

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.54

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.111-122

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

П.Л. Шабалин, Р.Р. Фаизов

Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Казань, 420043, Россия

Аннотация

Изучена неоднородная краевая задача Гильберта для верхней полуплоскости с конечным индексом и краевым условием на вещественной оси для одного обобщенного уравнения Коши – Римана с сингулярной точкой на вещественной оси. Получена структурная формула общего решения этого уравнения при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу логарифмического порядка сопутствующей краевой задачи Гильберта для аналитических функций. Эта формула и результаты по разрешимости задачи Гильберта теории аналитических функций применены при решении поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, обобщенные аналитические функции, сингулярная точка, бесконечный индекс, целые функции уточненного нулевого порядка

Введение

В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ обозначим верхнюю полуплоскость символом E , вещественную ось – символом $\Gamma = \{z : \operatorname{Im} z = 0\}$. В области E рассмотрим частный случай обобщенной системы Коши – Римана с сингулярной точкой

$$\partial_{\bar{z}}U - A(z)U = F(z), \quad A(z) = \frac{za(z)}{|z|^2}. \quad (1)$$

Здесь $a(z), F(z) \in C(\bar{E} \setminus \{0\})$, $a(z)$ – функция, ограниченная в $\bar{E}$. Мы исследуем задачу Гильберта с краевым условием на Γ и непрерывным коэффициентом и правой частью в классе решений $U(z)$ системы (1). Решение краевой задачи построим с использованием структурной формулы общего решения системы (1). Мы выведем эту формулу при ограничениях, допускающих бесконечный индекс сопутствующей задачи Гильберта для аналитических функций.

Теория обобщенных систем Коши – Римана

$$\partial_{\bar{z}}U + A(z)U + B(z)\bar{U} = F(z), \quad z \in G,$$

с коэффициентами из $L^p(G)$, $p > 2$, в случае, когда область G конечна или из $L^p(G) \cap L^{p'}(G)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$, для неограниченной области и краевых задач для них изложена в монографии [1]. Аппарат, введенный И. Н. Векуа, применяется к прикладным задачам теории поверхностей, теории оболочек [1], в частности,

к нелинейным задачам равновесия тонких упругих оболочек [2,3]. Изучению эллиптической системы, коэффициенты которой обращаются в бесконечность степенного (не ниже первого) порядка в изолированных точках (сингулярные точки) или на некоторой линии L (L – сингулярная линия), и краевых задач для её решений посвящены, например, работы [4–17].

Отметим, что в приведенных выше работах рассмотрены задачи, приводящиеся к краевым задачам теории аналитических функций с конечным индексом. Н. Р. Раджабов [16] заметил, что при определенных условиях на коэффициенты системы краевая задача с конечным индексом для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией может трансформироваться в аналогичную задачу теории аналитических функций, но с бесконечным индексом. Развитие данной работы содержится в статьях А. Б. Расулова [16,17], в которых приведены формулы общего решения и обсуждены вопросы разрешимости краевых задач. Подробные исследования разрешимости краевых задач для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией при ограничениях, приводящих к бесконечному индексу сопутствующих задач для аналитических функций, содержатся в работах [18–21].

1. Решение эллиптической системы

Проведем решение уравнения (1), следуя методу, разработанному А. Б. Расуловым и И. Н. Дорофеевой в [15]. При этом в отличие от [14,15] сингулярная точка в нашей работе лежит на границе, а не внутри полуплоскости, а функция $a(z)$ не предполагается непрерывной в замкнутой полуплоскости.

Именно, мы будем считать, что для функции $a(z)$ существует аналитическая в E , непрерывная в $\overline{E} \setminus \{0\}$ функция $b(z)$, удовлетворяющая условиям

$$b(z) = b + o(1), \quad z \rightarrow 0, \quad y \neq 0; \quad (2)$$

$$b(z) = O(|z|^{-\beta}), \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \beta > 0, \quad (3)$$

граничные значения функции $b(z)$ (т. е. функция $b(x)$) непрерывны по Гёльдеру с показателем γ на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, включая концы, в точке $x = 0$ функция $b(x)$ имеет односторонние мнимые пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} b(x) = ib^{\pm}. \quad (4)$$

Кроме того, потребуем, чтобы для $A(z)$ существовали такие числа $p > 2$, $1 < p' < 2$, что

$$A_0(z) := \frac{z(a(z) - b(z))}{|z|^2} \in L^p(E) \cap L^{p'}(E), \quad p > 2, \quad 1 < p' < 2. \quad (5)$$

Таким образом, в отличие от [15] мы отказались от непрерывности $a(z)$ на Γ . Это изменение повлияет на вывод формулы общего решения уравнения (1) и при решении краевой задачи приведет к случаю бесконечного индекса.

Введем семейство областей $E_\varepsilon = E \cap \{z : \varepsilon < |z| < 1/\varepsilon\}$, $\varepsilon \in (0, 1)$. Мы должны доказать (см. [15]), что для оператора Векуа

$$(T_\varepsilon A)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} \frac{A(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}$$

в условиях (2)–(5) существует равномерный предел

$$\Omega(z) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon A)(z), \quad z \in K, \quad (6)$$

на любом компакте $K \in E$, и этот предел удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}}\Omega(z) = A(z), \quad z \in E.$$

Для правой части уравнения (1) потребуем выполнения условия

$$e^{-\Omega(z)}F(z) \in L^p(\overline{E_\varepsilon}) \cap L^q(\overline{E_\varepsilon}), \quad p > 2, \quad 1 < q < 2,$$

для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда общее решение уравнения (1) в E можно представить следующей формулой [15]

$$U(z) = e^{\Omega(z)}[(T(e^{-\Omega}F))(z) + \phi(z)], \quad z \in E,$$

где $\phi(z)$ – функция, аналитическая в E .

Докажем существование и найдем предел (6). Граница области E_ε состоит из двух отрезков вещественной оси $[-1/\varepsilon, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ и двух полуокружностей $l_\varepsilon = \{z : z = \varepsilon e^{i\theta}, 0 < \theta < \pi\}$ и $L_\varepsilon = \{z : z = e^{i\theta}/\varepsilon, 0 < \theta < \pi\}$. Следуя [15], представим $T_\varepsilon A$ в виде

$$(T_\varepsilon A)(z) = (T_\varepsilon A_0)(z) - I_\varepsilon(z), \quad I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{E_\varepsilon} \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \frac{b(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z},$$

где

$$I_\varepsilon(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{E_{\varepsilon, \delta}} \frac{\zeta}{|\zeta|^2} \frac{b(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad E_{\varepsilon, \delta} = E_\varepsilon \cap \{|\zeta - z| \geq \delta\}.$$

С учетом равенства $\partial_{\bar{\zeta}} \ln |\zeta| = \zeta / (2|\zeta|^2)$ после применения формулы Грина и перехода к пределу по $\delta \rightarrow 0$ при условии (2) получим

$$I_\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial E_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta - 2b(z) \ln |z|. \quad (7)$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$ – фиксированная точка из компакта K . Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялись неравенства $\varepsilon < |z| < 1/\varepsilon$. Рассмотрим криволинейные интегралы, входящие в правую часть формулы (7). Для интеграла по дуге окружности l_ε с учетом (2) выведем оценку

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{l_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta| d\zeta}{\zeta - z} \right| = \frac{b \ln \varepsilon}{\pi} \left| \int_{l_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right| = O(\varepsilon \ln \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для интеграла по дуге L_ε при достаточно малых ε в силу (3) получим

$$\left| \frac{1}{\pi i} \int_{L_\varepsilon} \frac{b(\zeta) \ln |\zeta| d\zeta}{\zeta - z} \right| = O(\varepsilon^\beta \ln(1/\varepsilon)), \quad \beta > 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теперь очевидно следующее асимптотическое равенство

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{l_\varepsilon} + \int_{L_\varepsilon} \right) \frac{b(\zeta) \ln |\zeta|}{\zeta - z} d\zeta = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (8)$$

В равенстве (7), приняв во внимание (8), перейдем к пределу по $\varepsilon \rightarrow 0$ при фиксированном $z \in K$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon(z) = -2b \ln |z| + \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi|}{\xi - z} d\xi, \quad (9)$$

причем несобственные интегралы с бесконечным пределом в формуле (9) сходятся в силу условий (3), (4) и условия Гёльдера с показателем γ на интервалах интегрирования для функции $b(\xi)$. Для интегралов типа Коши с плотностью, имеющей в начале координат разрыв логарифмического порядка, справедливы асимптотические формулы И. М. Мельника (см., например, [22], с. 68), из которых с учетом формулы (4) выведем

$$\frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi| d\xi}{\xi - z} = \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{z} - (b^- + b^+) \ln \frac{1}{z} + O(1), \quad z \rightarrow 0. \quad (10)$$

Регулярные слагаемые в правой части равенства (10) на контуре интегрирования удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ (см. [22], с. 73). Таким образом, как и в [15], но при условиях (2)–(4) получена формула

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= H(z) - 2b(z) \ln \frac{1}{|z|}, \\ H(z) &= (TA_0)(z) + \frac{1}{\pi i} \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty} \right) \frac{b(\xi) \ln |\xi|}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (11) и формулы Сохоцкого выведем асимптотику в окрестности $t = 0$ для граничных значений $\Omega(z)$:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|} + i2(b^- - b^+) \ln \frac{1}{|t|} + O(1), & t \rightarrow 0-, \\ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{t} + i(b^+ - b^-) \ln \frac{1}{t} + O(1), & t \rightarrow 0+. \end{cases} \quad (12)$$

Итак, мы доказали, что при условиях (2)–(4) функция $I_\varepsilon^+(z)$ равномерно сходится на компакте к пределу (9). Следовательно (см. [14], [15]), общее решение уравнения (1) в области E задается формулами вида

$$U(z) = e^{\Omega(z)} [(T(e^{-\Omega} F))(z) + \phi(z)], \quad (13)$$

где $\Omega(z)$ – функция (11), интегральный оператор Векуа

$$(TA_0)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_E \frac{A_0(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z}, \quad z \in E,$$

действует [1] из $L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$, в класс Гёльдера $H(\overline{E})$, $\phi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в области E и непрерывная в $\overline{E}$.

Теорема 1. Пусть коэффициент $A(z)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям (2)–(5) и $(e^{-\Omega} F)(z) \in L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$. Тогда общее решение уравнения (1) в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$ задается формулой (13), в которой $\phi(z)$ – произвольная функция, аналитическая в E .

2. Решение задачи Гильберта

В классе решений (13) уравнения (1) рассмотрим в полуплоскости E задачу Гильберта с краевым условием на вещественной оси

$$Re [e^{-i\alpha(t)}U(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (14)$$

непрерывным по Гёльдеру всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, коэффициентом $e^{-i\alpha(t)}$ и правой частью $f(t)$. Подставив функцию (13) в условие (14), получим краевое условие задачи Гильберта для определения функции $\phi(z)$, аналитической в полуплоскости

$$\begin{aligned} Re [e^{-i\alpha^*(t)}\phi(t)] &= f^*(t), \quad t \in \Gamma, \quad \alpha^*(t) = \alpha(t) - Im \Omega(t), \\ f^*(t) &= f(t)e^{-Re \Omega(t)} - Re [e^{-i\alpha^*(t)}(T(e^{-\Omega}F))(t)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Из формул (12), (15) выведем равенства

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ 2(b^+ - b^-) \ln \frac{1}{|t|} + \varphi(t), & t \in (-1, 0), \\ (b^- - b^+) \ln \frac{1}{t} + \varphi(t), & t \in (0, 1), \\ \varphi(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (16)$$

$$f^*(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in (-\infty, -1), \\ f(t) \exp \left\{ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{|t|} \right\} + \psi(t), & t \in (-1, 0), \\ f(t) \exp \left\{ \frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2 \frac{1}{t} \right\} + \psi(t), & t \in (0, 1), \\ \psi(t), & t \in (1, +\infty), \end{cases} \quad (17)$$

в которых функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера всюду на Γ , включая бесконечно удаленную точку, т. е. принадлежат классу H_Γ . Таким образом, задачу (14) сводим к краевой задаче Гильберта (15)–(17) для функций, аналитических в верхней полуплоскости, с бесконечным индексом и точкой двустороннего завихрения логарифмического порядка в начале координат.

Впервые задачу Гильберта для полуплоскости с точкой завихрения логарифмического порядка на бесконечности решил П. Ю. Алекна [23], позднее другим методом – А. Г. Алехно [24], но мы используем формулу общего решения и условия разрешимости этой задачи из работ [25, 26]. При помощи конформного автоморфизма полуплоскости $\zeta = -1/z$ перепишем краевое условие задачи Гильберта в виде

$$Re [e^{-i\alpha^*(-1/\tau)}\Phi(\tau)] = f^*(-1/\tau), \quad \tau \in \Gamma, \quad \Phi(\zeta) = \phi(-1/\zeta),$$

при этом

$$\alpha^*(-1/\tau) = \begin{cases} (b^- - b^+) \ln |\tau| + \varphi(-1/\tau), & \tau \in (-\infty, -1), \\ \varphi(-1/\tau), & \tau \in (-1, 1), \\ 2(b^+ - b^-) \ln \tau + \varphi(-1/\tau), & \tau \in (1, +\infty), \end{cases}$$

$$f^*(-1/\tau) = \begin{cases} f(-1/\tau) \exp\left\{\frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2(|\tau|)\right\} + \psi(-1/\tau), & \tau \in (-\infty, -1), \\ \psi(-1/\tau), & \tau \in (-1, 1), \\ f(-1/\tau) \exp\left\{\frac{b^- - b^+}{2\pi} \ln^2(\tau)\right\} + \psi(-1/\tau), & \tau \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, получили краевое условие задачи Гильберта для полуплоскости с бесконечным индексом логарифмического порядка и точкой двустороннего завихрения на бесконечности.

Сначала рассмотрим однородную задачу

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha^*(-1/\tau)} \Phi(\tau)] = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (18)$$

общее решение которой в классе ограниченных функций, аналитических в верхней полуплоскости, представлено [25] в наших обозначениях формулой

$$\Phi(\zeta) = -ie^{iG(\zeta)} F(\zeta), \quad \zeta \in E, \quad G(\zeta) := \frac{\zeta}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^*(-1/\tau)}{\tau(\tau - \zeta)} d\tau.$$

Здесь $F(\zeta)$ – сужение на верхнюю полуплоскость целой функции уточненного нулевого порядка $\rho(r) \leq \ln \ln^2 r / \ln r$, удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{Im} F(\tau) = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (19)$$

$$|F(t)| \leq C \exp\left\{\frac{3(b^+ - b^-)}{2\pi} \ln^2 |\tau|\right\}, \quad |\tau| > 1. \quad (20)$$

Также в [26] проведено полное исследование разрешимости задачи (18) в классе ограниченных функций, аналитических в полуплоскости, из которого следует, что если $b^+ - b^- > 0$, то задача (18) имеет бесконечное множество решений; если же $b^+ - b^- = 0$, то задача (18) имеет решение, единственное с точностью до произвольного постоянного сомножителя A , вида $\Phi(\zeta) = ie^{iG(\zeta)} A$; если $b^+ - b^- < 0$, то в классе ограниченных аналитических функций задача неразрешима.

Общее решение однородной задачи

$$\operatorname{Re} [e^{-i\alpha^*(\tau)} \Phi(\tau)] = 0, \quad \tau \in \Gamma, \quad (21)$$

соответствующей (15), очевидно, определится формулой

$$\phi(z) = -ie^{iG(-1/z)} F(-1/z), \quad z \in E. \quad (22)$$

Картина разрешимости однородной задачи (21) такая же, как у задачи (18).

Рассмотрим теперь неоднородную задачу (15) при условии, что соответствующая однородная задача (21) разрешима, т. е. выполнено условие $b^+ - b^- \geq 0$. Для построения частного решения неоднородной задачи нам понадобится каноническое решение однородной задачи (21), т. е. ограниченное решение, для которого входящая в формулу общего решения целая функция уточненного нулевого порядка $\rho(r) \leq \ln \ln^2 r / \ln r$, $F_0(\zeta)$ кроме условий (19), (20), дополнительно удовлетворяет ограничениям

$$F_0(\tau) \neq 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|e^{G(\tau)}|}{F_0(\tau)} = m, \quad 0 < m < \infty; \quad \frac{|e^{G(\tau)}|}{F_0(\tau)} \in H_\Gamma.$$

Такая функция введена в [26] формулой

$$F_0(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{r_k e^{i\varphi}}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{r_k e^{-i\varphi}}\right), \quad r_k = e^{((k-1/2)/\lambda_0)},$$

с $\lambda_0 = (b^- - b^+)/2\pi$ и произвольно фиксированным φ , $0 < \varphi < \pi$. Теперь каноническое решение задачи (21) можно представить формулой

$$\phi_0(z) = -ie^{iG(-1/z)} F_0(-1/z), \quad z \in E.$$

Следовательно [26], в качестве частного решения неоднородной задачи (15) можно взять функцию

$$\phi(z) = \phi_0(z) \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f^*(t) |e^{G(-1/t)}| dt}{F_0(-1/t)(t-z)}. \quad (23)$$

Остается записать формулу общего решения задачи (15) в виде суммы общего решения (22) однородной задачи и частного решения неоднородной задачи (23)

$$\phi(z) = -ie^{iG(-1/z)} \left[F(-1/z) + F_0(-1/z) \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{f^*(t) |e^{G(-1/t)}| dt}{F_0(-1/t)(t-z)} \right]. \quad (24)$$

Ясно, что краевая задача для обобщенных аналитических функций разрешима, если разрешима краевая задача, и имеет столько решений в классе функций с ограниченным произведением $U(z)e^{-\Omega(z)}$, сколько ограниченных решений имеет краевая задача. Итак, доказана следующая

Теорема 2. Пусть для коэффициента уравнения (1) выполнены условия (2)–(5) и $(e^{-\Omega}F)(z) \in L^p(E) \cap L^{p'}(E)$, $p > 2$, $1 < p' < 2$. Тогда

1) если $b^- - b^+ > 0$, то задача Гильберта (14) имеет бесконечное множество решений $U(z)$, определенных формулой (13) с функцией $\phi(z)$ в виде (24);

2) если $b^- - b^+ = 0$, то задача Гильберта (14) имеет единственное решение вида (13), где следует взять $F(-1/z) = F_0(-1/z) = A$, A – произвольная вещественная постоянная.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00212.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Веква И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. Timergaliev S.N. On existence of solutions of nonlinear equilibrium problems on shallow inhomogeneous anisotropic shells of the Timoshenko type // Russ. Math. 2019. V. 63, No 8. P. 38–53. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1908005X>.
3. Timergaliev S.N. On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges // Differ. Equations. 2021. V. 57, No 4. P. 488–506. <https://doi.org/10.1134/s0012266121040066>.

4. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: АН Таджик. ССР, 1963. 183 с.
5. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. I. Душанбе: ТГУ, 1980. 126 с.
6. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. II. Душанбе: ТГУ, 1981. 170 с.
7. Раджабов Н.Р. Интегральные представление и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или с сингулярными поверхностями. Ч. III. Душанбе: ТГУ, 1982. 170 с.
8. Раджабов Н.Р. Интегральные представления и граничные задачи для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 300–305.
9. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: АН ТаджикНИИТИ, 1993. 244 с.
10. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differ. Equations. 2004. V. 196, No 1. P. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>.
11. Mezirani A. Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane // Complex Var. Elliptic Equations. 2008. V. 53, No 12. P. 1111–1130. <https://doi.org/10.1080/17476930802509239>.
12. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщённого уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 5. С. 637–650. <https://doi.org/10.1134/S0374064116050083>.
13. Фёдоров Ю.С., Расулов А.Б. Задачи типа Гильберта для уравнения Коши–Римана с сингулярными окружностью и точкой в младших коэффициентах // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 1. С. 140–144. <https://doi.org/10.31857/S0374064121010143>.
14. Расулов А.Б., Дорофеева И.Н. Интегральные представления для обобщенного уравнения Коши–Римана с сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Вестн. МЭИ. 2020. № 1. С. 105–108. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2020-1-105-108>.
15. Дорофеева И.Н., Расулов А.Б. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Коши–Римана со сверхсингулярной точкой на полуплоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60, № 10. С. 1734–1740. <https://doi.org/10.31857/S0044466920100075>.
16. Расулов А.Б. Задача Римана на полуокружности для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярной линией // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 9. С. 1290–1292.
17. Расулов А.Б. Интегральные представления и задача линейного сопряжения для обобщенной системы Коши–Римана с сингулярным многообразием // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 2. С. 270–275.
18. Шабалин П.Л. Краевая задача Гильберта для одного класса обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Матем. физ. и комп. моделиров. 2022. Т. 25, № 4. С. 15–28. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.2>.
19. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem with a condition on the real axis for generalized analytic functions with a singular curve // Sib. Math. J. 2023. V. 64, No. 2. P. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020155>.

20. Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Римана в полуплоскости для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Изв. вузов. Матем. 2023. № 3. С. 78–89. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-78-89>.
21. Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Римана на луче для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией // Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер.: Матем. Механ. Информатика. 2023. Т. 23, № 1. С. 58–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>.
22. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
23. Алекна П.Ю. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости // Liet. Mat. Rinkiny. 1977. V. 17, No 1. P. 5–11.
24. Алехно А.Г. Краевая задача Гильберта с бесконечным индексом логарифмического порядка // Докл. АН БССР. 2009. Т. 53, № 2. С. 5–10.
25. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка // Изв. вузов. Матем. 2016. № 1. С. 36–48.
26. Шабалин П.Л., Фатыхов А.Х. Неоднородная краевая задача Гильберта с конечным числом точек завихрения логарифмического порядка // Изв. вузов. Матем. 2021. № 1. С. 64–80. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-1-64-80>.

Поступила в редакцию 15.11.2023

Принята к публикации 06.03.2024

Шабалин Павел Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия

E-mail: pavel.shabalin@mail.ru

Фаизов Рафаэль Рустамович, аспирант

Казанский государственный архитектурно-строительный университет

ул. Зеленая, д. 1, г. Казань, 420043, Россия

E-mail: rafael.faizov@yandex.com

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.111-122

**The Hilbert Problem in a Half-Plane for Generalized Analytic Functions
with a Singular Point on the Real Axis**

P.L. Shabalin , R.R. Faizov***

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, 420043 Russia

*E-mail: *pavel.shabalin@mail.ru, **rafael.faizov@yandex.com*

Received November 15, 2023; Accepted March 6, 2024

Abstract

This article analyzes the inhomogeneous Hilbert boundary value problem for an upper half-plane with the finite index and boundary condition on the real axis for one generalized Cauchy–Riemann equation with a singular point on the real axis. A structural formula was obtained for the general solution of this equation under restrictions leading to an infinite index of the logarithmic order of the accompanying Hilbert boundary value problem for analytic functions. This formula and the solvability results of the Hilbert problem in the theory of analytic functions were applied to solve the set boundary value problem.

Keywords: Hilbert boundary value problem, generalized analytic functions, singular point, infinite index, entire functions of refined zero order

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00212).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 512 p. (In Russian)
2. Timergaliev S.N. On existence of solutions of nonlinear equilibrium problems on shallow inhomogeneous anisotropic shells of the Timoshenko type. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, no. 8, pp. 38–53. <https://doi.org/10.3103/S1066369X1908005X>.
3. Timergaliev S.N. On the solvability of nonlinear boundary value problems for the system of differential equations of equilibrium of shallow anisotropic Timoshenko-type shells with free edges. *Differ. Equations*, 2021, vol. 57, no. 4, pp. 488–506. <https://doi.org/10.1134/s0012266121040066>.
4. Mikhailov L.G. *Novye klassy osobyykh integral'nykh uravnenii i ego primeneniya k differentsial'nykh uravneniyam s singulyarnymi koeffitsientami* [New Classes of Special Integral Equations and Their Application to Differential Equations with Singular Coefficients]. Dushanbe, Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1963. 183 p. (In Russian)
5. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavleniye i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami*

- [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. I. Dushanbe, TGU, 1980. 126 p. (In Russian)
6. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavlenie i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. II. Dushanbe, TGU, 1981. 170 p. (In Russian)
 7. Rajabov N.R. *Integral'nye predstavlenie i granichnye zadachi dlya nekotorykh differentsial'nykh uravnenii s singulyarnoi liniei ili s singulyarnymi poverkhnostyami* [Integral Representations and Boundary Value Problems for Some Differential Equations with a Singular Line or Singular Surfaces]. Pt. III. Dushanbe, TGU, 1982. 170 p. (In Russian)
 8. Rajabov N.R. Integral representations and boundary value problems for the generalized Cauchy–Riemann system with a singular line. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1982, vol. 267, no. 2, pp. 300–305. (In Russian)
 9. Usmanov Z.D. *Obobshchennye sistemy Koshi–Rimana s singulyarnoi tochkoi* [Generalized Cauchy–Riemann Systems with a Singular Point]. Dushanbe, Akad. Nauk Tadzh. SSR, 1993. 244 p. (In Russian)
 10. Begehr H., Dai D.-Q. On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity. *J. Differ. Equations*, 2004, vol. 196, no. 1, pp. 67–90. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2003.07.013>.
 11. Meziani A. Representation of solutions of a singular Cauchy–Riemann equation in the plane. *Complex Var. Elliptic Equations*, 2008, vol. 53, no. 12, pp. 1111–1130. <https://doi.org/10.1080/17476930802509239>.
 12. Rasulov A.B., Soldatov A.P. Boundary value problem for a generalized Cauchy–Riemann equation with singular coefficients. *Differ. Equations*, 2016, vol. 52, no. 5, pp. 616–629. <https://doi.org/10.1134/S0012266116050086>.
 13. Fedorov Yu.S., Rasulov A.B. Hilbert type problem for a Cauchy–Riemann equation with singularities on a circle and at a point in the lower-order coefficients. *Differ. Equations*, 2021, vol. 57, no. 1, pp. 127–131. <https://doi.org/10.1134/S0012266121010122>.
 14. Rasulov A.B., Dorofeeva I.N. Integral representations for the generalized Cauchy–Riemann equation with a supersingular point on a half-plane. *Vestn. MEI*, 2020, no. 1, pp. 105–108. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2020-1-105-108>. (In Russian)
 15. Dorofeeva I.N., Rasulov A.B. Dirichlet problem for a generalized Cauchy–Riemann equation with a supersingular point on a half-plane. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, no. 10, pp. 1679–1685. <https://doi.org/10.1134/S0965542520100073>.
 16. Rasulov A.B. The Riemann problem on a semicircle for a generalized Cauchy–Riemann system with a singular line. *Differ. Equations*, 2004, vol. 40, no. 9, pp. 1364–1366. <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0015-7>.
 17. Rasulov A.B. Integral representations and the linear conjugation problem for a generalized Cauchy–Riemann system with a singular manifold. *Differ. Equations*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 306–312. <https://doi.org/10.1007/BF02754217>.
 18. Shabalin P.L. Hilbert boundary value problem for a class of generalized analytic functions with a singular line. *Mat. Fiz. Komp'yut. Model.*, 2022, vol. 25, no. 4, pp. 15–28. <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2022.4.2>. (In Russian)

19. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem with a condition on the real axis for generalized analytic functions with a singular curve. *Sib. Math. J.*, 2023, vol. 64, no. 2, pp. 431–442. <https://doi.org/10.1134/S0037446623020155>.
20. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem in a half-plane for generalized analytic functions with a singular line. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2023, no. 3, pp. 78–89. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-78-89>. (In Russian)
21. Shabalin P.L., Faizov R.R. The Riemann problem on a ray for generalized analytic functions with a singular line. *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser.: Mat. Mekh. Inf.*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 58–69. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-1-58-69>. (In Russian)
22. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)
23. Alekna P.Ju. Hilbert boundary value problem with infinite logarithmic order index for a half-plane. *Liet. Mat. Rinkiny*, 1977, vol. 17, no. 1, pp. 5–11. (In Russian)
24. Alekhno A.G. Hilbert boundary value problem with infinite index of logarithmic order. *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 2009, vol. 53, no. 2, pp. 5–10. (In Russian)
25. Salimov R.B., Shabalin P.L. On solvability of homogeneous Riemann–Hilbert problem with discontinuities of coefficients and two-sided curling at infinity of a logarithmic order. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 1, pp. 30–41. <https://doi.org/10.3103/S1066369X16010047>.
26. Shabalin P.L., Fatykhov A.K. Inhomogeneous Hilbert boundary value problem with several points of logarithmic turbulence. *Russ. Math.*, 2021, vol. 65, no. 1, pp. 57–71. <https://doi.org/10.3103/S1066369X21010059>.

Для цитирования: Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. Задача Гильберта в полуплоскости для обобщённых аналитических функций с сингулярной точкой на вещественной оси // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 111–122. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.111-122>.

For citation: Shabalin P.L., Faizov R.R. The Hilbert problem in a half-plane for generalized analytic functions with a singular point on the real axis. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 111–122. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.111-122>. (In Russian)