УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 1
С. 74–91

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.968.23

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.74-91

ЗАДАЧА ТРИКОМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н.Б. Плещинский

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Получены формулы обращения интегральных уравнений, возникающих при исследовании задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе. Условия разрешимости вспомогательной переопределенной задачи в эллиптической части смешанной области найдены методом функции Грина. Установлена связь между функциями Грина задачи Дирихле и задачи N для уравнения Лапласа в виде интегральных уравнений, взаимно обращающих друг друга. Рассмотрены различные интегральные уравнения, в том числе разрешимые в явном виде, к которым сводится задача Трикоми. Явное решение характеристического сингулярного уравнения с ядром Коши получено без привлечения теории краевых задач для аналитических функций.

Ключевые слова: задача Трикоми, переопределенная задача, интегральное уравнение, функция Грина, конформное отображение

Введение

В 1923 г. Ф. Трикоми [1, 2] исследовал уравнение с частными производными, которое изменяет тип с эллиптического на гиперболический при переходе через линию $y = 0$ параболического вырождения (уравнение Трикоми). В 1945 г. Ф.И. Франкль [3] показал, что уравнение Трикоми при определенных допущениях описывает течения газа при переходе через скорость звука. Позже были найдены и другие задачи физики и механики, сводящиеся к уравнениям смешанного типа.

М.А. Лаврентьев [4] предложил исследовать модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(уравнение Лаврентьева – Бицадзе). Задачу Трикоми и ее обобщения для этого уравнения изучал А.В. Бицадзе (см. [5, 6] и другие его работы).

Обзор более поздних публикаций по граничным задачам для уравнений смешанного типа можно найти, например, в монографиях [7–9].

Пусть линия AB (отрезок оси x в случае модельных уравнений) разделяет области D^+ и D^-, в первой из них уравнение является эллиптическим, а во второй – гиперболическим. В областях D^+ и D^- нужно найти решения уравнения при условии, что предельные значения этих решений и их нормальных производных с разных сторон на AB совпадают (или удовлетворяют некоторым более сложным зависимостям – условиям склеивания). Следуя Ф. Трикоми, обычно используют обозначения $\tau(x) = u(x, 0 \pm 0)$, $\nu(x) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0 \pm 0)$. На оставшихся частях границ областей D^+ и D^- также должны быть заданы условия, при которых граничная задача будет корректной.

Таким образом, речь идет о задаче сопряжения на AB решений, вообще говоря, двух различных уравнений с частными производными в D^+ и D^-. Метод сведения таких задач к интегральным уравнениям предложил еще Ф. Трикоми. Нужно рассмотреть вспомогательные граничные задачи в D^+ и D^- (например, задачу N и задачу Коши – Гурса), получить зависимости между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ (эти зависимости обычно называют "основными соотношениями") и исключить одну из них.

В данной работе в качестве вспомогательных граничных задач рассмотрены такие переопределенные задачи в областях D^+ и D^-, когда на AB заданы одновременно и функция $\tau(\cdot)$, и функция $\nu(\cdot)$. Условия разрешимости переопределенных задач и являются основными соотношениями.

Метод переопределенной граничной задачи успешно использовался при исследовании ряда задач для уравнений с частными производными, в частности, теории распространения и дифракции электромагнитных и упругих волн (см., например, обзорные статьи [10, 11]).

В данной работе показано, что разные формы условий разрешимости вспомогательной граничной задачи в области D^+ образуют пару взаимно обращающих друг друга интегральных уравнений, ядра которых выражаются через функции Грина задачи Дирихле и задачи N. Функции Грина получены методом электростатических изображений или методом конформных отображений при условии, что построена полная система точек, симметричных относительно границы области.

Если область D^+ является половиной области D, симметричной относительно отрезка AB, то функции Грина задачи Дирихле и задачи N в области D^+ находятся с помощью функции Грина задачи Дирихле в области D. Следуя методу Ю.М. Крикунова ([12–14]), функции Грина для области D^+ можно выразить через функции Грина таких же задач в некоторой канонической области, в качестве которой удобно взять верхнюю полуплоскость. В итоге интегральные уравнения, к которым сводится задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе, преобразуются в характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши. Явное решение этого уравнения получено методом интегральных преобразований, минуя переход к краевой задаче Римана для аналитических функций.

1. Задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

Пусть область D^+ ограничена снизу отрезком AB$=[0,1]$ оси x, а сверху – гладкой или кусочно-гладкой кривой Г без точек самопересечения. Пусть область D^- – характеристический треугольник в полуплоскости $y < 0$ с основанием AB и боковыми сторонами AC: $y = -x$ и BC: $y = x - 1$ (рис. 1).

Задача Трикоми состоит в следующем.

Нужно найти решения уравнения Лаврентьева – Бицадзе в D^+ и D^-, удовлетворяющие условиям сопряжения $u(x, 0{+}0) = u(x, 0{-}0)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0{+}0) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x, 0{-}0)$ и граничным условиям

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad u\Big|_{AC} = \psi(x).$$

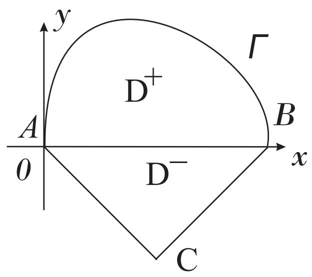

Рис. 1. Смешанная область задачи Трикоми

Вспомогательная переопределенная задача в области D^- ставится так: найти решение волнового уравнения в характеристическом треугольнике, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\nu(x), \quad u\Big|_{AC}=\psi(x).$$

Из формулы Даламбера следует, что

$$\tau(x)-\int\limits_0^x \nu(\xi)\,d\xi=\psi_1(x), \qquad \psi_1(x)=2\psi\Big(\frac{x}{2}\Big)-\psi(0). \tag{1}$$

Отсюда по известной функции $\nu(\cdot)$ легко найти функцию $\tau(\cdot)$ и, наоборот, по известной функции $\tau(\cdot)$ – функцию $\nu(\cdot)$.

Вспомогательная переопределенная граничная задача в области D^+ ставится так: найти решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее на отрезке AB условиям

$$u(x,0)=\tau(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\nu(x)$$

и принимающее заданные значения $\varphi(s)$ на дуге Γ.

Связи между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ найдем методом функции Грина. Если $G_1(\zeta,z)$ – функция Грина задачи Дирихле для области D^+, то

$$u(x,y)=-\int\limits_0^1 \tau(\xi)\,\frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi,0,x,y)\,d\xi-\int\limits_\Gamma \varphi(s)\,\frac{\partial G_1}{\partial n_\zeta}(\xi(s),\eta(s),x,y)\,ds_\zeta.$$

Если $G_2(\zeta,z)$ – функция Грина задачи N для области D^+, то

$$u(x,y)=-\int\limits_0^1 \nu(\xi)\,G_2(\xi,0,x,y)\,d\xi-\int\limits_\Gamma \varphi(s)\,\frac{\partial G_2}{\partial n_\zeta}(\xi,0,x,y)\,ds_\zeta.$$

Будем считать, что $\varphi(\cdot)\equiv 0$, что не уменьшает общности рассуждений. Тогда

$$\nu(x)=-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\int\limits_0^1 \tau(\xi)\,\frac{\partial G_1}{\partial \eta}(\xi,0,x,y)\,d\xi\Big)\Big|_{y=0}, \tag{2}$$

$$\tau(x)=-\int\limits_0^1 \nu(\xi)\,G_2(\xi,0,x,0)\,d\xi. \tag{3}$$

Таким образом, задача Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе сводится к системе из двух уравнений на AB: первое – зависимость между $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$, полученная из D^-, второе – из D^+. Можно исключить одну из этих функций и перейти к интегральному уравнению относительно другой. Но прежде чем это сделать, выскажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $G_1(x,y,\xi,\eta)$ и $G_2(x,y,\xi,\eta)$ – функции Грина задачи Дирихле и задачи N для области D^+, то формулы (2) и (3) представляют собой пару интегральных уравнений, взаимно обращающих друг друга.*

В дальнейшем будем считать, что функции $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ таковы, что интегралы в приведенных формулах существуют в обычном смысле или в смысле главного значения. Для этого достаточно предположить, что $\tau'(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ удовлетворяют условию Гёльдера в интервале $(0,1)$ и могут иметь (но не обязательно) интегрируемые особенности в его граничных точках. Так как рассматривается классическое решение задачи Трикоми, непрерывное в смешанной области, то необходимо $\tau(0)=\tau(1)=0$.

2. Функции Грина граничных задач для уравнения Лапласа

Функции Грина задачи Дирихле и задачи N (а также задачи Неймана) могут быть построены в некоторых случаях методом электростатических изображений ([15], гл. IV, §4). Этот метод состоит в следующем (удобно использовать комплексные координаты точек плоскости $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$).

Фундаментальное решение уравнения Лапласа $q(z,\zeta)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|z-\zeta|}$ рассматривается как потенциал электрического поля в точке z плоскости, который создает положительный заряд с единичной плотностью, размещенный на прямой, проходящей через точку ζ перпендикулярно этой плоскости. Функция Грина имеет вид $G(z,\zeta)=q(z,\zeta)+g(z,\zeta)$, слагаемое $g(z,\zeta)$ строится так, чтобы были выполнены соответствующие граничные условия. Это слагаемое составляется из потенциалов положительных и отрицательных зарядов с единичной плотностью, размещенных на прямых, проходящих через некоторые точки ζ_j плоскости.

Метод электростатических изображений можно использовать, если удастся построить полную систему точек ζ_j, симметричных относительно границы области, только одна из которых принадлежит этой области. В этих точках и размещаются прямые с положительными и отрицательными зарядами. Как известно, линиями симметрии на плоскости являются только прямые и окружности. Поэтому граница области D_1 должна состоять из отрезков прямых и дуг окружностей.

Если, как в рассматриваемом случае, в границу области D_1 входит отрезок вещественной оси, то множество симметричных точек состоит из пар точек, симметричных относительно вещественной оси. Если точка ζ_j принадлежит этому множеству, то и точка $\overline{\zeta_j}$ ему принадлежит. Тогда, если две точки ζ_j и ζ_k симметричны относительно окружности, часть которой входит в границу области D_1, то в множестве симметричных точек содержатся точки $\overline{\zeta_j}$ и $\overline{\zeta_k}$. Поэтому взаимно уничтожаются разности потенциалов пар зарядов на окружностях, расположенных симметрично относительно вещественной оси.

Функция Грина задачи Дирихле строится следующим образом. Пусть ζ_j^+ – точки в верхней полуплоскости, в которых размещены положительно заряженные прямые, и ζ_j^- – точки в верхней полуплоскости, в которых размещены отрицательно заряженные прямые. Тогда в симметричных им точках нижней полуплоскости должны быть размещены прямые с зарядами противоположных знаков, следовательно,

$$G_1(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\zeta_j^+|-\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\zeta_j^-|-\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\overline{\zeta_j^+}|+\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\overline{\zeta_j^-}|. \tag{4}$$

Для задачи N в точках $\overline{\zeta_j^\pm}$, симметричных точкам $\zeta_j^\pm$ относительно вещественной оси, должны находиться заряды таких же знаков. Поэтому

$$G_2(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\zeta_j^+|-\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\zeta_j^-|+\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\overline{\zeta_j^+}|-\frac{1}{2\pi}\sum_j \ln|z-\overline{\zeta_j^-}|. \tag{5}$$

Если система симметричных точек бесконечна, то нужно убедиться в сходимости соответствующих рядов.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть функции Грина $G_1(z,\zeta)$ и $G_2(z,\zeta)$ задачи Дирихле и задачи N построены методом электростатических изображений. Чтобы преобразовать одну из них в другую, нужно изменить знаки у половины слагаемых в формуле (4) или в формуле (5).*

Полная система точек, симметричных относительно границы области, может быть построена в том случае, когда область, ограниченная отрезками прямых и дугами окружностей, является ячейкой симметрии (или правильной областью) ([16], с. 22). Это значит, что при преобразованиях симметрии относительно всех участков границы области и возникающих при этом новых границ получаются области, покрывающие в совокупности всю плоскость и не пересекающиеся друг с другом (однослойное паркетное покрытие).

Как известно, преобразованиями симметрии на плоскости являются дробно-линейные преобразования от $\overline{\zeta}$ (конформные отображения 2-го рода) [17].

Ячейки симметрии являются половинами симметричных фундаментальных областей некоторых групп дробно-линейных преобразований.

Действительно, если $S_k(z)$ – преобразования симметрии относительно прямых и окружностей, части которых образуют границу области, то обратные преобразования $S_k^{-1}(z)$ совпадают с $S_k(z)$. Все возможные комбинации преобразований $S_k(z)$ образуют группу, которую называют расширенной группой симметрии. Преобразования этой группы, зависящие от ζ, образуют группу симметрии. Одна из фундаментальных областей группы симметрии – область, составленная из исходной области и примыкающего к ней ее образа, полученного при одном из симметричных преобразований. В такой области нет конгруентных точек, и в окрестности любой точки ее границы есть точки, конгруентные точкам области.

Но не всегда половина симметричной фундаментальной области группы дробно-линейных преобразований является ячейкой симметрии.

Рассмотрим частный случай примера 2 из работы [18] – трехчленную группу дробно-линейных преобразований z, $\dfrac{z-1}{z}$, $\dfrac{1}{1-z}$. Фундаментальные области этой группы – внешность двух изометрических окружностей и конгруентные ей части плоскости, ограниченные одной из окружностей и отрезком z_1z_2 вертикальной прямой. Такие фундаментальные области не являются ячейками симметрии, при симметричном отражении области через ее границы и границы новых областей образуется двулистная риманова поверхность.

Пусть $\{T_j(z)\}$ – преобразования группы дробно-линейных преобразований (конечной или бесконечной). Если часть границы области D_1 – отрезок вещественной оси, то множество симметричных точек имеет вид $\{T_j(\zeta),\, T_j(\overline{\zeta})\}$.

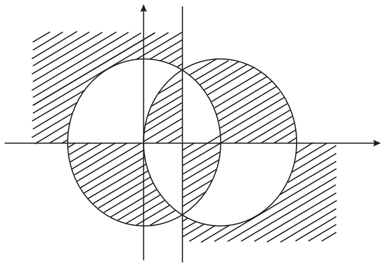

Рис. 2. Паркетное покрытие плоскости

На рис. 2 показано паркетное покрытие плоскости, порожденное группой ангармонических отношений

$$z,\ \frac{z}{z-1},\ \frac{1}{z},\ \frac{z-1}{z},\ \frac{1}{1-z},\ 1-z$$

и дополнительным преобразованием симметрии относительно вещественной оси. Две окружности и вертикальная прямая делят плоскость на шесть частей, каждая из них состоит из двух ячеек симметрии, симметричных относительно вещественной оси, то есть их всего двенадцать. В ([17], с. 147, рис. 38) показано более сложное покрытие плоскости. В работах [19, 20] паркетные покрытия плоскости использованы при построении функций Грина в более сложных случаях.

3. Конформные отображения и функции Грина

Метод конформных отображений позволяет не только записать в явном виде функции Грина для ряда областей, но и ответить на вопросы, связанные с существованием и единственностью этих функций. Хорошо известно следующее утверждение.

Пусть функция $w = f(z,\zeta)$ по переменной z определяет конформное отображение области D на единичный круг $|w| < 1$, причем $f(\zeta,\zeta) = 0$ $(\zeta \in D)$. Тогда

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z,\zeta)|}$$

– функция Грина задачи Дирихле для области D.

Поэтому задача построения функции Грина и задача построения конформного отображения области на единичный круг – почти одно и то же.

Конформные отображения области на единичный круг используются также при решении задачи Шварца: найти аналитическую в области функцию по значениям на границе области ее вещественной части. Эта задача сводится (в случае односвязной области) к задаче Дирихле (см. [21], п. 27.2). Функция Грина задачи Дирихле является вещественной частью комплексной функции Грина.

Метод построения оператора Шварца с помощью конформного отображения развит в цикле работ Л.А. Аксентьева [22–24] (см. также [16, 25]). При построении конформного отображения области на единичный круг им использован принцип симметрии: симметричные точки переходят в симметричные точки. Самый простой пример: $\omega(z,\zeta)=\dfrac{z-\zeta}{z-\overline{\zeta}}$ – отображение верхней полуплоскости на единичный круг, точка ζ переходит в нуль.

Как показано в ([25], теорема 1), если $T_k(z)$, $T_kS_1(z)$, $k=0\,..\,n$, – конечная группа симметрии односвязной области D, ограниченной алгебраической кривой L, и все симметричные образы этой области образуют паркетное покрытие плоскости, то функция

$$f(z,\zeta)=\frac{g(z,\zeta)}{g(z,t_0)},\quad g(z,\zeta)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\zeta-T_k(z)}{\zeta-T_kS_1(z)},\quad t_0\in\mathcal{L},$$

конформно отображает область D на единичный круг, точка t_0 переходит в точку 1. В работе [23] получено условие конечности группы симметрии (в [16] исправлена неточность, на которую указано в обзоре [26], с. 47).

Если D – правильная область, то группу симметрии образуют дробно-линейные преобразования $T_k(z)$ и их суперпозиции с преобразованием $S_1(z)$. Если область симметрична относительно вещественной оси, то можно считать, что $S_1(z)=\overline{z}$.

Функция Грина задачи Дирихле инвариантна относительно конформного отображения областей ([27], с. 209; [14], §8).

I. *Пусть функция $w=\omega(z)$ конформно отображает область D в плоскости z на область D_0 в плоскости w. Если $G_0(w,\upsilon)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D_0, то $G(z,\zeta)=G_0[\omega(z),\omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи Дирихле в области D.*

Например, если

$$G_0(w,\upsilon)=\frac{1}{2\pi}\ln\Big|\frac{1-w\overline{\upsilon}}{w-\upsilon}\Big|$$

– функция Грина задачи Дирихле в единичном круге и $w=2z-1$ – отображение круга $|2z-1|<1$ на единичный круг, то для первого круга

$$G_1(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\Big|\frac{z+\overline{\zeta}-2z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\Big|.$$

В работах ([12, 13], см. также [14], §8) сформулированы и доказаны важные свойства функций Грина задачи Дирихле и задачи N для уравнения Лапласа. Перечислим их с некоторыми дополнениями.

Пусть D^* – область, симметричная области D^+ относительно вещественной оси, область $D=D^+\cup AB\cup D^*$.

II. *Если $G(z,\zeta)$ – функция Грина для области D, то $G(z,\overline{\zeta})=G(\overline{z},\zeta)$.*

Следовательно, функция Грина задачи N для полукруга $|2z-1|<1$, $\operatorname{Im}z>0$ имеет вид

$$G_2(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\Big|\frac{z+\overline{\zeta}-2z\overline{\zeta}}{z-\zeta}\cdot\frac{z+\zeta-2z\zeta}{z-\overline{\zeta}}\Big|.$$

Тогда при $z\to x$, $\zeta\to\xi$

$$G_2(x,0,\xi,0)=G_2(x,\xi)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{x+\xi-2x\xi}{|x-\xi|}.\tag{6}$$

III. *Если $G(z,\zeta)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D, то $G_1(z,\zeta)=G(z,\zeta)-G(z,\overline{\zeta})$ – функция Грина задачи Дирихле в области D^+ и $G_2(z,\zeta)=G(z,\zeta)+G(z,\overline{\zeta})$ – функция Грина задачи N в области D^+.*

Легко видеть, что $G_1(z,\zeta)=0$ при $z=x\in$ AB.

Вторая часть утверждения может быть доказана так.

Из II следует, что $G_2(z,\zeta) = G(z,\zeta) + G(\overline{z},\zeta) = G(x+iy;\zeta) + G(x-iy;\zeta)$. Тогда

$$\frac{\partial G_2(z,\zeta)}{\partial y} = \frac{\partial G(x+iy;\zeta)}{\partial y} - \frac{\partial G(x-iy;\zeta)}{\partial y}.$$

Это выражение равно нулю при $y=0$.

IV. $G(\zeta,z) = G(z,\zeta)$, $G_1(\zeta,z) = G_1(z,\zeta)$, $G_2(\zeta,z) = G_2(z,\zeta)$.

В итоге пары функций Грина могут быть получены следующим образом.

Теорема 3. *Пусть функция $w=\omega(z)$ отображает область $D = D^+ \cup AB \cup D^*$ на единичный круг. Тогда*

$$G_1(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{1-\omega(z)\,\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z)-\omega(\zeta)}\,\frac{\omega(z)-\omega(\overline{\zeta})}{1-\omega(z)\,\overline{\omega(\overline{\zeta})}}\right|$$

– функция Грина задачи Дирихле в области D^+ и

$$G_2(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{1-\omega(z)\,\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(z)-\omega(\zeta)}\,\frac{1-\omega(z)\,\overline{\omega(\overline{\zeta})}}{\omega(z)-\omega(\overline{\zeta})}\right|$$

– функция Грина задачи N в области D^+.

Заметим, что $\overline{\omega(\overline{z})} = \omega(z)$ в силу симметрии области D. Поэтому при $z \to x$ и $\zeta \to \xi$ выражения функций Грина становятся существенно более простыми.

В работе [12] установлена связь между функциями Грина задачи N в конформно эквивалентных областях. Это возможно и в случае задачи Дирихле.

Пусть D^+ и D_0 – области, расположенные в верхних полуплоскостях и ограниченные отрезком AB и кривыми с концами в точках A и B, а $w=\omega(z)$ – функция, конформно отображающая область D^+ на область D_0, причем так, что отрезок AB переходит в себя и $\omega(0)=0$, $\omega(1)=1$. В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $w=\omega(z)$.

Теорема 4. *Если $G_1^0(w,\upsilon)$ – функция Грина задачи Дирихле в области D_0, то $G_1(z,\zeta) = G_1^0[\omega(z),\omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи Дирихле в области D^+. Если $G_2^0(w,\upsilon)$ – функция Грина задачи N в области D_0, то $G_2(z,\zeta) = G_1^0[\omega(z),\omega(\zeta)]$ – функция Грина задачи N в области D^+.*

В ([14], с. 33, теорема 1) доказана вторая часть этого утверждения. Доказательство первой части проводится по аналогии.

Эту теорему можно применять в случае, когда известна функция, осуществляющая конформное отображение области на некоторую каноническую область, для которой уже получена функция Грина одной из рассматриваемых задач. Функция Грина задачи N в верхней полуплоскости получается с помощью конформного отображения верхней полуплоскости на полукруг $|2w-1|<1$, $\operatorname{Im} w > 0$:

$$w = \omega(z) = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}+\sqrt{1-z}}$$

([14], с. 34; в формуле (3.25) имеется опечатка!). След этой функции Грина при $z \to t$, $\zeta \to \tau$ имеет вид

$$G_2(t,\tau) = -\frac{1}{\pi}\ln|t-\tau| + \frac{2}{\pi}\ln|\sqrt{t(1-\tau)}+\sqrt{\tau(1-t)}| \qquad (7)$$

(формула (3.26), но мы используем другие обозначения переменных). Эта формула следует из (6) с помощью замены переменных.

Из (7) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} G_2(t,\tau) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sqrt{\tau(1-\tau)}}{\sqrt{t(1-t)}}\,\frac{1}{\tau - t}. \tag{8}$$

4. Интегральные уравнения задачи Трикоми

Вернемся к системе уравнений (1), (2) или (1), (3). Простая связь (1) между функциями $\tau(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ позволяет легко перейти от системы двух уравнений к одному уравнению. Прежде всего, из уравнений (1) и (3) следует, что

$$\int\limits_0^x \nu(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^1 \nu(\xi)\,G_2(\xi,0,x,0)\,d\xi = -\psi_1(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

и, после дифференцирования,

$$\nu(x) + \int\limits_0^1 \nu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial x}\,G_2(\xi,0,x,0)\,d\xi = f(x), \quad f(x) = -\psi_1'(x), \tag{10}$$

$$G_2(\xi,0,x,0) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-\omega(\xi)\,\omega(x)}{|\omega(\xi)-\omega(x)|},$$

функция $\omega(z)$ отображает область D_1 на верхний полукруг единичного круга.

Если область D_1 – полукруг $|2z-1|<1$, $\operatorname{Re} z > 0$, то $\omega(z) = 2z-1$ и функция $G_2(\xi,0,x,0)$ имеет вид (6). Тогда уравнение (10) примет вид

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \nu(\xi)\left(\frac{1}{\xi - x} + \frac{1-2\xi}{\xi + x - 2\xi x}\right)d\xi = f(x). \tag{11}$$

Оно было впервые получено и решено А.В. Бицадзе. Его решение имеет вид

$$\nu(x) = \frac{1}{2}\,f(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 f(t)\,\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2tx}\right)dt.$$

Если в уравнении (9) введем новую искомую функцию $\mu(x) = \int\limits_0^x \nu(\xi)\,d\xi$, то после интегрирования по частям получим

$$\mu(x) - \int\limits_0^1 \mu(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \xi}\,G_2(\xi,0,x,0)\,d\xi = g(x), \quad g(x) = -\psi_1(x), \tag{12}$$

а в частном случае

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \mu(\xi)\left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1-2x}{\xi + x - 2\xi x}\right)d\xi = g(x). \tag{13}$$

Точно такому же уравнению должна удовлетворять функция $\tau(\cdot)$, так как $\tau(\cdot) = \mu(\cdot)$. Формула обращения уравнения (13)

$$\mu(x) = \frac{1}{2}\,g(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 g(t)\,\sqrt{\frac{x(1-t)}{t(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1-2x}{t+x-2tx}\right)dt$$

получена в [28].

В работе [29] Ф.Д. Гахов и Л.И. Чибрикова показали, что интегральное уравнение (11) принадлежит широкому классу интегральных уравнений, решение которых может быть получено в замкнутой форме методом аналитического продолжения, то есть сведением к краевой задаче для аналитических функций. Эта работа положила начало разработке теории краевых задач для аналитических функций на римановых поверхностях (см. обзор [26]).

Решение частного случая уравнения (9) с логарифмическим ядром (11) построено в ([30], §19) также методом сведения к краевой задаче Римана. Существенно, что при этом были использованы вспомогательные кусочно-аналитические функции – аналоги интеграла типа Коши, автоморфные относительно группы дробно-линейных преобразований $z,\ \dfrac{z}{2z-1}$. Наиболее полное изложение теории краевых задач для автоморфных аналитических функций дано в [31].

В работах Ю.М. Крикунова [13, 14] предложено на основе формулы (8) перейти от уравнения (10) к характеристическому сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши с помощью замены переменных.

Теорема 5. *Интегральные уравнения (10) и (12) сводятся к характеристическим сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши.*

Доказательство. Повторим рассуждения из ([14], §17). Пусть функция Грина $G_2(z,\zeta)$ задачи N в области D^+ $G_2(z,\zeta) = G_2^0[\omega(z),\omega(\zeta)]$, где $G_2^0(w,v)$ – функция Грина $G_2^0(w,v)$ задачи N в верхней полуплоскости; здесь функция $w=\omega(z)$ дает конформное отображение области D^+ на верхнюю полуплоскость. Пусть $z=\alpha(w)$ – функция, обратная к $w=\omega(z)$, и $v=\omega(\zeta)$.

Перейдем к пределу из области D^+ на отрезок AB: $z\to x,\ \zeta\to\xi$ и из верхней полуплоскости на вещественную ось: $w\to t,\ v\to\tau$. Тогда из $G_2[\alpha(w),\alpha(v)] = G_2^0(w,v)$ следует $G_2[\alpha(t),\alpha(\tau)] = G_2^0(t,\tau)$ и $\dfrac{\partial G_2^0}{\partial t}(t,\tau) = \dfrac{\partial G_2}{\partial x}[\alpha(t),\alpha(\tau)]\,\alpha'(t)$. Производная функции $G_2^0(t,\tau)$ была вычислена раньше (формула (8)).

В уравнении (10) выполним замену переменных: $x=\alpha(t),\ \xi=\alpha(\tau)$. Для новых функций $\nu_1(t) = \sqrt{t(1-t)}\,\alpha'(t)\,\nu[\alpha(t)]$ и $f_1(t) = \sqrt{t(1-t)}\,\alpha'(t)\,f[\alpha(t)]$ получим уравнение

$$\nu_1(t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\nu_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f_1(t).$$

С помощью аналогичной замены переменных интегральное уравнение (12) также приводится к уравнению с ядром Коши

$$\mu_1(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\mu_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = g_1(t), \quad \mu_1(t) = \frac{\nu[\alpha(t)]\,\alpha'(t)}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad g_1(t) = \frac{g[\alpha(t)]\,\alpha'(t)}{\sqrt{t(1-t)}}.$$

5. Сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши и постоянными коэффициентами на отрезке $[\alpha,\beta]$ вещественной оси

$$\nu(x) + \frac{b}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta \frac{\nu(t)\,dt}{t-x} = f(x), \quad x\in(\alpha,\beta). \tag{14}$$

Ограничимся случаем, когда $f(\cdot)\in H[\alpha,\beta]$, то есть удовлетворяет условию Гёльдера и не имеет особенностей на концах отрезка. Решение будем искать в классе H^*. Формулу обращения уравнения (14) легко получить как частный случай общей формулы, дающей решение характеристического уравнения (см. [21, 32]). Это решение найдено на основе эквивалентности характеристического сингулярного интегрального уравнения по разомкнутому контуру и краевой задачи Римана (задачи линейного сопряжения) для аналитических функций.

Покажем, что решение уравнения (14) может быть получено другим, очень простым методом без перехода к краевой задаче для аналитических функций.

Поведение решения уравнения (14) в точках α и β зависит от свойств его правой части и коэффициентов, в рассматриваемом случае – только от величины b.

Предположим, что

$$\nu(x) = \Big(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\Big)^{\lambda} \nu_0(x), \quad \nu_0(\alpha) \neq 0,$$

то есть функция $\nu(\cdot)$ имеет степенную особенность в точке α порядка λ. Подставим это выражение в (14), поделим обе части на $\Big(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\Big)^{\lambda}$ и перейдем к пределу при $x \to \alpha$. Получим $\nu_0(\alpha)\big[1 + b \operatorname{ctg} \lambda\pi\big] = 0$. Если $b < 0$, то $\lambda = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} b \in (0, 1)$. Но если $b > 0$, то решений с особенностью в точке α быть не может. Аналогично, если $b > 0$, то решение уравнения (1) может иметь особенность в точке $x = \beta$, при этом $\lambda = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} b \in (0, 1)$. Исследуем именно этот случай.

Заменим в уравнении (14) t на t_1 и x на t. Умножим обе его части на $\Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda}$ и применим операцию сингулярного интегрирования. Тогда

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{\nu(t)\, dt}{t - x} + \frac{b}{\pi} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[\Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1)\, dt_1}{t_1 - t}\Big] \frac{dt}{t - x} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{f(t)\, dt}{t - x}. \tag{15}$$

Преобразуем второй интеграл в левой части. По формуле Пуанкаре – Бертрана

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big[\Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1)\, dt_1}{t_1 - t}\Big] \frac{dt}{t - x} =$$

$$= -\pi^2 \Big(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\Big)^{\lambda} \nu(x) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \nu(t_1) \Big[\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{dt}{(t_1 - t)(t - x)}\Big]\, dt_1.$$

Здесь

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{dt}{(t_1 - t)(t - x)} = \frac{1}{t_1 - x} \Big[\int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{dt}{t_1 - t} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{dt}{t - x}\Big] =$$

$$= \frac{1}{t_1 - x} \frac{\pi}{b} \Big[\Big(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\Big)^{\lambda} - \Big(\frac{\beta - t_1}{t_1 - \alpha}\Big)^{\lambda}\Big].$$

В результате два интеграла в левой части равенства (15) взаимно уничтожатся.

Поделим обе части равенства на $\Big(\frac{\beta - x}{x - \alpha}\Big)^{\lambda}$ и получим

$$-b\pi\, \nu(x) + \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\nu(t_1)\, dt_1}{t_1 - x} = \Big(\frac{x - \alpha}{\beta - x}\Big)^{\lambda} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\frac{\beta - t}{t - \alpha}\Big)^{\lambda} \frac{f(t)\, dt}{t - x}.$$

Отсюда и из равенства (14) следует, что

$$\nu(x) = \frac{1}{1+b^2}\, f(x) - \frac{1}{\pi}\,\frac{b}{1+b^2}\Big(\frac{x-\alpha}{\beta-x}\Big)^\lambda \int\limits_\alpha^\beta \Big(\frac{\beta-t}{t-\alpha}\Big)^\lambda \frac{f(t)\,dt}{t-x}. \tag{16}$$

Итак, если $\nu(\cdot)$ – решение уравнения (14), то эта функция имеет вид (16). Ясно, что такое решение единственно. Простой подстановкой $\nu(\cdot)$ в (14) можно убедиться, что эта функция действительно является решением уравнения.

Таким образом, метод построения формулы обращения уравнения (14) состоит в том, что после специального интегрального преобразования и приведения подобных членов в левой части уравнения должны остаться только такие же слагаемые, что были раньше, но с другими коэффициентами.

Повторим такие же рассуждения для характеристического уравнения с переменными коэффициентами

$$a(x)\,\nu(x) + \frac{b(x)}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta \frac{\nu(t)\,dt}{t-x} = f(x), \quad x\in(\alpha,\beta).$$

Пусть, как и раньше, $f(\cdot)\in H[\alpha,\beta]$. Предположим также, что $a^2(x)+b^2(x)=1$, следовательно, $a(x)\pm i\,b(x)\neq 0$.

Пусть функция $Z(x)\neq 0$ пока такая, что произведение $Z(x)\,\nu(x)$ не имеет особенностей на концах отрезка $[\alpha,\beta]$ и $Z(x)$ – главное значение при $z=x$ функции $Z(z)$, аналитической вне $[\alpha,\beta]$ и имеющей конечное значение $Z(\infty)$ в бесконечно удаленной точке.

Заменим t на t_1 и x на t. Умножим обе части уравнения на $Z(t)$ и применим операцию сингулярного интегрирования:

$$\int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,a(t)\,\frac{\nu(t)\,dt}{t-x} + \frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta\Big(Z(t)\,b(t)\int\limits_\alpha^\beta\frac{\nu(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\Big)\frac{dt}{t-x} = \int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,\frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

По формуле Пуанкаре – Бертрана

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta\Big(Z(t)\,b(t)\int\limits_\alpha^\beta\frac{\nu(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\Big)\frac{dt}{t-x} =$$

$$= -\pi\,Z(x)\,b(x)\,\nu(x) + \frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta \nu(t_1)\Big[\int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,b(t)\,\frac{dt}{(t_1-t)(t-x)}\Big]\,dt_1 =$$

$$= -\pi\,Z(x)\,b(x)\,\nu(x) + \int\limits_\alpha^\beta \nu(t_1)\Big[-\frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,b(t)\,\frac{dt}{t-t_1} + \frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,b(t)\,\frac{dt}{t-x}\Big]\,\frac{dt_1}{t_1-x}.$$

Теперь потребуем, чтобы функция $Z(x)$ удовлетворяла условию

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_\alpha^\beta Z(t)\,b(t)\,\frac{dt}{t-x} = Z(x)\,a(x) - Z(\infty). \tag{17}$$

Тогда два интеграла взаимно уничтожатся, и окончательно

$$-b(x)\,\nu(x) + \frac{a(x)}{\pi}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{Z(x)}\int\limits_{\alpha}^{\beta} Z(t)\,\frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

Отсюда и из исходного уравнения легко получить, что

$$\nu(x) = a(x)\,f(x) - \frac{b(x)}{\pi}\,\frac{1}{Z(x)}\int\limits_{\alpha}^{\beta} Z(t)\,\frac{f(t)\,dt}{t-x}.$$

Построим функцию $Z(x)$ с требуемыми свойствами. Пусть

$$\mathrm{X}(z) = e^{\Gamma(z)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\gamma(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \quad \gamma(\tau) = \ln\frac{a(\tau)+ib(\tau)}{a(\tau)-ib(\tau)}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{X}(z)$ – функция, аналитическая вне $[\alpha,\beta]$, причем $\mathrm{X}(\infty) = 1$. Тогда

$$\mathrm{X}^{\pm}(x) = e^{\pm\frac{1}{2}\,\gamma(x)}\,Z(x), \quad Z(x) = \exp\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{\gamma(\tau)\,d\tau}{\tau - x}\Big],$$

то есть

$$\mathrm{X}^{+}(x) = \sqrt{\frac{a(x)+ib(x)}{a(x)-ib(x)}}\,Z(x), \quad \mathrm{X}^{-}(x) = \sqrt{\frac{a(x)-ib(x)}{a(x)+ib(x)}}\,Z(x).$$

При этом $\mathrm{X}^{+}(x) - \mathrm{X}^{-}(x) = 2i\,Z(x)\,b(x)$, $\mathrm{X}^{+}(x) + \mathrm{X}^{-}(x) = 2\,Z(x)\,a(x)$. Из интегральной формулы Коши следует, что условие (17) выполнено, $Z(\infty) = 1$.

Отметим, что фактически была построена каноническая функция краевой задачи Римана, но сама задача Римана в рассуждениях не участвовала. Тем не менее, интеграл типа Коши и его свойства понадобились.

При выполнении этого исследования автор использовал в основном ранние работы сотрудников кафедры дифференциальных уравнений Казанского университета – Ю.М. Крикунова, Л.И. Чибриковой и Л.А. Аксентьева. Пятьдесят лет назад наши учителя были такими, как на фото (рис. 3).

Рис. 3. Л.А. Аксентьев, Л.И. Чибрикова и Ю.М. Крикунов, 1974 г.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Tricomi F.* Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto // Memor. della R. Accad. Naz. dei Lincci. Ser. 5. 1923. V. 14, F. 7. P. 133–247.
2. *Трикоми Ф.Д.* О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 192 с.
3. *Франкль Ф.И.* Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 772 с.
4. *Лаврентьев М.А., Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Докл. АН СССР. 1950. Т. 70, № 3. С. 373–376.
5. *Бицадзе А.В.* К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. МИАН СССР. 1953. Т. 41. С. 3–59.
6. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.
7. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
8. *Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во Самар. гос. экон. ун-та, 2008. 276 с.
9. *Сабитов К.Б.* К теории уравнений смешанного типа. М.: Физматлит, 2014. 304 с.
10. *Плещинская И.Е., Плещинский Н.Б.* Переопределенные граничные задачи для эллиптических уравнений с частными производными и их применение в теории дифракции волн // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2005. Т. 147, кн. 3. С. 4–32.
11. *Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B.* Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory // Appl. Anal. 2014. V. 93, No 11. P. 2350–2359. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.930825.
12. *Крикунов Ю.М.* К задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Изв. вузов. Матем. 1974. № 2. С. 76–81.
13. *Крикунов Ю.М.* К задаче Трикоми для квадрата // Изв. вузов. Матем. 1977. № 10. С. 81–85.
14. *Крикунов Ю.М.* Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 148 с.
15. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
16. *Аксентьев Л.А.* Метод симметрии. Программа и учебные задания к специальному курсу. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. 48 с.
17. *Форд Л.Р.* Автоморфные функции. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 340 с.
18. *Чибрикова Л.И.* К методу Д.А. Граве решения задачи Дирихле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 1962. Т. 122, кн. 3. С. 73–80.
19. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Green functions, reflections, and plane parqueting // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, No. 1. P. 17–31.
20. *Begehr H., Vaitekhovich T.* The parqueting-reflection principle for constructing Green functions // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012. Cottenham: Cambridge Sci. Publ., 2013. P. 11–20.
21. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
22. *Аксентьев Л.А.* Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. задачам. Изд-во Казан. ун-та. 1964. Вып. 2. С. 3–11.

23. *Аксентьев Л.А.* Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. Изд-во Казан. ун-та. 1966. Вып. 3. С. 11–24.

24. *Аксентьев Л.А.* Построение оператора Шварца методом симметрии // Тр. сем. по обратн. краев. Изд-во Казан. ун-та. 1967. Вып. 4. С. 3–10.

25. *Аксентьев Л.А.* Применение метода симметрии в конформных отображениях и в краевых задачах. Программа и учебные задания к специальному курсу. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1993. 48 с.

26. *Чибрикова Л.И.* Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анал. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1980. С. 3–66.

27. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.

28. *Maher A., Pleshchinskii N.B.* On connection among values of solutions of the Tricomi problem on the sides of characteristic triangles // Acta Sci. Math. (Szeged). 2008. V. 74. P. 121–133.

29. *Гахов Ф.Д., Чибрикова Л.И.* О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме // Матем. сб. 1954. Т. 35, № 3. С. 395–436.

30. *Плещинский Н.Б.* Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. Учеб.-метод. пособие. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. 154 с.

31. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Казан. ун-т, 1977. 302 с.

32. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Поступила в редакцию 29.01.2024
Принята к публикации 31.01.2024

Плещинский Николай Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *pnb@kpfu.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 74–91

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.74-91

Tricomi Problem and Integral Equations

N.B. Pleshchinskii

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *pnb@kpfu.ru*

Received January 29, 2024; Accepted January 31, 2024

Abstract

Formulas for inverting integral equations that arise when studying the Tricomi problem for the Lavrentyev–Bitsadze equation were derived. Solvability conditions of an auxiliary overdetermined problem in the elliptic part of the mixed domain were found using the Green function method. A connection was established between the Green functions of the Dirichlet problem and problem N for the Laplace equation in the form of integral equations mutually inverting each other. Various integral equations were considered, including explicitly solvable ones, to which the Tricomi problem can be reduced. An explicit solution of the characteristic singular equation with a Cauchy kernel was obtained without involving the theory of boundary value problems for analytic functions.

Keywords: Tricomi problem, overdetermined problem, integral equation, Green function, conformal mapping

Conflicts of Interest. The author declares no conflicts of interest.

Figure Captions

Fig. 1. Mixed domain of the Tricomi problem.

Fig. 2. Tiling of the plane.

Fig. 3. L.A. Aksent'ev, L.I. Chibrikova, and Yu.M. Krikunov, 1974.

References

1. Tricomi F. Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto. *Memor. della R. Accad. Naz. dei Lincci. Ser. 5.*, 1923, vol. 14, fasc. 7, pp. 133–247. (In Italian)

2. Tricomi F.D. *O lineinykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka smeshannogo tipa* [On Second-Order Linear Partial Differential Equations of Mixed Type]. Moscow, Leningrad, Gostekhizdat, 1947. 192 p. (In Russian)

3. Frankl F. *Izbrannye trudy po gazovoi dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics]. Moscow, Nauka, 1973. 772 p. (In Russian)

4. Lavrentyev M.A., Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1950, vol. 70, no. 3, pp. 373–376. (In Russian)

5. Bitsadze A.V. On the problem of equations of mixed type. *Tr. MIAN SSSR*, 1953, vol. 41, pp. 3–59. (In Russian)

6. Bitsadze A.V. *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, Izd. Akad. Nauk SSSR, 1959. 164 p. (In Russian)

7. Smirnov M.M. *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type]. Moscow, Nauka, 1970. 295 p. (In Russian)

8. Marichev O.I., Kilbas A.A., Repin O.A. *Kraevye zadachi dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh s razryvnymi koeffitsientami* [Boundary Value Problems for Partial Differential Equations with Discontinuous Coefficients]. Samara, Izd. Samar. Gos. Ekon. Univ., 2008. 276 p. (In Russian)

9. Sabitov K.B. *K teorii uravnenii smeshannogo tipa* [On the Theory of Equations of Mixed Type]. Moscow, Fizmatlit, 2014. 304 p. (In Russian)

10. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. Over-determined boundary value problems for elliptic partial differential equations and their applications to waves diffraction theory. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2005, vol. 147, no. 3, pp. 4–32. (In Russian)

11. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. Over-determined boundary value problems for PDE and their application in the wave propagation theory. *Appl. Anal.*, 2014, vol. 93, no. 11, pp. 2350–2359. https://doi.org/10.1080/00036811.2014.930825.

12. Krikunov Yu.M. On the Tricomi problem for the Lavrentyev–Bitsadze equation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1974, no. 2, pp. 76–81. (In Russian)

13. Krikunov Yu.M. On the Tricomi problem for a square. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1977, no. 10, pp. 81–85. (In Russian)

14. Krikunov Yu.M. *Kraevye zadachi dlya model'nykh uravnenii smeshannogo tipa* [Boundary Value Problems for the Model Equations of Mixed Type]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1986. 148 p. (In Russian)

15. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1977. 736 p. (In Russian)

16. Aksent'ev L.A. *Metod simmetrii. Programma i uchebnye zadaniya k spetsial'nomu kursu* [Symmetry Method. Program and Assignments for a Special Course]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1991. 48 p. (In Russian)

17. Ford L.R. *Avtomorfnye funktsii* [Automorphic Functions]. Moscow, Leningrad, ONTI, 1936. 340 p. (In Russian)

18. Chibrikova L.I. On the method of D.A. Grave for solving the Dirichlet problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 1962, vol. 122, no. 3, pp. 73–80. (In Russian)

19. Begehr H., Vaitekhovich T. Green functions, reflections, and plane parqueting. *Eurasian Math. J.*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 17–31.

20. Begehr H., Vaitekhovich T. The parqueting-reflection principle for constructing Green functions. In: *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012*. Cottenham, Cambridge Sci. Publ., 2013, pp. 11–20.

21. Gakhov F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary Value Problems]. Moscow, Nauka, 1977. 640 p. (In Russian)

22. Aksent'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham.* Izd. Kazan. Univ., 1964, no. 2, pp. 3–11. (In Russian)

23. Aksent'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham.* Izd. Kazan. Univ., 1966, no. 3, pp. 11–24. (In Russian)

24. Aksent'ev L.A. Construction of the Schwarz operator by the symmetry method. *Tr. Semin. Obratnym Kraev. Zadacham.* Izd. Kazan. Univ., 1967, no. 4, pp. 3–10. (In Russian)

25. Aksent'ev L.A. *Primenenie metoda simmetrii v konformnykh otobrazheniyakh i v kraevykh zadachakh. Programma i uchebnye zadaniya k spetsial'nomu kursu* [Application of the Symmetry Method to Conformal Mappings and Boundary Value Problems. Program and Assignments for a Special Course]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1993. 48 p. (In Russian)

26. Chibrikova L.I. Boundary value problems of the theory of analytic functions on Riemann surfaces. In: *Itogi nauki i tekhn. Ser. Matem. anal.* [Achievements of Science and Technology. Series: Mathematical Analysis]. Vol. 18. Moscow, VINITI, 1980, pp. 3–66. (In Russian)

27. Mikhlin S.G. *Lektsii po lineinym integral'nym uravneniyam* [Lectures on Linear Integral Equations]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 232 p. (In Russian)

28. Maher A., Pleshchinskii N.B. On connection among values of solutions of the Tricomi problem on the sides of characteristic triangles. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 2008, vol. 74, pp. 121–133.

29. Gakhov F.D., Chibrikova L.I. On some types of singular integral equations solvable in closed form. *Mat. Sb.*, 1954, vol. 35, no. 3, pp. 395–436. (In Russian)

30. Pleshchinskii N.B. *Prilozheniya teorii integral'nykh uravnenii s logarifmicheskimi i stepennymi yadrami. Ucheb.-metod. posobie* [Applications of the Theory of Integral Equations with Logarithmic and Power Kernels. A Study Guide]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1987. 154 p. (In Russian)

31. Chibrikova L.I. *Osnovnye granichnye zadachi dlya analiticheskikh funktsii* [Basic Boundary Value Problems for Analytic Functions]. Kazan, Kazan. Univ., 1977. 302 p. (In Russian)

32. Muskhelishvili N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1968. 511 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Плещинский Н.Б.* Задача Трикоми и интегральные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 74–91. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.74-91. ⟩

⟨ ***For citation*:** Pleshchinskii N.B. Tricomi problem and integral equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 74–91. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.74-91. (In Russian) ⟩