УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 1
С. 92–98

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 533.95

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.92-98

О СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРОЙ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

М.А. Севодин

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
г. Пермь, 614990, Россия*

Аннотация

Изучены возможности объединения известных приемов оптимизации структуры портфеля ценных бумаг (ПЦБ). Предложен метод, с помощью которого можно одновременно использовать пассивные и активные подходы к управлению структурой ПЦБ. Совместное применение названных способов основано на приемах диверсификации ПЦБ и поиске структуры портфеля, по составу максимально приближенной к структуре ПЦБ индексного фонда. Для оптимизации структуры ПЦБ в рамках традиционного подхода “доходность–риск” модифицирована целевая функция. Предложенная целевая функция, наряду с риском ПЦБ, описывает степень совпадения искомого распределения долей ценных бумаг портфеля с распределением, построенным с помощью индексного фонда. Установлено, что основные свойства оптимальных ПЦБ, полученных на основе подхода “доходность–риск”, имеют место и в рассматриваемом случае.

Ключевые слова: портфель ценных бумаг, доходность, риск, индексный фонд, оптимизация структуры

Введение

Одна из важнейших проблем количественного анализа фондового рынка связана с задачами оптимального управления портфелями активов, хеджирования риска операций с фондовыми активами и рядом других. В рамках подхода “доходность–риск” названные задачи сводятся к формированию портфеля активов, обеспечивающего ожидаемые доходности и риски. Совокупность ценных бумаг, приобретенная с этими целями инвестором (лицом, принимающим решение, – ЛПР) составляет портфель ценных бумаг (ПЦБ). Набор долей инвестиций в активы различного вида, произведенных конкретным ЛПР, определяет структуру его ПЦБ.

Способность формировать и распоряжаться набором разных ценных бумаг характеризует возможность управления ПЦБ, описывает стратегию и тактику управления ПЦБ. При этом обычно выделяют два направления: формирование диверсифицированного портфеля, а затем его поддержание на приемлемом уровне риска относят к пассивной стратегии управления ПЦБ; активная стратегия управления предусматривает отслеживание финансовых инструментов, а также быстрое изменение структуры ПЦБ в случае несоответствия целям, поставленным инвестором.

Оптимизация структуры ПЦБ при использовании активных методов проводится с помощью критериев оптимальности. Классическими критериями при этом являются ожидаемая доходность и риск [1–3], то есть математическое ожидание и дисперсия доходности ценной бумаги за некоторый промежуток времени владения.

Пассивные методы в основном базируются на гипотезе об информационной эффективности рынка ценных бумаг. Исходя из этого, считают возможным формирование диверсифицированного набора ценных бумаг при условии гарантирования необходимых уровней доходности и риска.

Типичным методом при пассивном управлении структурой ПЦБ является метод индексного фонда. Индексный фонд – это портфель, структура которого соответствует движению какого-либо биржевого индекса, характеризующего ситуацию на рынке ценных бумаг. Часто за основу при этом берут структуру какого-нибудь крупного фонда, считая ее эталонной.

Как правило, на фондовом рынке производятся действия, соответствующие общим принципам формирования ПЦБ, то есть используются либо активные, либо пассивные методы. Ясно, что большой интерес здесь вызывает совместное использование этих методов, что определяет важную исследовательскую проблему. В таком виде названная проблема впервые была рассмотрена в работах [4, 5]. Результатом объединения указанных методов в этих работах было предложено считать соответствующим образом построенную двухкритериальную оптимизационную задачу с ограничениями.

В настоящей работе попытка объединения рассматриваемых методов осуществлена с другой позиции: в качестве представителя активного управления взята диверсификация, а в качестве представителя пассивного управления – метод индексного фонда. Искомая структура ПЦБ ищется вблизи структуры эталонного портфеля. Мерой близости, в отличие от работ [4, 5], служит евклидово расстояние. Поиск решения осуществлен традиционным способом с помощью модифицированной целевой функции. Она учитывает критерии и активного и пассивного методов оптимизации структуры ПЦБ. Показано, что при таком подходе сохраняются известные эффекты инвестирования. В частности, построены аналоги эффективного фронта и портфеля Тобина (см., например, [3]), а также доказано сохранение основных свойств некоторых характеристик инвестирования.

1. Усредненный портфель ценных бумаг

Будем считать, что ЛПР решает задачу определения структуры портфеля ценных бумаг на один период времени из N $(N > 1)$ различных рисковых ценных бумаг. Пусть для исследуемого периода известны значения вектора ожидаемых доходностей активов и их ковариационной матрицы: $\mu = (\mu_i)$ и $\Sigma = \Sigma^T = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 > 0,\ i,j = 1,2,\ldots,N$. Задача состоит в определении такой структуры ПЦБ $X^* = (x_i^*),\ i = 1,2,\ldots,N$, которая обеспечивала бы достижение заданной доходности μ_p с минимальным риском σ_p и минимальным расстоянием от ПЦБ индексного фонда со структурой $X_u = (x_i^u),\ i = 1,2,\ldots,N,$ вектором доходности $\mu^u = (\mu_i^u)$, $i = 1,2,\ldots,N,$ с риском σ^u. Математическая формулировка поставленной задачи имеет вид

$$\alpha\sigma_p^2 + (1-\alpha)\left\|X_u^T - X^T\right\|^2 \to \min_X, \tag{1}$$

$$X^T\mu = \mu_p, \tag{2}$$

$$X^T\mathbf{1} = 1. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ – единичный N-вектор. Число $\alpha \in [0, 1]$ характеризует склонность инвестора к активной и пассивной стратегиям. Будем называть ПЦБ X^* усредненным, а α – коэффициентом усреднения.

Соотношения (1)–(3) представляют собой формализованное описание задачи определения оптимального в смысле минимизации усреднения риска ПЦБ и удаления от пассивного ПЦБ при фиксированной доходности. Частный случай $(\alpha = 1)$ такой задачи носит название задачи Марковица (см., например, [3]). Поэтому естественно называть задачу (1)–(3) задачей Марковица усредненного ПЦБ, а решения этой задачи – эффективными усредненными портфелями.

Заметим, что в рассматриваемом случае компоненты вектора-решения задачи (1)–(3) $X^* = (x_i^*)$ могут принимать отрицательные значения. Как обычно (см., например, [3]), это означает рекомендацию ЛПР совершить относительно соответствующих активов операцию "короткая продажа".

Наметим схему решения задачи. Функционал Лагранжа с учетом (1)–(3) имеет вид

$$L = L(X, \lambda_1, \lambda_2) = \alpha X^T \Sigma X + (1-\alpha)\left\|X_u^T - X^T\right\|^2 + \lambda_1(\mu_p - X^T\mu) + \lambda_2(1 - X^T\mathbf{1}).$$

Продифференцировав по X и приравняв нулю вектор производных, получим

$$2\left(\alpha\Sigma + (1-\alpha)\,E\right)X - \lambda_1\mu - \lambda_2\mathbf{1} - 2(1-\alpha)X_u = 0.$$

Ковариационная матрица Σ является положительно полуопределенной (см., например, [6]). Следовательно, матрица $(\alpha\Sigma + (1-\alpha)E)$ положительно определена. Обозначим матрицу, обратную к этой матрице, через A. В частном случае $\alpha = 1$ будем предполагать существование A (ср. с [3]). Таким образом,

$$X = \frac{\lambda_1}{2}A\mu + \frac{\lambda_2}{2}A\mathbf{1} + (1-\alpha)AX_u. \tag{4}$$

Коэффициенты Лагранжа $\lambda_i,\ i = 1, 2,$ определяются из системы уравнений

$$\mu_p = \mu^T X = \frac{\lambda_1}{2}\mu^T A\mu + \frac{\lambda_2}{2}\mu^T A\mathbf{1} + (1-\alpha)\mu^T AX_u,$$

$$1 = \mathbf{1}^T X = \frac{\lambda_1}{2}\mathbf{1}^T A\mu + \frac{\lambda_2}{2}\mathbf{1}^T A\mathbf{1} + (1-\alpha)\mathbf{1}^T AX_u.$$

Решение этой системы имеет громоздкий вид и поэтому здесь не приведено. Заметим только, что оно представляет собой аффинное преобразование вектора X_u и числа μ_p с детерминированными коэффициентами. Значит, можно считать, что решение X^* задачи (1)–(3) имеет следующую структуру

$$X^* = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mu_p + dX_u,$$

где векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и число d определяются по исходным данным задачи.

Исходя из представления решения X^*, запишем соответствующую дисперсию доходности ПЦБ

$$\sigma_p^2 = \mu_p^2\mathbf{b}^T\Sigma\mathbf{b} + 2\mu_p\left(\mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{b} + d\mathbf{b}^T\Sigma X_u\right) + \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a} + d\mathbf{a}^T\Sigma X_u + d^2\sigma_u^2. \tag{5}$$

Выделим некоторые свойства оптимального решения X^*. Сначала заметим, что согласно представлению X^* с увеличением задаваемой доходности μ_p компоненты x_i, $i = 1, 2, \ldots, N,$ изменяются линейно. При возможности операции "короткая продажа” они увеличиваются, если соответствуют более доходным активам. В противном случае они уменьшаются. Данный процесс происходит за счет изменения доходности μ_p до появления операции “короткая продажа”. Повлиять на начало этого момента может еще одна составляющая X^*, связанная с X_u. Здесь имеют значение и структура индексного фонда, и коэффициент усреднения.

Далее рассмотрим зависимость между риском и доходностью (5) в системе координат “доходность–риск”. В силу положительной определенности матрицы σ уравнение (5) определяет гиперболу G в плоскости (σ, μ). Очевидно, что точка, соответствующая любому эффективному усредненному портфелю, лежит на этой кривой. Выделим оптимальное свойство эффективных портфелей, связанное с кривой G.

Пусть точка (σ_a, μ_a) соответствует портфелю со структурой X_a и $\rho = \|X_u - X_a\|$. Тогда для всех портфелей X_b с (σ_b, μ_b) и $\|X_u - X_a\| \le \rho$ имеет место следующее.

Если $(\sigma_b, \mu_b) \in G$ и $\sigma_b = \sigma_a$, то $\mu_b \ge \mu_a$. Если $(\sigma_b, \mu_b) \in G$ и $\mu_b = \mu_a$, то $\sigma_b \le \sigma_a$. Таким образом [3], точки (σ_p, μ_p) эффективных портфелей на G описывают часть G, которую естественно назвать фронтом эффективных усредненных портфелей.

2. Усредненные ПЦБ с безрисковыми активами

Пусть инвестор формирует свой ПЦБ как комбинацию из безрискового актива и заданного усредненного портфеля активов, включающего только рисковые ценные бумаги. Усреднение будем понимать в смысле предыдущего пункта. Традиционно (см. [3]) будем называть подобные портфели комбинированными.

Обозначим: R_0 – ставка доходности безрискового актива за один период владения; x_0 – доля безрисковых вложений в структуре ПЦБ; R_t, σ_t и μ_t, $t = r, p$, – доходность, ожидаемая доходность и риск, соответственно. Последние параметры являются характеристиками рисковой части ПЦБ $(t = r)$ и комбинированного ПЦБ $(t = p)$, относятся к одному периоду владения и удовлетворяют условиям $\mu_r > R_0$, $\sigma_r > 0$. Из очевидных равенств $\mu_p = x_o R_0 + (1 - x_o)\mu_r$, $\sigma_p = (1 - x_0)\sigma_r$ вытекает равенство [3]

$$\mu_p = R_0 + (\mu_r - R_0)\sigma_p/\sigma_r. \tag{6}$$

Будем считать, что заданы значения безрисковой ставки R_0, ожидаемой доходности ПЦБ μ_p и структура ПЦБ индексного фонда X_u. Пусть введенные ранее обозначения сохраняют свой смысл. Рассмотрим следующее обобщение задачи Тобина [1–3]

$$\alpha\sigma_p^2 + (1-\alpha)\|X - X_u\|^2 = \alpha X^T \Sigma X + (1-\alpha)(X - X_u)^T (X - X_u) \to \min_X, \tag{7}$$

$$X^T \mu + \left(1 - X^T \mathbf{1}\right) R_0 = \mu_p. \tag{8}$$

Как видно, по сравнению с задачей Тобина, изменилась целевая функция: минимизируются некоторое усреднение риска портфеля и расстояния до ПЦБ индексного фонда. Несмотря на это усложнение, задача (6), (7) по-прежнему допускает аналитическое решение с помощью метода Лагранжа. Функционал Лагранжа при этом имеет вид

$$\Lambda(X, \lambda) = \alpha X^T \Sigma X + (1-\alpha)(X - X_u)^T (X - X_u) + \lambda\left(\mu_p - X^T \mu - \left(1 - X^T \mathbf{1}\right) R_0\right).$$

Продифференцировав эту функцию по X и приравняв нулю вектор производных, получим

$$2\alpha\Sigma X + 2(1-\alpha) E (X - X_u) - \lambda(\mu - R_0 \mathbf{1}) = 0.$$

Значит,

$$X = (\lambda/2\,)\,A\,(\mu - R_0\mathbf{1}) + (1-\alpha)\,AX_u,$$

где A – обратная к матрице $\alpha\Sigma + (1-\alpha)E$.

Определим λ. Умножим последнее равенство слева на матрицу $(\mu - R_0\mathbf{1})^T$ и получим

$$(\mu - R_0\mathbf{1})^T X = \mu_p - R_0 = \lambda(\mu - R_0\mathbf{1})^T A\,(\mu - R_0\mathbf{1})/2 + (1-\alpha)\,(\mu - R_0\mathbf{1})^T AX_u.$$

Значит,

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_p - R_0}{(\mu - R_0\mathbf{1})^T A\,(\mu - R_0\mathbf{1})} - \frac{(1-\alpha)\,(\mu - R_0\mathbf{1})^T AX_u}{(\mu - R_0\mathbf{1})^T A\,(\mu - R_0\mathbf{1})\,.}$$

Таким образом, решение задачи (7), (8) имеет вид

$$X^* = c_1 Y + Z, \tag{9}$$

где $Y = A\,(\mu - R_0\mathbf{1})\,,\ Z = (1-\alpha)\,AX_u$,

$$c_1 = \Big((\mu_p - R_0) - (1-\alpha)\,(\mu - R_0\mathbf{1})^T AX_u\Big)/D,\ D = (\mu - R_0\mathbf{1})^T A\,(\mu - R_0\mathbf{1})\,.$$

Следовательно, искомое решение задачи (7), (8) является линейной комбинацией векторов Y и Z, причем эти векторы не зависят от ожидаемой доходности портфеля и склонности инвестора к риску. Отсюда вытекают следующие свойства оптимальных комбинированных портфелей.

Все оптимальные портфели, включающие безрисковый и рисковые активы, независимо от склонности инвестора к риску и ожидаемой доходности портфеля, могут быть получены, исходя из следующего свойства. Разность между векторами X^* и Z коллинеарна вектору Y. Векторы Y и Z не зависят от ожидаемой доходности портфеля и склонности инвестора к риску. Рисковый портфель соответствует частному случаю рассматриваемого комбинированного портфеля при $x_0 = 0$, что говорит об отсутствии безрисковых вложений. В этом случае для X^* должно выполняться равенство (4). Поэтому имеет место соотношение

$$1 = \mathbf{1}^T X^* = \mathbf{1}^T(c_1 Y) + \mathbf{1}^T Z.$$

Таким образом, можно выделить портфель активов со структурой вида

$$\overline{X^*} = \frac{\left(1 - \mathbf{1}^T Z\right) A\,(\mu - R_0\mathbf{1})}{\mathbf{1}^T A\,(\mu - R_0\mathbf{1})} + Z. \tag{10}$$

Обозначим характеристики ПЦБ из (10) через μ_r, σ_r и заметим следующее. Портфель (10) включает в себя только рисковые активы и удовлетворяет равенству (4). Следовательно, он является элементом множества оптимальных по Марковицу усредненных ПЦБ, поэтому точка с координатами (μ_r, σ_r) должна принадлежать кривой эффективных портфелей, определяемой равенством (5). С другой стороны, портфель со структурой $\overline{X^*}$ принадлежит множеству эффективных комбинированных ПЦБ, значит, точка (μ_r, σ_r) лежит на прямой (6). Таким образом, портфелю $\overline{X^*}$ соответствует точка касания линий (5) и (6). Итак, портфель со структурой $\overline{X^*}$ имеет свойства, аналогичные свойствам портфеля Тобина, поэтому о нем можно говорить как о портфеле Тобина усредненного ПЦБ.

Подводя итог, сформулируем следующее предложение.

Утверждение. *Оптимизация комбинированного усредненного ПЦБ сводится к оптимизации ПЦБ, включающего только рисковые ценные бумаги. Структура такого рискового портфеля единственным образом определяется с помощью вектора вида (10).*

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бейли Дж.В.* Инвестиции. М.: ИНФРА-М, 1997. 265 с.
2. *Markowitz H.M.* Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Oxford, Blackwell, 1990. 387 p.
3. *Малюгин В.И.* Рынок ценных бумаг. Количественные методы анализа. М.: Дело, 2003. 320 с.
4. *Севодин М.А., Куимов П.А.* О диверсификации индексного фонда // Перспективы науки. 2016. № 7 (82). С. 29–32.
5. *Северина Л.А., Севодин М.А.* О диверсификации индексного фонда // МЭЖ. 2020. № 6. С. 683–689.
6. *Симушкин С.В.* Методы теории вероятностей. М.: Лань, 2020. 548 с.

Поступила в редакцию 5.02.2024
Принята к публикации 6.03.2024

Севодин Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Комсомольский просп., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия
E-mail: *m.sevodin@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)
UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 92–98

ORIGINAL ARTICLE
doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.92-98

Combined Strategies for Managing the Securities Portfolio Structure

M.A. Sevodin

Perm National Research Polytechnic University, Perm, 614990 Russia
E-mail: *m.sevodin@mail.ru*

Received February 5, 2024; Accepted March 6, 2024

Abstract

The possibilities of combining known techniques for optimizing the securities portfolio (SP) structure were studied. A method was introduced that enables the simultaneous use of both passive and active approaches to managing the SP structure. The combined application of these methods is based on techniques for SP diversification and searching for an SP structure that mirrors the SP structure of an index fund. The objective function was modified in order to optimize the SP structure according to the traditional “return–risk” approach. The proposed objective function, along with the security risk, describes the degree to which the desired distribution of SP shares coincides with the distribution generated using an index fund. It was established that the main properties of optimal SPs obtained with the “return–risk” approach also occur in the case under consideration.

Keywords: securities portfolio, profitability, risk, index fund, structure optimization
Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

References

1. Sharpe W.F., Alexander D.V., Bailey J.V. *Investitsii* [Investments]. Moscow, INFRA-M, 1997. 265 p. (In Russian)
2. Markowitz H.M. *Mean Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.* Oxford, Blackwell, 1990. 387 p.
3. Malyugin V.I. *Rynok tsennykh bumag. Kolichestvennye metody analiza* [Securities Market. Quantitative Methods of Analysis]. Moscow, Delo, 2003. 320 p. (In Russian)
4. Sevodin M.A. Diversification of the index fund. *Perspekt. Nauki*, 2016, no. 7 (82), pp. 29–32. (In Russian)
5. Severina L.A., Sevodin M.A. The diversification of an index fund. *MEZh*, 2020, no. 6, pp. 683–689. (In Russian)
6. Simushkin S.V. *Metody teorii veroyatnostei* [Methods of Probability Theory]. Moscow, Lan', 2020. 548 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Севодин М.А.* О смешанных стратегиях управления структурой портфеля ценных бумаг// Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 92–98. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.92-98. ⟩

⟨ ***For citation*:** Sevodin M.A. Combined strategies for managing the securities portfolio structure. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 92–98.
URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.92-98. (In Russian) ⟩