2 (1 - \rho^2)} \right) \alpha_1^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(a^2 p_2 (1+x^2) + \frac{1}{\sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \right) \alpha_2^2 \right] I_0 \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned}$$

где $p_1 = \frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma$, $p_2 = \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma$. Используя формулу [4, 3.2.8.5] при $\ell = m = 1$, $n = 0$, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x y e^{-px^2 - qy^2} I_0(axy) dx dy = \frac{1}{4pq - a^2}, \quad p, q, 4pq - a^2 > 0.$$

Тогда интеграл $I(x)$ после преобразований можно свести к виду

$$I(x) = \frac{1}{1 + a^2 (p_1 \sigma_1^2 + p_2 \sigma_2^2) (1+x^2) + a^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) p_1 p_2 (1+x^2)^2},$$

где, учитывая, что $\mathbb{E}\alpha_1^2 = 2\sigma_1^2$, $\mathbb{E}\alpha_2^2 = 2\sigma_2^2$, определим новые коэффициенты

$$\begin{aligned} v &= a^2 (p_1 \sigma_1^2 + p_2 \sigma_2^2) = \frac{1}{2} a^2 (\delta_1^2 + \delta_2^2) \gamma = (\delta_1^2 + \delta_2^2) g \gamma, \\ w &= a^4 \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2) p_1 p_2 = \frac{1}{4} (1 - \rho^2) a^4 \delta_1^2 \delta_2^2 \gamma^2 = (1 - \rho^2) \delta_1^2 \delta_2^2 g^2 \gamma^2. \end{aligned}$$

В итоге получим интеграл

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+v(1+x^2)+w(1+x^2)^2} dx. \quad (4)$$

Используя (4) для $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta)$, можно показать, что математическое ожидание функции Оуэна выражается через $\mathcal{H}$ -функцию:

$$\mathcal{H}_{p_1, \dots, p_n}^{(n)}(z_1, \dots, z_n; b_1, \dots, b_n; a) = \frac{(1 - b_1^2)^{p_1} \dots (1 - b_n^2)^{p_n}}{2\pi} \times \int_0^a \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{(1+b_1^2 x^2)^{p_1} \dots (1+b_n^2 x^2)^{p_n}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{z_k^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b_k^2 x^2}\right) dx, \quad (5)$$

где $0 \leq b_k^2 \leq 1$, $k = 1, \dots, n$. Справедливо равенство

$$\mathcal{H}_{1, \dots, 1}^{(n)}(0, \dots, 0; b_1, \dots, b_n; a) = \frac{1}{2\pi} \left[\arctan a - \sum_{\ell=1}^n b_\ell^{2n-1} \arctan(ab_\ell) \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq \ell}}^n \frac{1-b_k^2}{b_\ell^2 - b_k^2} \right]. \quad (6)$$

Действительно,

$$1 + v(1+x^2) + w(1+x^2)^2 = \left(1 + \left[\frac{1}{2}v - \sqrt{D}\right](1+x^2)\right) \left(1 + \left[\frac{1}{2}v + \sqrt{D}\right](1+x^2)\right),$$

где $D = \frac{1}{4}v^2 - w = \frac{1}{4}g^2\gamma^2[(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2] > 0$. В результате после преобразования знаменателя в (4) получим, что $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) = \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta)$, где

$$b_1^2 = \frac{v/2 + \sqrt{D}}{1 + v/2 + \sqrt{D}}, \quad b_2^2 = \frac{v/2 - \sqrt{D}}{1 + v/2 - \sqrt{D}}, \quad D = \frac{1}{4}g^2\gamma^2[(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2].$$

Окончательно найдем, применив (6), что при использовании двоянного разнесенного приема и метода оптимального сложения в канале с релейскими коррелированными замираниями математическое ожидание T -функции Оуэна может быть вычислено на основе формулы

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\arctan \eta - \frac{1}{b_1^2 - b_2^2} \left(b_1^3(1 - b_2^2) \arctan(b_1\eta) - b_2^3(1 - b_1^2) \arctan(b_2\eta) \right) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1^2 &= \frac{g\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}{1 + g\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}, \quad \Omega(\delta_1, \delta_2, \rho) = \frac{1}{2} \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 + \sqrt{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2} \right], \\ b_2^2 &= \frac{g\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}{1 + g\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho)\gamma}, \quad \Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho) = \frac{1}{2} \left[\delta_1^2 + \delta_2^2 - \sqrt{(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 + 4\rho^2\delta_1^2\delta_2^2} \right]. \end{aligned}$$

Так как $\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho)\Omega^*(\delta_1, \delta_2, \rho) = (1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2$, то коэффициент b_2^2 можно представить также в виде

$$b_2^2 = \frac{g(1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2\gamma}{\Omega(\delta_1, \delta_2, \rho) + g(1 - \rho^2)\delta_1^2\delta_2^2\gamma}.$$

При $\rho = 1$ из (5) следует, что $\mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, 0; \eta) = \mathcal{H}_1^{(1)}(0; b_1; \eta)$, что соответствует одиночному приему при релейских замираниях для случая полностью коррелированных каналов.

Многомерная релеевская плотность распределения. Известно [5], что многомерная релеевская плотность распределения при экспоненциальной корреляционной матрице имеет вид

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) = \frac{\alpha_1 \dots \alpha_L}{(1 - \rho^2)^{L-1} \sigma^{2L}} \times \quad (7)$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2(1 - \rho^2)\sigma^2} \left(\alpha_1^2 + \alpha_L^2 + (1 + \rho^2) \sum_{k=2}^{L-1} \alpha_k^2\right)\right) \prod_{k=1}^{L-1} I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_k \alpha_{k+1}\right),$$

где ρ – коэффициент корреляции. Тогда (2) можно преобразовать к виду

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \frac{1}{(1 - \rho^2)^{L-1} \sigma^{2L}} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \alpha_1 \dots \alpha_L \times$$

$$\times e^{-(1/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_1^2/2 - (1/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_L^2/2 - ((1+\rho^2)/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_2^2/2 - \dots - ((1+\rho^2)/[(1-\rho^2)\sigma^2])\alpha_{L-1}^2/2} \times$$

$$\times T\left(a\sqrt{p_1\alpha_1^2 + \dots + p_L\alpha_L^2}, \eta\right) I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_1 \alpha_2\right) \dots I_0\left(\frac{\rho}{(1 - \rho^2)\sigma^2} \alpha_{L-1} \alpha_L\right) d\alpha_1 \dots d\alpha_L.$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_1 x_2 \dots x_n e^{-(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2)/2} T\left(a\sqrt{p_1 x_1^2 + \dots + p_n x_n^2}, \eta\right) \times$$

$$\times I_0(c_1 x_1 x_2) I_0(c_2 x_2 x_3) \dots \times I_0(c_{n-1} x_{n-1} x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (8)$$

$$a \geq 0, \quad b_k > 0, \quad k = 1, \dots, n; \quad c_k > 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Используя определение функции Оуэна и изменив порядок интегрирования, получим, что

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dt}{1+t^2} \int_0^\infty x_n e^{-(b_n + a^2 p_n(1+t^2))x_n^2/2} I_0(c_{n-1} x_{n-1} x_n) dx_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty \dots \int_0^\infty x_2 e^{-(b_2 + a^2 p_2(1+t^2))x_2^2/2} I_0(c_2 x_2 x_3) dx_2 \times$$

$$\times \int_0^\infty x_1 e^{-(b_1 + a^2 p_1(1+t^2))x_1^2/2} I_0(c_1 x_1 x_2) dx_1.$$

Последовательно применим [4, 2.15.5.4]:

$$A_\nu^\alpha = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-px^2} I_\nu(cx) dx = \frac{(c/2)^\nu}{2p^{(\alpha+\nu)/2}} \Gamma\left[\frac{\alpha+\nu}{2}\right] {}_1F_1\left(\frac{\alpha+\nu}{2}; \frac{c^2}{4p}\right),$$

$$\operatorname{Re} p, \operatorname{Re}(\alpha + \nu) > 0; \quad |\arg c| < \pi; \quad A_\nu^{\nu+2} = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}} e^{c^2/(4p)}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1,$$

и после преобразований получим, что

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{C} + (1+t^2)\mathbf{P}|} dt, \quad (9)$$

где введены диагональная матрица $\mathbf{P}$ и трехдиагональная $\mathbf{C}$ размерами $n \times n$:

$$\mathbf{P} = a^2 \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Используя свойства определителей, можно представить (9) в виде

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{C} + \mathbf{P}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} t^2|} dt$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{C}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + \mathbf{B} t^2|} dt, \quad (11)$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. В таком виде (11) по структуре является обобщением $\mathcal{H}$ -функции [1], поэтому

$$J = \frac{1}{|\mathbf{C}|} \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta), \quad (12)$$

где введена новая специальная функция

$$\mathcal{H}_p(z; b, \mathbf{B}; \eta) = \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|^p}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|^p} \exp\left(\frac{z}{2} \frac{1+bt^2}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|}\right) dt, \quad p > 0.$$

Ввиду того, что при таком определении $\mathcal{H}$ -функции необходимо вычислять обратную матрицу $(\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1}$, для практических расчетов может быть более удобным использовать (9).

Замечание 1. При определении $\mathcal{H}$ -функции необходимо вычислять обратную матрицу. Например, $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. Матрица, для которой нужно найти обратную матрицу, является трехдиагональной [6]. Рассмотрим трехдиагональную матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{A}^{-1} = [\alpha_{ij}]$, то [7]

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} b_i b_{i+1} \dots b_{j-1} f_{i-1} \varphi_{j+1} / f_n, & i < j, \\ f_{i-1} \varphi_{i+1} / f_n, & i = j, \\ (-1)^{i+j} c_{j+1} c_{j+2} \dots c_i f_{j-1} \varphi_{i+1} / f_n, & i > j, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} f_i &= a_i f_{i-1} - b_{i-1} c_{i-1} f_{i-2}, \quad i = 1, \dots, n; \quad f_{-1} = 0, \quad f_0 = 1; \\ \varphi_i &= a_i \varphi_{i+1} - b_i c_i \varphi_{i+2}, \quad i = n-1, \dots, 1; \quad \varphi_{n+1} = 1, \quad \varphi_n = a_n. \end{aligned}$$

С учетом того, что матрица $\mathbf{P}$ является диагональной, итоговую матрицу $\mathbf{B}$ достаточно просто вычислить умножением каждого k -го столбца матрицы $(\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1}$ на p_k , $k = 1, \dots, n$.

В итоге, возвращаясь к искомой задаче и используя (12), получим

$$\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \frac{1}{(1-\rho^2)^{L-1}} \frac{1}{\sigma^{2L} |\mathbf{C}|} \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta),$$

где $\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$ и матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ (с размерностями $L \times L$) определены в (10). Учитывая, что для начальных моментов второго порядка $\mathbb{E}\alpha_\ell^2 = 2\sigma^2$, $\ell = 1, \dots, L$, матрицу $\mathbf{P}$ можно представить в виде

$$\mathbf{P} = \frac{a^2\gamma}{2\sigma^2} \begin{pmatrix} \delta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_L^2 \end{pmatrix} = \frac{a^2\gamma}{2\sigma^2} \mathbf{\Delta}_L,$$

где $\mathbf{\Delta}_L = \text{diag}(\delta_1^2, \dots, \delta_L^2)$ – диагональная матрица, $\delta_\ell^2 = \gamma_\ell/\gamma_1$, $\ell = 1, \dots, L$; $\gamma = \gamma_1$ и γ_ℓ – отношение сигнал/шум в ℓ -й ветви.

Для трехдиагональной матрицы $\mathbf{C}$, с учетом (7), (8), найдем элементы матрицы в виде $b_1 = b_L = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $b_\ell = \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $\ell = 2, \dots, L-1$; $c_\ell = \frac{\rho}{(1-\rho^2)\sigma^2}$, $\ell = 1, \dots, L-1$:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \rho & 1+\rho^2 & \rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho & 1+\rho^2 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma^2} \mathbf{C}'.$$

Нетрудно убедиться, используя рекуррентную формулу для трехдиагональной матрицы, что $\det \mathbf{C}' = 1 - \rho^2$. Из свойств определителей следует, что $\det(\lambda \mathbf{C}') = \lambda^L \det \mathbf{C}'$, следовательно, $\det \mathbf{C} = \frac{1}{(1-\rho^2)^{L-1}\sigma^{2L}}$. Таким образом, $\mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \dots, \alpha_L), \eta) = \mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta)$, где

$$\mathbf{B} = (\mathbf{C} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P} = g\gamma \left(g\gamma \mathbf{\Delta}_L + \frac{1}{1-\rho^2} \mathbf{C}' \right)^{-1} \mathbf{\Delta}_L.$$

В частности, при $L = 2$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{G}} \begin{pmatrix} \delta_1^2 g\gamma (\delta_2^2 g\gamma + \frac{1}{1-\rho^2}) & -\delta_2^2 \frac{\rho}{1-\rho^2} g\gamma \\ -\delta_1^2 \frac{\rho}{1-\rho^2} g\gamma & \delta_2^2 g\gamma (\delta_1^2 g\gamma + \frac{1}{1-\rho^2}) \end{pmatrix},$$

где

$$\det \mathbf{G} = \delta_1^2 \delta_2^2 g^2 \gamma^2 + \frac{1}{1-\rho^2} (\delta_1^2 + \delta_2^2) g\gamma + \frac{\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Замечание 2. Рассмотрим матрицу $\mathbf{B}$ при $L = 2$. Пусть $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, тогда

$$|\mathbf{E} + \mathbf{B}t^2| = \begin{vmatrix} 1 + t^2 b_{11} & t^2 b_{12} \\ t^2 b_{21} & 1 + t^2 b_{22} \end{vmatrix}.$$

После преобразований получим

$$|\mathbf{E} + \mathbf{B}t^2| = \left(\frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}} t^2 + 1 \right) \times \\ \times \left(\frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}} t^2 + 1 \right).$$

Кроме того, $|\mathbf{E} - \mathbf{B}| = 1 - (b_{11} + b_{22}) + |\mathbf{B}|$. Таким образом, при $L = 2$ для произвольной матрицы $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ имеем $\mathcal{H}_1(0; 0, \mathbf{B}; \eta) = \mathcal{H}_{1,1}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta)$, где

$$b_1^2 = \frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}}, \quad b_2^2 = \frac{2|\mathbf{B}|}{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4|\mathbf{B}|}},$$

причем очевидно, что $(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) = 1 - (b_{11} + b_{22}) + |\mathbf{B}| = |\mathbf{E} - \mathbf{B}|$.

3. Замирания Накагами

Двумерная плотность распределения Накагами имеет вид

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4(\alpha_1 \alpha_2)^m}{(1 - \rho) a_1^2 a_2^2 (a_1 a_2 \sqrt{\rho})^{m-1} \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{a_2^2 \alpha_1^2 + a_1^2 \alpha_2^2}{(1 - \rho) a_1^2 a_2^2}\right) I_{m-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho} \alpha_1 \alpha_2}{(1 - \rho) a_1 a_2}\right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $a_1^2 = \frac{\mathbb{E}\alpha_1^2}{m}$, $a_2^2 = \frac{\mathbb{E}\alpha_2^2}{m}$, $m \geq \frac{1}{2}$ и $\rho = \frac{\text{cov}(\alpha_1^2, \alpha_2^2)}{\sqrt{\mathbb{D}\alpha_1^2 \mathbb{D}\alpha_2^2}}$ – коэффициент корреляции.

Вычислив (3) для распределения Накагами, после преобразований получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T(ag(\alpha_1, \alpha_2), \eta) &= \mathcal{H}_{m,m}^{(2)}(0, 0; b_1, b_2; \eta) = \\ &= \frac{(1 - b_1^2)^m (1 - b_2^2)^m}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1 + x^2} \frac{1}{(1 + b_1^2 x^2)^m (1 + b_2^2 x^2)^m} dx, \end{aligned}$$

где $a^2 = 2g$ и

$$\begin{cases} b_1^2 \\ b_2^2 \end{cases} = \frac{(1 + \delta^2 \pm \sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\rho\delta^2})g\gamma}{2m + (1 + \delta^2 \pm \sqrt{(1 - \delta^2)^2 + 4\rho\delta^2})g\gamma}.$$

Многомерная плотность распределения Накагами. Пусть задана корреляционная матрица размера $L \times L$:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ \rho_{ij}, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$. Многомерное распределение Накагами имеет вид [8, 9] ($\mathbb{E}\alpha_k^2 = 1$, $k = 1, \dots, L$)

$$\begin{aligned} f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) &= \frac{|\mathbf{P}|^m \alpha_1^{m-1} \alpha_L^m}{2^{m-1} \Gamma(m)} \exp\left(-\frac{p_{L,L} \alpha_L^2}{2}\right) \times \\ &\times \prod_{k=1}^{L-1} |p_{k,k+1}|^{-(m-1)} \alpha_k \exp\left(-\frac{p_{k,k} \alpha_k^2}{2}\right) I_{m-1}(|p_{k,k+1}| \alpha_k \alpha_{k+1}), \end{aligned}$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}$ имеет трехдиагональный вид ($p_{i,j} = 0$, $|i - j| > 1$):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & & & 0 \\ p_{1,2} & p_{2,2} & p_{2,3} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & p_{L-2,L-1} & p_{L-1,L-1} & p_{L-1,L} \\ & & p_{L-1,L} & p_{L,L} \end{pmatrix}.$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned} J_L &= \mathbb{E}T(\alpha_1, \dots, \alpha_L, \eta) = \frac{|\mathbf{P}|^m}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{P} + (1+x^2)\mathbf{H}|^m} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{P}|^m}{|\mathbf{P} + \mathbf{H}|^m} \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + (\mathbf{P} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}x^2|^m} dx, \end{aligned}$$

где матрица $\mathbf{H}$ имеет диагональный вид: $\mathbf{H} = a^2\gamma \operatorname{diag}\left(\frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2}, \dots, \frac{\delta_L^2}{\mathbb{E}\alpha_L^2}\right)$. Пусть $\mathbf{B} = (\mathbf{P} + \mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}$. Тогда выражение для J_L можно выразить через $\mathcal{H}$ -функцию:

$$J_L = \mathcal{H}_m(0; 0, \mathbf{B}; \eta) = \frac{1}{2\pi} |\mathbf{E} - \mathbf{B}|^m \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + \mathbf{B}x^2|^m} dx.$$

Для вычисления матрицы $\mathbf{H}$ необходимо определить начальные моменты второго порядка

$$\mathbb{E}\alpha_\ell^2 = \int_0^\infty \alpha_\ell^2 f(\alpha_1, \dots, \alpha_L) d\alpha_1 \dots d\alpha_L, \quad \ell = 1, \dots, L.$$

Для определения начального момента второго порядка рассмотрим более общий интеграл

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \dots x_n^{s_n-1} e^{-(a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2)/2} I_{\nu_1}(b_1x_1x_2) \dots \\ &\dots I_{\nu_2}(b_2x_2x_3) \dots I_{\nu_{n-1}}(b_{n-1}x_{n-1}x_n) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

Ре $a_k > 0$, $k = 1, \dots, n$; $b_m \geq 0$, $m = 1, \dots, n-1$. Если использовать разложение в ряд функции Бесселя $I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!(\nu+1)_k}$ и [10, 2.2.1.12], получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{\Gamma\left(\frac{s_1+\nu_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_2+\nu_1+\nu_2}{2}\right) \dots \Gamma\left(\frac{s_{n-1}+\nu_{n-2}+\nu_{n-1}}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_n+\nu_{n-1}}{2}\right)}{\Gamma(\nu_1+1) \Gamma(\nu_2+1) \dots \Gamma(\nu_{n-1}+1)} \times \\ &\times \frac{2^{(s_1+\dots+s_n)/2-n}}{a_1^{s_1/2} a_2^{s_2/2} \dots a_n^{s_n/2}} \left(\frac{b_1^2}{a_1 a_2}\right)^{\nu_1/2} \left(\frac{b_2^2}{a_2 a_3}\right)^{\nu_2/2} \dots \left(\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} a_n}\right)^{\nu_{n-1}/2} \times \\ &\times \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}=0}^\infty \frac{\left(\frac{s_1+\nu_1}{2}\right)_{k_1} \left(\frac{s_2+\nu_1+\nu_2}{2}\right)_{k_1+k_2} \dots \left(\frac{s_{n-1}+\nu_{n-2}+\nu_{n-1}}{2}\right)_{k_{n-2}+k_{n-1}} \left(\frac{s_n+\nu_{n-1}}{2}\right)_{k_{n-1}}}{(\nu_1+1)_{k_1} (\nu_2+1)_{k_2} \dots (\nu_{n-1}+1)_{k_{n-1}}} \times \\ &\times \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{n-1}!} \left(\frac{b_1^2}{a_1 a_2}\right)^{k_1} \left(\frac{b_2^2}{a_2 a_3}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{b_{n-1}^2}{a_{n-1} a_n}\right)^{k_{n-1}}. \end{aligned}$$

Этот ряд может быть записан в виде обобщенной гипергеометрической функции Шриваставы и Доуста [11]. Полученный результат для J позволяет рассчитать как начальные моменты n -го порядка, так и, в частности, начальный момент второго порядка $\mathbb{E}\alpha_\ell^2$, $\ell = 1, \dots, L$.

Пусть $k_0 = 0$, $k_L = 0$, тогда для начальных моментов $\mathbb{E}\alpha_\ell^n$, $\ell = 1, \dots, L$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha_\ell^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} \frac{|\mathbf{P}|^m}{p_{1,1}^m p_{2,2}^m \dots p_{\ell,\ell}^{m+n/2} \dots p_{L,L}^m} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{L-1}=0}^{\infty} (m+k_1)_{k_0} \times \\ &\times (m+k_2)_{k_1} \dots \frac{(m + \frac{n}{2})_{k_{\ell-1}+k_\ell}}{(m)_{k_\ell}} \dots (m+k_{L-1})_{k_{L-2}} (m)_{k_{L-1}+k_L} \times \\ &\times \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_{L-1}!} \left(\frac{|p_{1,2}|^2}{p_{1,1} p_{2,2}} \right)^{k_1} \left(\frac{|p_{2,3}|^2}{p_{2,2} p_{3,3}} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{|p_{L-1,L}|^2}{p_{L-1,L-1} p_{L,L}} \right)^{k_{L-1}}, \end{aligned}$$

где $\ell = 1, \dots, L$ и использовано тождество $(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k$.

Пусть $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_p}^{j_1, j_2, \dots, j_p}$ — определитель матрицы порядка $n-p$, получающийся из матрицы $\mathbf{P}$ отбрасыванием строк $i_1, i_2, \dots, i_p$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_p$. В частности, $\Delta_{2,3,\dots,L}^{2,3,\dots,L} = p_{1,1}$, $\Delta_{3,4,\dots,L}^{3,4,\dots,L} = p_{1,1} p_{2,2} - |p_{1,2}|^2$. По определению положим $\Delta_{1,2,3,\dots,L}^{1,2,3,\dots,L} \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Последовательно просуммировав по $k_1, k_2, \dots, k_{L-1}$ и используя [4, 5.2.13.16] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu)_k}{k!} x^k = (1-x)^{-\nu}$, $|x| \leq 1$; $x \neq 1$ при $\nu > 0$, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\alpha_1^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{1,1}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{1,2}|^2}{p_{1,1}} \frac{\Delta_{1,2}^{1,2}}{\Delta_1^1} \right)^{-n/2}, \\ \mathbb{E}\alpha_L^n(L) &= 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{L,L}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{L-1,L}|^2}{p_{L,L}} \frac{\Delta_{L-1,L}^{L-1,L}}{\Delta_L^L} \right)^{-n/2}. \end{aligned}$$

При $\ell = 2, \dots, L-1$

$$\mathbb{E}\alpha_\ell^n(L) = 2^{n/2} \frac{\Gamma(m + \frac{n}{2})}{\Gamma(m)} p_{\ell,\ell}^{-n/2} \left(1 - \frac{|p_{\ell-1,\ell}|^2}{p_{\ell,\ell}} \frac{\Delta_{\ell-1,\ell,\dots,L}^{\ell-1,\ell,\dots,L}}{\Delta_{\ell,\ell+1,\dots,L}^{\ell,\ell+1,\dots,L}} - \frac{|p_{\ell,\ell+1}|^2}{p_{\ell,\ell}} \frac{\Delta_{1,2,\dots,\ell+1}^{1,2,\dots,\ell+1}}{\Delta_{1,2,\dots,\ell}^{1,2,\dots,\ell}} \right)^{-n/2}.$$

4. Двумерные райсовские замирания

Двумерная плотность распределения вероятностей для коррелированного райсовского закона. Пусть $\alpha_1 = (\alpha_{c1}, \alpha_{s1})$, $\alpha_2 = (\alpha_{c2}, \alpha_{s2})$ — гауссовские случайные векторы, компонентами которых являются гауссовские случайные величины α_{c1} , α_{c2} , α_{s1} , α_{s2} , в общем случае с ненулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями компонент вектора $D\alpha_{c(s),1} = \sigma_1^2$, $D\alpha_{c(s),2} = \sigma_2^2$. Коррелированные случайные величины, представляющие собой нормы случайных векторов $\alpha_1 = \|\alpha_1\| = \sqrt{\alpha_{c1}^2 + \alpha_{s1}^2}$, $\alpha_2 = \|\alpha_2\| = \sqrt{\alpha_{c2}^2 + \alpha_{s2}^2}$ с математическими ожиданиями $m_1 = \mathbb{E}\alpha_1$ и $m_2 = \mathbb{E}\alpha_2$, имеют ковариационную матрицу $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ [12]. В литературе известны два варианта записи двумерной плотности распределения вероятностей для коррелированного райсовского закона, но с разными характеристиками:

А. Если $m_1 = m_2 = m$ и $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ в общем случае, то [3, (3.13)]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\alpha_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2^2}{\sigma_2^2} + m^2 \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right)\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k \left(\frac{\rho \alpha_1 \alpha_2}{(1-\rho^2) \sigma_1 \sigma_2} \right) I_k \left(\frac{m(1-\rho \sigma_1/\sigma_2)}{(1-\rho^2) \sigma_1^2} \alpha_1 \right) I_k \left(\frac{m(1-\rho \sigma_2/\sigma_1)}{(1-\rho^2) \sigma_2^2} \alpha_2 \right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ и $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$.

В. Если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ и $m_1 \neq m_2$ в общем случае, то [13]

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sigma^4 (1-\rho^2)} \exp \left(-\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + m_1^2 + m_2^2 - 2m_1 m_2 \rho}{2\sigma^2 (1-\rho^2)} \right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k \left(\frac{\rho \alpha_1 \alpha_2}{(1-\rho^2) \sigma^2} \right) I_k \left(\frac{m_1 - \rho m_2}{(1-\rho^2) \sigma^2} \alpha_1 \right) I_k \left(\frac{m_2 - \rho m_1}{(1-\rho^2) \sigma^2} \alpha_2 \right),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ и $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$.

В результате обобщения этих результатов получим, что двумерная плотность распределения вероятностей Райса с произвольными математическими ожиданиями и дисперсиями может быть представлена в виде

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \Omega e^{-\chi \alpha_1 \alpha_2} e^{-(\beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 \alpha_2^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\lambda \alpha_1 \alpha_2) I_k(\theta_1 \alpha_1) I_k(\theta_2 \alpha_2), \quad (13)$$

где $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_k = 2, k > 0$ и

$$\Omega = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)}, \quad \chi = \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{m_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{m_2^2}{\sigma_2^2} - 2|\rho| \frac{m_1 m_2}{\sigma_1 \sigma_2} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{(1-\rho^2) \sigma_1^2}, \\ \beta_2 = \frac{1}{(1-\rho^2) \sigma_2^2}, \quad \lambda = \frac{|\rho|}{(1-\rho^2) \sigma_1 \sigma_2}, \quad \theta_1 = \frac{m_1 - |\rho| \frac{\sigma_1}{\sigma_2} m_2}{(1-\rho^2) \sigma_1^2}, \quad \theta_2 = \frac{m_2 - |\rho| \frac{\sigma_2}{\sigma_1} m_1}{(1-\rho^2) \sigma_2^2}. \quad (14)$$

Отметим некоторые свойства коэффициентов, введенных в (14):

$$\Omega = \beta_1 \beta_2 - \lambda^2, \quad \Omega = (1-\rho^2) \beta_1 \beta_2, \quad \lambda^2 = \rho^2 \beta_1 \beta_2, \quad \chi = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{2}, \\ \beta_1 m_1 - \theta_1 = \lambda m_2, \quad \beta_2 m_2 - \theta_2 = \lambda m_1, \quad \beta_2 \theta_1 + \lambda \theta_2 = m_1 \Omega, \quad \beta_1 \theta_2 + \lambda \theta_1 = m_2 \Omega.$$

Справедливость выполнения приведенных выше тождеств может быть легко установлена непосредственной подстановкой коэффициентов.

Для плотности распределения вероятностей Райса при выборе коэффициентов, определяемых (14), выполняются условия нормировки и согласованности:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 = 1, \\ f(\alpha_1) = \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} e^{-(\alpha_1^2 + m_1^2)/(2\sigma_1^2)} I_0 \left(\frac{m_1}{\sigma_1^2} \alpha_1 \right), \\ f(\alpha_2) = \int_0^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 = \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} e^{-(\alpha_2^2 + m_2^2)/(2\sigma_2^2)} I_0 \left(\frac{m_2}{\sigma_2^2} \alpha_2 \right),$$

где $f(\alpha_k)$, $k = 1, 2$, – одномерная плотность распределения Райса. Если $\rho = 0$, то двумерная плотность распределения Райса (13), с учетом (14), примет следующий вид

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} e^{-(\alpha_1^2 + m_1^2)/(2\sigma_1^2)} I_0 \left(\frac{m_1 \alpha_1}{\sigma_1^2} \right) \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2} e^{-(\alpha_2^2 + m_2^2)/(2\sigma_2^2)} I_0 \left(\frac{m_2 \alpha_2}{\sigma_2^2} \right) = f(\alpha_1) f(\alpha_2).$$

4.1. Метод оптимального сложения. При двукратном приеме и коррелированных райсовских замираниях в каналах связи математическое ожидание определяется формулой (3).

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^\infty \int_0^\infty T\left(a\sqrt{p_1x_1^2 + p_2x_2^2}, \eta\right) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad a \geq 0; \quad p_1, p_2 > 0, \quad (15)$$

где $g(x_1, x_2)$ имеет вид (13):

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{-(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\lambda x_1 x_2) I_k(\theta_1 x_1) I_k(\theta_2 x_2),$$

и $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k \geq 1$. Используя определение функции Оуэна и изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a^2(1+t^2)(p_1x_1^2 + p_2x_2^2)/2} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dt}{1+t^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \int_0^\infty x_2 e^{-(a^2 p_2(1+t^2) + b_2)x_2^2/2} I_k(\theta_2 x_2) dx_2 \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_1 e^{-(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)x_1^2/2} I_k(\lambda x_1 x_2) I_k(\theta_1 x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим интеграл [4, 2.15.20.8]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} I_\nu(bx) I_\nu(cx) dx = \frac{1}{2p} e^{(b^2+c^2)/(4p)} I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right), \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} e^{\theta_1^2/[2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_2 e^{-[(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \lambda^2/(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]x_2^2/2} \times \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(\theta_2 x_2) I_k\left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} x_2\right) dx_2 dt. \end{aligned}$$

Поскольку $I_0(w+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k I_k(w) I_k(z)$ в силу формулы [14, 2.4.1],

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} e^{\theta_1^2/[2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty x_2 e^{-[(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \lambda^2/(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)]x_2^2/2} I_0\left(\left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)x_2\right) dx_2 dt. \end{aligned}$$

Этот интеграл известен [4, 2.15.5.4]:

$$\int_0^\infty x e^{-px^2} I_0(cx) dx = \frac{1}{2p} e^{c^2/(4p)}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Таким образом,

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\theta_1^2}{2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)}\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)^2 \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}}\right) dt. \quad (16)$$

Исходя из симметрии $f(x_1, x_2)$ относительно индексов, можно использовать альтернативное представление (16), получаемое соответствующей заменой индексов $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$.

Пусть

$$\mathbf{P} = a^2 \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} b_1 & \lambda \\ \lambda & b_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_2, \theta_1),$$

тогда после вычисления (16) получим

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \exp\left(\frac{\theta_1^2}{2(a^2 p_1(1+t^2) + b_1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \theta_1}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1} + \theta_2\right)^2 \frac{1}{(a^2 p_2(1+t^2) + b_2) - \frac{\lambda^2}{a^2 p_1(1+t^2) + b_1}}\right) dt.$$

После алгебраических преобразований аргумента экспоненциальной функции найдем

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2 + a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1) t^2}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|}\right) dt \quad (17)$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{\Lambda}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|} \exp\left(\frac{z}{2} \frac{1 + bt^2}{|\mathbf{E} + t^2 \mathbf{B}|}\right) dt,$$

где $|\mathbf{\Lambda}| = b_1 b_2 - \lambda^2$,

$$b = \frac{a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1)}{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2}, \quad z = \frac{\theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2}{(b_1 + a^2 p_1)(b_2 + a^2 p_2) - \lambda^2}$$

и введена матрица $\mathbf{B} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}$. Тогда $J = |\mathbf{\Lambda}|^{-1} \mathcal{H}_1(z; b, \mathbf{B}; \eta)$.

Так как

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{P} + \mathbf{\Lambda})\boldsymbol{\theta}^T = \theta_1^2 (b_2 + a^2 p_2) + \theta_2^2 (b_1 + a^2 p_1) + 2\lambda \theta_1 \theta_2, \quad \boldsymbol{\theta} \mathbf{P} \boldsymbol{\theta}^T = a^2 (\theta_1^2 p_2 + \theta_2^2 p_1),$$

то можно использовать представление, аналогичное представлению (17):

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\theta} (\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}) \boldsymbol{\theta}^T}{|\mathbf{\Lambda} + (1+t^2)\mathbf{P}|}\right) dt$$

или

$$J = \frac{1}{2\pi} \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|}{|\mathbf{\Lambda}|} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\theta} \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}) \boldsymbol{\theta}^T}{|\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}| |\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|}\right) dt.$$

Целесообразно ввести специальную функцию

$$\mathcal{H}_p(\mathbf{Z}; \mathbf{a}, \mathbf{B}; \eta) = \frac{|\mathbf{E} - \mathbf{B}|^p}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{1+t^2} \frac{1}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|^p} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{a} \mathbf{Z} (\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}) \mathbf{a}^T}{|\mathbf{E} + t^2\mathbf{B}|}\right) dt, \quad (18)$$

где $p > 0$; $\mathbf{B}$, $\mathbf{Z}$ – матрицы размера $n \times n$, а $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – вектор-строка. В этом случае

$$J = \frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|} \mathcal{H}_1\left(\frac{\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}}{|\mathbf{P} \mathbf{B}^{-1}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}; \eta\right) = \frac{1}{|\mathbf{\Lambda}|} \mathcal{H}_1\left(\frac{\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}}{|\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}; \eta\right), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}.$$

Специальная функция (18) может быть полезна для систематизации расчета вероятностей ошибки при разнесенном приеме в каналах связи с замираниями, описываемыми многомерными распределениями Релея, Накагами и двумерным распределением Райса.

5. Приложение

Ограничимся рассмотрением райсовских замираний при двояном приеме. Введем коэффициенты, характеризующие глубину райсовских замираний в каждом канале: $K_{\mathcal{RC}1}^2 = \frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}$, $K_{\mathcal{RC}2}^2 = \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}$. Каждый из этих коэффициентов представляет собой отношение мощности $m_{1(2)}^2/2$ регулярной составляющей к дисперсии $\sigma_{1(2)}^2$ флуктуирующей составляющей коэффициента передачи $\alpha_{1(2)}$ соответствующего канала (ветви) с райсовскими замираниями. Если $K_{\mathcal{RC}1(2)}^2 = 0$, то для одного или обоих некоррелированных каналов получим каналы с релейскими замираниями. При $K_{\mathcal{RC}1(2)}^2 \rightarrow \infty$ в соответствующей ветви разнесения или в обеих ветвях придем к каналам без замираний. Кроме этого, введем коэффициенты, характеризующие соотношения между дисперсиями и математическими ожиданиями: $q^2 = \sigma_1^2/\sigma_2^2$, $r = m_1/m_2$. Коэффициенты q^2 и r характеризуют асимметрию ветвей (каналов) соответственно по дисперсиям и математическим ожиданиям. Без ограничения общности можно положить, что $0 \leq q^2 \leq 1$.

При проведении численных расчетов для удобства зададим: коэффициент корреляции ρ , глубину замираний в каждой ветви $K_{\mathcal{RC}1}^2$ и $K_{\mathcal{RC}2}^2$, а также δ_1^2 , δ_2^2 и соотношение между дисперсиями – величину q . Соотношение между математическими ожиданиями имеет вид $r = q \frac{K_{\mathcal{RC}1}}{K_{\mathcal{RC}2}}$. Отметим, что в (15) $b_1 = \beta_1$, $b_2 = \beta_2$,

$$p_1 = \frac{\delta_1^2}{\mathbb{E}\alpha_1^2} \gamma = \frac{1}{2\sigma_1^2} \frac{\delta_1^2}{K_{\mathcal{RC}1}^2 + 1} \gamma, \quad p_2 = \frac{\delta_2^2}{\mathbb{E}\alpha_2^2} \gamma = \frac{1}{2\sigma_2^2} \frac{\delta_2^2}{K_{\mathcal{RC}2}^2 + 1} \gamma,$$

$$\theta_1 = \frac{2K_{\mathcal{RC}1}^2}{m_1} \frac{1 - \rho K_{\mathcal{RC}2}/K_{\mathcal{RC}1}}{1 - \rho^2}, \quad \theta_2 = \frac{2K_{\mathcal{RC}2}^2}{m_2} \frac{1 - \rho K_{\mathcal{RC}1}/K_{\mathcal{RC}2}}{1 - \rho^2},$$

и параметры распределения (13) определены в (14). Пусть

$$\chi = \frac{K_{\mathcal{RC}1}^2 + K_{\mathcal{RC}2}^2 - 4|\rho| K_{\mathcal{RC}R,1} K_{\mathcal{RC}R,2}}{1 - \rho^2},$$

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sigma_1^2} \frac{\delta_1^2}{K_{\mathcal{RC}1}^2 + 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma_2^2} \frac{\delta_2^2}{K_{\mathcal{RC}2}^2 + 1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} 1 & |\rho|q \\ |\rho|q & q^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_k = 2g_k\gamma (\mathbf{\Lambda} + 2g_k\gamma \mathbf{P}')^{-1} \mathbf{P}', \quad \mathbf{P}_k = 2g_k\gamma \mathbf{P}', \quad k = 1, 2, \dots$$

Приведем примеры расчета средней битовой вероятности ошибки при двояном разнесенном приеме многопозиционных сигналов ФМ и КАМ в канале связи с коррелированными райсовскими замираниями и АБГШ. С учетом использования только двух ветвей разнесения $L = 2$ положим $\gamma = \gamma_{bm}/2^\kappa$ или $\gamma = \gamma_{bc}/2^\kappa$.

ФМ-М. Применяя формулу для средней вероятности ошибки в канале с АБГШ [1] и приведенные выше результаты, получим, что средняя вероятность битовой ошибки для сигналов ФМ-М, $M = 2^K$, при двояном приеме в канале с райсовскими замираниями может быть представлена в виде

$$\tilde{P}_b(\gamma) = \frac{16}{MK} e^{-\chi} \sum_{j=1}^{M/4} \left[\hat{\omega}_j \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_j; \operatorname{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M} \right) + \right. \\ \left. + \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_j^{PSK} \gamma \mathbf{P}'_j|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_j; +\infty \right) \right],$$

где $g_j^{PSK} = \log_2 M \gamma_{bm} \sin^2 \frac{(2j-1)\pi}{M}$, $j = 1, \dots, M/4$; $\gamma_m = E_m/N_0 = KE_{bm}/N_0$ – отношение максимальной энергии сигнала E_m к односторонней спектральной плотности мощности шума N_0 для всех $j = 1, \dots, M/4$, $M \geq 8$;

$$\omega_j = \frac{8}{M} \sum_{i=1}^{K-2} (-1)^{[(j-1)\frac{2^{i+1}}{M}]} 2^i = \frac{16}{M} \sum_{i=0}^{K-3} h_{i,j-1}^{(p)} 2^i = \frac{16}{M} \hat{\omega}_j,$$

где $[x]$ – целая часть числа x , $h_{i,j-1}^{(p)}$ – элементы матрицы Уолша $\mathbf{H}_p(K-2)$, упорядоченной по Пэли [15, 14.4].

На рис. 1 представлены результаты расчета средней вероятности ошибки $P_b(\gamma_{bm})$, $\gamma_{bm} = \gamma_m/K$, двояного приема сигналов ФМ-8 в канале без замирания и с коррелированными райсовскими замираниями для статистически однородных каналов при глубине замирания $K_{\mathcal{RC}}^2 = K_{\mathcal{RC}1}^2 = K_{\mathcal{RC}2}^2 \approx 3$ дБ.

КАМ-М. Средняя вероятность битовой ошибки в K -битовом блоке, $K = \log_2 M$, при двояном разнесенном приеме в канале с райсовскими замираниями определяется соотношением

$$\tilde{P}_b(\gamma) = \frac{2}{K} e^{-\chi} \sum_{j=1}^{\sqrt{M}-1} a_{2j-1} \mathcal{H}_1 \left(\frac{\mathbf{\Lambda} + 2g_{2j-1}^{QAM} \gamma \mathbf{P}'_{2j-1}}{|\mathbf{\Lambda} + 2g_{2j-1}^{QAM} \gamma \mathbf{P}'_{2j-1}|}; \boldsymbol{\theta}, \mathbf{B}_{2j-1}; +\infty \right),$$

где $g_{2j-1}^{QAM} = \frac{3(2j-1)^2 K}{2(M-1)}$, $j = 1, \dots, \sqrt{M}-1$; $\gamma_{bc} = E_c/(N_0 K)$ и E_c – средняя энергия сигналов, используемых в КАМ-М, а коэффициенты a_{2j-1} , $j = 1, \dots, \sqrt{M}-1$, приведены в [1].

На рис. 2, 3 представлены результаты расчета средней вероятности ошибки $P_b(\gamma_{bc})$ двояного приема сигналов КАМ-16 в канале без замирания и с коррелированными райсовскими замираниями для статистически однородных каналов при глубине замирания $K_{\mathcal{RC}}^2 = K_{\mathcal{RC}1}^2 = K_{\mathcal{RC}2}^2 \approx 3$ дБ.

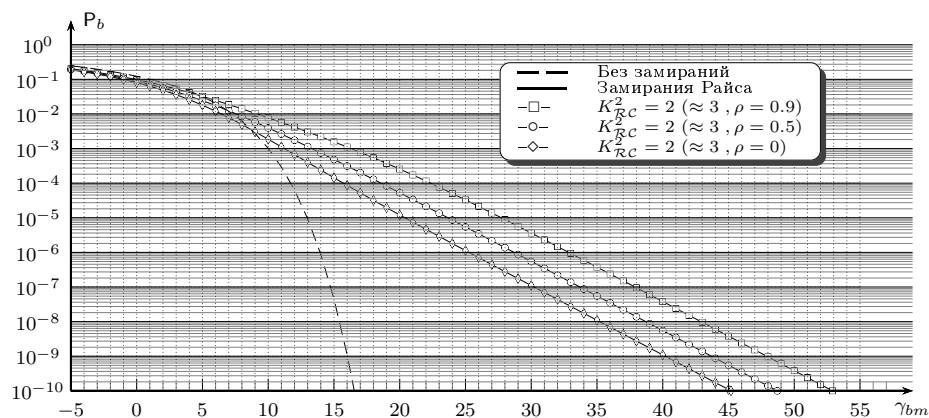


Рис. 1. Графики вероятностей ошибки ФМ-8 $P_b(\gamma_{bm})$ при двукоррелированном приеме и райсовских замираниях

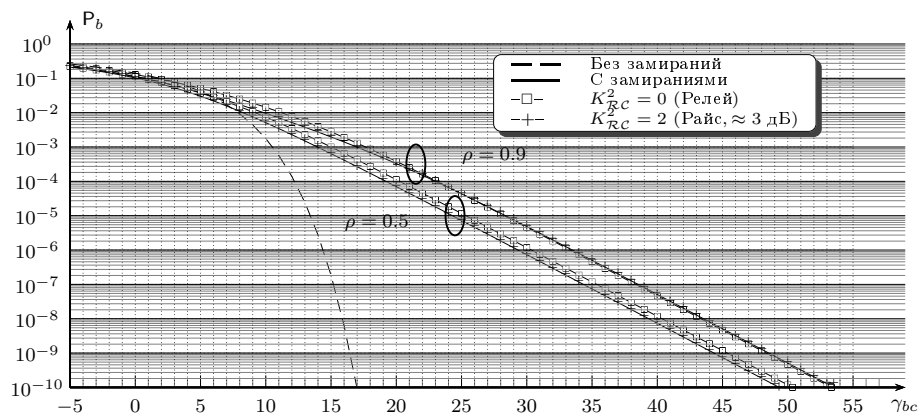


Рис. 2. Графики вероятности ошибки КАМ-16 $P_b(\gamma_{bc})$ при двукоррелированном приеме при релейских и райсовских замираниях

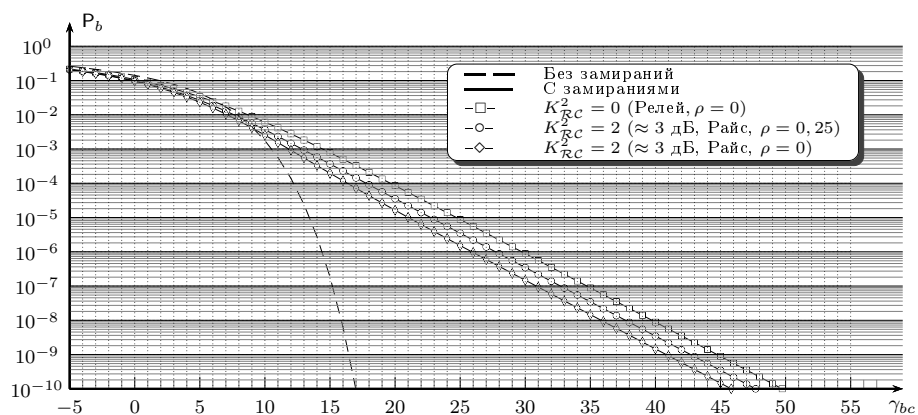


Рис. 3. Графики вероятности ошибки КАМ-16 $P_b(\gamma_{bc})$ при двукоррелированном приеме при релейских и райсовских замираниях

Заключение

Проведен анализ помехоустойчивости при разнесенном приеме многопозиционных сигнальных конструкций и использовании метода оптимального сложения для каналов связи с коррелированными в ветвях разнесения замираниями. В качестве законов, описывающих замирания сигналов, рассмотрены многомерные плотности распределения вероятности Релея, Накагами и двумерный закон Райса. Вычисление вероятности ошибки при разнесенном приеме двумерных многопозиционных сигнальных конструкций для исследуемых законов распределений сведено к применению новой специальной функции. Приведены примеры расчета вероятностей ошибок, корректные во всем диапазоне изменения отношения сигнал/шум, при вдвоенном коррелированном приеме и райсовских замираний для многопозиционных сигналов ФМ-М и КАМ-М. Реальные каналы связи описываются в общем случае более сложными, чем Релей и Накагами, законами распределения. Дальнейшим направлением исследований является получение аналитических соотношений для многомерных распределений Райса и определение соответствующих вероятностей ошибок приема сигнальных конструкций.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

1. *Savischenko N.V.* Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory. Singapore: World Sci., 2014. 640 p. <https://doi.org/10.1142/9168>.
2. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Hypergeometric functions of several variables and evaluation of error probability in fading multichannel system // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, No 1. P. 70–83. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010108>.
3. *Simon M.K.* Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists. Ser.: The Springer International Series in Engineering and Computer Science. New York, NY: Springer, 2006. xxiv, 200 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47694-0>.
4. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 2. Специальные функции. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2003. 664 с.
5. *Mallik R.K.* On multivariate Rayleigh and exponential distributions // *IEEE Trans. Inf. Theory.* 2003. V. 49, No 6. P. 1499–1515. <https://doi.org/10.1109/TIT.2003.811910>.
6. *Ильин В.П., Кузнецов Ю.И.* Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985. 208 с.
7. *Usmani R.A.* Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix // *Linear Algebra Its Appl.* 1994. V. 212–213. P. 413–414. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90414-6](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90414-6).
8. *Blumenson L.E., Miller K.S.* Properties of generalized Rayleigh distributions // *Ann. Math. Stat.* 1963. V. 34, No 3. P. 903–910. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704013>.
9. *Karagiannidis G.K., Zogas D.A., Kotsopoulos S.A.* An efficient approach to multivariate Nakagami- m distribution using Green's matrix approximation // *IEEE Trans. Wireless Commun.* 2003. V. 2, No 5. P. 883–889. <https://doi.org/10.1109/TWC.2003.816792>.
10. *Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Savischenko N.V.* Handbook of Mellin Transforms. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2018. 607 p. <https://doi.org/10.1201/9780429434259>.
11. *Srivastava H.M., Karlsson P.W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Ser. in Mathematics and Its Applications: Statistics and Operational Research. Chichester: Ellis Horwood Ltd.; New York, NY: Halsted Press, 1985. 425 p.

12. *Simon M.K., Alouini M.-S.* Digital Communications over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis. 2nd ed. New York, NY: Wiley, 2005. 936 p.
<https://doi.org/10.1002/0471715220>.
13. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
14. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 799 с.
15. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. 5-е изд., испр. и доп. М.: Дрофа, 2006. 719 с.

Поступила в редакцию 5.04.2024

Принята к публикации 15.05.2024

Брычков Юрий Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук

ул. Вавилова, д. 40, г. Москва, 119333, Россия

E-mail: yua@rambler.ru

Савищенко Николай Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин

Военная академия связи им. С.М. Будённого

Тихорецкий просп., д. 3, г. Санкт-Петербург, 194064, Россия

E-mail: snikaspb@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 2, pp. 127–146

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.2.127-146

Multivariate Rayleigh, Rice, and Nakagami Distributions and Their Applications in Communication Theory

Yu.A. Brychkov^{a}, N.V. Savischenko^{b**}*

^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*

^b*Military Telecommunications Academy, St. Petersburg, 194064 Russia*

E-mail: *yua@rambler.ru, **snikaspb@mail.ru

Received April 5, 2024; Accepted May 15, 2024

Abstract

A method was developed to calculate the symbol and bit error probabilities for coherent diversity reception of multi-position signal structures in a communication channel with additive white Gaussian noise (AWGN) and general fading described by the multivariate Rayleigh and Nakagami distributions, as well as the bivariate Rice distribution.

Keywords: multivariate Rayleigh distribution, multivariate Nakagami distribution, bivariate Rice distribution, fading, potential noise immunity, special function, Owen function

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. PM-8 error probability graphs $P_b(\gamma_{bm})$ at dual correlated reception and Rice fading.

Fig. 2. QAM-16 error probability graphs $P_b(\gamma_{bc})$ at dual correlated reception and Rayleigh and Rice fading.

Fig. 3. QAM-16 error probability graphs $P_b(\gamma_{bc})$ at dual correlated reception and Rayleigh and Rice fading.

References

1. Savischenko N.V. *Special Integral Functions Used in Wireless Communications Theory*. Singapore, World Sci., 2014. 640 p. <https://doi.org/10.1142/9168>.
2. Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Hypergeometric functions of several variables and evaluation of error probability in fading multichannel system. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 1, pp. 70–83. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010108>.
3. Simon M.K. *Probability Distributions Involving Gaussian Random Variables: A Handbook for Engineers and Scientists*. Ser.: The Springer International Series in Engineering and Computer Science. New York, NY, Springer, 2006. xxiv, 200 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47694-0>.
4. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady* [Integrals and Series]. Vol. 2: Special functions. 2nd ed., rev. Moscow, Fizmatlit, 2003. 664 p. (In Russian)
5. Mallik R.K. On multivariate Rayleigh and exponential distributions. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2003, vol. 49, no. 6, pp. 1499–1515. <https://doi.org/10.1109/TIT.2003.811910>.
6. Il'in V.P., Kuznetsov Yu.I. *Trekhdiagonal'nye matritsy i ikh prilozheniya* [Tridiagonal Matrices and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1985. 208 p. (In Russian)
7. Usmani R.A. Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix. *Linear Algebra Its Appl.*, 1994, vols. 212–213, pp. 413–414. [https://doi.org/10.1016/0024-3795\(94\)90414-6](https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)90414-6).
8. Blumenson L.E., Miller K.S. Properties of generalized Rayleigh distributions. *Ann. Math. Stat.*, 1963, vol. 34, no. 3, pp. 903–910. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704013>.
9. Karagiannidis G.K., Zogas D.A., Kotsopoulos S.A. An efficient approach to multivariate Nakagami- m distribution using Green's matrix approximation. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 5, pp. 883–889. <https://doi.org/10.1109/TWC.2003.816792>.
10. Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Savischenko N.V. *Handbook of Mellin Transforms*. Ser.: Advances in Applied Mathematics. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2018. 607 p. <https://doi.org/10.1201/9780429434259>.
11. Srivastava H.M., Karlsson P.W. *Multiple Gaussian Hypergeometric Series*. Ellis Horwood Ser. in Mathematics and Its Applications: Statistics and Operational Research. Chichester, Ellis Horwood Ltd.; New York, NY, Halsted Press, 1985. 425 p.
12. Simon M.K., Alouini M.-S. *Digital Communications over Fading Channels: A Unified Approach to Performance Analysis*. 2nd ed. New York, NY, Wiley, 2005. 936 p. <https://doi.org/10.1002/0471715220>.
13. Levin B.R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoi radiotekhniki* [Theoretical Basics of Statistical Radio Engineering]. 3rd ed., rev. and enl. Moscow, Radio Svyaz', 1989. 656 p. (In Russian)

14. Watson G.N. *Teoriya besselevykh funktsii* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions]. Pt. 1. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1949. 799 p. (In Russian)
 15. Gonorovskii I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* [Radio Circuits and Signals]. 5th ed., rev. and enl. Moscow, Drofa, 2006. 719 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Брычков Ю.А., Савищенко Н.В. Многомерные распределения Релея, Райса, Накагами и их применение в теории связи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 2. С. 127–146.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.127-146>.

For citation: Brychkov Yu.A., Savischenko N.V. Multivariate Rayleigh, Rice, and Nakagami distributions and their applications in communication theory. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 2, pp. 127–146. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.2.127-146>. (In Russian)