

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.22-35

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ
СИСТЕМ, ОБОБЩАЮЩИХ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ
БИЦАДЗЕ

С. Байзаев¹, Р.Н. Баротов²

¹Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

²Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Аннотация

Рассмотрена эллиптическая система из n уравнений, главной частью которой является оператор Бицадзе (квадрат оператора Коши–Римана), а младший член состоит из произведения заданной матриц-функции на сопряжение искомой вектор-функции. Система исследована в банаховом пространстве вектор-функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости. Установлено, что задача о решении системы в указанном пространстве может быть не нётеровой, приведен пример однородной системы, имеющей бесконечное число линейно независимых решений.

Как известно, для многих классов эллиптических систем нётеровость граничных задач в компактной области эквивалентна наличию априорных оценок в соответствующих пространствах. В связи с этим представляется важным изучение вопросов, связанных с установлением априорных оценок для рассматриваемой системы в пространстве, указанном выше. Для случая слабо осциллирующих на бесконечности коэффициентов найдены необходимые и достаточные условия справедливости априорной оценки. Эти условия записаны на языке спектра предельных матриц, образуемых по частичным пределам матрицы коэффициентов на бесконечности. На конкретных примерах показано, как строятся предельные матрицы и как выглядят условия, названные выше.

Ключевые слова: эллиптическая система, ограниченная и равномерно непрерывная по Гёльдеру функция, априорная оценка, нётеровость

Введение

Рассмотрим эллиптическую систему вида

$$Lw \equiv w_{\bar{z}z} + A(z)\bar{w} = f(z), \quad (1)$$

где $w \in \mathbb{C}^n$, $A(z)$ – матриц-функция порядка n и $f(z)$ – вектор-функция, определенные во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Как известно [1, с. 133], задача Дирихле для системы $w_{\bar{z}z} = 0$ не является нётеровой. Для системы

$$Lw = 0 \quad (2)$$

задача о решениях, ограниченных на $\mathbb{C}$, может быть не нётеровой. Например, при $A = E$, единичной матрице порядка n , вектор-функции

$$w = p\omega + \bar{p}e^{2i\gamma}\bar{\omega},$$

где $\omega = e^{2i\operatorname{Re}(e^{i\gamma}z)}$, $0 < \gamma < 2\pi$, $p \in \mathbb{C}^n$, будут ограниченными на $\mathbb{C}$ решениями системы (2), т. е. система (2) имеет бесконечное число линейно независимых решений, ограниченных на $\mathbb{C}$.

В настоящей работе установлены некоторые априорные оценки решений системы (1) из пространства вектор-функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гёльдеру во всей комплексной плоскости. Эти оценки можно использовать при изучении вопросов нормальной разрешимости и нётеровости оператора L в гёльдеровых пространствах.

Введем следующие обозначения (см., например, [2]).

C_α – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, ограниченных на $\mathbb{C}$ и равномерно непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и нормой

$$\|w\|_\alpha = \|w\|_0 + \sup_{z_1 \neq z_2} |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|w(z_1) - w(z_2)\|, \quad (3)$$

здесь $\|w\|_0 = \sup_z \|w(z)\|$, $\|\bullet\|$ – норма в $\mathbb{C}^n$.

C_α^1 – банахово пространство таких вектор-функций $w(z)$, что $w, w_{\bar{z}}, w_z \in C_\alpha$ с нормой

$$\|w\|_{\alpha,1} = \|w\|_\alpha + \|w_{\bar{z}}\|_\alpha + \|w_z\|_\alpha. \quad (4)$$

Аналогично определим банахово пространство C_α^2 с нормой

$$\|w\|_{\alpha,2} = \|w\|_{\alpha,1} + \|w_{\bar{z}}\|_{\alpha,1} + \|w_z\|_{\alpha,1}. \quad (5)$$

$C(D_{r,z_0})$ – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных и непрерывных в круге $D_{r,z_0} = \{z : |z - z_0| \leq r\}$, с нормой

$$\|w\|_{C(D_{r,z_0})} = \sup_z \|w(z)\|.$$

$C_\alpha(D_{r,z_0})$ – банахово пространство вектор-функций $w(z)$, определенных в круге D_{r,z_0} и непрерывных по Гёльдеру с показателем $\alpha \in (0, 1)$ и нормой, аналогичной (3).

Таким же образом определим банаховы пространства $C_\alpha^1(D_{r,z_0})$ и $C_\alpha^2(D_{r,z_0})$ с нормами $\|w\|_{C_\alpha^1(D_{r,z_0})}$ и $\|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})}$, аналогичными (4) и (5) соответственно.

1. Вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α . Тогда оператор $L : C_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha$ будет ограниченным. Приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α . Тогда для произвольной вектор-функции $w(z)$ из $C_\alpha^2(D_{r,z_0})$, $r > 2$, справедлива оценка вида

$$\|w\|_{C_\alpha^2(D_{1,z_0})} \leq M \left(\|Lw\|_{C_\alpha(D_{r,z_0})} + \|w\|_{C(D_{r,z_0})} \right), \quad (6)$$

где M – постоянная, не зависящая от w .

Эта лемма может быть доказана по аналогии с внутренними оценками шаудеровского типа [3, с. 24], [4, с. 161] с привлечением операторов T_G и Π_G (G – ограниченная область) [5, сс. 39, 53].

Лемма 2. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α . Тогда для произвольной вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ справедлива оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq K (\|Lw\|_\alpha + \|w\|_0), \quad (7)$$

где K – постоянная, не зависящая от w .

Доказательство. Пусть $w \in C_\alpha^2$. Рассмотрим эту вектор-функцию в круге D_{r,z_0} , получим

$$\|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})} \leq \|w\|_{\alpha,2}. \quad (8)$$

С учетом этого неравенства в классе C_α^2 введем следующую норму

$$\|w\|'_{\alpha,2} = \sup_{z_0 \in C} \|w\|_{C_\alpha^2(D_{r,z_0})}.$$

По этой норме класс C_α^2 будет банаховым пространством, которое обозначим символом H_α^2 . Докажем эквивалентность норм $\|\bullet\|_{\alpha,2}$ и $\|\bullet\|'_{\alpha,2}$.

Из (8) следует неравенство

$$\|w\|'_{\alpha,2} \leq \|w\|_{\alpha,2}. \quad (9)$$

Пусть I_α – оператор вложения, сопоставляющий каждой вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ эту же вектор-функцию, рассматриваемую как элемент пространства H_α^2 . Оператор $I_\alpha: C_\alpha^2 \rightarrow H_\alpha^2$ является непрерывным в силу неравенства (9), биективным и отображает C_α^2 на H_α^2 . Тогда по теореме Банаха обратный оператор $I_\alpha^{-1}: H_\alpha^2 \rightarrow C_\alpha^2$ будет непрерывным, то есть найдется такая постоянная $m > 0$, что для всех $\omega \in H_\alpha^2$ справедливо неравенство

$$\|I_\alpha^{-1}\omega\|_{\alpha,2} \leq m\|\omega\|'_{\alpha,2}.$$

Отсюда имеем

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq m\|w\|'_{\alpha,2} \quad \forall w \in C_\alpha^2. \quad (10)$$

Неравенства (9) и (10) показывают, что нормы $\|\bullet\|_{\alpha,2}$ и $\|\bullet\|'_{\alpha,2}$ эквивалентны.

В силу неравенства (1) имеем

$$\|w\|'_{\alpha,2} \leq M \sup_{z_0 \in C} (\|Lw\|_{C_\alpha(D_{r,z_0})} + \|w\|_{C(D_{r,z_0})}) \leq M (\|Lw\|_\alpha + \|w\|_0).$$

Отсюда и из (10) следует оценка (7) с постоянной $K = mM$. $\square$

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область и $f \in L_p(G)$, $p > 2$. Тогда определены операторы $T_G(f)$ и $\Pi_G(f)$ [5, сс. 39, 53].

Лемма 3. Общее решение неоднородного уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} = f(z), \quad z \in G,$$

имеет вид

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) - T_G(\bar{\zeta}f) + \bar{z}T_G(f),$$

где φ и ψ – произвольные функции, аналитические в области G .

Заметим, что $w_0(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z)$ является общим решением соответствующего однородного уравнения (это уравнение Бицадзе), а $\omega(z) = -T_G(\bar{\zeta}f) + \bar{z}T_G f$ – частным решением неоднородного уравнения.

Лемма 4. Пусть матрица A является постоянной. Тогда система

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + A\bar{w} = 0 \quad (11)$$

имеет в пространстве S' ненулевое решение в том и только том случае, когда спектр $\sigma(A\bar{A})$ матрицы $A\bar{A}$ пересекается с полуосью $R_+ = [0, +\infty)$.

Эта лемма может быть доказана применением преобразования Фурье к системе (11).

Рассмотрим случай матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда характеристическое уравнение для матрицы $A\bar{A}$ имеет вид $\lambda^2 - 2p\lambda + q^2 = 0$, где $p = \frac{1}{2}(|a|^2 + |d|^2) + \operatorname{Re}b\bar{c}$, $q = |\det A|$. Поэтому $\lambda_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - q^2}$.

Справедлива следующая

Лемма 5. 1) Если $p > |\det A|$, то $\lambda_{1,2} \geq 0$.

2) Если $p < |\det A|$ и $p \neq -|\det A|$, то $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, т. е. собственные значения матрицы $A\bar{A}$ комплексно-сопряженные.

3) Если $p = \pm|\det A|$, то $\lambda_{1,2} = p$.

Замечание 1. Из соотношений

$p + |\det A| \geq \frac{1}{2}(|a|^2 + |d|^2) + \operatorname{Re}b\bar{c} - |ad| + |bc| = \frac{1}{2}(|a| - |d|)^2 + |b\bar{c}| + \operatorname{Re}b\bar{c} \geq 0$ следует, что случай $p < -|\det A|$ невозможен.

Замечание 2. Из лемм 4 и 5 следует, что в случае $n = 2$ система (11) имеет в S' ненулевое решение в том и только том случае, когда $p \geq |\det A|$.

Случай матрицы третьего порядка можно исследовать, как в работе [6].

Через Γ обозначим множество $\sigma(A\bar{A}) \cap R_+$, а через K_U – носитель образа Фурье $U(\zeta)$ решения $w \in S'$ системы (11). Заметим, что если $\Gamma = \emptyset$, то система (11) в пространстве S' имеет только нулевое решение.

Справедлива следующая теорема о носителе K_U .

Теорема 1. Пусть $\Gamma \neq \emptyset$. Тогда

1) $K_U = \{0\}$, если $\Gamma = \{0\}$.

2) $K_U \subset \bigcup_{j=1}^m \{z : |z|^4 = \frac{\mu_j}{16}\}$, если $\Gamma = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\}$; здесь $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$.

Доказательство. Рассмотрим систему (11) в пространстве S' и применив преобразование Фурье, получим

$$\zeta^2 U(\zeta) + 4AV(\zeta) = 0, \quad (12)$$

здесь $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ – образы Фурье $w(z)$ и $\overline{w(z)}$ соответственно. Отметим, что $U(\zeta)$ и $V(\zeta)$ связаны соотношением

$$\overline{U(-\zeta)} = V(\zeta), \quad (13)$$

поэтому в (12), заменив ζ на $-\zeta$ и перейдя к комплексно сопряженным величинам, получим еще одно уравнение

$$4\bar{A}U(\zeta) - \bar{\zeta}^2 V(\zeta) = 0. \quad (14)$$

Введя обозначения $B(\zeta) = \begin{pmatrix} -\zeta^2 E & 4A \\ 4\bar{A} & -\bar{\zeta}^2 E \end{pmatrix}$, $\Omega = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, уравнения (12), (14) запишем в виде

$$B(\zeta)\Omega = 0. \quad (15)$$

Согласно свойствам блочных матриц [7, с. 107] определитель матрицы B равен

$$\det B = \det \left(|\zeta|^4 E - 16A\bar{A} \right).$$

Отсюда следует, что при $\Gamma = \emptyset$, т. е. когда матрица $A\bar{A}$ не имеет неотрицательных собственных значений, матрица B обратима, и уравнение (15) в $S' \times S'$ имеет только нулевое решение. Тогда и система (11) в S' будет иметь только нулевое решение.

Пусть Γ состоит из одной точки $z = 0$. Тогда $\det B(\zeta)$ обращается в нуль только при $\zeta = 0$. Поэтому носитель распределения $\Omega(\zeta)$ состоит из одной точки $\zeta = 0$. Следовательно, носитель $U(\zeta)$ также состоит из точки $\zeta = 0$, т. е. $K_U = \{0\}$.

Пусть теперь Γ состоит из точек $z_j = \mu_j$, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_m$. Тогда $\det B(\zeta)$ обращается в нуль на окружностях $S_j = \left\{ z : |z| = \frac{\sqrt[4]{\mu_j}}{2} \right\}$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{supp } \Omega \subset \bigcup_{j=1}^m S_j$, следовательно, $K_U \subset \bigcup_{j=1}^m S_j$. $\square$

Используя теорему 1 и теоремы о структуре обобщенных функций с точечным носителем [8, с. 49] и с носителем, принадлежащим окружности [9], можно определить $U(\zeta)$ и далее найти $w(z)$ – решение системы (11).

Отметим, что в случае 1) многообразие решений системы (11), растущих на бесконечности не быстрее, чем $|z|^N$, N – неотрицательное целое число, как вещественное линейное пространство, будет конечномерным и ненулевым, в случае 2) – бесконечномерным, а в остальных случаях – нулевым.

2. Априорные оценки

Предположим, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат S_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности, т. е. удовлетворяют условию

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup_{|\xi - z| < 1} \|a(\xi) - a(z)\| = 0.$$

Тогда из последовательности $\{A(z + h_k)\}$, где $h_k \rightarrow \infty$, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на каждом компакте, причем пределом будет постоянная матрица $\hat{A}$. Выбрав всевозможные последовательности $\{h_k\}$, $h_k \rightarrow \infty$, получим множество предельных матриц $\hat{A}$, которое обозначим символом $H(A)$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть матрица $A(z)$ со столбцами из C_α стабилизируется на бесконечности, т. е. существует предел $A_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} A(z)$. Тогда множество $H(A)$ состоит из единственной матрицы A_0 .

Пример 2. Пусть

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon(r) e^{im\varphi} \\ -\varepsilon(r) e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix},$$

где $z = re^{i\varphi}$, m – целое число, $\varepsilon(r) = \begin{cases} r & \text{при } r \leq 1, \\ 1 & \text{при } r > 1. \end{cases}$ Покажем, что функция

$a(z) = \varepsilon(r) e^{im\varphi}$ является слабо осциллирующей на бесконечности.

Пусть $m = 1$. Тогда при $r > 1$ и $0 < |z - \zeta| < 1$, $\zeta = \rho e^{i\psi}$ имеем

$$\begin{aligned} |a(z) - a(\zeta)| &= |e^{i\varphi} - e^{i\psi}| = |r^{-1}z - \rho^{-1}\zeta| = r^{-1} |z - \zeta + (1 - r\rho^{-1})\zeta| \leq \\ &\leq r^{-1} (|z - \zeta| + |\rho - r|) \leq 2r^{-1} |z - \zeta| < 2r^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup_{0 < |z - \zeta| < 1} |a(z) - a(\zeta)| = 0.$$

Аналогично функция $\varepsilon(r) e^{-i\varphi}$ также будет слабо осциллирующей на бесконечности.

Далее, если ограниченные на всей плоскости функции $f(z)$ и $g(z)$ являются слабо осциллирующими на бесконечности, то таким же свойством будет обладать и их произведение. Это вытекает из следующего неравенства

$$|f(z)g(z) - f(\zeta)g(\zeta)| \leq |f(z)| |g(z) - g(\zeta)| + |g(\zeta)| |f(z) - f(\zeta)|.$$

Поэтому функция $\varepsilon(r) e^{im\varphi}$ будет слабо осциллирующей на бесконечности.

Теперь построим предельные матрицы $\tilde{A}$. Пусть $h_k \rightarrow \infty$ и $h_k = |h_k| e^{i\varphi_k}$. Из ограниченной последовательности φ_k выберем сходящуюся подпоследовательность $\varphi_{k_j} \rightarrow \psi \in [0, 2\pi]$. Для произвольного $R > 0$ при $|z| \leq R$ и достаточно больших k имеем $\varepsilon(|z + h_k|) \equiv 1$ и

$$\begin{aligned} |a(z + h_k) - e^{im\psi}| &= |e^{im\psi_k(z)} - e^{im\psi}| \leq |e^{im\psi_k(z)} - e^{im\varphi_k}| + \\ &+ |e^{im\varphi_k} - e^{im\psi}| = |e^{im[\psi_k(z) - \varphi_k]} - 1| + |e^{im(\varphi_k - \psi)} - 1|, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\psi_k(z) = \arg(z + h_k)$. Так как

$$\psi_k(z) - \varphi_k = \arg \frac{z + h_k}{h_k} = \arg \left(1 + \frac{z}{h_k} \right),$$

то при $|z| \leq R$ последовательность $\psi_k(z) - \varphi_k$ равномерно сходится к нулю. Поэтому из соотношений (16) следует, что последовательность $a(z + h_{k_j})$ будет равномерно сходиться на каждом компакте к постоянной $e^{im\psi}$. В силу произвольности h_k множество точек ψ будет заполнять отрезок $[0, 2\pi]$.

Таким образом, предельные матрицы имеют вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & 0 \end{pmatrix},$$

где δ – произвольное комплексное число с $|\delta| = 1$.

Теорема 2. Пусть столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α , слабо осциллируют на бесконечности, и выполнено условие

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{0 < |\zeta - z| \leq \delta} \|A(z) - A(\zeta)\|' |z - \zeta|^{-\alpha} = 0, \quad (17)$$

здесь $\|\bullet\|'$ – матричная норма. Тогда для того чтобы при всех $w \in C_\alpha^2$ была справедлива оценка вида

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|Lw\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|w(t)\| \right), \quad (18)$$

где M – постоянная, не зависящая от w , необходимо и достаточно, чтобы для всех матриц $\tilde{A} \in H(A)$ выполнялось условие

$$\sigma(\tilde{A}\tilde{A}) \cap R_+ = \emptyset, \quad (19)$$

где $\sigma(\tilde{A}\tilde{A})$ – спектр матрицы $\tilde{A}\tilde{A}$, $R_+ = [0, \infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место оценка (18). Для произвольной последовательности $h_k \rightarrow \infty$ и вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ с компактным носителем имеем

$$\|S_{-h_k}w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|L(S_{-h_k}w)\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| \right), \quad (20)$$

где $S_{-h_k}w(z) = w(z - h_k)$. Очевидно, сдвиги $S_{-h_k}w$ не изменяют норму в пространствах C_α^2 и C_α . Поэтому неравенство (20) можно переписать в виде

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left(\|S_{h_k}L(S_{-h_k}w)\|_\alpha + \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| \right). \quad (21)$$

Второе слагаемое в правой части этого неравенства, в силу компактности носителя $w(z)$, стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq 1} \|S_{-h_k}w(t)\| = 0. \quad (22)$$

Пусть $\tilde{A}$ – матрица, построенная по последовательности $A(z + h_k)$, и $f_k = S_{h_k}L(S_{-h_k}w)$, $f_0 = \tilde{L}w = w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{w}$. Покажем, что

$$\|f_k - f_0\|_\alpha \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Так как $f_k = w_{\bar{z}\bar{z}} + A(z + h_k)\bar{w}$, то $f_k - f_0 = [A(z + h_k) - \tilde{A}]\bar{w}$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $A(z + h_k)$ на каждом компакте равномерно сходится к $\tilde{A}$ (иначе мы перешли бы к подпоследовательности). Поэтому в силу компактности носителя $w(z)$ имеем

$$\|f_k - f_0\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Пусть D – носитель $w(z)$, ε_k – произвольная последовательность положительных чисел, причем $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $c_k = \sup_{z_1 \neq z_2} v_k(z_1, z_2)$, где

$$v_k(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^{-\alpha} \|f_k(z_1) - f_0(z_1) - f_k(z_2) + f_0(z_2)\|, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда найдутся такие точки $\xi_k, \eta_k \in C$, $\xi_k \neq \eta_k \forall k = 1, 2, \dots$, что

$$c_k - \xi_k \leq v_k(\xi_k, \eta_k) \leq c_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Можно считать, что последовательность $\delta_k = |\xi_k - \eta_k|$ имеет конечный или бесконечный предел δ . В силу симметричности функции $v_k(z_1, z_2)$ относительно переменных z_1, z_2 и компактности D , если нужно, переходя от последовательностей ξ_k, η_k к их подпоследовательностям, достаточно рассмотреть следующие случаи:

- 1) $\xi_k \in D, \eta_k \in D \forall k$;
- 2) $\xi_k \in D, \eta_k \notin D \forall k$.

Случай 1. Имеем

$$\begin{aligned} v_k(\xi_k, \eta_k) &= |\xi_k - \eta_k|^{-\alpha} \left\| \left[A(\xi_k + h_k) - \tilde{A} \right] \left[\overline{w(\xi_k)} - \overline{w(\eta_k)} \right] + \right. \\ &+ \overline{w(\eta_k)} \left[A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k) \right] \left. \right\| \leq \delta_k^{-\alpha} \left\| A(\xi_k + h_k) - \tilde{A} \right\|' \times \\ &\times \|w(\xi_k) - w(\eta_k)\| + \|w(\eta_k)\| \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|'. \end{aligned} \quad (26)$$

Так как для всякой ограниченной последовательности ξ_k

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' = 0,$$

то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|' \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' + \|A(\eta_k + h_k)\|' \right) = 0.$$

Поэтому в случае $\delta > 0$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(\xi_k, \eta_k) = 0. \quad (27)$$

Если же $\delta = 0$, то, усилив правую часть неравенства (26), получим

$$v_k(\xi_k, \eta_k) \leq \|A(\xi_k + h_k) - \tilde{A}\|' H_\alpha(w) + \|w(\eta_k)\| \|A(\xi_k + h_k) - A(\eta_k + h_k)\|' \delta_k^{-\alpha},$$

где $H_\alpha(w)$ – гёльдерова постоянная вектор-функции $w(z)$. Перейдя здесь к пределу с учетом условия (17), придем к равенству вида (27). Тогда из неравенства (25) и равенства (27) будем иметь $c_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т. е.

$$H_\alpha(f_k - f_0) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из (26) следуют соотношения (23).

Теперь, перейдя к пределу в (21), с учетом соотношений (22) и (23) получим неравенство

$$\|w\|_{\alpha,2} \leq M \left\| \tilde{L}w \right\|_\alpha, \quad (28)$$

справедливое для любой вектор-функции $w \in C_\alpha^2$ с компактным носителем.

Пусть $w \in C_\alpha^2$ – произвольная, а $\eta(z)$ – такая гладкая функция, что $\forall z \in C$ $0 \leq \eta(z) \leq 1$, причем $\eta(z) = 1$ при $|z| \leq 1$ и $\eta(z) = 0$ при $|z| \geq 2$. Тогда вектор-функции $\eta\left(\frac{z}{k}\right)$ и $w(z)$ имеют компактный носитель, и из (28) следует

$$\left\| \eta\left(\frac{z}{k}\right) w \right\|_{\alpha,2} \leq M \left\| \tilde{L} \left[\eta\left(\frac{z}{k}\right) w \right] \right\|_\alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Так как

$$\tilde{L} \left[\eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right] = \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w + \frac{1}{k^2} \eta_{\bar{z}\bar{z}} w + \frac{1}{k} \eta_{\bar{z}} w_{\bar{z}},$$

то из последнего неравенства получим

$$\left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right\|_{\alpha,2} \leq M \left[\left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w \right\|_{\alpha} + \frac{1}{k^2} \|\eta_{\bar{z}\bar{z}} w\|_{\alpha} + \frac{1}{k} \|\eta_{\bar{z}} w_{\bar{z}}\|_{\alpha} \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) w \right\|_{\alpha,2} = \|w\|_{\alpha,2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \eta \left(\frac{z}{k} \right) \tilde{L}w \right\|_{\alpha} = \|\tilde{L}w\|_{\alpha}.$$

Поэтому, перейдя в (29) к пределу, убедимся в справедливости неравенства (28) для любой $w \in C_{\alpha}^2$. Отсюда следует, что ядро оператора $\tilde{L} : C_{\alpha}^2 \rightarrow C_{\alpha}$ нулевое. Тогда в силу леммы 4 будет выполнено условие (19). Необходимость условия (19) доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие (19). Доказательство справедливости оценки (18) проведем от противного. Тогда $\forall j \in \mathbb{N} \exists w_j \in C_{\alpha}^2$, что имеет место неравенство

$$\|w_j\|_{\alpha,2} > j \left(\|Lw_j\|_{\alpha} + \max_{|t| \leq 1} \|w_j(t)\| \right).$$

Нормировав w_j , $v_j = \|w_j\|_{\alpha,2}^{-1} w_j$, получим

$$\|Lv_j\|_{\alpha} + \max_{|t| \leq 1} \|v_j(t)\| < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

Далее из априорной оценки (7) (лемма 2) следует, что

$$\|Lv_j\|_{\alpha} + \|v_j\|_0 \geq \frac{1}{K}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Из неравенства (30) следует, что $\|Lv_j\|_{\alpha} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда из неравенства (31) получим, что $\|v_j\|_0 > \frac{1}{2K}$ при $j \gg 1$, следовательно, найдутся точки z_j такие, что

$$\|v_j(z_j)\| > \frac{1}{2K}. \quad (32)$$

Будем считать, что последовательность $\{z_j\}$ имеет конечный или бесконечный предел z_0 .

Пусть $f_j = Lv_j$. Тогда в силу (30) $\|f_j\|_{\alpha} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и согласно лемме 3 для любого $R > 0$ справедливы равенства

$$v_j(z) = \varphi_j(z) + \bar{z}\psi_j(z) - T(\bar{z}g_j) + \bar{z}Tg_j, \quad |z| \leq r < R, \quad (33)$$

здесь $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$ – аналитические функции, $g_j = f_j - A\bar{v}_j$; для удобства в индексе оператора T мы не указали область $G = \{z : |z| < R\}$. Не умаляя общности, можно считать, что последовательности v_j , $\frac{\partial v_j}{\partial \bar{z}}$, $\frac{\partial^2 v_j}{\partial \bar{z}^2}$ равномерно сходятся на каждом компакте плоскости. Из (33) следует, что

$$\frac{\partial v_j}{\partial \bar{z}} = \psi_j(z) - Tg_j,$$

и в силу сказанного выше последовательность $\{\psi_j(z)\}$ будет равномерно сходящейся в круге $K_r = \{z : |z| \leq r\}$. Тогда из (33) следует, что этим свойством обладает и

последовательность $\{\varphi_j(z)\}$. Обозначив пределы последовательностей $\{v_j\}$, $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ через v , φ , ψ соответственно и перейдя в (33) при $j \rightarrow \infty$ к пределу с учетом соотношения $\|f_j\|_\alpha \rightarrow 0$ получим

$$v(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + T(\bar{z}A\bar{v}) - \bar{z}T(A\bar{v}), \quad z \in K_r.$$

Отсюда имеем

$$v_{\bar{z}} = -A\bar{v},$$

т. е. $Lv = 0$, причем в силу (30) $v(z) \equiv 0$ при $|z| \leq 1$. Так как оператор L эллиптический, то $v(z) \equiv 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Если $z_0 \neq \infty$, то из (32) следует, что $v(z_0) \neq 0$, получили противоречие.

Если $z_0 = \infty$, то рассмотрим последовательность $u_j(z) = v_j(z + z_j)$. Очевидно, что

$$Lu_j \equiv \frac{\partial^2 u_j(z)}{\partial \bar{z}^2} + A(z + z_j)u_j(z) = f_j(z + z_j), \quad (34)$$

$$\|u_j\|_{\alpha,2} = 1, \quad \|u_j(0)\| > \frac{1}{2K}. \quad (35)$$

Считая последовательность $\{u_j(z)\}$ равномерно сходящейся на каждом компакте к некоторой функции $u(z)$, а последовательность $\{A(z + z_j)\}$ — к $\tilde{A} \in H(A)$, из (34), (35) путем предельного перехода получим

$$u_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{u} = 0, \quad \|u(0)\| \geq \frac{1}{2K}.$$

Эти соотношения показывают, что предельное уравнение

$$\tilde{L}w \equiv w_{\bar{z}\bar{z}} + \tilde{A}\bar{w} = 0 \quad (36)$$

в пространстве C_α^2 имеет ненулевое решение $u(z)$. Но это противоречит условию (19), так как из этого условия в силу леммы 4 следует, что уравнение (36) в пространстве S' , тем более в C_α^2 , имеет только нулевое решение. Следовательно, справедлива априорная оценка (18). $\square$

Замечание 3. Для выполнения равенства (19) необходимо потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |\det A(z)| > 0. \quad (37)$$

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $A(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$, где функции a, b, c, d принадлежат пространству C_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Найдем условия, при выполнении которых имеет место равенство (29), т. е.

$$\tilde{\Gamma} = \sigma(\tilde{A}\tilde{A}) \cap R_+ = \emptyset \quad \forall \tilde{A} \in H(A). \quad (38)$$

Определим две функции

$$p(z) = \frac{1}{2} \left[|a(z)|^2 + |d(z)|^2 \right] + \operatorname{Re} \left[b(z) \overline{c(z)} \right], \quad q(z) = |\det A(z)|.$$

Эти функции принадлежат пространству C_α .

Для того чтобы выполнялось равенство (38), необходимо

$$\lim_{z \rightarrow \infty} q(z) > 0. \quad (39)$$

Действительно, если (39) не выполняется, то найдется такая последовательность $z_k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} q(z_k) = 0$. Тогда предельная матрица $\tilde{A}$, построенная по последовательности $A(z_k)$ (эта последовательность матриц ограниченная и имеет сходящуюся подпоследовательность), будет вырожденной, т. е. $0 \in \sigma(\tilde{A}\tilde{A})$ и $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$.

Далее, учитывая лемму 5, получим, что для выполнения (38) необходимо, чтобы

$$\overline{\lim_{z \rightarrow \infty}} [p(z) - q(z)] < 0. \quad (40)$$

Действительно, если (40) не выполняется, то существуют такие точки $z_k \rightarrow \infty$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} [p(z_k) - q(z_k)] \geq 0$. Тогда для предельной матрицы $\tilde{A}$, построенной по последовательности $A(z_k)$, будет выполнено неравенство $\tilde{p} \geq \tilde{q}$. Поэтому в силу утверждений 1) и 2) леммы 5 собственные значения матрицы $\tilde{A}\tilde{A}$ будут неотрицательными, и $\tilde{\Gamma} \neq \emptyset$.

Отметим, что условия (39) и (40) будут и достаточными для выполнения равенства (38).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Пусть элементы a, b, c, d матрицы $A(z)$ принадлежат пространству C_α и являются слабо осциллирующими на бесконечности. Тогда для того чтобы выполнялись условия (38), необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства (39) и (40).

Для примера 2 имеем

$$p(z) = -[\varepsilon(r)]^2, \quad q(z) = [\varepsilon(r)]^2,$$

причем $p(z) = -q(z) = -1$ при $|z| \geq 1$. Потому условия (39) и (40) выполняются. Следовательно, для оператора

$$Lw = w_{\bar{z}\bar{z}} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon(r)e^{im\varphi} \\ -\varepsilon(r)e^{im\varphi} & 0 \end{pmatrix} \bar{w}$$

имеет место оценка вида (18).

Рассмотрим ещё ряд примеров, в которых предполагается, что столбцы матрицы $A(z)$ принадлежат C_α и слабо осциллируют на бесконечности.

Пример 3. Пусть существует такое число $R > 0$, что при $|z| \geq R$ матрица $A(z)$ является вещественной. Тогда из равенства

$$A\bar{A} - \lambda^2 E = A^2 - \lambda^2 E = (A + \lambda E)(A - \lambda E), \quad |z| \geq R, \quad (41)$$

следует, что условие (19) выполняется тогда и только тогда, когда при $|z| \geq R$ собственные значения $\lambda(A)$ матрицы $A(z)$ удовлетворяют условию

$$|\operatorname{Im} \lambda(A)| \geq c_0,$$

где c_0 – положительная постоянная.

Если в этом примере дополнительно при $|z| \geq R$ матрица $A(z)$ является симметрической, т. е. $A^T = A$ (кососимметрической, т. е. $A^T = -A$), то в силу того,

что собственные значения симметрической (кососимметрической) матрицы являются вещественными (чисто мнимыми или нулями) [7, сс. 57, 61], из равенства (41) получим следующие включения:

$$\sigma(A\bar{A}) \subset R_+ \quad (\sigma(A\bar{A}) \subset (-\infty, 0]).$$

Поэтому для симметрического случая равенства (19) не могут выполняться, а для кососимметрического случая они выполняются при условии (37).

Пример 4. Пусть матрица $A(z) = (a_{kj}(z))$ четного порядка и

$$\lim_{z \rightarrow \infty} a_{kj}(z) = 0 \quad \text{при } k + j = n + 1.$$

Тогда $\sigma(\tilde{A}\tilde{A}) = \{\tilde{a}_{1n}\tilde{a}_{n1}, \tilde{a}_{2n}\tilde{a}_{n-1,2}, \dots, \tilde{a}_{n1}\tilde{a}_{1n}\}$ (здесь $\tilde{a}_{k, n+1-k}$ – частичный предел $\tilde{a}_{k, n+1-k}(z)$ при $z \rightarrow \infty$), и если существуют такие числа $R > 0$ и $\rho > 0$, что $a_k(z)\overline{a_{n+1-k}(z)} \notin \prod_\rho \quad \forall k = 1, \dots, n$, где $\prod_\rho = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \geq -\rho, |\operatorname{Im}\zeta| < \rho\}$, то будет выполнено равенство (19).

Заметим, что пример 2 является частным случаем этого примера.

Априорную оценку (18) можно использовать при изучении вопросов нормальной разрешимости и нётеровости оператора L в гёльдеровых пространствах.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Байзаев С., Мухамадиев Э. Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 5. С. 818–827.
3. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
4. Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
5. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
6. Байзаев С. О решениях полиномиального роста многомерной обобщенной системы Коши–Римана // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 3–8.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
8. Владимиров В.С. Обобщённые функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
9. Байзаев С., Рахимова М.А. О некоторых функциональных уравнениях в пространствах Шварца и их приложениях // Уфимск. матем. журн. 2018. Т. 10, № 1. С. 3–13.

Поступила в редакцию 20.04.2023

Принята к публикации 31.01.2024

Байзаев Саттор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математических дисциплин и современного естествознания

Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики
17 мкр-н., д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

Баротов Рузбой Нумонжонович, докторант (PhD) математического факультета

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова
пр. Мавлонбекова, д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан

E-mail: *ruzmet.tj@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.

SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI

(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.22-35

Some Estimates for Elliptic Systems Generalizing the Bitsadze System of Equations

S. Baizaev^a, R.N. Barotov^{b}*

^a*Tajik State University of Law, Business and Politics,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

^b*Khujand State University named after Academician B. Gafurov,
Khujand, 735700 Republic of Tajikistan*

E-mail: **ruzmet.tj@mail.ru*

Received April 20, 2023; Accepted January 31, 2024

Abstract

This article explores an elliptic system of n equations where the main part is the Bitsadze operator (the square of the Cauchy–Riemann operator) and the lower term is the product of a given matrix function by the conjugate of the desired vector function. The system was analyzed in the Banach space of vector functions that are bounded and uniformly Hölder continuous in the entire complex plane. It was revealed that the problem of solving the system in the specified space may not be Noetherian. An example of a homogeneous system with an infinite number of linearly independent solutions was given. As is known, for many classes of elliptic systems, the Noetherianity of boundary value problems in a compact domain is equivalent to the presence of a priori estimates in the corresponding spaces. In this regard, it is important to study the issues related to the establishment of a priori estimates for the system under consideration in the above space. In the case of coefficients weakly oscillating at infinity, necessary and sufficient conditions for the validity of the a priori estimate were found. These conditions were written out in the language of the spectrum of limit matrices formed by the partial limits of the coefficient matrix at infinity. Specific examples were provided to illustrate how the limit matrices are constructed and what the above conditions look like.

Keywords: elliptic system, functions bounded and uniformly Hölder continuous, a priori estimate, Noetherian property

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Bitsadze A.V. *Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1981. 448 p. (In Russian)
2. Baizaev S., Muhamadiev E. On the index of first-order elliptic operators on the plane. *Differ. Equations*, 1992, vol. 28, no. 5, pp. 663–672.
3. Bers L., John F., Schechter M. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir, 1966. 351 p. (In Russian)
4. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type]. Moscow, Nauka, 1973. 576 p. (In Russian)
5. Vekua I.N. *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions]. Moscow, Nauka, 1988. 509 p. (In Russian)
6. Baizaev S. On the solutions of polynomial growth for a multidimensional generalized Cauchy–Riemann system. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 3–8.
<https://doi.org/10.13108/2015-7-3-3>.
7. Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits* [Introduction to Matrix Analysis]. Moscow, Nauka, 1976. 351 p. (In Russian)
8. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoi fizike* [Generalized Functions in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1976. 280 p. (In Russian)
9. Baizaev S., Rakhimova M.A. Some functional equations in Schwartz space and their applications. *Ufa Math. J.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 3–13.
<https://doi.org/10.13108/2018-10-1-3>.

Для цитирования: Байзаев С., Баротов Р.Н. О некоторых оценках для эллиптических систем, обобщающих систему уравнений Бицадзе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 22–35.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>.

For citation: Baizaev S., Barotov R.N. Some estimates for elliptic systems generalizing the Bitsadze system of equations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 22–35.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.22-35>. (In Russian)