

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2023, Т. 165, кн. 1
С. 49–67

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67

ВАРИАТИВНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ
ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ
С РЕАЛИЗАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ МКЭ

Ю. В. Клочков¹, А. П. Николаев¹, О. В. Вахнина¹,
Т. А. Соболевская¹, А. Ш. Джабраилов¹, М. Ю. Клочков²

¹ Волгоградский государственный аграрный университет,
г. Волгоград, 400002, Россия

² Волгоградский государственный технический университет,
г. Волгоград, 400005, Россия

Аннотация

Представлен алгоритм конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния оболочки в форме трехосного эллипсоида с вариативной параметризацией его срединной поверхности. В качестве элемента дискретизации выбран четырехугольный фрагмент срединной поверхности оболочки с узловыми неизвестными в виде перемещений и их первых производных по криволинейным координатам.

Реализованы два варианта аппроксимации перемещений через соответствующие узловые значения. В первом варианте известные аппроксимирующие функции применены для каждой компоненты вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через узловые значения этой же компоненты. Во втором варианте указанные аппроксимирующие выражения использованы непосредственно для выражения вектора перемещения внутренней точки конечного элемента через векторные неизвестные узловых точек. После координатных преобразований каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента была выражена через узловые значения всех составляющих узловых неизвестных. Кроме того, в этих аппроксимирующих выражениях искомых перемещений внутренней точки конечного элемента содержатся параметры криволинейной системы координат, применяемой в расчете.

Высокая эффективность разработанного алгоритма подтверждена вычислительными экспериментами.

Ключевые слова: оболочка со срединной поверхностью в форме эллипсоида, параметризация поверхности, конечно-элементная модель, инвариантная интерполяция искомых величин

Введение

Развитие постиндустриальной цивилизации характеризуется широким внедрением в техносферную среду тонкостенных объектов в форме оболочек и их фрагментов. Благодаря своей криволинейной поверхности оболочечные конструкции обладают гораздо меньшей, по сравнению с другими типами конструкций, материалоёмкостью, достаточной устойчивостью и вполне высокой несущей способностью. Расчеты на прочность и устойчивость оболочечных конструкций по классическим

теориям, основанным на гипотезах Кирхгофа–Лява или С.П. Тимошенко [1–4], сводятся к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных, что не совсем удобно в случаях сложной геометрии поверхностей. Поэтому в настоящее время в приоритете находятся численные методы исследования напряженодеформированного состояния (НДС) объектов из оболочек и их фрагментов [5–9].

Лидирующие позиции среди численных методов анализа НДС оболочечных объектов техносфера в данный момент занимает метод конечных элементов (МКЭ), на основе которого созданы широко распространенные программные комплексы, такие как Лира, ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и многие другие. Однако конечно-элементные модели, заложенные в основу всех вышеперечисленных комплексов, базируются на стандартной для МКЭ интерполяционной процедуре отдельных компонент вектора перемещения через узловые значения этих же самых компонент. Сказанное было реализовано: при анализе упругого деформирования оболочек при использовании треугольного конечного элемента с корректирующими множителями Лагранжа [10, 11]; определении НДС оболочек в условиях упругопластического деформирования [12, 13]; при конечно-элементном анализе трехмерных упругих конструкций и оболочек из композитных материалов [14–17]; динамическом конечно-элементном анализе [18–21]; определении НДС тонкостенных конструкций при больших деформациях и поворотах нормалей [22–24]; расчетах тонкостенных конструкций с использованием полигональных элементов [25–29]; в методе виртуальных элементов с полиномиальными сетками [30, 31].

В перечисленных выше работах использована аппроксимация непосредственно отдельных компонент вектора перемещения, вполне адекватная при применении декартовой системы координат, а также при расчете пологих оболочек. В случаях численного анализа НДС конструкций из оболочек и их фрагментов гораздо удобнее использовать криволинейные координаты, решая при этом вопросы оптимальной параметризации поверхности исследуемых объектов. Однако при использовании криволинейных систем координат в конечно-элементных моделях необходимо учитывать проблему смещения конечного элемента как твердого тела.

Такие исследования для оболочек вращения выполнены в [6]. Напряженно-деформированные состояния оболочек с поперечными сечениями иных форм не рассматривались.

Целью настоящей работы является разработка конечно-элементного алгоритма с векторной формой интерполяции искомых величин для определения НДС эллипсоидальной оболочки при различных вариантах параметризации ее срединной поверхности.

1. Материалы и методы. Параметризация поверхности трехосного эллипсоида

Поверхность трехосного эллипсоида может быть задана радиус-вектором следующего вида [32]

$$\vec{R}^0 = \vec{x} + r(x, \varphi) \sin \varphi \vec{j} + r(x, \varphi) \cos \varphi \vec{k}, \quad (1.1)$$

где φ – полярный угол, отсчитываемый от оси Oz против хода часовой стрелки в плоскости перпендикулярного оси Ox поперечного сечения эллипсоида. Функция $r(x, \varphi)$, входящая в (1.1), имеет следующую структуру

$$r(x, \varphi) = \left(bc / \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi} \right) \sqrt{1 - (x/a)^2}, \quad (1.2)$$

где a, b, c – параметры трехосного эллипсоида, соответствующие длинам его полуосей вдоль координатных осей x, y и z соответственно.

Используя формулы дифференциальной геометрии [33], можно получить векторы локального базиса точки поверхности эллипсоида и производные этих векторов по криволинейным координатам x и φ

$$\vec{a}_1^0 = \vec{R}_{,x}^0; \quad \vec{a}_2^0 = \vec{R}_{,\varphi}^0; \quad \vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / |\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|; \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\rho,x}^0 &= \Gamma_{\rho x}^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0 + b_{\rho x}^{0\alpha} \vec{a}^0; \quad \vec{a}_{\rho,\varphi}^0 = \Gamma_{\rho\varphi}^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0 + b_{\rho\varphi}^{0\alpha} \vec{a}^0; \\ \vec{a}_{,x}^0 &= -b_x^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0; \quad \vec{a}_{,\varphi}^0 = -b_\varphi^{0\alpha} \vec{a}_\alpha^0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\Gamma_{\rho x}^{0\alpha}$, $\Gamma_{\rho\varphi}^{0\alpha}$ – символы Кристоффеля второго рода, $b_{\rho x}^{0\alpha}$, $b_{\rho\varphi}^{0\alpha}$, $b_x^{0\alpha}$, $b_\varphi^{0\alpha}$ – ковариантные и смешанные компоненты тензора кривизны, верхние и нижние индексы α , ρ последовательно принимают значения 1, 2, а нижние индексы x , φ после запятой обозначают операцию дифференцирования по соответствующей координате.

Соотношения (1.3) и (1.4) могут быть представлены в матричном виде

$$\{\vec{a}^0\} = [c_\varphi^0] \{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,x}^0\} = [m_\varphi^0] \{\vec{a}^0\}; \quad \{\vec{a}_{,\varphi}^0\} = [n_\varphi^0] \{\vec{a}^0\}, \quad (1.5)$$

где $\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}^0\}$; $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i} \vec{j} \vec{k}\}$; $\{\vec{a}_{,x}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^0 \vec{a}_{2,x}^0 \vec{a}_{,x}^0\}$; $\{\vec{a}_{,\varphi}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,\varphi}^0 \vec{a}_{2,\varphi}^0 \vec{a}_{,\varphi}^0\}$.

В качестве альтернативы формуле (1.1) для определения положения произвольной точки на поверхности трехосного эллипсоида предлагаем использовать следующую формулу для радиус-вектора

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + bf(x)\sin t\vec{j} + cf(x)\cos t\vec{k}, \quad (1.6)$$

где t – параметр эллипса, образованного сечением трехосного эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox на расстоянии x от начала координат. Функция $f(x)$, входящая в (1.6), имеет вид

$$f(x) = \sqrt{1 - (x/a)^2}. \quad (1.7)$$

Векторы локального базиса точки M^0 , находящиеся в соприкасающейся плоскости к поверхности трехосного эллипсоида, определяются дифференцированием (1.6) по x и t

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i} + b\sin t f_{,x}(x) \vec{j} + c\cos t f_{,x}(x) \vec{k}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^0 = bf(x)\cos t \vec{j} - cf(x)\sin t \vec{k}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $f_{,x}(x) = -\frac{x}{a^2\sqrt{1-(x/a)^2}}$.

Орт нормали к поверхности эллипсоида в точке M^0 определится по формуле

$$\vec{a}^0 = \vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0 / \sqrt{a^0},$$

где $a^0 = (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_1^0)(\vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0) - (\vec{a}_1^0 \cdot \vec{a}_2^0)^2$.

Производные базисных векторов определяются матричными выражениями

$$\{\vec{a}_{,x}^0\} = [m_t^0] \{\vec{a}^0\} \quad \{\vec{a}_{,t}^0\} = [n_t^0] \{\vec{a}^0\}. \quad (1.9)$$

После приложения к оболочке заданной поверхностной нагрузки точка M^0 переместится в точку M , а точка $M^{0\zeta}$, отстоящая от точки M^0 вдоль нормали на расстоянии ζ , перейдет в точку M^ζ .

Векторы перемещения точек M^0 и $M^{0\zeta}$ определяются по соответствующим формулам

$$\vec{v} = v^1 \vec{a}_1^0 + v^2 \vec{a}_2^0 + v \vec{a}^0; \quad \vec{V} = \vec{v} + \zeta (\vec{a} - \vec{a}^0). \quad (1.10)$$

Орт нормали в точке M , входящий в (1.10), определяется векторным произведением

$$\vec{a} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 / \sqrt{a} = \left((\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x} \times (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,t} \right) / \sqrt{a}, \quad (1.11)$$

где $a = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) (\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2) - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)^2 \approx a^0$ в линейной постановке.

Деформации эллипсоидальной оболочки (в линейной постановке) в точке M^ζ могут быть получены по классическим формулам механики сплошной среды [34]

$$\varepsilon_{\rho\gamma} = 0.5 (g_{\rho\gamma} - g_{\rho\gamma}^0), \quad (1.12)$$

где $g_{\rho\gamma} = \vec{g}_\rho \cdot \vec{g}_\gamma$; $g_{\rho\gamma}^0 = \vec{g}_\rho^0 \cdot \vec{g}_\gamma^0$.

Векторы базисов точек $M^{0\zeta}$ и M^ζ , входящие в (1.12), определяются дифференцированием соответствующих радиус-векторов этих точек

$$\vec{g}_\rho^0 = \vec{R}_{,\rho}^\zeta = \left(\vec{R}^0 + \zeta \vec{a}^0 \right)_{,\rho}; \quad \vec{g}_\gamma = \vec{R}_{,\gamma}^\zeta = \left(\vec{R}^{0\zeta} + \vec{V} \right)_{,\gamma}, \quad (1.13)$$

где нижние индексы ρ и γ после запятой обозначают операцию дифференцирования по криволинейным координатам x , t или φ .

Деформации (1.12) могут быть определены матричным произведением

$$\{\varepsilon\} = [L] \{v\},$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx}^\zeta \varepsilon_{tt}^\zeta 2\varepsilon_{xt}^\zeta\}$, $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v\}$, $[L]$ – матрица дифференциальных операторов.

2. Варианты интерполяционной процедуры в четырехузловом конечном элементе

При разработке алгоритма прочностного расчета эллипсоидальной оболочки в работе были реализованы два варианта интерполяционной процедуры. В первом варианте была использована стандартная для МКЭ интерполяция отдельных компонент вектора перемещения через узловые значения соответствующих компонент [12, 13]

$$\begin{aligned} q &= \{\chi\}^T \{q_u^L\}; \\ q_{,x} &= \left(\{\chi_{,\xi}\}^T \partial\xi/\partial x + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial\eta/\partial x \right) \{q_u^L\}; \\ q_{,t} &= \left(\{\chi_{,\xi}\}^T \partial\xi/\partial t + \{\chi_{,\eta}\}^T \partial\eta/\partial t \right) \{q_u^L\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\{\chi\}^T$ – матрица-строка функций формы, а столбец $\{q_u^L\}$ содержит узловые значения компонент вектора перемещения q и производные этой же компоненты в локальной системе координат, например, для четырехузлового конечного элемента

$$\{q_u^L\}^T = \{q^h q^p q^r q^s q_{,\xi}^h q_{,\xi}^p q_{,\xi}^r q_{,\xi}^s q_{,\eta}^h q_{,\eta}^p q_{,\eta}^r q_{,\eta}^s\};$$

h, p, r, s – узлы конечного элемента, расположенные в вершинах четырехугольного фрагмента срединной поверхности эллипсоидальной оболочки.

В интерполяционном выражении (2.1) под q понимаем отдельную компоненту вектора перемещения точки M^0 срединной поверхности оболочки v^1, v^2 или v (1.10).

Стандартная для МКЭ интерполяционная процедура отдельных компонент вектора перемещения, суть которой определена выражением (2.1), эффективна лишь при использовании прямоугольной декартовой системы координат. В случаях исследования НДС объектов с криволинейными поверхностями, к которым относится эллипсоидальная оболочка со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида, гораздо удобнее применять криволинейные системы координат как наиболее оптимальные с точки зрения их геометрической интерпретации. Но при использовании криволинейных систем координат эффективными будут интерполяционные выражения, в структуру которых входят параметры привлеченной в данном случае криволинейной системы координат, так как локальный базис криволинейной поверхности изменяется при переходе от точки к точке. Чтобы обеспечить выполнение вышеупомянутого критерия, необходимо использовать альтернативный стандартному векторный вариант интерполяционной процедуры, то есть применить интерполяционное выражение (2.1) не к отдельным компонентам вектора перемещения, а непосредственно к самому вектору перемещения как интерполируемому объекту [35, 36]

$$\vec{v} = \{\chi\}^T \{\vec{v}_u^L\}, \quad (2.2)$$

$$\text{где } \{\vec{v}_u^L\}^T = \left\{ \vec{v}^h \vec{v}^p \vec{v}^r \vec{v}^s \vec{v}_{,\xi}^h \vec{v}_{,\xi}^p \vec{v}_{,\xi}^r \vec{v}_{,\xi}^s \vec{v}_{,\eta}^h \vec{v}_{,\eta}^p \vec{v}_{,\eta}^r \vec{v}_{,\eta}^s \right\}.$$

Производные векторов перемещений по локальным координатам ξ и η , входящие в столбец $\{\vec{v}_u^L\}$, могут быть выражены через их производные в глобальной системе координат x, t или φ

$$\vec{v}_{,\xi}^\beta = \vec{v}_{,x}^\beta x_{,\xi}^\beta + \vec{v}_{,t}^\beta t_{,\xi}^\beta; \quad \vec{v}_{,\eta}^\beta = \vec{v}_{,x}^\beta x_{,\eta}^\beta + \vec{v}_{,t}^\beta t_{,\eta}^\beta, \quad (2.3)$$

где верхний индекс β обозначает узлы конечного элемента h, p, r, s .

На основании (2.3) можно скомпоновать матричную зависимость

$$\{\vec{v}_u^L\} = [D] \{\vec{v}_u^G\}, \quad (2.4)$$

$$\text{где } \{\vec{v}_u^G\}^T = \left\{ \vec{v}^h \vec{v}^p \vec{v}^r \vec{v}^s \vec{v}_{,x}^h \vec{v}_{,x}^p \vec{v}_{,x}^r \vec{v}_{,x}^s \vec{v}_{,t}^h \vec{v}_{,t}^p \vec{v}_{,t}^r \vec{v}_{,t}^s \right\}.$$

Векторы перемещений узлов конечного элемента и их производные, входящие в $\{\vec{v}_u^G\}$, могут быть представлены компонентами, отнесенными к векторам узловых базисов

$$\vec{v}^\beta = v^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + v^\beta \vec{a}^{0\beta}; \quad \vec{v}_{,x}^\beta = l_x^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + l_x^\beta \vec{a}^{0\beta}; \quad \vec{v}_{,t}^\beta = l_t^{\alpha\beta} \vec{a}_\alpha^{0\beta} + l_t^\beta \vec{a}^{0\beta}, \quad (2.5)$$

где верхний индекс α принимает значения 1, 2, а входящие в структуру (2.5) многочлены $l_x^{\alpha\beta}, l_x^\beta, l_t^{\alpha\beta}, l_t^\beta$ содержат компоненты узловых векторов перемещений и их производные по глобальным координатам x и t .

Интерполяционное выражение (2.2) с учетом (2.4) и (2.5) можно записать в виде

$$\vec{v} = \{\chi\}_{1 \times 12}^T [D]_{12 \times 12} \{\vec{v}_u^G\}_{12 \times 1} = \{\chi\}_{1 \times 12}^T [D]_{12 \times 12} [\vec{A}]_{12 \times 36} \{z_u\}_{36 \times 1} = \{w\}_{1 \times 12}^T [\vec{A}]_{12 \times 36} \{z_u\}_{36 \times 1}, \quad (2.6)$$

$$\text{где } \{z_u\}^T = \{v^{1h} v^{2h} v^h v^{1p} v^{2p} v^p v^{1r} v^{2r} v^r v^{1s} v^{2s} v^s l_x^{1h} l_x^{2h} l_x^h \dots l_x^s l_t^{1h} l_t^{2h} l_t^h \dots l_t^s\}.$$

Входящие в структуру матрицы $[\vec{A}]$ матрицы-строки $\{\vec{a}^{0\beta}\}^T = \{\vec{a}_1^{0\beta} \vec{a}_2^{0\beta} \vec{a}^{0\beta}\}$, содержащие базисные векторы узловых точек конечного элемента, могут быть выражены через базисные векторы внутренней точки конечного элемента

$$\{\vec{a}^{0\beta}\} = \left[c_t^{0\beta} \right] \{\vec{i}\} = \left[c_t^{0\beta} \right] [c_t^0]^{-1} \{\vec{a}^0\} = \left[d_t^{0\beta} \right] \{\vec{d}^0\}. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) интерполяционное выражение (2.6) примет вид

$$\vec{v} = \left\{ w_1 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0h}]^T \left| w_2 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0p}]^T \left| w_3 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0r}]^T \left| w_4 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0s}]^T \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. \left| w_5 \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0h}]^T \left| \dots \left| w_{12} \{\vec{a}^0\}^T [d_t^{0s}]^T \right. \right. \right. \right. \right\} \{z_u\}. \quad (2.8)$$

Заменив левую часть (2.8) матричным произведением, получим следующую интерполяционную зависимость

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{a}^0 \right\}_{1 \times 3}^T \{v\} &= \left\{ \vec{a}^0 \right\}^T \left\{ w_1 [d_t^{0h}]^T \left| w_2 [d_t^{0p}]^T \left| w_3 [d_t^{0r}]^T \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \left| w_4 [d_t^{0s}]^T \left| w_5 [d_t^{0h}]^T \left| \dots \left| w_{12} [d_t^{0s}]^T \right. \right. \right. \right. \right\} \{z_u\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\{v\}^T = \{v^1 v^2 v\}$.

Из (2.9) можно получить интерполяционные выражения для компонент вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента

$$\begin{aligned} v^1 &= \left\{ w_1 \{d_{11}^h d_{21}^h d_{31}^h\} | w_2 \{d_{11}^p d_{21}^p d_{31}^p\} | w_3 \{d_{11}^r d_{21}^r d_{31}^r\} | \right. \\ &\quad \left. w_4 \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\} | w_5 \{d_{11}^h d_{21}^h d_{31}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\} \right\} \{z_u\}; \\ v^2 &= \left\{ w_1 \{d_{12}^h d_{22}^h d_{32}^h\} | w_2 \{d_{12}^p d_{22}^p d_{32}^p\} | w_3 \{d_{12}^r d_{22}^r d_{32}^r\} | \right. \\ &\quad \left. w_4 \{d_{12}^s d_{22}^s d_{32}^s\} | w_5 \{d_{12}^h d_{22}^h d_{32}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{12}^s d_{22}^s d_{32}^s\} \right\} \{z_u\}; \\ v &= \left\{ w_1 \{d_{13}^h d_{23}^h d_{33}^h\} | w_2 \{d_{13}^p d_{23}^p d_{33}^p\} | w_3 \{d_{13}^r d_{23}^r d_{33}^r\} | \right. \\ &\quad \left. w_4 \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\} | w_5 \{d_{13}^h d_{23}^h d_{33}^h\} | \dots | w_{12} \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\} \right\} \{z_u\}. \quad (2.10) \end{aligned}$$

Применив операцию дифференцирования по глобальным координатам x и t к интерполяционному выражению (2.6), получим следующие зависимости

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= \left(\{\chi, \xi\}^T \partial \xi / \partial x + \{\chi, \eta\}^T \partial \eta / \partial x \right) [D] \left[\vec{A} \right] \{z_u\} = \{w_x\}^T \left[\vec{A} \right] \{z_u\}; \\ \vec{v}_{,t} &= \left(\{\chi, \xi\}^T \partial \xi / \partial t + \{\chi, \eta\}^T \partial \eta / \partial t \right) [D] \left[\vec{A} \right] \{z_u\} = \\ &= \{w_t\}^T \left[\vec{A} \right] \{z_u\}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

Представив левые части (2.11) компонентами, отнесенными к базису точки, принадлежащей внутренней области конечного элемента, и учитя (2.7), можно записать выражения вида

$$\begin{aligned} l_x^1 \vec{a}_1^0 + l_x^2 \vec{a}_2^0 + l_x \vec{a}^0 &= \left\{ \vec{a}^0 \right\}^T \left\{ w_{x1} [d_t^{0h}]^T \left| w_{x2} [d_t^{0p}]^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left| w_{x3} [d_t^{0r}]^T \left| w_{x4} [d_t^{0s}]^T \left| \dots \left| w_{x12} [d_t^{0s}]^T \right. \right. \right. \right. \right\} \{z_u\}; \\ l_t^1 \vec{a}_1^0 + l_t^2 \vec{a}_2^0 + l_t \vec{a}^0 &= \left\{ \vec{a}^0 \right\}^T \left\{ w_{t1} [d_t^{0h}]^T \left| w_{t2} [d_t^{0p}]^T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left| w_{t3} [d_t^{0r}]^T \left| w_{t4} [d_t^{0s}]^T \left| \dots \left| w_{t12} [d_t^{0s}]^T \right. \right. \right. \right. \right\} \{z_u\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Из (2.12) могут быть получены интерполяционные зависимости для компонент производных вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента, например,

$$\begin{aligned} l_x &= \{w_{x1} \{d_{11}^h d_{21}^h d_{31}^h\} | w_{x2} \{d_{11}^p d_{21}^p d_{31}^p\} | w_{x3} \{d_{11}^r d_{21}^r d_{31}^r\} \\ &\quad w_{x4} \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\} | \dots | w_{x12} \{d_{11}^s d_{21}^s d_{31}^s\}\} \{z_u\}; \\ l_t &= \{w_{t1} \{d_{13}^h d_{23}^h d_{33}^h\} | w_{t2} \{d_{13}^p d_{23}^p d_{33}^p\} | w_{t3} \{d_{13}^r d_{23}^r d_{33}^r\} | \\ &\quad w_{t4} \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\} | \dots | w_{t12} \{d_{13}^s d_{23}^s d_{33}^s\}\} \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Интерполяционные выражения для компонент вторых производных вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента могут быть получены аналогичным образом из следующих равенств

$$\begin{aligned} \vec{v}_{xx} &= \left(\{\chi_{,\xi\xi}\}^T (\partial\xi/\partial x)^2 + \{\chi_{,\eta\eta}\}^T (\partial\eta/\partial x)^2 + 2 \{\chi_{,\xi\eta}\}^T (\partial\xi/\partial x)(\partial\eta/\partial x) + \right. \\ &\quad \left. + \{\chi_{,\xi}\}^T (\partial^2\xi/\partial x^2) + \{\chi_{,\eta}\}^T (\partial^2\eta/\partial x^2) \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \{w_{xx}\}^T [\vec{A}] \{z_u\}; \\ \vec{v}_{tt} &= \left(\{\chi_{,\xi\xi}\}^T (\partial\xi/\partial t)^2 + \{\chi_{,\eta\eta}\}^T (\partial\eta/\partial t)^2 + 2 \{\chi_{,\xi\eta}\}^T (\partial\xi/\partial t)(\partial\eta/\partial t) + \right. \\ &\quad \left. + \{\chi_{,\xi}\}^T (\partial^2\xi/\partial t^2) + \{\chi_{,\eta}\}^T (\partial^2\eta/\partial t^2) \right) [D] [\vec{A}] \{z_u\} = \\ &= \{w_{tt}\}^T [\vec{A}] \{z_u\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как следует из (2.10) и (2.13), каждая компонента вектора перемещения точки внутренней области конечного элемента интерполируется через столбец $\{z_u\}$, в структуру которого входят узловые значения всех компонент вектора перемещения и их производные. Кроме того, интерполяционные выражения (2.10) и (2.13), в отличие от (2.1), содержат параметры используемой системы криволинейных координат.

Используя полученные интерполяционные выражения (2.10), (2.13), можно скомпоновать матричное соотношение между деформациями эллипсоидальной оболочки и искомыми узловыми неизвестными

$$\{\varepsilon\} = [L] \{z_u\}. \quad (2.15)$$

Интерполяционные зависимости (2.1), (2.10) и (2.13) были использованы при компоновке матрицы жесткости и столбца узловых усилий четырехузлового конечного элемента, которые были сформированы путем минимизации функционала Лагранжа согласно общепринятым в МКЭ правилам [36, 37].

3. Пример расчета

Была решена задача по определению НДС эллипсоидальной оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипса, загруженного в середине сосредоточенной силой P и имеющей на диаметрально противоположном конце срединного поперечного сечения шарнирную опору, препятствующую вертикальному смещению. В силу симметрии расчетной схемы была рассчитана 1/4 часть эллипсоидальной оболочки (рис. 1).

Были приняты следующие исходные данные: параметры поверхности оболочки в форме трехосного эллипса $a = 1.3$ м; $b = 0.9$ м; $c = 0.225$ м; осевая координата x изменялась в пределах $0 \leq x \leq 0.1$ м. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, величина сосредоточенной силы $P = 2$ кН.

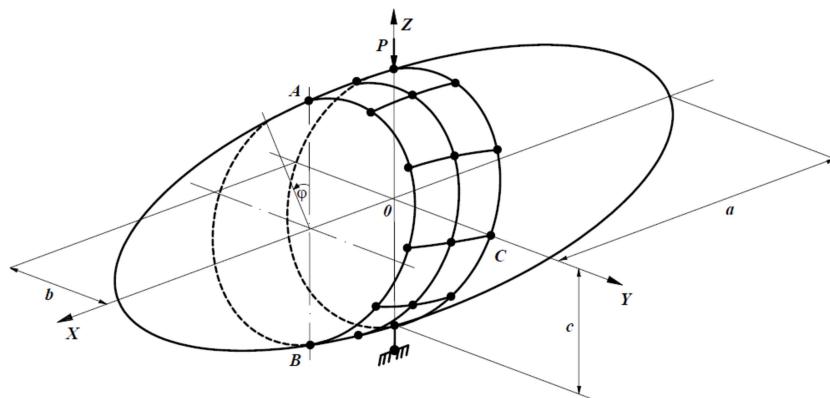


Рис. 1. Расчетная схема оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида

Вариативные расчеты были выполнены при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла φ (1.1)–(1.5) и параметра t эллипса поперечно-го сечения (1.6)–(1.9), а также при двух вариантах интерполяционной процедуры: стандартного для МКЭ варианта (2.1) и разработанного векторного способа интерполяционной процедуры (2.2)–(2.10).

Результаты вычислений представлены в табличной форме. Таблица 1 содержит значения нормальных напряжений в точках А и В концевого сечения, в точке С срединного сечения и прогиба в точке приложения силы P в зависимости от густоты сетки узлов при использовании геометрических соотношений с полярным углом φ и параметром t при реализации стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры (2.1).

Анализ данных таблицы 1 показал, что результаты, полученные при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла φ , существенно отличаются от результатов, полученных при использовании параметра t .

Вследствие симметрии расчетной схемы напряжения в точках А и В должны иметь попарно одинаковые значения. При использовании угловой координаты φ значения напряжений в указанных точках значительно отличаются друг от друга и даже имеют противоположные знаки, причем сгущение сетки узлов не приводит к улучшению результатов. В варианте, в котором в качестве криволинейной координаты применялся параметр t , различия в значениях напряжений в точках А и В уже не столь значительны и монотонно уменьшаются со сгущением сетки узлов. При сетке узлов 91×36 результаты вычислений можно считать уже приемлемыми.

На основании данных таблицы 1 можно сделать вывод о том, что при расчете оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида необходимо пользоваться геометрическими соотношениями, базирующимися на использовании в качестве криволинейной координаты параметра t (1.6)–(1.9) при реализации стандартной для МКЭ интерполяционной процедуры.

Результаты расчетов оболочки со срединной поверхностью в форме трехосного эллипсоида при использовании векторного варианта интерполяционной процедуры представлены в таблице 2, структура которой идентична таблице 1. Анализ вычисленных значений напряжений, приведенных в таблице 2, показал, что они кардинальным образом отличаются от данных, представленных в таблице 1. При реализации разработанного векторного способа интерполяционной процедуры зна-

Табл. 1
Общепринятая интерполяция отдельных компонент вектора перемещения

Координаты точек, (м, рад)	(10 ⁻¹ , МПа), прогиб (см)	Напряжения					
		41x16	51x21	Сетка узлов 61x26	81x31	91x36	
Вариант параметризации поверхности эллипсоида с угловой координатой φ							
Точка							
приложения							
силы P	v	-0.087	-0.099	-0.119	-0.171	-0.200	
$x = 0.0;$							
$\varphi = 0.0.$							
Точка А	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	201.54	210.38	221.79	244.40	254.54	
$x = 0.1;$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	-204.94	-212.29	-221.89	-241.11	-249.78	
$\varphi = 0.0.$							
Точка В	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	-15.59	-22.71	-22.29	2.46	25.53	
$x = 0.1;$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	14.23	22.85	24.38	2.97	-18.84	
$\varphi = \pi.$							
Точка С	σ_{xx}^{in}	-38.26	-37.79	0.06	66.39	82.89	
$x = 0.0;$	σ_{xx}^{out}	-112.09	-113.86	-130.19	-136.92	-129.88	
$\varphi = \pi/2.$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	-121.99	-115.87	14.55	240.30	295.94	
	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	-369.47	-367.18	-413.11	-423.42	-396.03	
Вариант параметризации поверхности эллипсоида с параметром t							
Точка							
приложения							
силы P	v	-0.420	-0.471	-0.490	-0.502	-0.504	
$x = 0.0;$							
$t = 0.0.$							
Точка А	σ_{tt}^{in}	325.22	338.70	344.47	348.55	349.57	
$x = 0.1;$	σ_{tt}^{out}	-312.24	-323.92	-328.83	-332.27	-333.04	
$t = 0.0.$							
Точка В	σ_{tt}^{in}	255.70	309.65	331.12	334.80	347.35	
$x = 0.1;$	σ_{tt}^{out}	-241.36	-293.82	-314.66	-327.95	-330.34	
$t = \pi.$							
Точка С	σ_{xx}^{in}	0.04	-59.64	-90.95	-114.32	-118.44	
$x = 0.0;$	σ_{xx}^{out}	-24.99	21.46	45.30	63.80	69.99	
$t = \pi/2.$	σ_{tt}^{in}	17.46	-185.87	-293.48	-375.12	-389.5	
	σ_{tt}^{out}	-43.03	110.79	188.65	246.40	256.59	

чения напряжений в точках А и В полностью совпадают между собой даже при редкой сетке узлов 31×11 в обоих вариантах параметризации поверхности трехосного эллипсоида. Сопоставив между собой численные значения напряжений при использовании угловой координаты φ и параметра t , можно отметить, что различия между ними в точках А, В и С несущественны. В рассматриваемых точках можно констатировать абсолютную сходимость значений напряжений и прогиба со стягиванием сетки узлов и практическое совпадение контролируемых параметров НДС в обоих вариантах параметризации поверхности эллипсоида при использовании разработанного способа векторной интерполяционной процедуры.

Проанализировав представленный табличный материал, можно сделать вывод о кардинальных и принципиальных преимуществах разработанной векторной формы интерполяционной процедуры искомых величин, позволяющей получать

Табл. 2

Векторный вариант интерполяционной процедуры

Координаты точек, (м, рад)	(10 ⁻¹ , МПа), прогиб (см)	Напряжения					
		31x11	41x16	51x21	61x26	81x31	
Вариант параметризации поверхности эллипсоида с угловой координатой φ							
Точка							
приложения							
силы P	v	-0.506	-0.507	-0.507	-0.507	-0.507	
$x = 0.0;$							
$\varphi = 0.0.$							
Точка А	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	341.32	342.57	343.10	343.38	343.28	
$x = 0.1;$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	-325.16	-326.21	-326.61	-326.79	-326.69	
$\varphi = 0.0.$							
Точка В	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	341.32	342.57	343.10	343.38	343.28	
$x = 0.1;$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	-325.16	-326.21	-326.61	-326.79	-326.69	
$\varphi = \pi.$							
Точка С	σ_{xx}^{in}	-108.32	-117.30	-118.86	-118.96	-119.07	
$x = 0.0;$	σ_{xx}^{out}	78.62	72.89	69.14	67.36	66.11	
$\varphi = \pi/2.$	$\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$	-365.31	-393.63	-399.38	-400.06	-400.49	
	$\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$	287.26	276.44	268.19	263.45	259.72	
Вариант параметризации поверхности эллипсоида с параметром t							
Точка							
приложения							
силы P	v	-0.508	-0.508	-0.508	-0.507	-0.507	
$x = 0.0;$							
$t = 0.0.$							
Точка А	σ_{tt}^{in}	352.10	349.82	349.24	349.53	350.23	
$x = 0.1;$	σ_{tt}^{out}	-337.50	-334.10	-333.02	-332.47	-333.36	
$t = 0.0.$							
Точка В	σ_{tt}^{in}	352.10	349.82	349.24	349.53	350.23	
$x = 0.1;$	σ_{tt}^{out}	-337.50	-334.10	-333.02	-332.97	-333.36	
$t = \pi.$							
Точка С	σ_{xx}^{in}	-119.82	-119.98	-120.10	-120.16	-120.27	
$x = 0.0;$	σ_{xx}^{out}	70.00	70.22	70.20	70.12	70.52	
$t = \pi/2.$	σ_{tt}^{in}	-400.07	-400.17	-400.27	-400.29	-400.45	
	σ_{tt}^{out}	260.31	261.60	262.17	262.45	263.00	

корректные значения прочностных параметров НДС уже при редкой сетке узлов дискретизации при различных вариантах параметризации поверхности оболочки в форме трехосного эллипсоида.

Результаты расчетов, представленные в таблицах 1 и 2, также отражены в виде графиков на рисунках 2 и 3, которые показывают характер изменения значений нормальных напряжений на внутренней σ^{in} и внешней σ^{out} поверхностях в точках А и В эллипсоида в зависимости от количества элементов дискретизации N , на которые разбивался рассчитываемый фрагмент эллипсоидальной оболочки.

На рисунке 2 представлены графики изменения значений напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ при использовании в качестве криволинейной координаты полярного угла φ , полученные при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры компонент вектора перемещения и их производных.

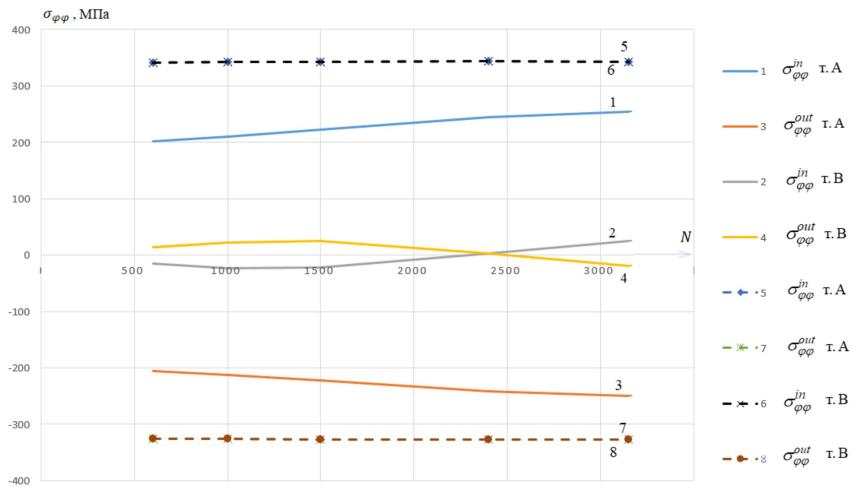


Рис. 2. Значения напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры

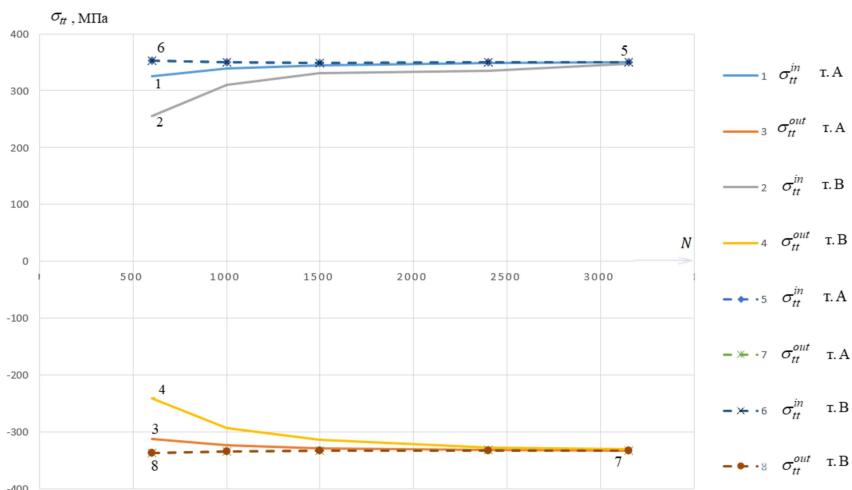


Рис. 3. Значения напряжений σ_{tt} при реализации стандартной (кривые 1–4) и векторной (кривые 5–8) вариантах интерполяционной процедуры

Сплошными линиями 1, 2, а также 3, 4 показаны изменения напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$ в точках А и В соответственно при стандартной интерполяции искомых неизвестных. На рисунке 2 видно, насколько далеко друг от друга располагаются линии 1, 2 и 3, 4, которые должны совпадать в соответствии с выбранной расчетной схемой. Указанное совпадение можно наблюдать при реализации в разработанном алгоритме векторного способа интерполяции искомых величин. Пунктирные линии графиков 5, 6 и 7, 8, отражающие изменения $\sigma_{\varphi\varphi}^{in}$ и $\sigma_{\varphi\varphi}^{out}$ в точках А и В, полностью накладываются друг на друга, что и должно быть при наличии вертикальной плоскости симметрии в рассчитываемом трехосном эллипсоиде.

На рисунке 3 представлены аналогичные рисунку 2 графики изменения значений напряжений σ_{tt} при использовании в качестве криволинейной координаты параметра t эллипса поперечного сечения. Как видно из рисунка 3, картина изменения значений напряжений существенно отличается от графиков, представлена-

ных на рисунке 2. Численные значения напряжений в точках А и В на внутренней σ_{tt}^{in} (кривые 1, 2) и внешней σ_{tt}^{out} (кривые 3, 4) поверхностях достаточно быстро сближаются по мере сгущения сетки элементов дискретизации при реализации стандартной интерполяционной процедуры. При использовании векторного варианта интерполяции искомых неизвестных также, как и на рисунке 2, наблюдается идеальное совпадение значений напряжений в точках А и В как на внутренней (кривые 5, 6), так и на внешней (кривые 7, 8) поверхностях эллипсоида. Данный факт подтверждает высокую эффективность векторного способа интерполяции компонент вектора перемещения и их производных в задачах конечно-элементного анализа оболочек при использовании криволинейных систем координат. Следует также подчеркнуть, что векторный способ интерполяции искомых величин обладает высокой эффективностью при различных видах используемых криволинейных систем координат, так как приводит к возможности учета в аппроксимирующих выражениях параметров используемых криволинейных систем координат.

4. Заключение

На основе результатов проделанной работы можно сделать вывод, что при использовании криволинейной системы координат с реализацией МКЭ в формулировке метода перемещений известные функции формы следует применять не к отдельным компонентам вектора перемещений, а непосредственно к векторной величине перемещения внутренней точки конечного элемента, выразив его через векторные величины узловых точек. Для получения аппроксимирующих выражений для отдельных компонент вектора перемещения и его производных следует выполнить координатные преобразования, заключающиеся в использовании матричных выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента. Полученные аппроксимирующие выражения приводят к решению проблемы учета смещения конечного элемента как твердого тела.

Литература

1. *Новоожилов В.В.* Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1951. 334 с.
2. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига: Зннатне, 1988. 283 с.
3. *Кабриц С.А., Михайловский Е.И., Товстик П.Е., Черных К.Ф., Шамина В.А.* Общая нелинейная теория упругих оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 388 с.
4. *Пижуль В.В.* Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 535 с.
5. *Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Nonlinear elastic state of a composite cylindrical shell with a rectangular hole // Int. Appl. Mech. 2019. V. 55, No 5. P. 504–514. doi: 10.1007/s10778-019-00972-0.
6. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V.* Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements // J. Mach. Manuf. Reliab. 2016. V. 45, No 1. P. 51–58. doi: 10.3103/S1052618816010076.
7. *Badriev I.B., Paimushin V.N.* Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38, No 5. P. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
8. *Ubaydulloev M.N., Serazutdinov M.N.* Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load // Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). Vol. 1 / Radionov A.A., Gasiyarov V.R.

- (Eds.). Ser.: Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer, 2022. P. 332–340. doi: 10.1007/978-3-030-85233-7_40.
- 9. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 9. P. 2263–2271. doi: 10.1134/S1995080221090316.
 - 10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers // Moscow Univ. Mech. Bull. 2016. V. 71, No 5. P. 114–117. doi: 10.3103/S0027133016050034.
 - 11. Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Yatsura A.V. Stress-strain state near a hole in a shear-compliant composite cylindrical shell with elliptical cross-section // Int. Appl. Mech. 2018. V. 54, No 5. P. 559–567. doi: 10.1007/s10778-018-0909-8.
 - 12. Golovanov A.I. Numerical Modeling of large elastoplastic strains in terms of principal stretches. I. Kinematics of elastoplastic strains // Russ. Aeronaut. 2010. V. 53, No 2. P. 161–166. doi: 10.3103/S1068799810020078.
 - 13. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: Integration algorithm and numerical examples // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, No 9. P. 1478–1483. doi: 10.1134/S1995080218090056.
 - 14. Jebur A.K., Hassoun E.O., Abrahem H.A., Khayrullin F.S., Sakhiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers // J. Appl. Eng. Sci. 2020. V. 18, No 1. P. 110–113. doi: 10.5937/jaes18-24130.
 - 15. Kayumov R., Sulejmanov A., Strakhov D. Model of degradation of composite materials of building structure's load-bearing elements // Proceedings of STCCE 2021: Selected Papers / Vatin N. (Ed.). Ser.: Lecture Notes in Civil Engineering. Vol.169. Cham: Springer, 2021. P. 239–249. doi: 10.1007/978-3-030-80103-8_26.
 - 16. Sartorato M., de Medeiros R., Tita V. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation // Compos. Struct. 2015. V. 127. P. 185–198. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.03.009.
 - 17. Shiqiang L., Guoxing L., Zhihua W., Longmao Z., Guiying W. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected to internal blast loading // Int. J. Mech. Sci. 2015. V. 96–97. P. 1–12. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011.
 - 18. He X. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints // Int. J. Adhes. Adhes. 2014. V. 48. P. 59–66. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017.
 - 19. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analyse // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, No 9, art. 35. doi: 10.1007/s00033-016-0623-5.
 - 20. Pazanova S.L., Vasilev G.P., Dineva P.S., Manolis G.D. Dynamic analysis of nano-heterogeneities in a finite-sized solid by boundary and finite element methods // Int. J. Solids Struct. 2016. V. 80. P. 1–18. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.016.
 - 21. Lei Z., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: Serendipity basis and modified reduced quadrature // Eur. J. Mech. – A/Solids. 2015. V. 54. P. 105–119. doi: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.010.
 - 22. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem // Comput. Mech. 2015. V. 56, No 1. P. 87–95. doi: 10.1007/s00466-015-1158-x.
 - 23. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation // J. Comput. Nonlinear Dyn. 2015. V. 10, No 5, art. 051012. doi: 10.1115/1.4028657.

24. *Ren H.* Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells with large deformations and large rotations // J. Comput. Nonlinear Dyn. – 2015. – V. 10, No 5, art. 051018. – doi: 10.1115/1.4030212.
25. *Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H.* A paradigm for higher-order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2016. V. 306. P. 216–251. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.025.
26. *Bishop J.E.* A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions // Int. J. Numer. Methods Eng. 2014. V. 97, No 1. P. 1–31. doi: 10.1002/nme.4562.
27. *Talischi C., Pereira A., Menezes I.F.M., Paulino G.H.* Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements // Int. J. Numer. Methods Eng. 2015. V. 102, No 3–4. P. 728–747. doi: 10.1002/nme.4851.
28. *Manzini G., Russo A., Sukumar N.* New perspective on polygonal and polyhedral finite element method // Math. Models Methods Appl. Sci. 2014. V. 24, No 8. P. 1665–1699. doi: 10.1142/S0218202514400065.
29. *Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H.* On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2014. V. 282. P. 132–160. doi: 10.1016/j.cma.2014.05.005.
30. *Beirão da Veiga L., Lovadina C., Mora D.* A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2015. V. 295. P. 327–346. doi: 10.1016/j.cma.2015.07.013.
31. *Antonietti P.F., Beirão V.L., Seacchi S., Verani M.* A C^1 virtual element method for the Cahn–Hilliard equation with polygonal meshes // SIAM J. Numer. Anal. 2016. V. 54, No 1. P. 34–56. doi: 10.1137/15M1008117.
32. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A.* Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements // J. Appl. Ind. Math. 2017. V. 11, No 4. P. 535–544. doi: 10.1134/S1990478917040111.
33. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. Москва: Наука, 1974. 177 с.
34. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Москва: Наука, 1976. 503 с.
35. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.* Finite element model of pipeline discretization by prismatic elements // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2019. V. 698, No 6, art. 066012. doi: 10.1088/1757-899X/698/6/066012.
36. *Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu.* A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements // ARPN J. Eng. Appl. Sci. 2020. V. 15, No 13. P. 1472–1481.
37. *Zucco G., Groh R.M.J., Madeo A., Weaver P.M.* Mixed shell element for static and buckling analysis of variable angle tow composite plates // Compos. Struct. 2016. V. 152. P. 324–338. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.030

Клочков Юрий Васильевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия
E-mail: *Klotchkov@bk.ru*

Николаев Анатолий Петрович, доктор технических наук, профессор кафедры механики инженерно-технологического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия
E-mail: *anpetr40@yandex.ru*

Вахнина Ольга Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия
E-mail: *ovahnina@bk.ru*

Соболевская Татьяна Алексеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия
E-mail: *moonway13@rambler.ru*

Джабраилов Арсен Шахнавазович, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики электроэнергетического ф-та ВолГАУ

Волгоградский государственный аграрный университет
просп. Университетский, д. 26, г. Волгоград, 400002, Россия
E-mail: *arsen82@yandex.ru*

Клочков Михаил Юрьевич, аспирант ВолгГТУ

Волгоградский государственный технический университет
просп. Ленина, д. 28, г. Волгоград, 400005, Россия
E-mail: *m.klo4koff@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 1, pp. 49–67

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67

**Varying Parameterization of an Ellipsoidal Thin Shell
with FEM-Based Implementation**

Yu. V. Klotchkov^{a*}, A.P. Nikolaev^{a**}, O.V. Vakhnina^{a***}, T.A. Sobolevskaya^{a****},
A.Sh. Dzhabrailov^{a*****}, M.Yu. Klotchkov^{b*****}

^aVolgograd State Agrarian University, Volgograd, 400002 Russia

^bVolgograd State Technical University, Volgograd, 400005 Russia

E-mail: **Klotchkov@bk.ru*, ***anpetr40@yandex.ru*, ****ovahnina@bk.ru*, *****moonway13@rambler.ru*,
******arsen82@yandex.ru*, ******m.klo4koff@yandex.ru*

Received October 31, 2022; Accepted April 24, 2023

Abstract

This article describes an algorithm developed for the finite element analysis of the stress-strain state of a shell that takes the shape of a triaxial ellipsoid with varying parameterization of its mid-surface. A quadrangular fragment of the shell mid-surface with nodal unknowns in the form of displacements and their first derivatives along the curvilinear coordinates was used as the discretization element.

When approximating the displacements through the nodal values, two variants were considered. In the first variant, the known approximating functions were applied to each component of the displacement vector of the internal point of the finite element through the nodal values of the same component. In the second variant, the approximating expressions were used directly for the expression of the displacement vector of the internal point of the finite element through the vector unknowns of the nodal points. After the coordinate transformations, each component of the displacement vector of the internal point of the finite element was expressed through the nodal values of all components of the nodal unknowns. The approximating expressions of the required displacements of the internal point of the finite element also include the parameters of the curvilinear coordinate system used in the calculations.

The high efficiency of the developed algorithm was confirmed by the results of the numerical experiments.

Keywords: shell with ellipsoidal mid-surface, surface parameterization, finite element model, invariant interpolation of required quantities

Figure Captions

Fig. 1. Design scheme of a shell with the mid-surface in the form of a triaxial ellipsoid.

Fig. 2. Values of stresses $\sigma_{\varphi\varphi}$ during the realization of standard (curves 1–4) and vector (curves 5–8) variants of the interpolation procedure.

Fig. 3. Values of stresses σ_{tt} during the realization of standard (curves 1–4) and vector (curves 5–8) variants of the interpolation procedure.

References

1. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Thin Shell Theory]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 1951. 334 p. (In Russian)
2. Rickards R.B. *Metod konechnykh elementov v teorii obolochek i plastin* [Finite Element Method in Shell and Plate Theory]. Riga, Zinatne, 1988. 283 p. (In Russian)
3. Kabrits S.A., Mikhailovskii E.I., Tovstik P.E., Chernykh K.F., Shamina V.A. *Obshchaya nelineinaya teoriya uprugikh obolochek* [General Nonlinear Theory of Elastic Shells]. St. Petersburg, Izd. S.-Peterb. Univ., 2002. 388 p. (In Russian)
4. Pikul' V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of Shells]. Vladivostok, Dal'nauka, 2009. 535 p. (In Russian)
5. Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear elastic state of a composite cylindrical shell with a rectangular hole. *Int. Appl. Mech.*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 504–514. doi: 10.1007/s10778-019-00972-0.
6. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Calculation of rotation shells using finite triangular elements with Lagrange multipliers in variative approximation of displacements. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2016, vol. 45, no. 1, pp. 51–58. doi: 10.3103/S1052618816010076.

7. Badriev I.B., Paimushin V.N. Refined models of contact interaction of a thin plate with positioned on both sides deformable foundations. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 5, pp. 779–793. doi: 10.1134/S1995080217050055.
8. Ubaydulloev M.N., Serazutdinov M.N. Simulation and calculation of stress-strain state of thin-walled structures strengthened under load. In: Radionov A.A., Gasiyarov V.R. (Eds.) *Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021)*. Vol. 1. Ser.: Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham, Springer, 2022, pp. 332–340. doi: 10.1007/978-3-030-85233-7_40.
9. Yakupov S.N., Kiyamov H.G., Yakupov N.M. Modeling a synthesized element of complex geometry based upon three-dimensional and two-dimensional finite elements. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 9, pp. 2263–2271. doi: 10.1134/S1995080221090316.
10. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V. Finite element analysis of shells of revolution using triangular discretization elements with corrective Lagrange multipliers. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2016, vol. 71, no. 5, pp. 114–117. doi: 10.3103/S0027133016050034.
11. Storozhuk E.A., Maksimyuk V.A., Yatsura A.V. Stress–strain state near a hole in a shear-compliant composite cylindrical shell with elliptical cross-section. *Int. Appl. Mech.*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 559–567. doi: 10.1007/s10778-018-0909-8.
12. Golovanov A.I. Numerical modeling of large elastoplastic strains in terms of principal stretches. I. Kinematics of elastoplastic strains. *Russ. Aeronaut.*, 2010, vol. 53, no. 2, pp. 161–166. doi: 10.3103/S1068799810020078.
13. Sultanov L.U. Analysis of finite elasto-plastic strains: Integration algorithm and numerical examples. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 9, pp. 1478–1483. doi: 10.1134/S1995080218090056.
14. Jebur A.K., Hassoun E.O., Abrahem H.A., Khayrullin F.S., Sakhibiev O.M. Shell stress analysis using a variational method based on three-dimensional functions with finite carriers. *J. Appl. Eng. Sci.*, 2020, vol. 18, no. 1, pp. 110–113. doi: 10.5937/jaes18-24130.
15. Kayumov R., Sulejmanov A., Strakhov D. Model of degradation of composite materials of building structure's load-bearing elements. In: Vatin N. (Ed.) *Proceedings of STCCE 2021: Selected Papers*. Ser.: Lecture Notes in Civil Engineering. Vol. 169. Cham, Springer, 2021, pp. 239–249. doi: 10.1007/978-3-030-80103-8_26.
16. Sartorato M., de Medeiros R., Volnei T. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Compos. Struct.*, 2015, vol. 127, pp. 185–198. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.03.009.
17. Li S., Lu G., Wang Z., Zhao L., Wu G. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected to internal blast loading. *Int. J. Mech. Sci.*, 2015, vols. 96–97, pp. 1–12. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011.
18. He X. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 2014, vol. 48, pp. 59–66. doi: 10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017.
19. Nguyen N., Waas A.M. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, vol. 67, no. 9, art. 35. doi: 10.1007/s00033-016-0623-5.
20. Pazanova S.L., Vasilev G.P., Dineva P.S., Manolis G.D. Dynamic analysis of nano-heterogeneities in a finite-sized solid by boundary and finite element methods. *Int. J. Solids Struct.*, 2016, vol. 80, pp. 1–18. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2015.10.016.

21. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel L. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner–Mindlin shell: Serendipity basis and modified reduced quadrature. *Eur. J. Mech. – A/Solids*, 2015, vol. 54, pp. 105–119. doi: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.010.
22. Hanslo P., Larson M.G., Larson F. Tangential differential calculus and the finite element modeling of a large deformation elastic membrane problem. *Comput. Mech.*, 2015, vol. 56, no. 1, pp. 87–95. doi: 10.1007/s00466-015-1158-x.
23. Yamashita H., Valkeapää A.I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 10, no. 5, art. 051012. doi: 10.1115/1.4028657.
24. Ren H. Fast and robust full-quadrature triangular elements for thin plates/shells with large deformations and large rotations. *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, 2015, vol. 10, no. 5, art. 051018. doi: 10.1115/1.4030212.
25. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H. A paradigm for higher-order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2016, vol. 306, pp. 216–251. doi: 10.1016/j.cma.2015.12.025.
26. Bishop J.E. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2014, vol. 97, no. 1, pp. 1–31. doi: 10.1002/nme.4562.
27. Talischi C., Pereira A., Menezes I.F.M., Paulino G.H. Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2015, vol. 102, nos. 3–4, pp. 728–747. doi: 10.1002/nme.4851.
28. Manzini G., Russo A., Sukumar N. New perspective on polygonal and polyhedral finite element method. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2014, vol. 24, no. 8, pp. 1665–1699. doi: 10.1142/S0218202514400065.
29. Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H. On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2014, vol. 282, pp. 132–160. doi: 10.1016/j.cma.2014.05.005.
30. Beirão V.L., Lovadina C., Mora D. A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2015, vol. 295, pp. 327–346. doi: 10.1016/j.cma.2015.07.013.
31. Antonietti P.F., Beirão V.L., Scacchi S., Verani M. A C^1 virtual element method for the cahn–hilliard equation with polygonal meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2016, vol. 54, no. 1, pp. 34–56. doi: 10.1137/15M1008117.
32. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Kiseleva T.A. Using Lagrange multipliers in the triangular element of a nonshallow shell under variable interpolation of displacements. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, vol. 11, no. 4, pp. 535–544. doi: 10.1134/S1990478917040111.
33. Pogorelov A.V. *Differentsial'naya geometriya* [Differential Geometry]. Moscow, Nauka, 1974. 177 p. (In Russian)
34. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoi sredy* [Mechanics of a Continuous Medium]. Moscow, Nauka, 1976. 503 p. (In Russian)
35. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Finite element model of pipeline discretization by prismatic elements. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2019, vol. 698, no. 6, art. 066012. doi: 10.1088/1757-899X/698/6/066012.

-
36. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Fomin S.D., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Klochkov M.Yu. A finite elemental algorithm for calculating the arbitrarily loaded shell using three-dimensional finite elements. *ARP&N J. Eng. Appl. Sci.*, 2020, vol. 15, no. 13, pp. 1472–1481.
 37. Zucco G., Groh R.M.J., Madeo A., Weaver P.M. Mixed shell element for static and buckling analysis of variable angle tow composite plates. *Compos. Struct.*, 2016, vol. 152, pp. 324–338. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.05.030.
-

Для цитирования: Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Соболевская Т.А., Джабраилов А.Ш., Клочков М.Ю. Вариативная параметризация эллипсоидальной тонкой оболочки с реализацией на основе МКЭ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 1. С. 49–67. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67.

For citation: Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Vakhnina O.V., Sobolevskaya T.A., Dzhabrailov A.Sh, Klochkov M.Yu. Varying parameterization of an ellipsoidal thin shell with FEM-based implementation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 1, pp. 49–67. doi: 10.26907/2541-7746.2023.1.49-67. (In Russian)