УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2024, Т. 166, кн. 1
С. 5–21

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.9, 532.5-1/-9

doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21

АПРИОРНЫЕ И АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В.К. Андреев, И.В. Степанова

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, 660036, Россия

Аннотация

Исследована начально-краевая задача для системы параболических уравнений, возникающая при изучении течения бинарной смеси в горизонтальном канале, стенки которого неоднородно нагреваются. Задача сведена к последовательно решаемым линейным начально-краевым задачам с условиями Дирихле или Неймана, одна из которых является обратной с нелокальным условием переопределения. Решение построено с помощью метода Фурье, дано обоснование, что оно является классическим. Обсуждается вопрос установления решения на больших временах.

Ключевые слова: уравнение конвективного тепломассопереноса, неклассическая краевая задача, нестационарное решение, априорная оценка, ограниченность

Введение

Для описания однонаправленного движения бинарной жидкости в горизонтальном канале использованы уравнения Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска, дополненные уравнениями тепломассопереноса [1]

$$\begin{aligned} &u_t = \nu u_{yy} - \frac{1}{\rho_0} p_x, && g(\beta_1\theta + \beta_2 c) = \frac{1}{\rho_0} p_y, \\ &\theta_t + u\theta_x = \chi(\theta_{xx} + \theta_{yy}), && c_t + uc_x = D(c_{xx} + c_{yy}) + D^T(\theta_{xx} + \theta_{yy}). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь t – время, x и y – горизонтальная и вертикальная координаты, $u(y,t)$ – горизонтальная компонента скорости, $p(x,y,t)$ – давление с точностью до гидростатического, $\theta(x,y,t)$, $c(x,y,t)$ – функции температуры и концентрации, g – ускорение свободного падения; все постоянные, входящие в уравнения (1), имеют физический смысл и известны для каждой конкретной смеси, при этом все они, кроме D^T, положительны. В работе [2] проведено исследование совместности системы (1), показано, что решение уравнений возможно, если функция $\theta_0 = \theta(x,y,0)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\theta_{0xx} + \theta_{0yy} = \alpha(y)x + \beta(y)$, где α и β связаны с функцией давления p и скоростью u. Отсюда, в частности, следует, что если функция θ представляет собой полином переменной x, то она является многочленом относительно x степени не выше третьей. В работе [3] установлено, что в лабораторном эксперименте с однородной жидкостью возможно воспроизвести режим нагрева стенок с постоянным градиентом температуры в горизонтальном направлении (т. е. с линейной зависимостью функции температуры от переменной x). В качестве верификации эксперимента в [3] выбрана математическая модель на основе уравнений (1) без учёта последнего уравнения на перенос примеси. Тем самым построение решения системы (1), где функции θ и c линейно зависят от координаты x, представляет интерес и с точки зрения объяснения результатов эксперимента. Следуя предположению о линейности функций θ и c относительно x, из первых двух уравнений системы (1) получим

$$u_t = \nu u_{yy} - g \int (\beta_1 \theta + \beta_2 c)_x \, dy + P(t),$$

где $P(t)$ – функция, которая имеет смысл горизонтального градиента давления и находится наряду с остальными неизвестными функциями в процессе решения задачи с помощью дополнительного условия на расход жидкости через поперечное сечение слоя. Одно из практических приложений решения данной задачи состоит в поиске такого градиента давления, который обеспечит нужный расход жидкости. Вследствие такой постановки обсуждаемая задача является обратной.

Необходимо заметить, что решению обратных задач для параболических уравнений посвящено достаточно много работ. В частности, задачи нахождения коэффициентов и функции источника с нелокальным условием переопределения исследованы в [4–7]. Обычно авторы ограничиваются доказательством существования и единственности решения в пространствах Соболева. Но для использования решения при описании процесса теплообмена (как в случае системы (1)) предпочтительнее его строить в пространстве гладких функций. Из конструктивных методов решения краевых задач для параболических уравнений отметим работы научной школы академика А. Ф. Сидорова (см., например, [8,9]), где разработан и применён общий метод специальных рядов для решения широкого круга краевых задач математической физики. Построению точных решений нелинейных уравнений теплопроводности посвящены работы [10,11]. Некоторые аналитические методы решения нестационарных задач молекулярного тепломассообмена описаны в [12]. В настоящей работе предложено решение нелинейной начально-краевой задачи для уравнений (1), постановка которой обсуждается ниже, с помощью метода разделения переменных. Доказано, что построенное решение является классическим при некоторых ограничениях на входные данные. В исследовании использованы не только широко известные результаты, относящиеся к решению задач Дирихле и Неймана для уравнения линейной диффузии, но и некоторые нетривиальные авторские находки, основанные на специфике задачи.

1. Постановка задачи

Предположим, что функции $\theta(x,y,t) = v_1(y,t)x + v_4(y,t)$, $c(x,y,t) = v_2(y,t)x + v_5(y,t)$, $u(y,t) = v_3(y,t)$. Тогда, опуская подробности, касающиеся обезразмеривания переменных в системе (1), сведём их к цепочке последовательно решаемых уравнений

$$v_{1t} = a_1 v_{1yy}, \tag{2}$$

$$v_{2t} = a_2(v_{2yy} - a_3 v_{1yy}), \tag{3}$$

$$v_{3t} = v_{3yy} - \int\limits_0^y [v_1(z,t) + v_2(z,t)] \, dz - f(t), \tag{4}$$

$$v_{4t} = a_1 v_{4yy} - a_4 v_1 v_3, \tag{5}$$

$$v_{5t} = a_2(v_{5yy} - a_3 v_{2yy}) - a_4 v_2 v_3, \tag{6}$$

где $v_i(y,t)$, $i = 1,\dots,5$, – неизвестные функции двух переменных, определённые в области $Q = \{(y,t)|\, y \in (0,1), t \in (0,t_0)\}$, t_0 и a_j, $j = 1,\dots,4$, – постоянные, из которых все, кроме a_3, положительны, последняя может иметь произвольный знак. Функция $f(t)$ находится вместе с решением уравнения (4) с помощью интегрального условия

$$\int\limits_0^1 v_3(y,t)\,dy = q(t) \tag{7}$$

с известной функцией $q(t)$, имеющей физический смысл заданного расхода через поперечное сечение горизонтального канала, ограниченного твёрдыми стенками $y=0$ и $y=1$.

Граничные условия на функции $v_i(y,t)$ при $y=0$, $y=1$ обусловлены физической постановкой задачи и имеют вид

$$v_1(0,t) = c_1(t), \quad v_1(1,t) = c_2(t), \tag{8}$$

$$v_{2y}(0,t) = a_3 v_{1y}(0,t), \quad v_{2y}(1,t) = a_3 v_{1y}(1,t), \tag{9}$$

$$v_3(0,t) = v_3(1,t) = 0, \tag{10}$$

$$v_4(0,t) = c_3(t), \quad v_4(1,t) = c_4(t), \tag{11}$$

$$v_{5y}(0,t) = a_3 v_{4y}(0,t), \quad v_{5y}(1,t) = a_3 v_{4y}(1,t). \tag{12}$$

Начальные условия запишутся так:

$$v_i(y,0) = b_i(y), \tag{13}$$

где $b_i(y)$, $i = 1,\dots,5$, – заданные функции. В равенствах (8) и (11) $c_j(t)$, $j = 1,\dots,4$, считаются известными.

Видно, что часть задачи, а именно, уравнения (2)–(4) с условиями (7)–(10), можно выделить в отдельную подзадачу. Алгоритм её решения таков: сначала находим решение уравнения (2) с условиями (8) и $v_1(y,0) = b_1(y)$; затем записываем решение задачи, состоящей из уравнения (3), условий (9) и $v_2(y,0) = b_2(y)$; после этого функции $v_3(y,t)$ и $f(t)$ находим из уравнения (4), условий (7), (10) и $v_3(y,0) = b_3(y)$. Тем самым задачи на функции v_1 и v_2 являются классическими задачами Дирихле и Неймана, а задача на функции v_3, f – обратной с интегральным условием переопределения. Описанная подзадача была решена в работе авторов [13] с помощью преобразования Лапласа. Анализ свойств этого преобразования позволил сделать вывод, что нестационарное решение выходит на стационарный режим при $t \to \infty$, если функции $c_j(t)$, $j = 1,2$, из граничных условий (8) и функция $q(t)$ из (7) стремятся к своим стационарным значениям. При этом стоит упомянуть, что для функции v_2 решение соответствующей стационарной задачи неединственно [14]. Для замыкания стационарной задачи необходимо использовать дополнительное условие, которое в терминах физической постановки задачи формулируется через задание средней концентрации в поперечном сечении слоя жидкости. В работе [13] было показано, что нужно согласовывать вид функции $b_2(y)$ с другими входными данными, чтобы нестационарное решение, построенное с помощью численного обращения образов по Лапласу, выходило на полученный стационарный режим. Численная процедура решения задачи в полной постановке (2)–(13) была реализована в работе [15]. Графически подтверждено установление решения на больших временах при выполнении условия согласования для функции $b_2(y) = v_2(y,0)$ из [13] и ограниченности функций $c_j(t)$, $j = 1,\ldots,4$, $q(t)$. Указано, что для стабилизации решения на больших временах выведенное в работе [13] ограничение является существенным, только если нужно получить режим, найденный как решение соответствующей стационарной задачи с дополнительным условием. В ином случае проведённые вычислительные эксперименты показали, что решение устанавливается к некоторому постоянному режиму, не совпадающему с решением указанной стационарной задачи.

2. Построение решений задач на функции $v_1(y,t)$, $v_2(y,t)$ и их анализ

Уравнение (2) для функции $v_1(y,t)$ с граничными условиями (8) и начальным условием $v_1(y,0) = b_1(y)$ представляет собой первую начально-краевую задачу с неоднородными граничными условиями. Введём обозначения

$$||c_j^{(n)}|| = \max_{t\in[0,t_0]}|c_j^{(n)}(t)|, \quad ||b_i(y)|| = \max_{y\in[0,1]}|b_i(y)|, \quad i = 1,\ldots,5.$$

Везде ниже штрих будет означать производную по переменной t, натуральный индекс (n) – порядок производной. Отметим несколько известных фактов о решении обсуждаемой задачи.

A. Справедлив принцип максимума [16], то есть выполнено неравенство

$$|v_1(y,t)| \le \max[||b_1(y)||, ||c_1(t)||, ||c_2(t)||].$$

Приведённая оценка позволяет установить единственность гладкого решения, но не даёт информации о поведении решения задачи (2)–(13) при больших t.

B. В [14] показано, что если $c_j(t) \to c_j^s = \text{const}$ при $t \to \infty$ в равномерной метрике, то верно соотношение

$$|v_1(y,t) - v_1^s(y)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \forall y \in [0,1], \tag{14}$$

где $v_1^s(y) = (c_2^s - c_1^s)y + c_1^s$ – решение соответствующей стационарной задачи. Если выполнены условия

$$|c_j^{(n)}(t)| \le Me^{-m_1 t}, \quad |c_j(t) - c_j^s| \le Me^{-m_1 t}, \quad j = 1,2, \quad n = 0,1, \quad m_1 > 0 \tag{15}$$

(здесь и далее M обозначает некоторую положительную постоянную без уточнения её величины), то решение удовлетворяет оценкам

$$|v_1(y,t)| \le Me^{-m_2 t}, \qquad |v_1(y,t) - v_1^s(y)| \le Me^{-m_2 t}, \quad 0 < m_2 < m_1. \tag{16}$$

Постоянную m_2 можно уточнить с помощью решения задачи, построенного в виде формального ряда с помощью метода разделения переменных.

Предположение 1. Первые производные функций $c_j(t)$, $j = 1,2$, существуют при $t \in [0,t_0]$; функция $b_1(y)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, при этом $b_{1y} \in L_2(0,1)$; выполнены условия согласования $b_1(0) = c_1(0)$, $b_1(1) = c_2(0)$.

Исходя из требований предположения 1, функция v_1 определяется формулой [17]

$$v_1(y,t) = c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y + 2\sum_{k=1}^{\infty} V_{1k}(t)\sin \pi k y\, e^{-(\pi k)^2 a_1 t}, \tag{17}$$

$$V_{1k}(t) = \int_0^1 b_1(y)\sin \pi k y\, dy - \frac{1}{\pi k}\Big[c_1(0) - (-1)^k c_2(0)\Big] - \frac{1}{\pi k}\int_0^t e^{(\pi k)^2 a_1 \tau}[c_{1\tau} - (-1)^k c_{2\tau}]\, d\tau.$$

Ряд в (17) сходится абсолютно и равномерно для любых $(y,t) \in \bar{Q}$ (см., например, [16]).

Замечание 1. При обосновании того, что выражение (17) есть классическое решение первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности, в учебниках [18–20] существенно используется свойство финитности правой части на отрезке $y \in [0,1]$. В случае задачи для $v_1(t,y)$ правая часть представлена выражением $c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y$, и её финитность влечёт существенное ограничение на краевые условия: c_j могут быть только нулевыми, что неприемлемо для физической интерпретации постановки задачи. В книге [21] (главы 4, 5) авторам удалось найти ряд теорем, пользуясь которыми можно доказать, что ряд во втором слагаемом формулы (17) сходится абсолютно и равномерно и при невыполнении свойства финитности правой части.

Уточним постоянную m_2 из неравенства (16). Из (15) имеем

$$|c_1(t) + [c_2(t) - c_1(t)]y| \le 3Me^{-m_1 t} \quad \forall\, y \in [0,1],$$

поэтому необходимо оценить последнее слагаемое в формуле (17). Нетрудно заметить, что выполнено неравенство

$$|V_{1k}(t)| \le ||b_1|| + \frac{\max\{|c_1(0)|, |c_2(0)|\}}{\pi k} + \frac{2M[e^{(\pi^2 k^2 a_1 - m_1)t} - 1]}{\pi k[(\pi k)^2 a_1 - m_1]},$$

тогда при $t \ge \delta > 0$ получим оценку

$$\begin{aligned} 2\Big|\sum_{k=1}^{\infty} V_{1k}(t)\sin \pi k y\, e^{-(\pi k)^2 a_1 t}\Big| &\le \\ \le 2e^{-\pi a_1 t}\Big(||b_1||\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\pi^2 a_1 (k^2-1)\delta} &+ \frac{\max\{|c_1(0)|, |c_2(0)|\}}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\pi^2 a_1(k^2-1)\delta}}{k}\Big) + \\ &+ \frac{4Me^{-m_1 t}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1 - e^{(m_1 - (\pi k)^2 a_1)t}}{k[(\pi k)^2 a_1 - m_1]}. \end{aligned}$$

Поскольку все ряды в правой части данного неравенства сходящиеся (начиная с некоторого k, неравенство $m_1 < (\pi k)^2 a_1$ всегда выполнено), то из проведённых рассуждений следует, что в формуле (16) постоянная $m_2 = \min(m_1, \pi^2 a_1)$.

Для получения оценки на производную функции v_1 по переменной t заметим, что функция $Z(y,t) = v_{1t}(y,t)$ есть решение задачи

$$Z_t = a_1 Z_{yy}, \quad Z(y,0) = v_{1t}(y,0) = a_1 b_{1yy}(y), \quad Z(0,t) = c_1'(t), \quad Z(1,t) = c_2'(t).$$

Поэтому, если дополнительно предположить, что ограничение (15) выполнено и для $n = 2$, $b_1 \in C^2[0,1]$, $b_{1yyy} \in L_2(0,1)$, соответствующие начальные и граничные условия согласованы ($a_1 b_{1yy}(0) = c_1'(0)$, $a_1 b_{1yy}(1) = c_2'(0)$), то для функции $Z(y,t)$ верна оценка типа (16):

$$|Z(y,t)| = |v_{1t}(y,t)| \le M e^{-m_2 t} \qquad \forall\, y \in [0,1]. \tag{18}$$

Отметим, что не представляет труда получить оценки вида (16) для первой и второй производных функции v_1 по переменной y. Ограниченность первой производной может быть доказана непосредственно дифференцированием выражения (17) и оценкой получившегося ряда, ограниченность второй следует из уравнения (2) и оценки (18). Тем самым имеем

$$|v_{1yy}| \le a_1 M e^{-m_2 t}, \quad |v_{1y}| \le M e^{-m_2 t} \qquad \forall\, y \in [0,1]. \tag{19}$$

В результате проведённых рассуждений сформулируем теорему.

Теорема 1. *Функция $v_1(y,t)$ является классическим решением задачи*

$$v_{1t} = a_1 v_{1yy}, \quad v_1(y,0) = b_1(y), \quad v_1(0,t) = c_1(t), \quad v_1(1,t) = c_2(t) \tag{20}$$

и представляется формулой (17) *при условии выполнения ограничений на входные данные задачи:*

$$\begin{aligned} &b_1(y) \in C^2[0,1], \quad b_1^{(3)} \in L_2(0,1), \quad b_1(0) = c_1(0), \quad b_1(1) = c_2(0), \\ &a_1 b_{1yy}(0) = c_1'(0), \quad a_1 b_{1yy}(1) = c_2'(0). \end{aligned}$$

Если дополнительно выполнено требование (15)*, то при $t \to \infty$ справедливы оценки* (16)*, где $m_2 = \min(m_1, \pi^2 a_1)$.*

В случае однородных граничных условий и нулевой правой части аналогичный результат для задачи (20) сформулирован, например, в [22].

Обратимся далее к решению задачи (3) с граничными (9) и начальным условием $v_2(y,0) = b_2(y)$ с уже известной функцией $v_1(y,t)$. Будем считать, что $b_2(y) \in C^1[0,1]$, $b_{2y}(0) = a_3 b_{1y}(0)$, $b_{2y}(1) = a_3 b_{1y}(1)$. Заметим, что в уравнении (3) можно сделать замену $v_2 = N(y,t) + a_3 v_1$ и получить задачу для функции $N(y,t)$ с однородными граничными условиями:

$$N_t = a_2 N_{yy} - a_3 v_{1t}, \quad N_y(0,t) = N_y(1,t) = 0, \quad N(y,0) = b_2(y) - a_3 b_1(y) = b_{20}(y).$$

Решив полученную задачу [17], можно записать $v_2(y,t)$:

$$v_2(y,t) = a_3 v_1(y,t) + \int\limits_0^1 b_{20}(z) G(y,z,t)\,dz - a_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{1\tau}(z,\tau) G(y,z,t-\tau)\,dz\,d\tau, \tag{21}$$

$$G(y,z,t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos \pi k y \cos \pi k z\, e^{-(\pi k)^2 a_2 t}.$$

Покажем, что функция $v_2(y,t)$ ограничена в $\bar{Q}^\delta = \{(y,t)|\, y \in [0,1], t \in [\delta, t_0]\}$, где $\delta > 0$. Поскольку оценки на функцию $v_1(y,t)$ и её производные известны (см. (16), (18), (19)), представим доказательство ограниченности для остальных слагаемых в формуле (21):

$$\Big| \int\limits_0^1 b_{20}(z) G(y,z,t)\,dz - a_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{1\tau}(z,\tau) G(y,z,t-\tau)\,dz\,d\tau \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big[1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi^2 k^2 a_2 \delta}\Big] \int\limits_0^1 |b_{20}(z)|\, dz + |a_3| \int\limits_0^t M e^{-m_3\tau} |G(y,\xi,t-\tau)| d\xi\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_0^1 |b_{20}(z)|\, dz + |a_3| M \Big(\frac{1}{m_3} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|(\pi k)^2 a_2 - m_3|} \Big) \leq K = \text{const}.$$

Тем самым установлено, что

$$|v_2(y,t)| \leq M_2 = |a_3| M e^{-m_2 t} + K \quad \text{в} \quad \bar{Q}^\delta, \tag{22}$$

и ограниченность функции $v_2(y,t)$ доказана. Заметим, что в отличие от функции $v_1(y,t)$ для функции $v_2(y,t)$ невозможно получить оценку вида (16) вследствие вида функции G в формуле (21).

Получим оценку на производную $v_{2t}(y,t)$. Из представления решения (21) следует

$$\begin{gathered} |v_{2t}(y,t)| \leq |a_3||v_{1t}| + 2\pi^2 a_2 \int\limits_0^1 |b_{20}(z)|\, dz \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(\pi k)^2 a_2 t} + \\ + |a_3| \Big| \int\limits_0^1 v_{1t}(z,t) G(y,z,0)\, dz \Big| + |a_3| \Big| \int\limits_0^t \int\limits_0^1 v_{1\tau}(z,\tau) \frac{\partial G}{\partial t}(y,z,t-\tau)\, dz\, d\tau \Big|. \end{gathered} \tag{23}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(\pi k)^2 a_2 t}$ сходится при $t \geq \delta$, остальные слагаемые в формуле (23) ограничены в силу оценки (18) и вида функции G. Таким образом,

$$|v_{2t}(y,t)| \leq M_3. \tag{24}$$

Обращаясь к уравнениям (3), использовав первую оценку из (19) и (24), получим

$$|v_{2yy}(y,t)| \leq a_2 M_3 \quad \text{в} \quad \bar{Q}^\delta. \tag{25}$$

Заметим также, что из равенства

$$v_{2y}(y,t) = a_3 v_{1y}(0,t) + \int\limits_0^y v_{2zz}(z,t)\, dz$$

следует оценка

$$|v_{2y}(y,t)| \leq M_4 \quad \text{в} \quad \bar{Q}^\delta. \tag{26}$$

Резюмируя результаты рассуждений относительно функции $v_2(y,t)$, сформулируем теорему.

Теорема 2. *Функция $v_2(y,t)$ является классическим решением задачи*

$$v_{2t} = a_2(v_{2yy} - a_3 v_{1yy}), \quad v_2(y,0) = b_2(y), \quad v_{2y}(0,t) = a_3 v_{1y}(0,t),$$

$$v_{2y}(1,t) = a_3 v_{1y}(1,t)$$

и представляется формулой (21) при условии выполнения всех условий теоремы 1 и ограничений на входные данные задачи: $b_2(y) \in C^1[0,1]$, $b_{2y}(0) = a_1 b_{1y}(0)$, $b_{2y}(1) = a_1 b_{1y}(1)$ для любых $(y,t) \in \bar{Q}^\delta$. Для функции $v_2(y,t)$ и её производных справедливы оценки (22), (24)–(26).

Отметим ещё один факт, связанный с функцией $v_2(y,t)$. Нетрудно видеть, что имеет место закон сохранения

$$\int\limits_0^1 v_2(y,t)\,dy = \int\limits_0^1 b_2(y)\,dy = \mathrm{const}. \qquad (27)$$

Введём функцию

$$W(y,t) = \int\limits_0^y v_2(z,t)\,dz.$$

Из соотношений (3), (9) и (27) следует, что $W(y,t)$ есть решение первой краевой задачи

$$W_t = a_2(W_{yy} - a_3 v_{1y}),\ W(y,0) = \int\limits_0^y b_2(z)\,dz,\ W(0,t) = 0,\ W(1,t) = \int\limits_0^1 b_2(z)\,dz \equiv W_0.$$

Для данной задачи справедлива оценка типа (16)

$$|W(y,t) - W^s(y)| \le Me^{-m_2 t} \quad \text{при} \quad t \to \infty \quad \forall y \in [0,1], \qquad (28)$$

где $W^s(y) = a_3(c_2^s - c_1^s)(y^2 - y) + W_0 y$ – решение соответствующей стационарной задачи. Оценка (28) будет использована в следующем разделе при анализе решения задачи для функции $v_3(y,t)$.

3. Решение обратной задачи (4), (7), (10), апостериорные оценки решения

Перейдём теперь к решению обратной задачи (4), (7), (10) с начальным условием $v_3(y,0) = b_3(y)$. Пусть

$$q(t) \in C^1[0,t_0], \quad b_3(y) \in C^1[0,1], \quad b_3(0) = b_3(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 b_3(y)\,dy = q(0). \qquad (29)$$

Сделаем замену

$$U(y,t) = v_3(y,t) - \frac{\pi}{2}\,q(t)\sin\pi y, \qquad (30)$$

тогда интегральное условие (7) станет однородным, задача для функции $U(y,t)$ примет вид

$$U_t = U_{yy} + h(y,t) - f(t), \qquad (31)$$

$$U(0,y) = U_0(y), \quad U(0,t) = U(1,t) = 0, \quad \int\limits_0^1 U(y,t)\,dy = 0, \qquad (32)$$

$$U_0(y) \equiv b_3(y) - \frac{\pi}{2}q(0)\sin\pi y, \quad h(y,t) = -\frac{\pi}{2}\left(q' + \pi\,q\right)\sin\pi y - \int\limits_0^y [v_1(z,t) + v_2(z,t)]\,dz.$$

Проинтегрировав уравнение (31) по y от 0 до 1, найдём

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 U\,dy = U_y(1,t) - U_y(0,t) + q' + \pi\,q - \int\limits_0^1\int\limits_0^y [v_1(z,t) + v_2(z,t)]\,dzdy - f(t).$$

Отсюда функция $f(t)$ выражается с помощью (17), (21), (30) следующим образом:

$$f(t) = U_y(1,t) - U_y(0,t) - \int_0^1 \int_0^y [v_1(z,t) + v_2(z,t)]\, dzdy + q' + \pi q. \tag{33}$$

Формула (33) позволяет на данном этапе только найти значение $f(0)$, поскольку следы $U_y(0,t)$, $U_y(1,t)$ остаются неизвестными.

Отметим, что задачу (31), (32) можно свести к прямой начально-краевой задаче с неклассическими граничными условиями. Для этого достаточно ввести обозначение $U_y = w(y,t)$, $U_{0y} = w_0(y) = b_{3y} - (\pi^2 q(0)\cos(\pi y))/2$, продифференцировать (4) по y с использованием граничных условий (32) и сделанной замены (30). В результате получим следующую задачу для функции w:

$$w_t = w_{yy} - h_y, \quad \int_0^1 w\, dy = 0, \quad \int_0^1 yw\, dy = 0, \quad w(0,y) = w_0(y), \tag{34}$$

при этом выполнено

$$\int_0^1 w_0(y)\, dy = \int_0^1 yw_0(y)\, dy = 0.$$

Решение задачи (34) строится в виде ряда по специальному базису. Детальный алгоритм изложен в работе [23], приведём здесь только конечную формулу для функции $U(y,t)$:

$$U(y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[\mu_k(2y-1)] - \cos\mu_k}{2\mu_k} u_k(t), \tag{35}$$

$$u_k(t) = -\frac{2(1+\mu_k^2)}{\mu_k^2}\Bigg\{ e^{-4\mu_k^2 t} \int_0^1 w_0(y)\sin[\mu_k(2y-1)]\, dy + \\ + \int_0^t \Bigg[\int_0^1 h_y(y,\tau)\sin[\mu_k(2y-1)]\, dy \Bigg] e^{-4\mu_k^2(t-\tau)} d\tau \Bigg\},$$

где μ_k – корни уравнения $\operatorname{tg}\mu_k = \mu_k$, $\mu_k = \pi(k+1/2) + O(1/k)$, $k >> 1$. Теперь функция $f(t)$ из (33) восстановится в явном виде:

$$f(t) = -2\sum_{k=0}^{\infty} \sin\mu_k u_k(t) + q' + \pi q - \int_0^1 (1-y)v_1(y,t)\, dy - \int_0^1 W(y,t)\, dy. \tag{36}$$

Подробное доказательство ограниченности функции $U(y,t)$ и её производной по переменной t приведено в работе [23] при $v_2 \equiv 0$ и соответствующих ограничениях на входные данные задачи. Покажем, что подобные оценки можно получить, если $v_2 \neq 0$. При этом будет существенно использованы закон сохранения (27) и функция W, введённая выше.

Вычислим внутренний интеграл в выражении для $u_k(t)$ в формуле (35) с учётом определения функции $h(y,t)$ и граничных условий для $v_1(y,t)$:

$$\int_0^1 h_y(y,\tau)\sin[\mu_k(2y-1)]\,dy = -\frac{1}{2\mu_k}\Big\{[v_2(1,\tau)-v_2(0,\tau)]\cos\mu_k -$$
$$-\int_0^1 \Big(v_{1y}(y,\tau)+v_{2y}(y,\tau)+\frac{\pi^3}{2}[q'(\tau)+\pi q(\tau)]\sin\pi y\Big)\cos[\mu_k(2y-1)]\,dy\Big\}.$$

Из ограниченности функции $v_2(y,t)$, производных v_{1y}, v_{2y} (см. неравенства (26), (19)) и условий (29) следует, что для множителя в формуле (35) справедливо неравенство

$$\frac{|u_k(t)|}{\mu_k} \le \frac{2e^{-2\mu_k^2 t}}{\mu_k}\int_0^1 |w_0(y)|\,dy + \frac{4M_5(1-e^{-4\mu_k^2 t})}{\mu_k^4},$$
$$M_5 = M_2 + M_4 + \frac{\pi^3}{2}(||q'|| + \pi||q||), \quad ||q^{(n)}(t)|| = \max_{t\in[0,t_0]}|q^{(n)}(t)|.$$

Тогда в $\bar{Q}^\delta$ равномерно и абсолютно сходятся ряды в представлениях функций $U(y,t)$, $U_{yy}(y,t)$ и $f(t)$. Из уравнения (31) вытекает сходимость рядов в выражении для $U_t(y,t)$. Отсюда согласно замене (30) аналогичные выводы имеют место и для функций $v_3(y,t)$, v_{3t} и v_{3yy}. Значит, обратная задача (4), (7), (10) имеет классическое решение.

Перейдём к анализу поведения функции $U(t,y)$ при $t\to\infty$. Заметим, что решение задач для функций $U(y,t)$, $f(t)$ в стационарной постановке есть

$$U^s = (y^2-y)\frac{f^s}{2} - \int_0^y (y-z)h^s(z)\,dz + y\int_0^1 (1-z)h^s(z)\,dz,$$
$$f^s = 12\int_0^1 (1-z)h^s(z)\,dz - 6\int_0^1\int_0^y (y-z)h^s(z)\,dz\,dy, \tag{37}$$
$$h^s(y) = -\frac{q^s\sin(\pi y)}{2} - \int_0^y v_1^s(y)\,dy - W^s(y).$$

Поскольку $v_1^s(y)$, $W^s(y)$ известны (см. выше), то все интегралы в (37) могут быть вычислены в явном виде.

Далее черта над функцией будет означать, что рассматривается разность между её нестационарным и стационарным значениями. Так, функции $\bar U = U(y,t) - U^s(y)$, $\bar f = f(t) - f^s$ являются решениями задач (31), (32) с соответствующими функциями $\bar h$, $\bar q$, $\bar W$, $\bar v_1$, $\bar U_0$. Значит, функция $\bar U(y,t)$ представима единственным образом в виде ряда (35) с коэффициентами $\bar u_k(t)$.

Предположение 2. Функции $q(t)$, $q'(t)$ определены при всех $t\ge 0$, и выполнены неравенства

$$|q(t)-q^s| \le Me^{-m_3 t}, \quad |q'| \le Me^{-m_3 t}, \quad m_3>0,$$
$$q^s = \int_0^1 v_3^s(y)\,dy, \quad v_3^s = U^s + \frac{\pi}{2}q^s\sin\pi y. \tag{38}$$

Учитывая второе неравенство в (16), оценки (28) и (38), находим

$$|\bar{u}_k(t)| \le 4 \max_{y\in[0,1]} |\bar{U}_0(y)| e^{-4\mu_k^2 t} +$$
$$+ \begin{cases} \dfrac{2M}{4\mu_k^2 - m}\big(e^{-mt} - e^{-4\mu_k^2 t}\big), & \text{если} \quad 4\mu_k^2 \ne m, \ m = \min(m_1, m_3), \\ 2Mte^{-4\mu_k^2 t}, & \text{если} \quad \min(m_1, m_3) = 4\mu_k^2. \end{cases}$$

Тогда при $t \ge \delta > 0$ справедливы неравенства

$$|\bar{U}(y,t)| \le 4 \max_{y\in[0,1]} |\bar{U}_0(y)| e^{-4\mu_1^2 t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-4(\mu_k^2 - \mu_1^2)\delta}}{\mu_k} +$$
$$+ \begin{cases} 2Me^{-mt} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k(4\mu_k^2 - m)}, & \text{если} \quad 4\mu_k^2 \ne m, \\ 2Mte^{-4\mu_1^2 t} \sum\limits_{k=2} e^{-4\mu_k^2 \delta}, & \text{если} \quad \min(m_1, m_3) = 4\mu_k^2. \end{cases}$$

Тем самым в общем случае имеем оценки

$$|\bar{U}(y,t)| \le Mte^{-\alpha t}, \quad |\bar{f}(t)| \le Mte^{-\alpha t}, \qquad \alpha = \min(4\mu_1^2, m) > 0. \tag{39}$$

По результатам анализа решения обратной задачи сформулируем теорему.

Теорема 3. *Решение обратной задачи*

$$v_{3t} = v_{3yy} - \int_0^y [v_1(z,t) + v_2(z,t)]\, dz - f(t), \ v_3(0,t) = v_3(1,t) = 0,$$

$$v_3(y,0) = b_3(y), \ \int_0^1 v_3(y,t)\, dy = q(t)$$

выражается формулами (36) *для функции* $f(t)$ *и* $v_3 = U(y,t) + (\pi q(t) \sin(\pi y))/2$, *где* $U(y,t)$ *из формулы* (35), *и является классическим, если выполнены условия теорем 1, 2 и ограничения* (29). *Если дополнительно выполнены неравенства* (38), *то справедливы оценки*

$$|v_3(y,t) - v_3^s(y)| \le Mte^{-\alpha t}, \quad |f(t) - f^s| \le Mte^{-\alpha t}, \quad \alpha = \min(4\mu_1^2, \min[m_1, m_3]).$$

4. Нахождение функций $v_4(y,t)$ и $v_5(y,t)$

Поскольку функции $v_1(y,t)$ и $v_3(y,t)$ на данном этапе уже известны, то решение задачи для функции $v_4(y,t)$, $(y,t) \in \bar{Q}^\delta$, при условии, что $c_3(0) = b_4(0)$, $c_4(0) = b_4(1)$, запишется так:

$$v_4(y,t) = c_3(t) + [c_4(t) - c_3(t)]y + 2\sum_{k=1}^{\infty} V_{4k}(t) \sin \pi k y\, e^{-(\pi k)^2 a_1 t}, \tag{40}$$

$$V_{4k}(t) = \int_0^1 b_4(y) \sin \pi k y\, dy - \frac{1}{\pi k}\Big[c_3(0) - (-1)^k c_4(0)\Big] + \int_0^t F(z,\tau) e^{(\pi k)^2 a_1 \tau} \sin \pi k z\, dz\, d\tau,$$

$$F(y,t) = -a_4 v_1(y,t) v_3(y,t) - c_3'(t) - [c_4'(t) - c_3'(t)]y.$$

Решение соответствующей стационарной задачи есть

$$v_4^s(y) = \frac{a_4}{a_1}\int\limits_0^y (y-z)v_1^s(z)v_3^s(z)\,dz + \Big[c_4^s - c_3^s - \frac{a_4}{a_1}v_1^s(y)v_3^s(y)\Big]y + c_3^s, \qquad (41)$$

где $v_1^s(y)$, $v_3^s(y)$ записаны выше, c_j^s – стационарные аналоги функций $c_j(t)$, $j=3,4$.

Для функции $v_4(y,t)$ можно провести все те же рассуждения, которые изложены для функции $v_1(y,t)$ в разделе 2. Ниже сформулируем кратко результат.

При выполнении условий теорем 1, 3 справедливо неравенство

$$\begin{gathered}|v_1(y,t)v_3(y,t) - v_1^s(y)v_3^s(y)| = |v_1v_3 - v_1^sv_3 + v_1^sv_3 - v_1^sv_3^s| \leq \\ \leq |v_1 - v_1^s||v_3| + v_1^s|v_3 - v_3^s| \leq Me^{-m_5t}, \quad m_5 = \max\{\alpha, m_2\}.\end{gathered} \qquad (42)$$

Если выполнены оценки (42) и условия

$$|c_j^{(n)}(t)| \leq Me^{-m_4t}, \quad |c_j(t) - c_j^s| \leq Me^{-m_4t}, \quad j=3,4, \quad n=0,1, \quad m_4>0,$$

то из свойств решения первой начально-краевой задачи для параболического оператора, доказанных в [14], следует, что функция $v_4(y,t)$, определяемая формулой (40), является классическим решением задачи (5), (11) с начальным условием $v_4(y,0) = b_4(y)$. При этом $v_4(y,t)$ стремится к $v_4^s(y)$ из (41) при $t\to\infty$ по экспоненциальному закону.

Чтобы записать решение $v_5(y,t)$, удобно ввести замену $S = v_5 - a_3v_4$. Тогда задача для $S(y,t)$ примет вид

$$S_t = a_2S_{yy} + S_0, \quad S_y(0,t) = S_y(1,t) = 0, \quad S(y,0) = b_5 - a_3b_4, \quad S_0 = -a_3v_{4t} - a_4v_2v_3.$$

Здесь $b_5(0) = a_3b_4(0)$, $b_5(1) = a_3b_4(1)$, функция S_0 уже известна. Из [17] $S(y,t)$ может быть записана как

$$S = \int\limits_0^1 [b_5(z) - a_3b_4(z)]G(y,z,t)\,dz + \int\limits_0^t\int\limits_0^1 S_0(z,\tau)G(y,z,t-\tau)\,dz\,d\tau, \qquad (43)$$

где функция Грина $G(y,z,t)$ совпадает с функцией Грина из формулы (21) для функции $v_2(y,t)$. Соответствующее стационарное решение имеет вид

$$v_5^s = a_3v_4^s + \frac{a_4}{a_2}\int\limits_0^y (y-z)v_2^s(z)v_3^s(z)\,dz. \qquad (44)$$

В силу второго условия в (12) для разрешимости стационарной задачи необходимо выполнение соотношения

$$\int\limits_0^1 v_2^s(y)v_3^s(y)\,dy = 0.$$

Поскольку функция $v_5(y,t)$ находится через функцию $v_2(y,t)$, для которой доказана только ограниченность в области Q^δ, то сходимости $v_5(y,t)$ к $v_5^s(y)$ при $t\to\infty$ в общем случае нет.

Заключение

Доказано существование классического решения краевой задачи для системы пяти параболических уравнений. В качестве граничных условий для трёх функций выступают условия Дирихле, для оставшихся – условия Неймана. Решаемая система является следствием уравнений однонаправленного конвективного течения теплопроводной бинарной смеси, условия совместности которой приводят к обратной задаче для функции скорости: определение горизонтального градиента давления происходит вместе с остальными неизвестными функциями, входящими в систему. Соответствующая стационарная задача имеет неединственное решение в общем случае как задача Неймана для эллиптического оператора [14], для её замыкания поставлено дополнительное условие [13]. Сходимость нестационарного решения к соответствующему стационарному по экспоненциальному закону относительно времени установлена только для функций, для которых заданы условия Дирихле. Для функций, задачи определения которых замыкаются условиями второго рода, установлена ограниченность.

Полученные результаты завершают цикл работ авторов по исследованию математической модели движения бинарной смеси в протяжённом канале, ограниченном твёрдыми стенками, на которых поддерживается линейное по горизонтальной координате распределение температуры. Исследованы физические и геометрические параметры, влияющие на стационарное течение [24]. Для нестационарной задачи установлены свойства сходимости части характеристик течения к соответствующим стационарным, для оставшихся – доказана ограниченность. Влияние периодических по времени граничных условий для функции температуры исследовано численно [15], подтверждён критерий стабилизации движения, полученный теоретически [13].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского математического центра, финансируемого Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2024-1378).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. *Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В.* Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.

2. *Андреев В.К., Степанова И.В.* Об условиях существования однонаправленных движений бинарных смесей в модели Обербека – Буссинеска // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 2. С. 3–12. https://doi.org/10.33048/sibjim.2019.22.201.

3. *Kirdyashkin A.G.* Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient // Int. J. Heat Mass Transfer. 1984. V. 27. No 8. P. 1205–1218. https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90048-6.

4. *Кожанов А.И.* Параболические уравнения с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 12. С. 2168–2184.

5. *Искендеров А.Д., Ахундов А.Я.* Обратная задача для линейной системы параболических уравнений // Докл. РАН. 2009. Т. 424, № 4. С. 442–444.

6. *Kerimov N.B., Ismailov M.I.* An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 396, No 2. P. 546–554. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.046.

7. *Andreev V.K., Stepanova I.V.* Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2021. V. 14, No 4. P. 445–451. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.

8. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 546 с.

9. *Филимонов М.Ю.* Использование метода специальных рядов для представления решений начально-краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 8. С. 1100–1107.

10. *Казаков А.Л.* О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 1057–1068. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.073.

11. *Казаков А.Л., Лемперт А.А.* Точные решения типа диффузионных волн для нелинейного вырождающегося параболического уравнения второго порядка // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 114–128. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128.

12. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: Инфра-М, 2013. 391 с.

13. *Andreev V.K., Stepanova I.V.* Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer // Int. J. Appl. Comput. Math. 2020. V. 6, No 6. https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0.

14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 427 с.

15. *Степанова И.В., Зализняк В.Е.* Численное решение задачи нестационарной конвекции бинарной смеси в горизонтальном слое // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Механ. Компьют. науки. 2023. Т. 33, № 2. С. 365–381. https://doi.org/10.35634/vm230212.

16. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений // УМН. 1960. Т. 15, № 2. С. 97–154.

17. *Полянин А.Д.* Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001. 592 с.

18. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 512 с.

19. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 742 с.

20. *Алексеев Г.В.* Классические методы математической физики. Владивосток : Изд-во Дальневост. ун-та, 2003. 416 с.

21. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.

22. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977. 431 с.

23. *Андреев В.К.* О решении одной обратной задачи, моделирующей двумерное движение вязкой жидкости // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделир. и программир. 2016. Т. 9, №4. С. 5–16. https://doi.org/10.14529/mmp160401.

24. *Stepanova I.V.* On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2022. V. 15, No 6. P. 776–784. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-6-776-784.

Поступила в редакцию 18.01.2024
Принята к публикации 19.02.2024

Андреев Виктор Константинович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, д. 50/44, г. Красноярск, 660036, Россия
E-mail: *andr@icm.krasn.ru*

Степанова Ирина Владимировна, доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН
Академгородок, д. 50/44, г. Красноярск, 660036, Россия
E-mail: *stepiv@icm.krasn.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2024, vol. 166, no. 1, pp. 5–21

ORIGINAL ARTICLE
doi: 10.26907/2541-7746.2024.1.5-21

A Priori and a Posteriori Estimates for Solving One Evolutionary Inverse Problem

V.K. Andreev, I.V. Stepanova***

Institute of Computational Modelling, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia
E-mail: **andr@icm.krasn.ru*, ***stepiv@icm.krasn.ru*

Received January 18, 2024; Accepted January 19, 2024

Abstract

This article considers an initial-boundary value problem for a system of parabolic equations, which arises when studying the flow of a binary mixture in a horizontal channel with walls heated non-uniformly. The problem was reduced to a sequence of initial-boundary value problems with Dirichlet or Neumann conditions. Among them, an inverse problem with a non-local overdetermination condition was distinguished. The solution was constructed using the Fourier method and validated as classical. The behavior of the non-stationary solution at large times was discussed. It was shown that certain functions within the solution tend to their stationary analogs exponentially at large times. For some functions, only boundedness was proved. The problem and its solution are relevant for modeling the thermal modes associated with the separation of liquid mixtures.

Keywords: equation of convective heat and mass transfer, non-classical boundary value problem, non-stationary solution, a priori estimate, boundedness

Acknowledgments. This study was supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation as a part of activities for the creation and development of regional scientific centers for mathematics (agreement no. 075-02-2024-1378).

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

References

1. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennye matematicheskie modeli konvektsii* [Mathematical Models of Convection]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p. (In Russian)
2. Andreev V.K., Stepanova I.V. On the conditions for existence of unidirectional motions of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model. *J. Appl. Ind. Math.*, 2019, vol. 13, no. 2, pp. 185–193. https://doi.org/10.1134/S1990478919020017.
3. Kirdyashkin A.G. Thermogravitational and thermocapillary flows in a horizontal liquid layer under the conditions of a horizontal temperature gradient. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1984, vol. 27, no. 8, pp. 1205–1218. https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90048-6.
4. Kozhanov A.I. Parabolic equations with an unknown time-dependent coefficient. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2085–2101.
5. Iskenderov A.D., Akhundov A.Ya. Inverse problem for a linear system of parabolic equations. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 79, no. 1, pp. 73–75. https://doi.org/10.1134/S1064562409010219.
6. Kerimov N.B., Ismailov M.I. An inverse coefficient problem for the heat equation in the case of nonlocal boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, vol. 396, no. 2, pp. 546–554. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.06.046.
7. Andreev V.K., Stepanova I.V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 4, pp. 445–451. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.
8. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: Matematika. Mekhanika* [Selected Works: Mathematics. Mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 546 p. (In Russian)
9. Filimonov M.Yu. Representation of solutions of initial-boundary value problems for nonlinear partial differential equations by the method of special series. *Differ. Equations*, 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1159–1166. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000011290.09965.9a.
10. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.073. (In Russian)
11. Kazakov A.L., Lempert A.A. Exact solutions of diffusion wave type for a nonlinear second-order parabolic equation with degeneration. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk*, 2022, vol. 28, no. 3, pp. 114–128. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-114-128 (In Russian)
12. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teplomassoperenosa* [Analytical Solutions of Parabolic and Hyperbolic Equations of Heat and Mass Transfer]. Moscow, Infra-M, 2013. 391 p. (In Russian)
13. Andreev V.K., Stepanova I.V. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer. *Int. J. Appl. Comput. Math.*, 2020, vol. 6, no. 6, art. 169. https://doi.org/10.1007/s40819-020-00924-0.
14. Friedman A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type]. Moscow, Mir, 1968. 427 p. (In Russian)
15. Stepanova I.V., Zalizniak V.E. Numerical solution of nonstationary problem for convection of binary mixture in horizontal layer. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 2023, vol. 33, no. 2, pp. 365–381. https://doi.org/10.35634/vm230212. (In Russian)
16. Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 85–142. https://doi.org/10.1070/rm1960v015n02abeh004217.

17. Polyanin A.D. *Lineinye uravneniya matematicheskoi fiziki* [Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists]. Moscow, Fizmatlit, 2001. 592 p. (In Russian)

18. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1967. 512 p. (In Russian)

19. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 2004. 742 p. (In Russian)

20. Alekseev G.V. *Klassicheskie metody matematicheskoi fiziki* [Classical Methods of Mathematical Physics]. Vladivostok, Izd. Dal'nevost. Univ., 2003. 416 p. (In Russian)

21. Arsenin V.Ya. *Metody matematicheskoi fiziki i spetsial'nye funktsii* [Methods of Mathematical Physics and Special Functions]. Moscow, Nauka, 1984. 384 p. (In Russian)

22. Mikhlin S.G. *Lineinye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations]. Moscow, Vyssh. Shk., 1977. 431 p. (In Russian)

23. Andreev V.K. On the solution of an inverse problem simulating two-dimensional motion of a viscous fluid. *Vestn. YuUrGU. Ser. Mat. Model. Program.*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 5–16. https://doi.org/10.14529/mmp160401. (In Russian)

24. Stepanova I.V. On thermodiffusion of binary mixture in a horizontal channel at inhomogeneous heating the walls. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2022, vol. 15, no. 6, pp. 776–784. https://doi.org/10.17516/1997-1397-2022-15-6-776-784.

⟨ ***Для цитирования:*** *Андреев В.К., Степанова И.В.* Априорные и апостериорные оценки решения одной эволюционной обратной задачи // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 1. С. 5–21.
URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.5-21. ⟩

⟨ ***For citation:*** Andreev V.K., Stepanova I.V. A priori and a posteriori estimates for solving one evolutionary inverse problem. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 1, pp. 5–21.
URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2024.1.5-21. (In Russian) ⟩