

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.516, 517.928

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.99-110

О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.Л. Сенников

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, 630090, Россия*

Аннотация

Поставлена и решена задача о нестационарном течении вязкой жидкости, окружающей движущееся твердое цилиндрическое тело и имеющей внешнюю свободную границу. Жидкость испытывает периодические по времени воздействия, характеризующиеся наличием или отсутствием выделенного направления в пространстве. Постановка задачи включает в себя уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости. Обнаружены новые гидромеханические эффекты.

Ключевые слова: вязкая жидкость, твердое тело, свободная граница, периодические по времени воздействия, выделенное направление в пространстве, вращательное движение

Введение

Периодическим по времени явлениям, процессам принадлежит важнейшая роль в природе и технике. Это положение, в частности, является актуальным в отношении исследований в области механики жидкости. Регулярно осуществляемое изучение динамики гидромеханических систем при периодических воздействиях к настоящему времени привело к получению ряда содержательных результатов, выявлению новых гидромеханических эффектов (см., например, [1–5], а также [6–38] и представленную там литературу). В частности, наряду с другими результатами, обнаружены эффекты парадоксального поведения твердого включения в вибрирующей жидкости [1–3, 6–8], “самопроизвольного” перехода твердого тела в колеблющейся вязкой жидкости в положение с заданной ориентацией в пространстве [28], преимущественно однонаправленного вращения твердого тела и вязкой жидкости [31]. Установлено наличие “разрешенных” и “запрещенных” состояний подвергающейся периодическим по времени воздействиям гидромеханической системы, для которых решение задачи о движении системы соответственно существует и не существует [3]. Обнаружен эффект “левитации” жидкости [5]. Построена математическая модель гидромеханического аналога “маятника Капицы” [3, 36]. Введены основополагающие понятия однородных и неоднородных колебаний жидкости, определены количественные характеристики неоднородности колебаний жидкости [3]. Доказано существование явления преимущественно однонаправленного движения сжимаемых включений в вибрирующей жидкости [3, 9].

В настоящей работе рассмотрена задача о движении вязкой жидкости при периодических по времени воздействиях на жидкость со стороны находящегося в ней твердого тела, которое пульсирует и совершает вращательное движение. Воздействия, испытываемые жидкостью, могут характеризоваться как наличием, так и отсутствием выделенного направления в пространстве. Выявлены новые гидромеханические эффекты. В частности, обнаружен эффект, состоящий в том, что (на фоне колебаний) часть жидкости совершает стационарное вращательное движение в направлении, противоположном направлению среднего (по времени) вращения твердого тела.

1. Постановка задачи

Имеется несжимаемая вязкая жидкость, окружающая твердое тело – бесконечно длинный круговой цилиндр Ξ радиуса A (рис. 1). Ось тела Ξ находится на оси Z инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z . Тело Ξ совершает вращательное движение вокруг оси Z с угловой скоростью Ω . Радиус A и угловая скорость Ω заданным образом периодически с периодом T изменяются со временем t (среднее значение угловой скорости Ω может быть как отличным от нуля, так и равным нулю). Жидкость занимает область $Q : A < R < B$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < Z < \infty$ ($R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, θ , Z – цилиндрическая система координат; B – функция t , связанная с радиусом A условием постоянства разности $B^2 - A^2$). Жидкость граничит с твердым телом Ξ и с пустотой (твердая граница Γ_s и свободная граница Γ_f жидкости характеризуются соотношениями $R = A$, $R = B$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $-\infty < Z < \infty$).

Требуется определить периодическое по времени осесимметричное, плоское движение жидкости со свободной границей, обусловленное испытываемыми жидкостью воздействиями со стороны находящегося в ней твердого тела.

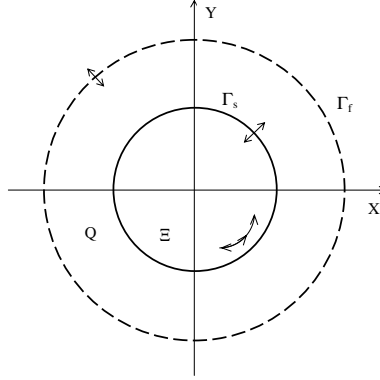


Рис. 1. Гидромеханическая система

Пусть $\tau = t/T$; $0 \leq \varepsilon < 1$ – параметр; $g = \sin 2\pi\tau$; $h = \sin(2\pi\tau + \varphi)$ (φ – постоянная); $a = A/\hat{A} = 1 + \varepsilon g$ ($\hat{A} > 0$ – постоянная, значение A при $\varepsilon = 0$ (значение A в отсутствие пульсаций тела Ξ)); $\hat{B}$ – постоянная, значение B при $\varepsilon = 0$; $\varkappa = \hat{B}/\hat{A}$; $b = B/\hat{B} = \sqrt{a^2 + \varkappa^2 - 1}/\varkappa$; $\omega = \Omega T = \hat{\omega} [h + \varepsilon(\varkappa - 1)s]$ ($\hat{\omega} > 0$, s – постоянные); σ, ρ и ν – коэффициент поверхностного натяжения, плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно; $Re = \hat{A}^2/(\nu T)$ – число Рейнольдса; $r = R/\hat{A}$; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ – единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями возрастания r и θ соответственно; $\mathbf{V}$ – ско-

рость жидкости; $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/\hat{A} = v_r(r, \tau)\mathbf{e}_r + v_\theta(r, \tau)\mathbf{e}_\theta$; P – давление в жидкости; $p = T^2 P/(\rho\hat{A}^2) = p(r, \tau)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho\hat{A}^3)$.

Задачу о движении жидкости составляют уравнение Навье – Стокса, уравнение неразрывности и условия на твердой и свободной границах жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta \mathbf{v} \quad \text{в } Q; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{в } Q; \quad (2)$$

$$v_r = \frac{da}{d\tau}, \quad v_\theta = \omega a \quad \text{на } \Gamma_s \quad (\text{при } r = a); \quad (3)$$

$$v_r = \kappa \frac{db}{d\tau}, \quad p - \frac{2}{Re} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\lambda}{\kappa b} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \quad \text{на } \Gamma_f \quad (\text{при } r = \kappa b). \quad (4)$$

Отметим, что в задаче (1)–(4) испытываемые жидкостью периодические по времени воздействия со стороны тела Ξ при $s \neq 0$ характеризуются наличием, а при $s = 0$ – отсутствием выделенного направления в пространстве.

2. Решение задачи

Согласно (2)–(4) имеем

$$v_r = w/r, \quad (5)$$

где

$$w = a(da/d\tau) = \kappa^2 b(db/d\tau).$$

Из (1), (3)–(5) следует

$$p = \frac{\lambda}{\kappa b} - \frac{2}{Re} \frac{d}{d\tau} \ln b - \frac{dw}{d\tau} \ln \frac{r}{\kappa b} + w^2 \frac{r^2 - \kappa^2 b^2}{2\kappa^2 b^2 r^2} + \int_{\kappa b}^r \frac{v_\theta^2}{r'} dr'; \quad (6)$$

$$Re \, r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau} = r^2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + (1 - Re \, w) r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (1 + Re \, w) v_\theta \quad \text{в } Q; \quad (7)$$

$$v_\theta = \omega a \quad \text{при } r = a; \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 0 \quad \text{при } r = \kappa b. \quad (9)$$

Будем рассматривать задачу (7)–(9) при малых по сравнению с единицей значениях ε . Применим метод разложения по степеням малого параметра [37, 38]. Предположим, что

$$v_\theta \sim v_0 + \varepsilon v_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

Используя (7)–(10), в ε^N -приближении ($N = 0, 1$) получим

$$Re \, r^2 \frac{\partial v_N}{\partial \tau} - r^2 \frac{\partial^2 v_N}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_N}{\partial r} + v_N = -N Re \frac{dg}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \quad \text{в } \bar{Q}; \quad (11)$$

$$v_N = (1 - N)\hat{\omega}h + N[g(\hat{\omega}h - \frac{\partial v_0}{\partial r}) + \hat{\omega}(\kappa - 1)s] \quad \text{при } r = 1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_N}{\partial r} - \frac{v_N}{r} = -N \frac{g}{\kappa r^2} (r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0) \quad \text{при } r = \kappa. \quad (13)$$

Здесь $\bar{Q}$ – область $1 < r < \kappa$ ($0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$).

Пусть $N = 0$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_0 = \widehat{\omega} \operatorname{Imag} \left[\frac{I_2(q\kappa)K_1(qr) + K_2(q\kappa)I_1(qr)}{Q_1} e^{i(2\pi\tau + \varphi)} \right], \quad (14)$$

где $q = (1+i)\sqrt{\pi Re}$; I_1, I_2, K_1, K_2 – модифицированные функции Бесселя;

$$Q_1 = I_2(q\kappa)K_1(q) + K_2(q\kappa)I_1(q).$$

Пусть $N = 1$. Проведем усреднение (11)–(13) по безразмерному времени τ . В результате этого найдем

$$r^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dr^2} + r \frac{d\bar{v}}{dr} - \bar{v} = Re \left\langle \frac{dg}{d\tau} \left(r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0 \right) \right\rangle \quad \text{в } \bar{Q}; \quad (15)$$

$$\bar{v} = \left\langle g(\widehat{\omega}h - \frac{\partial v_0}{\partial r}) \right\rangle + \widehat{\omega}(\kappa - 1)s \quad \text{при } r = 1; \quad (16)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dr} - \frac{\bar{v}}{r} = -\frac{1}{\kappa r^2} \left\langle g(r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} - r \frac{\partial v_0}{\partial r} + v_0) \right\rangle \quad \text{при } r = \kappa. \quad (17)$$

Здесь $\langle \dots \rangle = \int_{\tau}^{\tau+1} \dots d\tau'$; $\bar{v} = \langle v_1 \rangle$. Задача (11)–(13) имеет решение

$$v_1 = \bar{v} + \operatorname{Real}(\tilde{v}e^{4\pi i\tau}), \quad (18)$$

где $\tilde{v}$ – функция r . Из (15)–(17) следует

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \widehat{\omega} [\cos \varphi + (\kappa - 1)s + \frac{1}{2} \operatorname{Real} \frac{e^{i\varphi} q Q_2}{Q_1}] r - \\ &- \frac{1}{2} \pi Re \widehat{\omega} \operatorname{Imag} \left\{ \frac{e^{i\varphi}}{Q_1} [I_2(q\kappa)G_K + K_2(q\kappa)G_I] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_2 &= I_2(q\kappa)K_0(q) - K_2(q\kappa)I_0(q); \\ G_I &= I_1(qr) - I_1(q)r - qr \int_1^r \frac{I_0(qr')}{r'} dr'; \\ G_K &= K_1(qr) - K_1(q)r + qr \int_1^r \frac{K_0(qr')}{r'} dr' \end{aligned}$$

(I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя).

Формулами

$$v_\theta = v_0 + \varepsilon v_1 \quad (20)$$

и (5), (6), (14), (18), (19) определяется приближенное решение задачи (1)–(4). Данное решение, в частности, свидетельствует о наличии (происходящих на фоне колебаний) необычных стационарных вращательных течений жидкости.

Обратимся к вопросу о среднем по времени движении жидкости при малых по сравнению с единицей значениях $\kappa - 1$. Пусть $\chi = (\kappa - r)/(\kappa - 1)$. Используя (5), (14) и (18)–(20), получим

$$\langle \mathbf{v} \rangle \sim \varepsilon \widehat{\omega} [s - \pi Re(\sin \varphi) \chi] (\kappa - 1) \mathbf{e}_\theta \quad \text{при } \kappa - 1 \rightarrow 0. \quad (21)$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении безразмерная скорость $\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{e}_\theta$ совпадает с безразмерной средней по времени угловой скоростью вращения жидкости вокруг оси Z .

Согласно (21) (на фоне колебаний) при любом значении $Re > 0$ имеет место следующее. Если $s \neq 0$, то при $\chi \sin \varphi = 0$ (то есть при $\sin \varphi = 0$, $1 \leq r < \varkappa$ и при $r = \varkappa$, $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$) средняя (по времени) угловая скорость вращения жидкости равна (отличной от нуля) средней угловой скорости вращения тела Ξ . Если $s \sin \varphi < 0$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость “обгоняет” твердое тело. Если $s \sin \varphi > 0$, и $|s| > \pi Re |\sin \varphi|$, то при $1 \leq r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $1 \leq r < \varkappa$ жидкость “отстает” от твердого тела. Если $s \sin \varphi > 0$, и $|s| < \pi Re |\sin \varphi|$, то при $r = r^* = \varkappa - (\varkappa - 1)s/(\pi Re \sin \varphi)$ угловая скорость жидкости равна нулю; при $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , при том что для $r^* < r < \varkappa$ жидкость “отстает” от твердого тела; при $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения тела Ξ ; для $s = \pi Re \sin \varphi$ выполняется $r^* = 1$, и угловая скорость жидкости равна нулю при $r = 1$. Если $s = 0$, то при $1 \leq r < \varkappa$ направление вращения жидкости определяется знаком $\sin \varphi$ (при $\sin \varphi < 0$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением вектора $\mathbf{e}_\theta$, при $\sin \varphi > 0$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению вектора $\mathbf{e}_\theta$); при $r = \varkappa$ угловая скорость вращения жидкости равна нулю.

Представляется интересным отметить следующее. При $s \sin \varphi > 0$, $|s| < \pi Re |\sin \varphi|$ для больших значений $Re |\sin \varphi|$ разность $\varkappa - r^*$ является малой по сравнению с разностью $\varkappa - 1$; это соответствует наличию такого движения жидкости, что (на фоне колебаний) в “очень тонкой области” $r^* < r \leq \varkappa$ жидкость вращается в направлении, совпадающем с направлением среднего вращения тела Ξ , а в “основной области” $1 \leq r < r^*$ жидкость вращается в направлении, противоположном направлению среднего вращения твердого тела (рис. 2).

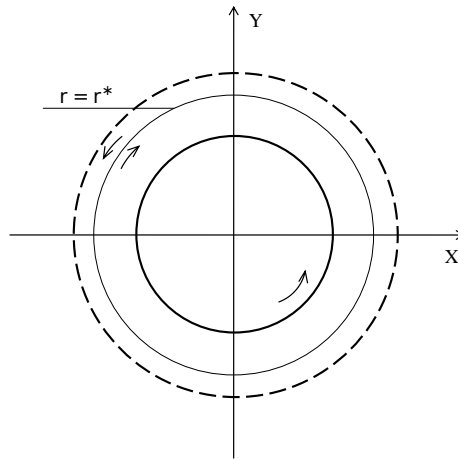


Рис. 2. Пример качественной картины среднего движения гидромеханической системы

Заключение

Проведенное исследование позволило обнаружить новые эффекты необычного, парадоксального движения жидкости при периодических по времени воздействиях. Рассмотрена динамика вязкой жидкости, обусловленная как воздействиями, характеризующимися наличием выделенного направления в пространстве, так и воздействиями, характеризующимися отсутствием такого направления. Из представленного в работе следует, что воздействия, не имеющие выделенного направления в пространстве, могут порождать качественные изменения в движении жидкости; по достигаемому влиянию на динамику гидромеханических систем такие воздействия способны эффективно конкурировать, например, со стационарными воздействиями на системы (см. также [3, 5]).

Настоящей работой, в частности, продемонстрировано, как “не имеющим направления” создается “имеющее направление”. Причиной обнаруженных эффектов является согласованность (друг с другом) оказываемых на жидкость воздействий. Гидромеханическая система, подвергающаяся периодическим по времени воздействиям, не имеющим выделенного направления в пространстве, производит отклики (реакции на воздействия), которые характеризуются наличием выделенного направления в пространстве и выражаются в том, что свободные части системы (части системы, движение которых не задано) – в том числе жидкие слои – на фоне колебаний совершают среднее движение. Это находится в непосредственной связи со следующим обобщенным принципом среднего движения: основополагающей причиной того, что не имеющими выделенного направления в пространстве периодическими по времени (колебательными, вибрационными) воздействиями на гидромеханическую систему порождается среднее по времени движение свободных частей системы, является возможность совершения свободными частями системы движения в различных направлениях в пространстве в неодинаковых условиях (см. также [3]).

Результаты настоящей работы, в частности, могут использоваться при проведении направленных экспериментальных исследований нетривиальной динамики гидромеханических систем, при разработке перспективных методов управления гидромеханическими системами, при создании гидромеханических систем, обладающих предписанными свойствами, например, систем, заданным образом реагирующих на периодические по времени воздействия.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Челомей В.Н. Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. Челомей В.Н. Избранные труды. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
3. Сенницкий В.Л. Парадоксальное движение жидкости // Междунар. журн. прикл. и фундам. иссл. 2017. № 8 (ч. 1). С. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>.
4. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное течение вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2021. Т. 24, № 2. С. 126–133. <https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2021.24.210>.
5. Сенницкий В.Л. Об особенностях течения жидкости в поле силы тяжести // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>.
6. Сенницкий В.Л. О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.

7. Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л. О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
8. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. О движении твёрдого тела в вибрирующей жидкости // Конвект. течен. Пермь: изд. Перм. пед. ин-та, 1987. С. 61–71.
9. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
10. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory // Proc. 14 IMACs Congr. on Computational and Applied Mathematics. Atlanta, GA: Ga. Inst. Technol., 1994. P. 59–68.
11. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems // Microgravity Q. 1994. V. 4, No 1. P. 221–225.
12. Kozlov V.G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration // Europhys. Lett. 1996. V. 36, No 9. P. 651–656.
<https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
13. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase // J. Cryst. Growth. 1997. V. 180, No 3–4. P. 648–659.
[https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(97\)00294-7](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(97)00294-7).
14. Иванова А.А., Козлов В.Г., Эвеск П. Динамика цилиндрического тела в заполненном жидкостью секторе цилиндрического слоя при вращательных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 1998, № 4. С. 29–39.
15. Любимов Д.В., Перминов А.В., Черепанов А.А. Генерация осреднённых течений в вибрационном поле вблизи поверхности раздела сред // Вибрационные эффекты в гидродинамике: Сб. статей / Пермь: Перм. ун-т, 1998. С. 204–221.
16. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
17. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационная подъемная сила, действующая на тело в жидкости вблизи твердой поверхности // Докл. АН СССР. 2005. Т. 402, № 4. С. 488–491.
18. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I. Non-uniform heating // J. Fluid Mech. 2006. V. 564. P. 159–183. <https://doi.org/10.1017/S0022112006001418>.
19. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container // J. Appl. Mech. 2006. V. 73, No 1. P. 72–78. <https://doi.org/10.1115/1.1992516>.
20. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaeu S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate // Phys. Fluids. 2006. V. 18. Art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
21. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J.C., Yan Y., Saghir Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions // Phys. Fluids. 2007. V. 19. Art. 017111. <https://doi.org/10.1063/1.2409622>.
22. Иванова А.А., Козлов В.Г., Кузаев А.Ф. Вибрационное взаимодействие сферического тела с границами полости // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 2. С. 31–40.
23. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration // Acta Astronaut. 2012. V. 79. P. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.

24. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Легкий цилиндр в полости с жидкостью при горизонтальных вибрациях // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 6. С. 63–73.
25. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization // Microgravity Sci. Technol. 2013. V. 25, No 2. P. 121–126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>.
26. Иванова А.А., Козлов В.Г., Щипицын В.Д. Подъемная сила, действующая на цилиндрическое тело в жидкости вблизи границы полости, совершающей поступательные колебания // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 55–63.
27. Алабузев А.А. Поведение цилиндрического пузырька под действием вибраций // Вычисл. механ. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 2. С. 151–161. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.16>.
28. Сенницкий В.Л. О заданной ориентации твердого включения в вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 1. С. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>.
29. Kozlov V., Vlasova O. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid // Microgravity Sci. Technol. 2015. V. 27, No 4. P. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
30. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation // Fluid Dyn. Res. 2016. V. 48, No 5. Art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
31. Сенницкий В.Л. Преимущественно однонаправленное вращение твердого тела и вязкой жидкости // Сиб. журн. индустр. матем. 2017. Т. 20, № 2. С. 93–97. <https://doi.org/10.17377/sibjim.2017.20.210>.
32. Власова О.А., Козлов В.Г., Козлов Н.В. Динамика тяжелого тела, находящегося во вращающейся кювете с жидкостью, при модуляции скорости вращения // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 2. С. 39–49.
33. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Численное исследование влияния вибраций на взаимодействие в ансамбле газовых пузырьков и твердых частиц в жидкости // Вычисл. механ. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>.
34. Щипицын В.Д. Колебания неосесимметричного цилиндра в заполненной жидкостью полости, совершающей вращательные осцилляции // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, № 15. С. 43–46. <https://doi.org/10.21883/PJTf.2020.15.49749.18349>.
35. Коновалов В.В., Любимова Т.П. Влияние акустических вибраций на взаимодействие газового пузыря и твердой частицы в жидкости // Пермск. гидродинам. научн. чтен. Сб. статей по матер. VIII Всероссийск. конф., посвящ. памяти проф. Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. Отв. ред. Т.П. Любимова. Пермь: ПГНИУ, 2022. С. 254–261.
36. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН. 1951. Т. 44, № 1. С. 7–20. <https://doi.org/10.3367/UFG.0044.195105b.0007>.
37. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 352 с.
38. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФ-МЛ, 1958. 408 с.

Поступила в редакцию 08.11.2023

Принята к публикации 19.01.2024

Сенницкий Владимир Леонидович, старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: sennitskii@yandex.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.99-110

On the Motion of a Viscous Liquid with a Free Boundary

V.L. Sennitskii

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia*
E-mail: sennitskii@yandex.ru

Received November 8, 2023; Accepted January 19, 2024

Abstract

The problem of the non-stationary flow of a viscous liquid with an external free boundary around a moving solid cylindrical body was formulated and solved. The liquid is subject to periodic impacts with or without the predominant direction in space. To formulate the problem, the Navier–Stokes equation, the continuity equation, and the equation of conditions at both the solid and free boundaries of the liquid were used. New hydro-mechanical effects were discovered.

Keywords: viscous liquid, solid body, free boundary, periodic impacts, predominant direction in space, rotatory motion

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Hydromechanical system.

Fig. 2. A qualitative representation of the mean motion of the hydromechanical system.

References

1. Chelomey V.N. Paradoxes in mechanics caused by vibrations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, vol. 270, no. 1, pp. 62–67. (In Russian)
2. Chelomey V.N. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 336 p. (In Russian)
3. Sennitskii V.L. Paradoxal motion of a liquid. *Mezhdunar. Zh. Prikl. Fundam. Issled.*, 2017, no. 8, pt. 1, pp. 28–33. <https://doi.org/10.17513/mjpf.11753>. (In Russian)
4. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional flow of a viscous fluid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2021, vol. 15, no. 2, pp. 326–330. <https://doi.org/10.1134/S1990478921020149>.

5. Sennitskii V.L. On peculiarities of a liquid flow in a gravity field. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2022, vol. 19, no. 1, pp. 241–247. <https://doi.org/10.33048/semi.2022.19.018>. (In Russian)
6. Sennitskii V.L. Motion of a circular cylinder in a vibrating liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1985, vol. 26, no. 5, pp. 620–623. <https://doi.org/10.1007/BF00915307>.
7. Lugovtsov B.A., Sennitskii V.L. Motion of a body in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1986, vol. 289, no. 2, pp. 314–317. (In Russian)
8. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherpanov A.A. On the motion of a rigid body in a vibrating liquid. In: *Konvektivnye techeniya* [Convective Flows]. Perm, Izd. Permsk. Pedagog. Inst., 1987, pp. 61–71. (In Russian)
9. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional motion of a gas bubble in a vibrating liquid. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, vol. 319, no. 1, pp. 117–119. (In Russian)
10. Lyubimov D.V. New approach in the vibrational convection theory. *Proc. 14 IMACS Congr. on Computational and Applied Mathematics*. Atlanta, GA, Ga. Inst. Technol., 1994, pp. 59–68.
11. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in nonuniform systems. *Microgravity Q.*, 1994, vol. 4, no. 1, pp. 221–225.
12. Kozlov V.G. Solid-body dynamics in cavity with liquid under high-frequency rotational vibration. *Europhys. Lett.*, 1996, vol. 36, no. 9, pp. 651–656. <https://doi.org/10.1209/epl/i1996-00282-0>.
13. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Meradji S., Roux B. Vibrational control of crystal growth from liquid phase. *J. Cryst. Growth*, 1997, vol. 180, nos. 3–4, pp. 648–659. [https://doi.org/10.1016/S0022-0248\(97\)00294-7](https://doi.org/10.1016/S0022-0248(97)00294-7).
14. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P. Dynamics of a cylindrical body in a liquid-filled sector of a cylindrical layer under rotational vibration. *Fluid Dyn.*, 1998, vol. 33, no. 4, pp. 488–496. <https://doi.org/10.1007/BF02698213>.
15. Lyubimov D.V., Perminov A.V., Cherepanov A.A. Generation of mean flows near fluid interface in a vibration field. In: *Vibratsionnye efekty v gidrodinamike: Sb. statei* [Vibration Effects in Hydrodynamics: A Collection of Articles]. Perm, Permsk. Univ., 1998, pp. 204–221. (In Russian)
16. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostei razdela v vibratsionnykh pol'yakh* [Dynamics of Interfaces in Vibration Fields]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 216 p. (In Russian)
17. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational lift force acting on a body in a fluid near a solid surface. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, no. 6, pp. 311–314. <https://doi.org/10.1134/1.1958123>.
18. Lyubimov D., Lyubimova T., Vorobev A., Mojtabi A., Zappoli B. Thermal vibrational convection in near-critical fluids. Part I. Non-uniform heating. *J. Fluid Mech.*, 2006, vol. 564, pp. 159–183. <https://doi.org/10.1017/S0022112006001418>.
19. Hassan S., Lyubimova T.P., Lyubimov D.V., Kawaji M. Motion of a sphere suspended in a vibrating liquid-filled container. *J. Appl. Mech.*, 2006, vol. 73, no. 1, pp. 72–78. <https://doi.org/10.1115/1.1992516>.
20. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Shklyaev S.V. Behavior of a drop on an oscillating solid plate. *Phys. Fluids*, 2006, vol. 18, art. 012101. <https://doi.org/10.1063/1.2137358>.
21. Shevtsova V., Melnikov D., Legros J.C., Yan Y., Saghir Z., Lyubimova T., Sedelnikov G., Roux B. Influence of vibrations on thermodiffusion in binary mixture: A benchmark of numerical solutions. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, art. 017111. <https://doi.org/10.1063/1.2409622>.

22. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Kuzaev A.F. Vibrational hydrodynamic interaction between a sphere and the boundaries of a cavity. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, no. 2, pp. 194–202. <https://doi.org/10.1134/S001546280802004X>.
23. Kozlov V., Ivanova A., Schipitsyn V., Stambouli M. Lift force acting on the cylinder in viscous liquid under vibration. *Acta Astronaut.*, 2012, vol. 79, pp. 44–51. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2012.04.013>.
24. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. A light cylinder under horizontal vibration in a cavity filled with a fluid. *Fluid Dyn.*, 2010, vol. 45, no. 6, pp. 889–897. <https://doi.org/10.1134/S0015462810060062>.
25. Lyubimov D.V., Baydin A.Y., Lyubimova T.P. Particle dynamics in a fluid under high frequency vibrations of linear polarization. *Microgravity Sci. Technol.*, 2013, vol. 25, no. 2, pp. 121–126. <https://doi.org/10.1007/s12217-012-9336-3>.
26. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Shchipitsyn V.D. Lift force acting on a cylindrical body in a fluid near the boundary of a cavity performing translational vibrations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 5, pp. 773–780. <https://doi.org/10.1134/S002189441405006X>.
27. Alabuzhev A.A. Behavior of a cylindrical bubble under vibrations. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2014, vol. 7, no. 2, pp. 151–161. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.2.16>. (In Russian)
28. Sennitskii V.L. On a prescribed orientation of a solid inclusion in a viscous fluid. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2015, vol. 18, no. 1, pp. 123–128. <https://doi.org/10.17377/SIBJIM.2015.18.110>. (In Russian)
29. Kozlov V., Vlasova O. The repulsion of flat body from the wall of vibrating container filled with liquid. *Microgravity Sci. Technol.*, 2015, vol. 27, no. 4, pp. 297–303. <https://doi.org/10.1007/s12217-015-9460-y>.
30. Kozlov N.V., Vlasova O.A. Behaviour of a heavy cylinder in a horizontal cylindrical liquid-filled cavity at modulated rotation. *Fluid Dyn. Res.*, 2016, vol. 48, no. 5, art. 055503. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/5/055503>.
31. Sennitskii V.L. Predominantly unidirectional rotation of a solid body and a viscous liquid. *J. Appl. Ind. Math.*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 284–288. <https://doi.org/10.1134/S1990478917020144>.
32. Vlasova O.A., Kozlov V.G., Kozlov N.V. Lift force acting on a heavy solid in a rotating liquid-filled cavity with a time-varying rotation rate. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 59, no. 2, pp. 219–228. <https://doi.org/10.1134/S0021894418020050>.
33. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Numerical study of the effect of vibrations on the interaction in an ensemble of gas bubbles and solid particles in a liquid. *Vychisl. Mekh. Sploshnykh Sred*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 48–56. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5>. (In Russian)
34. Shchipitsyn V.D. Vibrations of a nonaxisymmetric cylinder in a cavity filled with liquid and performing rotational oscillations. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, no. 8, pp. 771–774. <https://doi.org/10.1134/S1063785020080143>.
35. Konovalov V.V., Lyubimova T.P. Influence of acoustic vibrations on the interaction of a gas bubble and a solid particle in a liquid. *Permsk. gidrodinam. nauchn. chten. Sb. statei po mater. VIII Vserossiisk. konf., posvyashch. pamyati prof. G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskogo i D.V. Lyubimova* [Scientific Lectures on Hydrodynamics in Perm: Proc. VIII All-Russ. Conf. in Memory of Professors G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, and D.V. Lyubimov]. Lyubimova T.P. (Ed.). Perm, PGNIU, 2022, pp. 254–261. (In Russian)

-
36. Kapitza P.L. Pendulum with a vibrating suspension. *Usp. Fiz. Nauk*, 1951, vol. 44, no. 1, pp. 7–20. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0044.195105b.0007>. (In Russian)
 37. Kryloff N.M., Bogoliuboff N.N. *Vvedenie v nelineinuyu mekhaniku* [Introduction to Non-Linear Mechanics]. Moscow, Izhevsk, NITs “Regulyarn. Khaot. Din.”, 2004. 352 p. (In Russian)
 38. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations]. Moscow, GIF-ML, 1958. 408 p. (In Russian)
-

⟨ **Для цитирования:** Сенницкий В.Л. О движении вязкой жидкости со свободной границей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 99–110. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>. ⟩

⟨ **For citation:** Sennitskii V.L. On the motion of a viscous liquid with a free boundary. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 99–110. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.99-110>. (In Russian) ⟩