

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 533.95

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.36-51

К УСТОЙЧИВОСТИ ЧАСТНОГО КЛАССА ОДНОМЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА ВЛАСОВА – ПУАССОНА

Ю.Г. Губарев, М.С. Котельникова

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, 630090, Россия*

Аннотация

Изучена одномерная задача линейной устойчивости динамических состояний локальных термодинамических равновесий относительно малых возмущений в случае, когда газ Власова – Пуассона содержит в себе электроны со стационарной функцией распределения, которая постоянна по физическому пространству и переменна по континууму скоростей. Прямой метод Ляпунова доказана абсолютная неустойчивость любого из рассматриваемых одномерных динамических состояний всякого локального термодинамического равновесия. Описана область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта. Получена априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания малых одномерных возмущений. Построены аналитические контрпримеры к спектральному теореме Ньюкомба–Гарднера и критерию Пенроуза. Теорема Ирншоу распространена с классической механики на статистическую.

Ключевые слова: электронный газ Власова–Пуассона, динамические состояния равновесия, линейная устойчивость, прямой метод Ляпунова

Введение

Широкий интерес к исследованию различных равновесных состояний плазмы и их устойчивости обусловлен в первую очередь практическими задачами, возникающими при решении проблемы управляемого термоядерного синтеза. Но не менее важным практическим направлением для применения результатов исследования устойчивости плазменных состояний равновесия является осуществление ускорения элементарных частиц коллективными методами. Идея коллективных методов возникла еще в середине прошлого века: ожидалось существенное повышение эффективности ускорения, в том числе увеличение энергии, получаемой пучком частиц на единице длины ускорителя. Такие методы оценивались как значительно более энергоэффективные в сравнении с традиционными, использующими для создания внешнего ускоряющего поля устройства, ограниченные в технических возможностях. Однако и по прошествии нескольких десятков лет с момента формулирования идеи фундаментальной проблемой для осуществления коллективных методов по-прежнему остается необходимость в создании устойчивого облака горячих электронов, производящего дополнительный нагрев пучка элементарных частиц.

Для решения этой проблемы необходим инструмент получения критериев практической неустойчивости для конкретных геометрии и параметров установки, в которой производится ускорение. Полученные критерии практической неустойчивости позволили бы, во-первых, соблюдая условия их выполнения, оптимальным образом формировать сгусток плазмы, во-вторых, поддерживать устойчивость сгустка, контролируя соответствие параметров установки состоянию плазмы, нарушающему условия практической неустойчивости. Таким образом, основной целью данной работы является решение задачи выявления и дальнейшего устранения либо управления разнообразными неустойчивостями, обусловленными коллективным взаимодействием электронов в сгустке плазмы.

На первом этапе решения этой задачи необходимо определить модель описания плазмы, и несомненным фаворитом для этого служит плазма Власова – Пуассона. Эта классическая модель безграничного бесстолкновительного электронного газа продолжает оставаться в теоретических работах современной физики плазмы одной из базовых и наиболее широко используемых моделей, что связано с простотой и ясностью модели, а также ее очевидной полезностью для решения проблемы управляемого термоядерного синтеза. Поэтому ряд фундаментальных результатов был получен на ранних этапах изучения устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона. А именно, в статьях [1–3] было установлено достаточное условие линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона. Более того, в работах [2, 3] показано, что данное условие запрещает рост во времени малых возмущений состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона в виде нормальных волн. Наконец, в статье [4] достаточное условие [1–3] для линейной устойчивости состояний динамического равновесия плазмы Власова – Пуассона было обобщено на конечные возмущения.

Тема устойчивости плазменных состояний равновесия настолько интересна, что классические фундаментальные результаты дополняются новыми практически ежегодно, хотя и становятся менее общими. В качестве примера можно привести работу [5], в которой исследованы свойства устойчивости периодических стационарных решений, известных как волны Бернштейн – Грина – Крускала (BGK), и определены достаточные условия, при которых волны BGK линейно неустойчивы по отношению к возмущениям, имеющим тот же период, что и изучаемые состояния равновесия. Также показано, что эти решения не могут поддерживать монотонно убывающую функцию распределения частиц. В статье [6] исследован квазинейтральный предел одномерного уравнения Власова – Пуассона для распределений, близких к стационарным однородным профилям, и доказано, что профили, для которых выполняется классический критерий Пенроуза, не соответствуют данному пределу. Таким образом, в работах последнего десятилетия по теме устойчивости состояний равновесия плазмы прослеживается тенденция, обратная классической: находятся примеры неустойчивого относительно определенных подклассов возмущений поведения классических решений. Существуют, конечно, и недавние работы, нарушающие эту тенденцию: например, в статье [7] при изучении линейной устойчивости одномерной системы Власова – Пуассона на конечном интервале времени показано, что если равновесное распределение является строго убывающей функцией локальной плотности энергии, то система Власова – Пуассона на конечном временном интервале устойчива. Все настоящие результаты объединяет с классическими то, что рассматриваются всегда только вполне определенные виды возмущений, но получить сколько-нибудь общий критерий устойчивости для таких систем не удастся. В качестве примера можно упомянуть хорошо известное затухание Ландау. Конкретно Л. Д. Ландау изучал плазму Власова – Пуассона

ионов и электронов [8]. Его интересовали колебания электронной плазмы, которые возникали в результате произвольного начального неравновесного распределения в ней. Л. Д. Ландау предположил, что частота колебаний электронов достаточно высока, поэтому столкновения электронов с ионами и друг с другом несущественны, так что интегралом столкновений в уравнении Власова можно пренебречь. Тогда функцию распределения ионов можно рассматривать как неизменную, и лишь распределение электронов колеблется вокруг пространственно однородного максвелловского (гауссова) равновесия. Он показал, что колебания электрического поля в плазме всегда затухают, а зависимость частоты и декремента затухания от волнового вектора определяется для малых и больших значений последнего. Впоследствии результат Л. Д. Ландау был активно расширен, развит, углублен и обобщен другими исследователями [9, 10]. К сожалению, Л. Д. Ландау не учел всех допустимых малых возмущений. А именно, он не изучал малые возмущения потенциала самосогласованного электрического поля, которые являются функциями исключительно времени. Тем не менее для таких возмущений линеаризованные уравнения Власова – Пуассона [8] являются вырожденными, ключевая формула [8] не может быть выведена, и, следовательно, отсутствует затухание Ландау. В работе [11] приведены аналитические примеры, подтверждающие, что подкласс малых возмущений потенциала электрического поля, которые описываются исключительно функциями времени, не является пустым, значит, результат затухания Ландау не является общим. Аналогично в работе [12] дано строгое описание области применимости классического условия [4], ограничивающее набор возмущений, к которым оно может быть применено. Следует сделать вывод, что для практических приложений гораздо важнее информация об условиях практической неустойчивости плазменных состояний равновесия, чем формулировки частных случаев критериев устойчивости.

В данной работе проведено исследование линейной устойчивости одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий электронного газа Власова – Пуассона, вмещающего в себя электроны со стационарной функцией распределения, которая изотропна по физическому пространству, но переменна по скоростному континууму. Прямой методом Ляпунова показана абсолютная неустойчивость подкласса динамических состояний таких локальных термодинамических равновесий относительно малых возмущений. Обозначена область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба – Гарднера – Розенблюта. Сформулированы достаточные условия линейной практической неустойчивости подкласса одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий электронного газа Власова – Пуассона. Найдены начальные данные для малых одномерных возмущений, растущих во времени. Получена априорная экспоненциальная оценка снизу нарастания таких возмущений. Построены аналитические контрпримеры к спектральным теореме Ньюкомба – Гарднера и критерию Пенроуза. Теорема Ирншоу распространена с классической механики на статистическую.

1. Кинетический случай

Эволюцию электронного газа, приведенного в движение, описывает следующая начально-краевая задача [13, 14]:

$$\begin{aligned} f_t + v f_x + \varphi_x f_v &= 0, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv - n_e \right); \\ f(x, v, t) &\geq 0; f(x, v, 0) = f_0(x, v). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь f – функция распределения электронов, x – координаты электронов, v – скорости электронов, t – время, $\varphi(x, t)$ – потенциал самосогласованного электрического поля, $4\pi n_e$ – плотность электронов в состоянии глобального термодинамического равновесия, f_0 – начальные данные для функции распределения f . Предполагается, что функция $f \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ_x она или периодична по аргументу x , или затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вдоль решений задачи (1) сохраняются с течением времени функционал полной энергии E и интеграл движения C :

$$E \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = const, \quad (2)$$

$$C \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(f) dx dv = const, \quad (3)$$

где $\Phi(f)$ – произвольная функция своего аргумента.

Задача (1) имеет точные стационарные решения

$$f = f^0(v) \geq 0, \quad \varphi = \varphi^0 \equiv const; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(v) dv = n_e. \quad (4)$$

Для изучения посредством вариационного метода устойчивости точных стационарных решений (4) относительно малых одномерных возмущений выполним линеаризацию начально-краевой задачи (1):

$$\begin{aligned} f'_t + v f'_x + \varphi'_x \frac{df^0}{dv} &= 0, \\ \varphi'_{xx} &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, v, t) dv; \\ f'(x, v, 0) &= f'_0(x, v). \end{aligned} \quad (5)$$

Предполагаем, что $f' \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ'_x функция f' по аргументу x либо периодична, либо затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вычислим первую вариацию суммы I функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3):

$$\begin{aligned} \delta I = \delta(E + C) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v^2 + 2 \frac{d\Phi}{df}(f^0) \right) \delta f dx dv + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \delta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\varphi^0}{2} + \frac{d\Phi}{df}(f^0) \right) \delta f dx dv. \end{aligned} \quad (6)$$

Произвол в выборе функции Φ обеспечивает условие зануления δI (6):

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = - \frac{d\Phi}{df}(f^0). \quad (7)$$

С использованием условия (7) вычислим вторую вариацию $I = E + C$:

$$\delta^2 I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) (\delta f)^2 dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta \varphi)_x^2 dx. \quad (8)$$

При замене вариаций δf , $\delta\varphi$ на малые возмущения f' , φ' соответственно из (8) получается линейный аналог функционала полной энергии

$$E_1 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) f'^2 dx dv + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const, \quad (9)$$

сохраняющийся с течением времени вдоль решений линеаризованной задачи (5).

Таким образом, по знаку E_1 (9) можно определить, устойчивы ли точные стационарные решения f^0 , φ^0 (4) начально-краевой задачи (1) относительно малых одномерных возмущений.

Функционал E_1 (9) является неотрицательным при выполнении неравенства

$$\frac{d^2\Phi}{df^2}(f^0) \geq 0,$$

которое с использованием условия (7) примет вид

$$\frac{1}{v} \frac{df^0}{dv} \leq 0. \quad (10)$$

Неравенство (10) является достаточным условием линейной устойчивости стационарных решений задачи (1). Данный результат совпадает с теоремой Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта [2, 3], согласно которой монотонно убывающие стационарные функции распределения f^0 являются устойчивыми.

Однако условие (10) получено с использованием функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3), сохраняющихся с течением времени в силу одного и того же эволюционного уравнения Власова (первое соотношение задачи (1)). Как следствие, их вариации оказываются зависимыми друг от друга. Это приводит к тому, что достаточное условие устойчивости (10) оказывается справедливым не для всех рассматриваемых возмущений, а лишь для некоторого их подкласса.

2. Аналитический пример в кинетическом случае

Точные стационарные решения начально-краевой задачи (1) выберем в форме

$$f^0 = \frac{n_e}{\sqrt{\pi}} \exp(-v^2), \quad \varphi^0 = const,$$

они удовлетворяют условию (10), а также стационарному уравнению Пуассона (последнее соотношение системы (4)).

Для возмущений потенциала самосогласованного электрического поля вида

$$\varphi' = c \exp(\alpha t), \quad \alpha, c = const, \quad \alpha > 0$$

происходит частичное вырождение дифференциального оператора линеаризованных уравнений (5). Это значит, что данные малые возмущения выпадают из процедуры варьирования суммы функционала полной энергии E (2) и интеграла движения C (3).

Возмущения функции распределения

$$f' = v \exp\left(\beta\left(t - \frac{x}{v}\right) - v^2\right), \quad \frac{x}{v} > 0, \quad \beta = const > 0$$

взяты таким образом, чтобы удовлетворять вырожденным уравнениям Власова–Пуассона и граничным условиям линеаризованной задачи (5). Отметим, что функция f' доопределена по непрерывности следующим образом:

$$\left(f' \Big|_{x=0}\right) \Big|_{v=0} = 0.$$

Как результат, построен пример возмущений f' , φ' в виде нормальных волн, растущих со временем вне зависимости от выполнения достаточного условия устойчивости (10) стационарных решений f^0 , φ^0 (4).

Аналитический пример представляет собой пример некорректности по Адамару [15] и одновременно является контрпримером к спектральным теореме Ньюкомба – Гарднера [16] и критерию Пенроуза [17], согласно которым при выполнении условия (10) возмущения в виде нормальных волн в принципе запрещены.

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы доказать неустойчивость стационарных решений f^0 , φ^0 (4) вне зависимости от выполнения условия (10).

3. Гидродинамический случай

Далее используем методику доказательства неустойчивости, разработанную для уравнений гидродинамического типа. С целью перехода от уравнений кинетического типа к уравнениям гидродинамического типа выполним невырожденную замену независимых переменных [14, 18, 19] (гидродинамическая подстановка) вида [11, 12]:

$$\begin{aligned} v = u(x, \nu, t), \quad f(x, v, t) &= \frac{\rho(x, \nu, t)}{u_\nu(x, \nu, t)}; \\ \nu - \text{лагранжева координата:} \quad \frac{d\nu}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \nu, t) &\neq 0 - \text{якобиан замены.} \end{aligned}$$

Начально-краевая задача (1) в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных x , ν , t примет вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \varphi_x, \quad \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ \varphi_{xx} &= 4\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \nu, t) d\nu - n_e \right); \\ u(x, \nu, 0) &= u_0(x, \nu), \quad \rho(x, \nu, 0) = \rho_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ν – лагранжевы координаты электронов, u – поле скорости электронов, ρ – поле плотности электронов, u_0 и ρ_0 – начальные данные для полей u и ρ соответственно. Предполагаем, что $\rho \rightarrow 0$ при $|v| \rightarrow \infty$, а вместе с φ_x функция ρ по аргументу x или периодична, или затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Вдоль решений задачи (11) сохраняются во времени интеграл полной энергии E_2 и интеграл движения C_1 :

$$E_2 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u^2 dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x^2 dx = \text{const}, \quad (12)$$

$$C_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(\varkappa) \frac{\partial u}{\partial \nu} dx d\nu = \text{const}, \quad (13)$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(\varkappa)$ – произвольная функция своего аргумента $\varkappa \equiv \rho/u_\nu$, который имеет смысл обратной завихренности и сохраняется в каждой жидкой частице согласно уравнению движения

$$\varkappa_t + u\varkappa_x = 0. \quad (14)$$

Из вида (14) понятно, что $\varkappa$ является первым интегралом. Следовательно, если в начальный момент времени задать величину $\varkappa$ ограниченной и не равной нулю,

то она останется такой же во все последующие моменты времени, обеспечивая невырожденность гидродинамической замены.

Задача (11) имеет точные стационарные решения вида

$$u = u^0(\nu), \quad \rho = \rho^0(\nu) \geq 0, \quad \varphi = \varphi^0 \equiv \text{const}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0(\nu) d\nu = n_e. \quad (15)$$

Задача (11), линеаризованная вблизи стационарных решений (15), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} u'_t + u^0 u'_x &= \varphi'_x, & \rho'_t + u^0 \rho'_x + u'_x \rho^0 &= 0, \\ \varphi'_{xx} &= 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x, \nu, t) d\nu; \\ u'(x, \nu, 0) &= u'_0(x, \nu), & \rho'(x, \nu, 0) &= \rho'_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (16)$$

Предполагаем, что $\rho' \rightarrow 0$ при $|\nu| \rightarrow \infty$, а вместе с φ'_x функция ρ' по аргументу x либо периодична, либо затухает при $|x| \rightarrow \infty$.

Аналогично кинетическому случаю с помощью вариационного метода исследуем устойчивость стационарных решений u^0, ρ^0, φ^0 (15) относительно малых возмущений u', ρ', φ' (16).

Условие зануления первой вариации суммы функционала полной энергии E_2 (12) и интеграла движения C_1 (13) ($\varkappa^0$ – стационарная обратная завихренность) имеет вид

$$\frac{u^{02}}{2} - \frac{\varphi^0}{2} = -\frac{d\Phi_1}{d\varkappa}(\varkappa^0). \quad (17)$$

Из второй вариации суммы E_2 и C_1 с учетом (17) получим линейный аналог функционала полной энергии, сохраняющийся с течением времени вдоль решений линеаризованной задачи (16):

$$\begin{aligned} E_3 \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho^0 u'^2 + 2u^0 u' \rho' + \frac{d^2 \Phi_1}{d\varkappa^2}(\varkappa^0) \varkappa'^2 \frac{du^0}{d\nu} \right) dx d\nu + \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'_x{}^2 dx = \text{const}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\varkappa^0(\nu) = \rho^0(\nu) \left(\frac{du^0}{d\nu} \right)^{-1}, \quad \varkappa' = (\rho' - \varkappa^0 u'_\nu) \left(\frac{du^0}{d\nu} \right)^{-1}.$$

Для установления знакоопределенности/знакопостоянства функционала E_3 (18) представим его в виде

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (A \vec{\omega}, \vec{\omega}) dx d\nu,$$

где

$$A \equiv \begin{pmatrix} \rho^0 & u^0 & 0 & 0 \\ u^0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{d^2 \Phi_1}{d\varkappa^2}(\varkappa^0) \frac{du^0}{d\nu} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} \equiv \begin{pmatrix} u' \\ \rho' \\ \varkappa' \\ \varphi' \end{pmatrix}.$$

Главные миноры матрицы A :

$$\Delta_1 = \rho^0, \quad \Delta_2 = -u^{02}, \quad \Delta_3 = -u^{02} \frac{d^2 \Phi_1}{d\kappa^2} (\kappa^0) \frac{du^0}{d\nu}.$$

Согласно критерию Сильвестра [20] функционал E_3 (18) знакоопределенностью не обладает. Из этого можно сделать вывод, что достаточного условия линейной устойчивости для всех малых возмущений в данном случае нет. Однако это условие может возникнуть при рассмотрении подкласса возмущений, описываемых полем лагранжевых смещений.

Далее рассмотрим одномерные малые возмущения $\xi(x, \nu, t)$ [21], которые описываются полем лагранжевых смещений

$$\xi_t = u' - u^0 \xi_x. \quad (19)$$

Данные возмущения определяются как отклонения траекторий движения электронов от своих линий тока, отвечающих стационарным решениям (15).

В терминах поля лагранжевых смещений (19) линеаризованная задача (16) примет вид

$$\begin{aligned} \xi_{tt} + 2u^0 \xi_{xt} + u^{02} \xi_{xx} &= \varphi'_x, \\ \varphi'_{xx} &= -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi_x d\nu, \quad \rho' = -\rho^0 \xi_x; \\ \xi(x, \nu, 0) &= \xi_0(x, \nu), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, \nu, 0) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_0(x, \nu). \end{aligned} \quad (20)$$

Предполагаем, что $\rho^0 \xi_x \rightarrow 0$ при $|\nu| \rightarrow \infty$, а функции ξ и φ'_x по аргументу x или периодичны, или затухают при $|x| \rightarrow \infty$.

Уравнение на ρ' получено интегрированием, при этом константа интегрирования принята равной нулю. По этой причине поле лагранжевых смещений описывает именно подкласс возмущений.

Для задачи (20) оказалось, что $\kappa' \equiv 0$. Это влечет выполнение соотношения

$$\rho' = \kappa^0 \frac{\partial u'}{\partial \nu}. \quad (21)$$

Тогда при наложении на малые возмущения u' добавочных требований в виде асимптотик

$$(u^0 \kappa^0 u'^2) \Big|_{\nu \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0 \quad (22)$$

линейный аналог функционала полной энергии E_3 (18) с учетом соотношения (21) примет вид

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho^0 - \frac{d(u^0 \kappa^0)}{d\nu} \right) u'^2 dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'_x{}^2 dx = const. \quad (23)$$

Условие знакоопределенности/знакопостоянства для E_3 (23) представляется неравенством

$$u^0 \frac{d\kappa^0}{d\nu} \leq 0, \quad (24)$$

которое с учетом условия $du^0/d\nu > 0$ (следствие неотрицательности функции f^0 , неравенства нулю якобиана u_ν , а также стационарных уравнений Пуассона (4) и (15)) можно записать в виде

$$\frac{1}{u^0} \frac{d\mathcal{K}^0}{du^0} \leq 0,$$

эквивалентном (с точностью до обозначений) достаточному условию линейной устойчивости (10) в кинетическом случае.

Однако в силу того, что асимптотики (22) не являются интегралами движения, всегда обеспечить их выполнение не представляется возможным. Из этого можно сделать вывод, что достаточное условие линейной устойчивости (24) стационарных решений (15) носит формальный характер, а рассматриваемые малые возмущения u', ρ', φ' (16), (21), (22) образуют неполный, незамкнутый подкласс.

Без учета асимптотик (22) интеграл E_3 (18) с использованием линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19) примет вид

$$E_3 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t^2 - u^{02} \xi_x^2) dx d\nu + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx = const$$

и согласно критерию Сильвестра [20] в принципе не может быть знакоопределен. Это значит, что найдется хотя бы одно растущее возмущение $\xi(x, \nu, t)$ (19), на которое действие условия устойчивости (24) точных стационарных решений (15) не распространяется.

В отношении же возмущений u', ρ', φ' (16), (21), подчиненных асимптотикам (22), условие устойчивости (24) точных стационарных решений (15) является не только достаточным, но и необходимым.

Данные результаты позволяют перейти к доказательству абсолютной неустойчивости точных стационарных решений (15) задачи (11).

4. Функционал Ляпунова и априорная оценка для гидродинамического случая

Рассмотрим неотрицательный функционал

$$M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi^2 dx d\nu.$$

Вычислим его первую и вторую производные по времени

$$\frac{dM}{dt} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi \xi_t dx d\nu, \quad \frac{d^2 M}{dt^2} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t^2 + \xi \xi_{tt}) dx d\nu.$$

С использованием линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19) получим оценку снизу для выражения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 (\xi_t - \lambda \xi + u^0 \xi_x)^2 dx d\nu - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx \geq -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x'^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь λ – произвольный параметр. Результатом интегрирования второго уравнения системы (20) является соотношение

$$\varphi_x' = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi d\nu$$

(константа интегрирования опять принята равной нулю, но это лишь уточняет исследуемый подкласс возмущений). С применением неравенства Коши – Буняковского получим оценку квадрата данного соотношения:

$$\varphi'_x{}^2 = 16\pi^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi d\nu \right)^2 \leq 16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 d\nu \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 \xi^2 d\nu.$$

С учетом этой оценки построим основное дифференциальное неравенство вириального типа

$$\frac{d^2 M}{dt^2} - 2\lambda \frac{dM}{dt} + 2(\lambda^2 + \alpha'_1) M \geq 0, \quad (25)$$

где

$$\alpha'_1 = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^0 d\nu > 0.$$

При выборе $\lambda > 0$ и наложении счетного набора дополнительных условий

$$M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\frac{dM}{dt} \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) \geq 2 \left(\lambda + \frac{\alpha'_1}{\lambda} \right) M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right);$$

$$M \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) = M(0) \exp \left(\frac{\lambda \pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right), \quad (26)$$

$$\frac{dM}{dt} \left(\frac{\pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right) = \frac{dM}{dt}(0) \exp \left(\frac{\lambda \pi n}{2\sqrt{\lambda^2 + 2\alpha'_1}} \right);$$

$$M(0) > 0, \quad \frac{dM}{dt}(0) \geq 2 \left(\lambda + \frac{\alpha'_1}{\lambda} \right) M(0)$$

проинтегрируем неравенство (25) на счетном наборе временных полуинтервалов методом Чаплыгина [22]. Процесс интегрирования подробно описан в работе [23].

В итоге это дает возможность установить следующую априорную экспоненциальную оценку снизу роста малых возмущений $\xi(x, \nu, t)$ (19), (20), (26)

$$M(t) \geq C_2 \exp(\lambda t). \quad (27)$$

Здесь C_2 – положительная постоянная, определяемая по начальным данным для растущих малых возмущений (последние два неравенства из (26)).

Из оценки (27) следует, что среди возмущений, описываемых полем лагранжевых смещений, найдется хотя бы одно, растущее со временем относительно стационарных решений (15) задачи (11) не медленнее, чем экспоненциально. Данный результат полностью согласуется с определением неустойчивого по Ляпунову решения системы дифференциальных уравнений [24].

5. Аналитический пример в гидродинамическом случае

Точные стационарные решения (15) начально-краевой задачи (11) выберем в виде

$$\rho^0 = \frac{n_e}{\sqrt{\pi}} \exp(-\nu^2), \quad u^0 \equiv \nu, \quad \varphi^0 = \text{const}.$$

Они удовлетворяют условию (24) и стационарному уравнению Пуассона в гидродинамическом описании (последнее соотношение системы (15)), а также эквивалентны стационарным решениям (4) в кинетическом случае. Это значит, что данные стационарные решения также отвечают одномерным динамическим состояниям того либо иного локального термодинамического равновесия электронного газа Власова–Пуассона.

Для возмущений потенциала самосогласованного электрического поля вида

$$\varphi' = c_1 \exp(\alpha_1 t), \quad \alpha_1, c_1 = \text{const}, \quad \alpha_1 > 0$$

происходит частичное вырождение дифференциального оператора линеаризованных уравнений (20) в терминах поля лагранжевых смещений (19). Следовательно, данные малые возмущения выпадают из процедуры варьирования суммы функционала полной энергии E_2 (12) и интеграла движения C_1 (13).

Возмущения, описываемые полем лагранжевых смещений

$$\xi = (t+1)\nu^2 \exp\left(\beta_1\left(t - \frac{x}{\nu}\right) - \nu^2\right), \quad \frac{x}{\nu} > 0, \quad \beta_1 = \text{const} > 0,$$

взяты таким образом, чтобы удовлетворять вырожденным уравнениям и граничным условиям задачи (20). Заметим, что функция ξ доопределена по непрерывности следующим образом

$$\left(\xi\Big|_{\substack{t=0 \\ x=0}}\right)\Big|_{\nu=0} = 0.$$

Тем самым построен пример возмущений в виде нормальных волн, растущих со временем вне зависимости от выполнения условия устойчивости (24), что подтверждает его формальный характер. Данный аналитический пример представляет собой пример некорректности по Адамару [15] и одновременно является контрпримером к спектральной теореме Ньюкомба–Гарднера [16] и критерию Пенроуза [17], также имеющими формальный характер.

Заключение

Задача линейной устойчивости подкласса одномерных динамических состояний локальных термодинамических равновесий относительно одномерных же малых возмущений в случае, когда электронный газ Власова–Пуассона содержит в себе электроны со стационарной функцией распределения, постоянной по физическому пространству и переменной по пространству скоростей, исследована в кинетическом и гидродинамическом описаниях. В кинетическом описании обозначена область применимости достаточного условия линейной устойчивости Ньюкомба–Гарднера–Розенблюта и сформулированы достаточные условия линейной практической неустойчивости, построены аналитические контрпримеры к спектральной теореме Ньюкомба–Гарднера и критерию Пенроуза. В гидродинамическом описании то, что оценка (27) получена без каких бы то ни было дополнительных условий на точные стационарные решения (15), позволяет сделать вывод, что возмущения, приводящие к неустойчивости стационарного течения, возникают вне зависимости от выполнения достаточного условия линейной устойчивости (24). Значит, имеет место абсолютная неустойчивость точных стационарных решений (15) задачи (11).

Необходимо отметить, что данный результат расширяет область применимости теоремы Ирншоу с классической механики на статистическую. Согласно настоящей теореме всякая равновесная конфигурация точечных зарядов без действия на них каких-либо сил, помимо сил кулоновского притяжения и отталкивания, является неустойчивой. Распространение теоремы происходит за счет того, что рассматриваемая в задаче термодинамическая система, описываемая функцией распределения электронов, является изолированной.

Важным служит и то, что первые два неравенства счетного набора дополнительных условий (26) допускают трактовку в качестве достаточных условий линейной практической неустойчивости [23] и могут быть использованы двумя способами в экспериментах по ускорению заряженных частиц. Во-первых, при создании в ускорителе облака электронов, через которое будут пролетать заряженные частицы, нужно, чтобы условия практической неустойчивости были выполнены. За счет этого облако электронов будет образовываться быстрее и будет обладать более высокой температурой. Во-вторых, чтобы горячее облако электронов просуществовало как можно дольше и не рассеивалось, необходимо, чтобы условия практической неустойчивости, напротив, не выполнялись.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Виктории Павловне Зининой, выполнившей выпускную квалификационную работу бакалавра под руководством Ю. Г. Губарева по данной теме, за активное участие в настоящих исследованиях.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Bernstein I.B.* Waves in a plasma in a magnetic field // *Phys. Rev.* 1958. V. 109, No 1. P. 10–21. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.10>.
2. *Gardner C.S.* Bound on the energy available from a plasma // *Phys. Fluids.* 1963. V. 6, No 6. P. 839–840. <https://doi.org/10.1063/1.1706823>.
3. *Rosenbluth M.N.* Topics in microinstabilities // *Advanced Plasma Theory / Rosenbluth M.N. (Ed.). Ser.: Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 25.* New York, NY: Acad. Press, 1964. P. 137–158.
4. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // *Phys. Rep.* 1985. V. 123, No 1–2. P. 1–116.
5. *Pankavich S., Allen R.* Instability conditions for some periodic BGK waves in the Vlasov–Poisson system // *Eur. Phys. J. D.* 2014. V. 68, No 12. Art. 363. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50170-y>.
6. *Han-Kwan D., Hauray M.* Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov–Poisson equation // *Commun. Math. Phys.* 2015. V. 334, No 2. P. 1101–1152. <https://doi.org/10.1007/s00220-014-2217-4>.
7. *Esenturk E., Hwang H.-J.* Linear stability of the Vlasov–Poisson system with boundary conditions // *Nonlinear Anal.* 2016. V. 139. P. 75–105. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.02.014>.
8. *Ландау Л.Д.* О колебаниях электронной плазмы // *УФН.* 1967. Т. 93, № 3. С. 527–540.
9. *Mouhot C., Villani C.* On Landau damping // *Acta Math.* 2011. V. 207, No 1. P. 29–201. <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.

10. *Bedrossian J., Masmoudi N., Mouhot C.* Linearized wave-damping structure of Vlasov–Poisson in $\mathbb{R}^3$ // *SIAM J. Math. Anal.* 2022. V. 54, No 4. P. 4379–4406. <https://doi.org/10.1137/20M1386141>.
11. *Bibilova S.A., Gubarev Y.G.* Two-flow instability of one class of spherically symmetric dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma // *Acta Appl. Math.* 2023. V. 187, No 1. Art. 2. <https://doi.org/10.1007/s10440-023-00595-1>.
12. *Gubarev Yu.G.* Two-flow instability of particular class of one-dimensional dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma // *Plasma Res. Express.* 2019. V. 1, No 4. Art. 045008. <https://doi.org/10.1088/2516-1067/ab5ac0>.
13. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // *УФН.* 1997. Т. 167, № 11. С. 1137–1167.
14. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для систем гидродинамического типа. Новосибирск: Ин-т автоматизации и электрометрии, 1982. 50 с. (Препринт / Ин-т автоматизации и электрометрии. Сиб. отд-ние АН СССР; № 186).
15. *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 392 с.
16. *Кролл Н., Трайвеллис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 528 с.
17. *Penrose O.* Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma // *Phys. Fluids.* 1960. V. 3, No 2. P. 258–264. <https://doi.org/10.1063/1.1706024>.
18. *Захаров В.Е.* Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // *Функц. анализ и его прил.* 1980. Т. 14, № 2. С. 15–24.
19. *Губарев Ю.Г.* К аналогии между уравнениями Бенни и уравнениями Власова–Пуассона // *Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. РАН, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.* 1995. Вып. 110. Акустика неоднородных сред. С. 78–90.
20. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
21. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
22. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1950. 103 с.
23. *Губарев Ю.Г.* Прямой метод Ляпунова. Устойчивость состояний покоя и стационарных течений жидкостей и газов. Saarbrücken: Palmarium Acad. Publ., 2012. 192 p.
24. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 229 с.

Поступила в редакцию 13.02.2024

Принята к публикации 06.03.2024

Губарев Юрий Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: gubarev@hydro.nsc.ru

Котельникова Мария Станиславовна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН
просп. Акад. Лаврентьева, д. 15, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: kotelnikova@hydro.nsc.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2024, vol. 166, no. 1, pp. 36–51

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.36-51

**On the Stability of a Particular Class of One-Dimensional States
of Dynamic Equilibrium of the Vlasov–Poisson Electron Gas**

*Yu.G. Gubarev**, *M.S. Kotelnikova***

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia
E-mail: *gubarev@hydro.nsc.ru, **kotelnikova@hydro.nsc.ru*

Received February 13, 2024; Accepted March 6, 2024

Abstract

The one-dimensional problem of the linear stability of dynamic states of local thermodynamic equilibria with respect to small perturbations was studied for the case when the Vlasov–Poisson electron gas contains electrons with a stationary distribution function that is constant in physical space and variable in a continuum of velocities. The absolute instability of all considered one-dimensional dynamic states of any local thermodynamic equilibrium was proved using the direct Lyapunov method. The scope of applicability of the Newcomb–Gardner–Rosenbluth sufficient condition for linear stability was outlined. An a priori exponential estimation was obtained for the rise of small one-dimensional perturbations from below. Analytic counterexamples to the spectral Newcomb–Gardner theorem and the Penrose criterion were constructed. Earnshaw’s theorem was extended from classical mechanics to statistical one.

Keywords: Vlasov–Poisson electron gas, dynamic equilibrium states, linear stability, direct Lyapunov method

Acknowledgments. We thank Viktoriya P. Zinina for actively participating in our study, as she wrote her bachelor’s thesis on the same topic under the supervision of Yu.G. Gubarev.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Bernstein I.B. Waves in a plasma in a magnetic field. *Phys. Rev.*, 1958, vol. 109, no. 1, pp. 10–21. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.10>.
2. Gardner C.S. Bound on the energy available from a plasma. *Phys. Fluids*, 1963, vol. 6, no. 6, pp. 839–840. <https://doi.org/10.1063/1.1706823>.
3. Rosenbluth M.N. Topics in microinstabilities. In: Rosenbluth M.N. (Ed.) *Advanced Plasma Theory*. Ser: Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, Course 25. New York, NY, Acad. Press, 1964, pp. 137–158.
4. Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T.S., Weinstein A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. *Phys. Rep.*, 1985, vol. 123, nos. 1–2, pp. 1–116.
5. Pankavich S., Allen R. Instability conditions for some periodic BGK waves in the Vlasov–Poisson system. *Eur. Phys. J. D.*, 2014, vol. 68, no. 12, art. 363. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50170-y>.

6. Han-Kwan D., Hauray M. Stability issues in the quasineutral limit of the one-dimensional Vlasov–Poisson equation. *Commun. Math. Phys.*, 2015, vol. 334, no. 2, pp. 1101–1152. <https://doi.org/10.1007/s00220-014-2217-4>.
7. Esenturk E., Hwang H.-J. Linear stability of the Vlasov–Poisson system with boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, 2016, vol. 139, pp. 75–105. <https://doi.org/10.1016/j.na.2016.02.014>.
8. Landau L.D. On the vibrations of the electronic plasma. *Usp. Fiz. Nauk*, 1967, vol. 93, no. 3, pp. 527–540. (In Russian)
9. Mouhot C., Villani C. On Landau damping. *Acta Math.*, 2011, vol. 207, no. 1, pp. 29–201. <https://doi.org/10.1007/s11511-011-0068-9>.
10. Bedrossian J., Masmoudi N., Mouhot C. Linearized wave-damping structure of Vlasov–Poisson in $\mathbb{R}^3$. *SIAM J. Math. Anal.*, 2022, vol. 54, no. 4, pp. 4379–4406. <https://doi.org/10.1137/20M1386141>.
11. Bibilova S.A., Gubarev Y.G. Two-flow instability of one class of spherically symmetric dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma. *Acta Appl. Math.*, 2023, vol. 187, no. 1, art. 2. <https://doi.org/10.1007/s10440-023-00595-1>.
12. Gubarev Yu.G. Two-flow instability of particular class of one-dimensional dynamic equilibrium states of Vlasov–Poisson plasma. *Plasma Res. Express*, 2019, vol. 1, no. 4, art. 045008. <https://doi.org/10.1088/2516-1067/ab5ac0>.
13. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. Hamiltonian formalism for nonlinear waves. *Phys.-Usp.*, 1997, vol. 40, no. 11, pp. 1087–1116. <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n11ABEH000304>.
14. Zakharov V.E., Kuznetsov E.A. *Gamil'tonovskii formalizm dlya sistem gidrodinamicheskogo tipa* [Hamiltonian Formalism for Systems of Hydrodynamic Type]. Novosibirsk, Inst. Avtom. Elektrom., 1982. 50 p. Preprint, Inst. Avtom. Elektrom. Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, no. 186. (In Russian)
15. Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1979. 392 p. (In Russian)
16. Krall N.A., Trivelpiece A.W. *Osnovy fiziki plazmy* [Principles of Plasma Physics]. Moscow, Mir, 1975. 528 p. (In Russian)
17. Penrose O. Electrostatic instabilities of a uniform non-Maxwellian plasma. *Phys. Fluids*, 1960, vol. 3, no. 2, pp. 258–264. <https://doi.org/10.1063/1.1706024>.
18. Zakharov V.E. Benney equations and quasiclassical approximation in the method of the inverse problem. *Funct. Anal. Appl.*, 1980, vol. 14, no. 2, pp. 89–98. <https://doi.org/10.1007/BF01086549>.
19. Gubarev Yu.G. To analogy between the Benny and Vlasov–Poisson equations. In: *Din. Sploshnoi Sredy: Sb. nauch. tr. RAN, In-t gidrodinamiki* [Dynamics of a Continuous Medium: A Collection of Articles by the Institute of Hydrodynamics, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch], 1995, no. 110: Acoustics of heterogeneous media, pp. 78–90. (In Russian)
20. Yakubovich V.A., Starzhinskii V.M. *Lineinye differentsial'nye uravneniya s preiodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications]. Moscow, Nauka, 1972. 718 p. (In Russian)
21. Chandrasekhar S. *Ellipsoidnye figury ravnovesiya* [Ellipsoidal Figures of Equilibrium]. Moscow, Mir, 1973. 288 p. (In Russian)

-
22. Chaplygin S.A. *Novyi metod priblizhennogo integrirvaniya differentsial'nykh uravnenii* [A New Method for Approximate Integration of Differential Equations]. Moscow, GITTL, 1950. 103 p. (In Russian)
 23. Gubarev Yu.G. *Pryamoi metod Lyapunova. Ustoichivost' sostoyanii pokoya i statsionarnykh techenii zhidkosti i gazov* [The Direct Lyapunov Method. The Stability of Quiescent States and Steady-State Flows of Fluids and Gases]. Saarbrücken, Palmarium Acad. Publ., 2012. 192 p. (In Russian)
 24. Sirazetdinov T.K. *Ustoichivost' sistem s rasprelennymi parametrami* [Optimization of Systems with Distributed Parameters]. Novosibirsk, Nauka, 1987. 229 p. (In Russian)
-

Для цитирования: Губарев Ю.Г., Котельникова М.С. К устойчивости частного класса одномерных состояний динамического равновесия электронного газа Власова – Пуассона // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 36–51. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.36-51>.

For citation: Gubarev Yu.G., Kotelnikova M.S. On the stability of a particular class of one-dimensional states of dynamic equilibrium of the Vlasov–Poisson electron gas. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 36–51. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.36-51>. (In Russian)