

**ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ**

УДК 517.958

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.304-322>**О задачах дифракции электромагнитных волн на предфрактальных периодических решетках****Н.Б. Плещинский<sup>1</sup>, М.Д. Тумаков<sup>1;2</sup> ✉**<sup>1</sup>*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*<sup>2</sup>*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия*✉ [makdtumakov@kpfu.ru](mailto:makdtumakov@kpfu.ru)**Аннотация**

Исследованы задачи дифракции электромагнитных волн на периодических решетках из тонких проводящих лент (2D) или пластин (3D) в случаях, когда ленты или пластины являются предфрактальными множествами. При сведении задач дифракции к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений использован метод интегрально-сумматорных тождеств. Вычислительный эксперимент показал, что предфрактальные решетки, начиная с некоторого порядка, ведут себя как сплошные ленты (щели) или экраны.

**Ключевые слова:** электромагнитная волна, задача дифракции, периодическая решетка, фрактальное множество

**Благодарности.** Работа автора Тумакова М.Д. выполнена за счет государственного задания Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» на проведение научных исследований.

---

**Для цитирования:** Плещинский Н.Б., Тумаков М.Д. О задачах дифракции электромагнитных волн на предфрактальных периодических решетках // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2026. Т. 168, кн. 2. С. 304–322. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.304-322>.

---

## ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.304-322>

## On the problems of diffraction of electromagnetic waves by prefractal periodic gratings

N.B. Pleshchinskii<sup>1</sup>, M.D. Tumakov<sup>1;2</sup> ✉

<sup>1</sup>*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

<sup>2</sup>*National Research Center “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia*

✉ [makdtumakov@kpfu.ru](mailto:makdtumakov@kpfu.ru)

### Abstract

This article examines the problems of diffraction of electromagnetic waves by periodic gratings composed of thin conductive strips (2D) or plates (3D) in cases where the strips and plates are prefractal sets. The diffraction problems are reduced to infinite sets of linear algebraic equations using the method of integral-series identities. A computational experiment reveals that prefractal gratings, starting from a certain order, behave like continuous strips (slots) or plates.

**Keywords:** electromagnetic wave, diffraction problem, periodic grating, fractal set

**Acknowledgments.** M.D. Tumakov’s work was supported by the state assignment to the National Research Center “Kurchatov Institute” for conducting scientific research.

---

**For citation:** Pleshchinskii N.B., Tumakov M.D. On the problems of diffraction of electromagnetic waves by prefractal periodic gratings. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2026, vol. 168, no. 2, pp. 304–322.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.304-322>. (In Russian)

---

### Введение

Задачи дифракции электромагнитных волн на периодических решетках относятся к классическим задачам электродинамики. В качестве элементов, образующих решетку, рассматриваются тонкие проводящие ленты или пластины, круглые или прямоугольные стержни и иные объекты. Требуется найти квазипериодические решения уравнений Максвелла или уравнения Гельмгольца (волны Флоке), удовлетворяющие соответствующим граничным условиям на неоднородностях. Особый интерес представляет случай, когда длина волны соизмерима с периодом решетки.

При разработке алгоритмов численного решения задач дифракции волн на решетках необходима регуляризация парного сумматорного функционального уравнения (ПСФУ) или бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ) относительно коэффициентов разложения искомого поля по гармоникам, или эквивалентного им интегрального уравнения. Широкое распространение получил метод задачи

Римана – Гильберта, подробно изложенный в монографии В.П. Шестопалова [1]. Этот метод, основанный на формулах, дающих явное решение некоторой вспомогательной задачи для аналитических функций, называют также «метод АМШ» по первым буквам фамилий авторов статьи [2]. Методом задачи Римана – Гильберта найдены решения широкого круга задач дифракции на периодических структурах (см., например, [3]). Новые строгие методы изложены в коллективной монографии [4].

В некоторых случаях задачи дифракции волн на решетках сводятся к интегральным уравнениям с логарифмической особенностью в ядре, приближенное решение которых может быть найдено методом Галеркина. В работах Ю.В. Ганделя [5,6] (см. также [7], гл. 15) при решении ПСФУ задач дифракции волн на решетках предложено использовать метод дискретных особенностей. Сингулярным интегральным уравнениям теории дифракции и численным методам их решения посвящена монография [8].

Первые публикации по задачам дифракции волн на фрактальных объектах появились в 1990-е гг. Дифракции световых волн на фрактальных решетках посвящены статьи [9–11]. Задачи дифракции электромагнитных волн на плоских предфрактальных решетках из идеально проводящих лент исследовал методом интегральных уравнений Г.И. Кошевой [12–14]. Техника гиперсингулярных интегральных уравнений использовалась при решении задач дифракции волн на предфрактальных решетках в работах Ю.В. Ганделя и К.В. Несвит [15–17].

В настоящей работе при сведении задач дифракции электромагнитных волн на предфрактальных периодических решетках к БСЛАУ применен метод интегрально-сумматорных тождеств [18] (см. также [19], гл. 5). Такие тождества представляют собой необходимые и достаточные условия разрешимости переопределенных граничных задач в частичных областях, на которые решетка разбивает пространство. Одним из преимуществ метода является то, что вид БСЛАУ и, следовательно, расчетный алгоритм не усложняются при увеличении числа лент решетки в полосе периода.

В первой части работы задача дифракции электромагнитной волны на периодической решетке из тонких проводящих лент сведена к эквивалентной БСЛАУ, в коэффициенты которой входят интегралы по предфрактальному множеству на отрезке. Во второй части работы метод интегрально-сумматорных тождеств распространен на трехмерный случай, получена существенно более сложная БСЛАУ в задаче дифракции волны на би-периодической решетке из тонких проводящих пластин. Приближенные решения БСЛАУ найдены методом усечения. Параметры усечения выбраны так, чтобы был выполнен с достаточной точностью закон сохранения энергии. Вычислительный эксперимент показал, что предфрактальные решетки, начиная с некоторого порядка, ведут себя как сплошные ленты (экраны) или сплошные щели. При определенных соотношениях между длиной волны и размерами элементов решетки наблюдаются резонансные эффекты. Некоторые результаты этой работы были представлены в [20].

## 1. Периодические решетки из тонких проводящих лент

При гармонической зависимости от времени ( $e^{-i\omega t}$ ) и в предположении, что компоненты электромагнитного поля не зависят от координаты  $y$ , система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд распадается на две независимые подсистемы. Ненулевые компоненты поля в случае параллельной поляризации выражаются через потенциальную функцию  $u(\mathbf{x}; z)$  – решение уравнения Гельмгольца

$$E_y = u; \quad H_x = \frac{-1}{i!} \frac{\partial u}{\partial z}; \quad H_z = \frac{1}{i!} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Пусть на  $p$ -периодическую решетку (рис. 1, слева) из тонких проводящих лент, параллельных оси  $y$ , набегают сверху (из полупространства  $z > 0$ ) под углом  $\theta$  плоская электромагнитная волна с потенциальной функцией

$$u^0(x; z) = b^0 e^{-ik \sin \theta x - ik \cos \theta z}; \quad z > 0;$$

Плоская волна – частный случай квазипериодической волны (волны Флоке). Как известно, решение задачи дифракции квазипериодической волны на периодической системе лент может быть только квазипериодической волной. Простое доказательство этого факта дано в работе [21].

Будем искать потенциальные функции отраженного вверх поля и прошедшего вниз поля в виде

$$u^+(x; z) = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^+ e^{i n z} e^{i \frac{2}{p} n x}; \quad z > 0; \quad u^-(x; z) = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^- e^{-i n z} e^{i \frac{2}{p} n x}; \quad z < 0;$$

$$n = \sqrt{k^2 - (\theta + 2 n \pi / p)^2}; \quad \text{Re } n \geq 0 \text{ или } \text{Im } n \geq 0;$$

Часть отрезка  $[0; p]$ , занятую лентами, обозначим  $\mathcal{M}$ , а оставшуюся часть отрезка –  $\mathcal{N}$  (рис. 1, справа). Должны быть выполнены граничные условия на  $\mathcal{M}$ :  $u^0 + u^+ = 0$ ;  $u^- = 0$  и условия сопряжения на  $\mathcal{N}$ :  $u^0 + u^+ = u^-$ ;  $\frac{\partial u^0}{\partial z} + \frac{\partial u^+}{\partial z} = \frac{\partial u^-}{\partial z}$ .

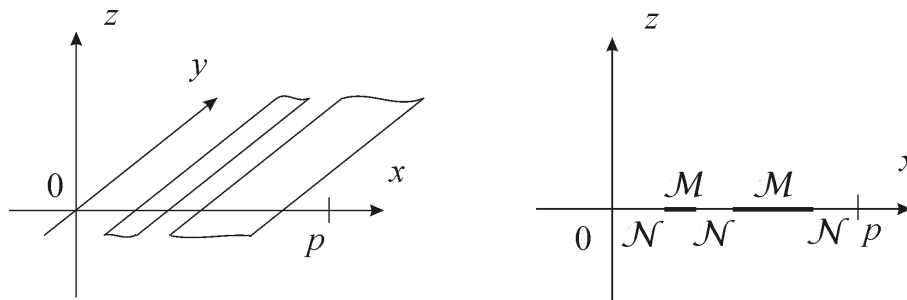


Рис. 1. Бесконечная периодическая решетка

Fig. 1. Infinite periodic grating

Пусть параметр Флоке  $\theta = -k \sin \theta$ . Тогда  $k_0 = k \cos \theta$  и  $b_0^0 + b_0^+ = b_0^-$ ,  $b_n^+ = b_n^-$ ;  $n \neq 0$ . Оставим в качестве искоемых коэффициентов  $b_n = b_n^+$ . Задача дифракции свелась к ПСФУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i \frac{2}{p} n x} = -b^0 \quad \text{на } \mathcal{M}; \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i \frac{2}{p} n x} = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}; \quad (1)$$

Прямое проектирование ПСФУ на ортогональную систему функций  $e^{i \frac{2}{p} k x}$  приводит к БСЛАУ, решение которой не удается получить методом усечения.

Обозначим

$$I_n = \int_{\mathcal{M}} e^{i \frac{2}{p} nx} dx; \quad J_n = \int_{\mathcal{N}} e^{i \frac{2}{p} nx} dx = I_n; \quad n = 0; \pm 1; \dots \quad (2)$$

С помощью интегрально-сумматорного тождества

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i \frac{2}{p} nx} = \int_0^p \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i \frac{2}{p} nt} \right) \left( \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{i \frac{2}{p} m(x-t)} \right) dt$$

заменяем второе равенство в ПСФУ на

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{i \frac{2}{p} nx} = \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} e^{i \frac{2}{p} mx} I_{n-m} \quad \text{на } \mathcal{M}:$$

После проектирования ПСФУ на систему функций  $e^{i \frac{2}{p} kx}$  получим БСЛАУ

$$-p b_k + \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} I_{n-m} J_{m-k} = b^0 I_{-k}; \quad k = 0; \pm 1; \dots \quad (3)$$

Эквивалентность ПСФУ (2) и БСЛАУ (3) может быть доказана точно так же, как эквивалентность ПСФУ и БСЛАУ в задаче дифракции электромагнитной волны на экране в плоском волноводе [22].

При перпендикулярной поляризации поля ненулевые компоненты электрического и магнитного векторов

$$H_y = u; \quad E_x = \frac{1}{i!''_0} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad E_z = \frac{-1}{i!''_0} \frac{\partial u}{\partial x}$$

также выражаются через потенциальную функцию  $u = u(x; z)$  – решение уравнения Гельмгольца.

Пусть потенциальная функция плоской волны, набегающей сверху на решетку, задается выражением

$$u^0(x; z) = a^0 e^{-ik \sin \alpha x - ik \cos \alpha z} :$$

Будем искать потенциальные функции отраженного и прошедшего вниз полей в виде

$$u^+(x; z) = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^+ e^{i n z} e^{i \frac{2}{p} nx}; \quad u^-(x; z) = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^- e^{-i n z} e^{i \frac{2}{p} nx} :$$

Из граничных условий и условий сопряжения при  $z = 0$  следует, что  $a_n^+ = -a_n^-$ ,  $-a_0^+ + a_0^- = -a_0^-$  и  $a_n^+ = -a_n^-$  при  $n \neq 0$ . Пусть  $a_n = a_n^+$ . Тогда имеем ПСФУ

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2}{p} nx} = a^0 \quad \text{на } \mathcal{M}; \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2}{p} nx} = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}:$$

Это ПСФУ с помощью интегрально-сумматорного тождества

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2}{p} n x} = \int_0^p \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i \frac{2}{p} n t} \right) \left( \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m e^{i \frac{2}{p} m(x-t)} \right) dt$$

преобразуется в БСЛАУ

$$-p a_k + \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m I_{n-m} J_{m-k} = -a^0 I_{-k}; \quad k = 0; \pm 1; \dots \quad (4)$$

### 2. Вычислительный эксперимент, 2D

При параллельной поляризации поля после усечения БСЛАУ (3) имеем конечную СЛАУ

$$-p b_k + \frac{1}{p} \sum_{n=-N}^N a_n \sum_{m=-M}^M \frac{1}{m} I_{n-m} J_{m-k} = b^0 I_{-k}; \quad k = -N; \dots; N;$$

порядок усечения задают два целочисленных параметра  $N$  и  $M$ . Легко получить явные выражения для значений интегралов  $I_n$  и  $J_n$  (2). Если  $\mathcal{M} = [p_1; p_2]$ , то

$$I_n = \int_{p_1}^{p_2} e^{i 2 n t / p} dt = \left\{ n = 0 : p_2 - p_1; \quad n \neq 0 : \frac{e^{i 2 n t / p} \Big|_{p_1}^{p_2}}{i 2 n / p} \right\};$$

$$J_n = \left\{ n = 0 : p - I_n; \quad n \neq 0 : -I_n \right\};$$

При проверке достоверности результатов расчета были использованы следующие тесты (необходимые условия).

1. При  $N; M \rightarrow +\infty$  должна наблюдаться сходимость последовательности приближенных решений к точному решению (внутренняя сходимость).
2. Если ленты решетки являются очень узкими или, наоборот, заполняют почти всю полосу периода, то коэффициенты разложения отраженной волны или коэффициенты разложения прошедшей волны должны стремиться к нулю (предельные случаи).
3. Количество энергии, уходящей от плоскости  $z = 0$  вверх и вниз, должно совпадать (с допустимой погрешностью) с количеством энергии, пришедшей с волной от внешнего источника (закон сохранения энергии).
4. Должны быть выполнены равенства из ПСФУ для некоторых наборов точек из множеств  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{N}$  (граничные условия).

В случае параллельной поляризации поля потенциальная функция неориентированной волны Флоке имеет вид

$$u(x; z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [b_n^+ e^{i n z} + b_n^- e^{-i n z}] e^{i(+2 n/p)x} :$$

Поток энергии через полосу периода в плоскости  $\mathbf{z} = 0$  (точнее, поток через прямоугольник шириной  $\mathbf{p}$  и длиной  $\mathbf{q}$ , разделенный на  $\mathbf{q}$ ) вычисляется как интеграл от  $\mathbf{z}$ -компоненты среднего значения вектора Пойнтинга:

$$\mathbf{P} = \int_0^{\mathbf{p}} \bar{\Pi}_z|_{z=0} d\mathbf{x}; \quad \bar{\Pi}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(-\mathbf{E}_y \mathbf{H}_x^*) = \frac{1}{2!} \operatorname{Re} \left( i u \frac{\partial \dot{u}}{\partial z} \right)$$

(\* – знак комплексного сопряжения). После интегрирования получим

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{2!} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n [|\mathbf{b}_n^+|^2 - |\mathbf{b}_n^-|^2 + 2i \operatorname{Im}(\mathbf{b}_n^{+*} \mathbf{b}_n^-)]:$$

В общем случае поток энергии суммы волн не равен сумме потоков отдельных слагаемых. Но в задаче дифракции плоской волны на периодической решетке, если сверху падает плоская волна, то только  $\mathbf{b}_0^- = \mathbf{b}^0 \neq 0$ , но при этом  $0$  – вещественное число. Поэтому потоки энергии волн над решеткой и под ней определяют суммы

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} n |\mathbf{b}_n^+|^2 - 0 |\mathbf{b}^0|^2 \quad \text{и} \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} n |\mathbf{b}_n^-|^2:$$

Следовательно, закон сохранения энергии в рассматриваемом случае после нормировки примет вид

$$\frac{1}{0 |\mathbf{b}^0|^2} \sum_n n |\mathbf{b}_n^+|^2 + \frac{1}{0 |\mathbf{b}^0|^2} \sum_n n |\mathbf{b}_n^-|^2 = 1; \quad (5)$$

уточним, что в суммах учитываются только слагаемые с вещественными  $n$ . Кроме того, в рассматриваемом случае суммы отличаются только слагаемыми при  $n = 0$ .

Можно выбирать значения параметров усечения, исходя из того, насколько близкой к единице получается левая часть этого равенства. Эксперимент показал, что вычисления более точны при  $M \geq N$ .

В случае перпендикулярной поляризации поля закон сохранения энергии записывается аналогичным образом.

При нормальном падении волны на решетку ( $\theta = 0$ ) имеем  $0 = \mathbf{k}$  – вещественное число. Сколько еще будет вещественных чисел  $n$ , зависит от соотношения между длиной набегающей волны и периодом решетки. В теории периодических решеток часто используют параметр  $\varkappa = l =$  ([1], часть 1, §1).

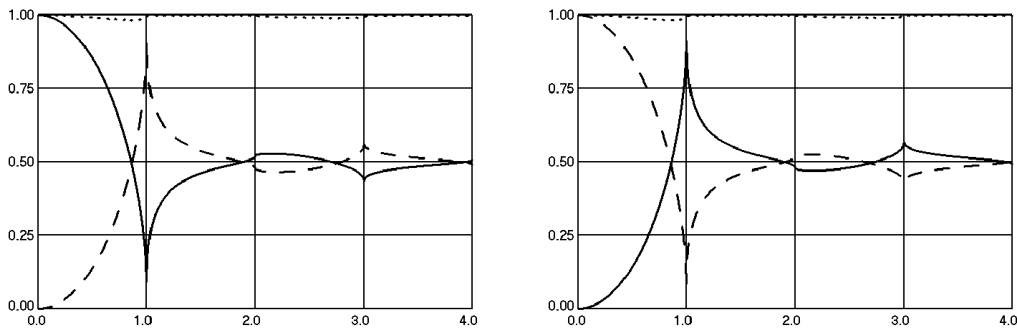
При  $0 < \varkappa < 1$  только  $0$  является вещественным числом. При переходе через критические точки  $\varkappa = 1; 2; 3; \dots$  количество гармоник Флоке, переносящих энергию, увеличивается на единицу. В критических точках обращается в нуль одно из чисел  $n$ , и, следовательно, нужно внести некоторые изменения в БСЛАУ. Но на практике это не обязательно, так как компьютерные вычисления проводятся с машинной точностью и исключительные ситуации не возникают.

На рис. 2 (слева) показаны зависимости нормированных потоков энергии отраженной волны (сплошная линия) и волны, прошедшей за решетку (пунктирная линия), от параметра  $\varkappa = l =$  – фактически от длины волны. Линия из точек в верхней части рисунка показывает значение суммы потоков энергии, уходящей от решетки, то есть насколько точно выполняется закон сохранения энергии (5).

Некоторое отличие от рис. 3 на с. 20 в монографии [1] связано с тем, что на нашем рисунке показаны потоки энергии от всех гармоник Флоке, а не только модули коэффициентов  $\mathbf{a}_0$  и  $\mathbf{b}_0$ . Расчеты были проведены при  $\mathbf{p} = 1:0$  и параметрах усечения БСЛАУ  $\mathbf{N} = \mathbf{M} = 16$ .

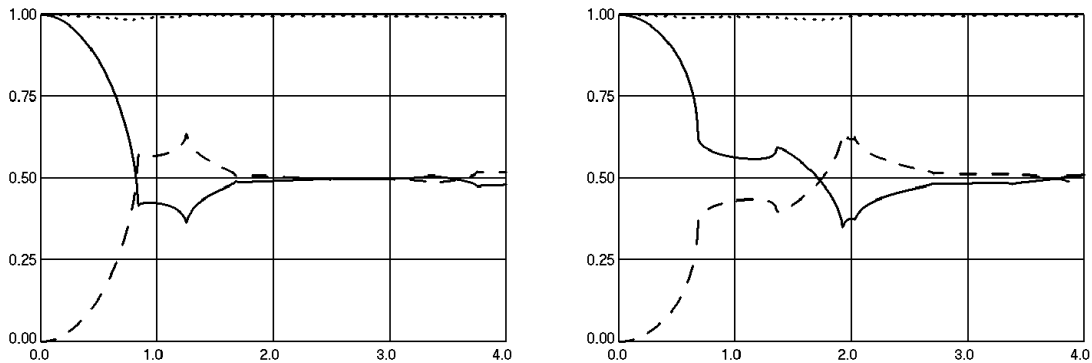
Аналогичная картина (рис. 2, справа) наблюдается в случае перпендикулярной поляризации поля при численном решении БСЛАУ (4) методом усечения. Обратим внимание на то, как при изменении поляризации поменялись местами сплошная и пунктирная линии на графиках.

При падении волны под ненулевым углом картина изменяется (рис. 3).



**Рис. 2.** Нормальное падение волны, лента  $[0:0; 0:5]$ ,  $\parallel$ - и  $\perp$ -поляризация

**Fig. 2.** Normal wave incidence, strip  $[0:0; 0:5]$ ,  $\parallel$  and  $\perp$  polarization



**Рис. 3.** Угол падения 0.2 и 0.5, лента  $[0:0; 0:5]$ , параллельная поляризация

**Fig. 3.** Incidence angles 0.2 and 0.5, strip  $[0:0; 0:5]$ , parallel polarization

Рассмотрим теперь задачу дифракции плоской электромагнитной волны на фрактальной периодической решетке. Пусть множество  $\mathcal{M}$  представляет собой канторово множество: заданный отрезок делится на три части, центральная часть остается, две свободные делятся на три части... и так далее. Таким образом, в пределе в каждой полосе периода размещается счетное множество тонких проводящих лент.

Вычислительный эксперимент был проведен для конечной последовательности предфракталов. Зададим  $[\ ; \ ]$  – часть отрезка  $[0; \mathbf{p}]$ . Построим два множества отрезков:  $[\mathbf{m}\mathbf{a}; \mathbf{m}\mathbf{b}]$  (металл) и  $[\mathbf{n}\mathbf{a}; \mathbf{n}\mathbf{b}]$  (не металл). В первом множестве содержится  $\mathbf{q}_m$  элементов, во втором множестве –  $\mathbf{q}_n$  элементов.

Предфрактал первого порядка устроен следующим образом: пусть  $h = (-) = 3$ ; в первом множестве один отрезок  $[+h; +2h]$ , во втором множестве два отрезка  $[; +h]$  и  $[+2h; ]$ , то есть  $q_m = 1$ ;  $ma_1 = +h$ ;  $mb_1 = +2h$  и  $q_n = 2$ ,  $na_1 = ,$   $nb_1 = +h$ ;  $na_2 = +2h$ ;  $nb_2 = .$

Переход к предфракталу следующего порядка проведем так. Просмотрим все отрезки из множества  $[na_j; nb_j]$ ;  $j = 1; ::::; q_n$ . Для каждого из них вычислим  $h = (nb_j - na_j) = 3$ . Значение  $nb_j$  заменим на  $na_j + h$ . Во второе множество добавим еще один отрезок:  $q_n$  увеличим на единицу,  $na_{j+1} = na_j + 2h$ ;  $nb_{j+1} = nb_j$ . В первое множество также добавим один отрезок:  $q_m$  увеличим на единицу,  $ma_{j+1} = na_j + h$ ;  $mb_{j+1} = na_j + 2h$ . Таким образом, при увеличении на единицу порядка предфрактала  $q_m$  увеличивается на  $q_n$ , а  $q_n$  удваивается. Значит, для порядка 10 нужны массивы чисел из 1024 элементов (в первом множестве элементов всегда меньше на единицу: 1 и 2, 3 и 4, 7 и 8, ..., 1023 и 1024).

Пусть в полосе периода решетки имеется несколько лент, их сечения в плоскости  $y = \text{const}$  образуют предфрактальное канторово множество, построенное на отрезке  $[0;0; 0;5]$ . При увеличении порядка предфрактала графики на рис. 4 и 5, демонстрирующие зависимость потоков энергии от параметра  $\varkappa$ , приближаются к графику, построенному в случае сплошной ленты (рис. 2).

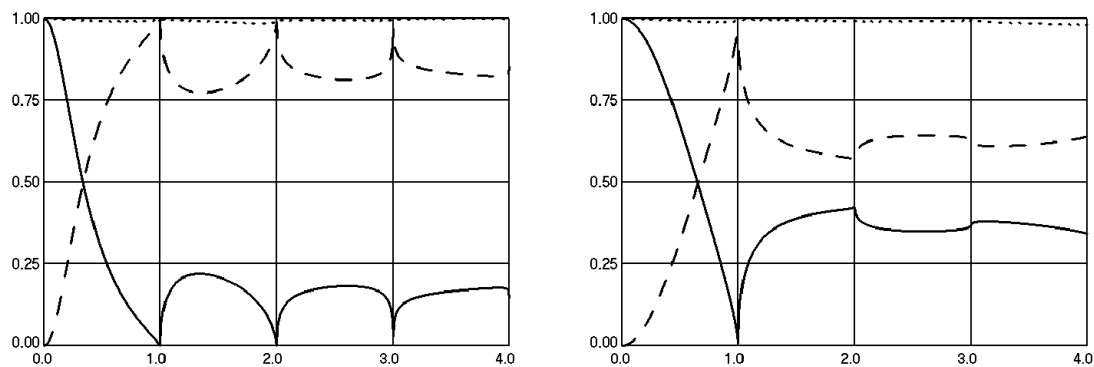


Рис. 4. Предфракталы порядков 1 и 2  
Fig. 4. Prefractals of orders 1 and 2

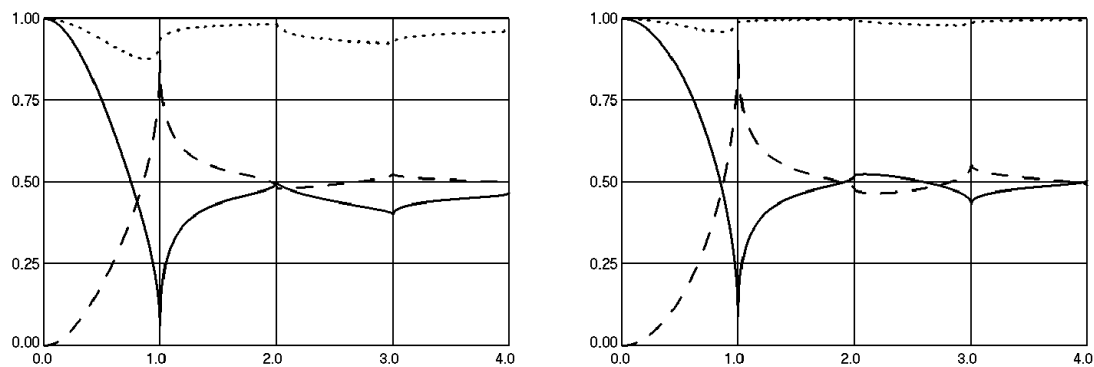


Рис. 5. Предфракталы порядков 5 и 10  
Fig. 5. Prefractals of orders 5 and 10

Вычислительный эксперимент показал, что начиная с порядка 8 распределение потоков энергии волн, уходящих от решетки, примерно такое же, как от исходной широкой металлической ленты. Аналогичный эффект наблюдается, если поменять местами ленты и щели.

### 3. Квазипериодические решения уравнений Максвелла

Если в плоскости  $z = 0$  размещена бипериодическая система бесконечно тонких идеально проводящих пластин (бипериодическая решетка), то компоненты поля, возникающего при дифракции плоской волны на решетке, могут быть только квазипериодическими функциями вида [21]

$$f(x; y; z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{m;n}(z) e^{ip_m x + iq_n y};$$

здесь  $p_m = + \frac{2}{p} m$ ,  $q_n = + \frac{2}{q} n$ , ; – параметры Флоке,  $p; q$  – периоды решетки по  $x$  и  $y$ .

Из системы уравнений Максвелла следует система обыкновенных дифференциальных уравнений для зависящих от координаты  $z$  коэффициентов Флоке компонент электрического и магнитного векторов. Исключим из этих уравнений коэффициенты Флоке компонент  $E_z$  и  $H_z$  и придем к системе из четырех уравнений (индексы  $m; n$  не указываем):

$$i! \ 0 \ E'_x = -p_m q_n H_x + (p_m^2 - k^2) H_y; \quad i! \ 0 \ E'_y = (k^2 - q_n^2) H_x + p_m q_n H_y;$$

$$i! \ 0 \ H'_x = p_m q_n E_x + (k^2 - p_m^2) E_y; \quad i! \ 0 \ H'_y = (q_n^2 - k^2) E_x - p_m q_n E_y;$$

или в векторно-матричном виде

$$! \ 0 \ E' = k_{m;n} H S_{m;n}; \quad ! \ 0 \ H' = -k_{m;n} E S_{m;n};$$

где  $E' = (E'_x; E'_y)$ ,  $H' = (H'_x; H'_y)$ ,

$$S_{m;n} = \frac{1}{ik_{m;n}} \begin{pmatrix} -p_m q_n & k^2 - q_n^2 \\ p_m^2 - k^2 & p_m q_n \end{pmatrix}; \quad k_{m;n}^2 = k^2 - p_m^2 - q_n^2;$$

Принято правило: векторы-строки умножаются на матрицы справа, а на скаляры – слева. Отметим, что  $S_{m;n}^2 = E$ .

В итоге получим

$$E = e^{i m;n z} c_{m;n}^+ + e^{-i m;n z} c_{m;n}^-;$$

$$H = (H_x; H_y) = \frac{i}{w} (e^{i m;n z} c_{m;n}^+ - e^{-i m;n z} c_{m;n}^-) S_{m;n};$$

здесь  $w = \sqrt{\frac{0}{n \ n}}$  – импеданс среды,  $c_{m;n}^\pm = (a_{m;n}^\pm; b_{m;n}^\pm)$  – двумерные произвольные векторы.

В трехмерном случае поток энергии электромагнитного поля через прямоугольник периодов равен

$$P = \int_0^p \int_0^q \bar{\Pi}_z dy dx; \quad \bar{\Pi}_z = \frac{1}{2} \text{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*);$$

Если волна Флоке представляет собой сумму гармоник разной ориентации

$$E_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [a_{m;n}^+ e^{j_{m;n} z} + a_{m;n}^- e^{-j_{m;n} z}] e^{jp_m x + iq_n y};$$

$$E_y = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [b_{m;n}^+ e^{j_{m;n} z} + b_{m;n}^- e^{-j_{m;n} z}] e^{jp_m x + iq_n y};$$

то при  $z = 0$

$$E_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_{m;n}^+ + a_{m;n}^-) e^{jp_m x + iq_n y}; \quad E_y = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (b_{m;n}^+ + b_{m;n}^-) e^{jp_m x + iq_n y};$$

$$H_x = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j_{0 \ m;n}} [p_m q_n (-a_{m;n}^+ + a_{m;n}^-) + (k^2 - p_m^2)(-b_{m;n}^+ + b_{m;n}^-)] e^{jp_m x + iq_n y};$$

$$H_y = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j_{0 \ m;n}} [(k^2 - q_n^2)(a_{m;n}^+ - a_{m;n}^-) + p_m q_n (b_{m;n}^+ - b_{m;n}^-)] e^{jp_m x + iq_n y};$$

После интегрирования в формуле для вычисления потока энергии остаются только интегралы от произведений экспонент с одинаковыми индексами, причем все эти интегралы равны  $pq$ . Поэтому

$$P = \frac{pq}{2! \ j_{0 \ m;n}} \operatorname{Re} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{*_{m;n}} Q_{m;n};$$

$$Q_{m;n} = (k^2 - q_n^2)(a_{m;n}^+ + a_{m;n}^-)(a_{m;n}^{+*} - a_{m;n}^{-*}) + p_m q_n (a_{m;n}^+ + a_{m;n}^-)(b_{m;n}^{+*} - b_{m;n}^{-*}) + p_m q_n (b_{m;n}^+ + b_{m;n}^-)(a_{m;n}^{+*} - a_{m;n}^{-*}) + (k^2 - p_m^2)(b_{m;n}^+ + b_{m;n}^-)(b_{m;n}^{+*} - b_{m;n}^{-*})$$

или

$$Q_{m;n} = (k^2 - q_n^2) [|a_{m;n}^+|^2 - |a_{m;n}^-|^2 - 2i \operatorname{Im} (a_{m;n}^+ a_{m;n}^{-*})] + (k^2 - p_m^2) [|b_{m;n}^+|^2 - |b_{m;n}^-|^2 - 2i \operatorname{Im} (b_{m;n}^+ b_{m;n}^{-*})] + p_m q_n [2 \operatorname{Re} (a_{m;n}^+ b_{m;n}^{+*} - a_{m;n}^- b_{m;n}^{-*}) + 2i \operatorname{Im} (a_{m;n}^- b_{m;n}^{+*} - a_{m;n}^+ b_{m;n}^{-*})];$$

Следовательно, при вычислении вещественной части двойной суммы при вещественных значениях  $m;n$  нужно учитывать только вещественные части выражений  $Q_{m;n}$ , а при чисто мнимых значениях  $m;n$  – мнимые части этих выражений. В общем случае поток энергии суммы волн противоположных ориентаций не равен сумме потоков энергии отдельных слагаемых.

#### 4. Дифракция плоской волны на бипериодической решетке

Пусть на бипериодическую решетку (рис. 6) набегают сверху (и проходит вниз) плоская волна

$$E^0 = e^{-i_{0;0} z} e^{j_{0x+i_{0y}} c^0}; \quad H^0 = \frac{-i}{W} e^{-i_{0;0} z} e^{j_{0x+i_{0y}} c^0} S_{0;0}; \quad c^0 = (a^0; b^0);$$

Постоянные  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  можно выразить через два угла, задающих направление распространения плоской волны:  $\alpha_0 = k \sin \theta_0 \sin \theta'_0$  и  $\beta_0 = k \cos \theta_0 \sin \theta'_0$ . Тогда  $\alpha_{0,0} = k \cos \theta'_0$  – вещественное число.

Будем искать отраженную вверх волну в виде

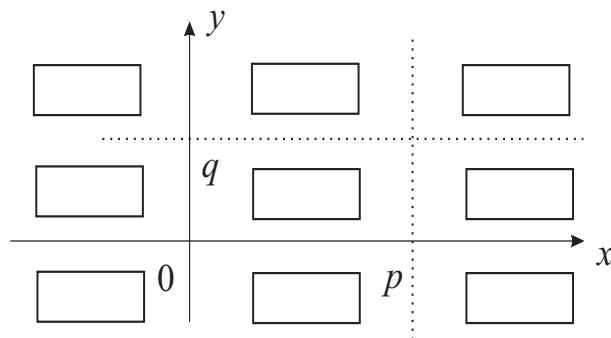
$$\mathbf{E}^+ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \alpha_{m,n} z} e^{i p_m x + i q_n y} \mathbf{c}_{m,n}^+;$$

$$\mathbf{H}^+ = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \alpha_{m,n} z} e^{i p_m x + i q_n y} \mathbf{c}_{m,n}^+ \mathbf{S}_{m,n}$$

и возмущение от решетки снизу в виде

$$\mathbf{E}^- = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i \alpha_{m,n} z} e^{i p_m x + i q_n y} \mathbf{c}_{m,n}^-;$$

$$\mathbf{H}^- = \frac{-i}{w} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i \alpha_{m,n} z} e^{i p_m x + i q_n y} \mathbf{c}_{m,n}^- \mathbf{S}_{m,n};$$



**Рис. 6.** Бипериодическая решетка  
**Fig. 6.** Biperiodic grating

Из условий сопряжения и граничных условий при  $z = 0$  следует, что параметры Флоке  $\alpha_m = \alpha_0$  и  $\beta_n = \beta_0$ ; можно определить их иначе. Далее,  $\mathbf{c}_{m,n}^+ = \mathbf{c}_{m,n}^- = \mathbf{c}_{m,n}$ . Тогда эти векторы должны удовлетворять ПСФУ

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2}{p} m x + i \frac{2}{q} n y} \mathbf{c}_{m,n} = -\mathbf{c}^0 \quad \text{на } \mathcal{M} \tag{6}$$

и

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2}{p} m x + i \frac{2}{q} n y} \mathbf{c}_{m,n} \mathbf{S}_{m,n} = 0 \quad \text{на } \mathcal{N}: \tag{7}$$

Обозначим

$$I_{j;k} = \iint_{\mathcal{M}} e^{i \frac{2}{p} j x + i \frac{2}{q} k y} dx dy; \quad J_{j;k} = \iint_{\mathcal{N}} e^{i \frac{2}{p} j x + i \frac{2}{q} k y} dx dy; \quad j; k = 0; \pm 1; \dots \tag{8}$$

С помощью интегрально-сумматорного тождества

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2}{p} mx + i \frac{2}{q} ny} c_{m;n} = \\ & = \iint_0^p \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2}{p} mx' + i \frac{2}{q} ny'} c_{m;n} S_{m;n} \right) \times \\ & \times \frac{1}{pq} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{2}{p} r(x-x') + i \frac{2}{q} s(y-y')} S_{r;s} dy' dx' = \\ & = \frac{1}{pq} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m;n} S_{m;n} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{m-r;n-s} e^{i \frac{2}{p} rx + i \frac{2}{q} sy} S_{r;s} \end{aligned}$$

перейдем к БСЛАУ

$$\begin{aligned} -pq a_{j;k} + \frac{1}{pq} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m;n} S_{m;n} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{m-r;n-s} J_{r-j;s-k} S_{r;s} = \\ = I_{-j;-k} c^0; \quad j; k = 0; \pm 1; \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Как и в случае периодической решетки из лент, можно доказать, что БСЛАУ (9) эквивалентна ПСФУ (7), (8).

Векторные уравнения (9) запишем «в координатах» и получим

$$\begin{aligned} & pq a_{j;k} + \frac{1}{pqk^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{m;n} \left[ \frac{p_m q_n}{m;n} \Sigma_1 + \frac{k^2 - q_n^2}{m;n} \Sigma_3 \right] + \right. \\ & \left. + b_{m;n} \left[ -\frac{p_m^2 - k^2}{m;n} \Sigma_1 + \frac{p_m q_n}{m;n} \Sigma_3 \right] \right\} = -a^0 I_{-j;-k}; \\ & pq b_{j;k} + \frac{1}{pqk^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ a_{m;n} \left[ -\frac{p_m q_n}{m;n} \Sigma_2 + \frac{k^2 - q_n^2}{m;n} \Sigma_1 \right] + \right. \\ & \left. + b_{m;n} \left[ \frac{p_m^2 - k^2}{m;n} \Sigma_2 + \frac{p_m q_n}{m;n} \Sigma_1 \right] \right\} = -b^0 I_{-j;-k}; \\ & \Sigma_1 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{m-r;n-s} J_{r-j;s-k} \frac{p_r q_s}{r;s}; \quad \Sigma_2 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{m-r;n-s} J_{r-j;s-k} \frac{k^2 - q_s^2}{r;s}; \\ & \Sigma_3 = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} I_{m-r;n-s} J_{r-j;s-k} \frac{p_r^2 - k^2}{r;s} \end{aligned}$$

### 5. Частный случай

Если  $\mathcal{M}$  – прямоугольник  $[\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2] \times [\mathbf{q}_1; \mathbf{q}_2]$ , то  $I_{j;k} = I_j^x \cdot I_k^y$ ,

$$I_j^x = \int_{p_1}^{p_2} e^{i \frac{2}{p} jx} dx; \quad I_k^y = \int_{q_1}^{q_2} e^{i \frac{2}{q} ky} dy:$$

Пусть  $\mathbf{q}_1 = 0$ ;  $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}$ , то есть прямоугольные экраны доходят до границ прямоугольников периодов и, следовательно, сливаются в бесконечные ленты, параллельные оси  $y$ . В этом частном случае  $I_k^y = \delta_{k0} \mathbf{q} = \{\mathbf{k} = 0 : \mathbf{q}; \mathbf{q} \neq 0 : 0\}$  и  $I_j^x = \{\mathbf{k} = 0 : I_j^x \mathbf{q}; \mathbf{k} \neq 0 : 0\}$ . Кроме того,  $J_{jk} = \{\mathbf{k} = 0 : J_j^x \mathbf{q}; \mathbf{k} \neq 0 : 0\}$ , где  $J_j^x = \{j = 0 : \mathbf{p} - I_0^x; j \neq 0 : -I_j^x\}$ . Поэтому все двойные суммы в БСЛАУ превращаются в одинарные, и, следовательно, БСЛАУ (9) принимает вид

$$-\rho c_{j;k} + \frac{1}{p} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m;k} S_{m;k} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} I_{m-r}^x J_{r-j}^x S_{r;k} = \delta_{k0} I_{-j}^x c^0; \quad j; k = 0; \pm 1; \dots :$$

Действительно,  $I_{m-r;n-s} = \{\mathbf{s} = \mathbf{n} : I_{m-r}^x \mathbf{q}; \mathbf{s} \neq \mathbf{n} : 0\}$ , и от суммы по  $\mathbf{s}$  остается только одно слагаемое при  $\mathbf{s} = \mathbf{n}$ . Затем  $J_{r-j;n-k} = \{\mathbf{n} = \mathbf{k} : J_{r-j}^x \mathbf{q}; \mathbf{n} \neq \mathbf{k} : 0\}$ , и от суммы по  $\mathbf{n}$  остается только одно слагаемое при  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ . Кроме того,  $I_{-j;-k} = I_{-j}^x \mathbf{q}$  при  $\mathbf{k} = 0$  и  $I_{-j;-k} = 0$  при  $\mathbf{k} \neq 0$ . Таким образом, БСЛАУ состоит из независимых групп уравнений – однородных при  $\mathbf{k} \neq 0$ . При  $\mathbf{k} = 0$  имеем

$$-\rho c_{j;0} + \frac{1}{p} \sum_m c_{m;0} S_{m;0} \sum_r I_{m-r}^x J_{r-j}^x S_{r;0} = I_{-j}^x c^0; \quad j = 0; \pm 1; \dots : \tag{10}$$

Пусть  $\mathbf{p}_1 = 0$ ;  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ , то есть плоская волна падает на решетку по нормали. Тогда  $m;0 = \sqrt{k^2 - p_m^2} = m$ ,

$$S_{m;0} = \begin{pmatrix} 0 & -ik = m \\ i_{m=k} & 0 \end{pmatrix}; \quad S_{r;0} = \begin{pmatrix} 0 & -ik = r \\ i_{r=k} & 0 \end{pmatrix};$$

$$S_{m;0} S_{r;0} = \begin{pmatrix} r = m & 0 \\ 0 & m = r \end{pmatrix}:$$

Поэтому БСЛАУ (10) распадается на две независимые подсистемы:

$$-\rho a_{j;0} + \frac{1}{p} \sum_m a_{m;0} \frac{1}{m} \sum_r I_{m-r}^x J_{r-j}^x \frac{1}{r} = I_{-j}^x a^0; \quad j = 0; \pm 1; \dots ;$$

$$-\rho b_{j;0} + \frac{1}{p} \sum_m b_{m;0} \frac{1}{m} \sum_r I_{m-r}^x J_{r-j}^x \frac{1}{r} = I_{-j}^x b^0; \quad j = 0; \pm 1; \dots :$$

Вторая БСЛАУ совпадает с БСЛАУ (3) двумерной задачи дифракции волны на периодической решетке из лент в случае параллельной поляризации поля. Первая БСЛАУ равносильна системе уравнений (4), полученной в случае перпендикулярной поляризации поля. Отличие в том, что в двумерном случае в качестве потенциальной функции рассматривалась компонента  $H_y$ , а сейчас – компонента  $E_x$ . Так как  $E_x = \frac{1}{i!} \frac{\partial H}{\partial z}$ , то если при заданном  $a^0$  найдено решение первой БСЛАУ, то точно такие же числа должны получиться, если решить БСЛАУ двумерной задачи при перпендикулярной поляризации поля, а потом найденные значения  $a_n$  умножить на числа  $\delta_{n0}$  и поделить на  $-i$ .

### 6. Вычислительный эксперимент, 3D

Приближенное решение БСЛАУ (9) задачи дифракции волны на бипериодической решетке будем искать методом усечения. Используем два параметра усечения:  $M$  и  $R$ , пусть индексы  $j; k$  (номер уравнения) и  $m; n$  (номер неизвестного) изменяются от  $-M$  до  $M$ , а индексы  $r; s$  во внутренних суммах – от  $-R$  до  $R$ . Для контроля достоверности расчетов можно использовать такие же тесты, что и в двумерном случае.

Потоки энергии волн через прямоугольник периодов вычислим следующим образом. В области над решеткой ( $z > 0$ ) электромагнитное поле образуют положительно ориентированная волна Флоке с амплитудами  $a_{m;n}^+$  и  $b_{m;n}^+$  и отрицательно ориентированная волна, у которой только  $a_{0;0}^- = a^0 \neq 0$  и  $b_{0;0}^- = b^0 \neq 0$ . Тогда при  $m \neq 0$  и  $n \neq 0$

$$Q_{m;n}^+ = (k^2 - q_n^2) |a_{m;n}^+|^2 + (k^2 - p_m^2) |b_{m;n}^+|^2 + 2 p_m q_n \operatorname{Re} (a_{m;n}^+ b_{m;n}^{+*})$$

– вещественное число. Поэтому при вычислении потока энергии нужно брать только те слагаемые, в которых  $\operatorname{Re} a_{m;n} \neq 0$ .

Если  $m = 0$  и  $n = 0$ , то

$$Q_{0;0} = (k^2 - q_0^2) [|a_{0;0}^+|^2 - |a^0|^2 - 2i \operatorname{Im} (a_{0;0}^+ a^0)] + (k^2 - p_0^2) [|b_{0;0}^+|^2 - |b^0|^2 - 2i \operatorname{Im} (b_{0;0}^+ b^0)] + p_0 q_0 [2 \operatorname{Re} (a_{0;0}^+ b_{0;0}^{+*} - a^0 b^{0*}) + 2i \operatorname{Im} (a^0 b_{0;0}^{+*} - a_{0;0}^+ b^{0*})]$$

и  $\operatorname{Re} Q_{0;0} = \operatorname{Re} Q_{0;0}^+ + \operatorname{Re} Q_{0;0}^0$ , где

$$\operatorname{Re} Q_{0;0}^+ = (k^2 - q_0^2) |a_{0;0}^+|^2 + (k^2 - p_0^2) |b_{0;0}^+|^2 + 2 p_0 q_0 \operatorname{Re} (a_{0;0}^+ b_{0;0}^{+*});$$

$$\operatorname{Re} Q_{0;0}^0 = -(k^2 - q_0^2) |a^0|^2 - (k^2 - p_0^2) |b^0|^2 - 2 p_0 q_0 \operatorname{Re} (a^0 b^{0*});$$

здесь  $p_0 = k^2 - q_0^2$ ;  $q_0 = k^2 - p_0^2$ , и, следовательно,  $q_{0;0} = \sqrt{k^2 - p_0^2 - q_0^2}$  (вещественное число).

В области под решеткой ( $z < 0$ ) присутствуют только отрицательно ориентированные гармоники, поэтому

$$Q_{m;n}^- = -(k^2 - q_n^2) |a_{m;n}^-|^2 - (k^2 - p_m^2) |b_{m;n}^-|^2 - 2 p_m q_n \operatorname{Re} (a_{m;n}^- b_{m;n}^{-*});$$

В этом случае при вычислении потока энергии также дают вклад только те слагаемые, в которых  $\operatorname{Re} a_{m;n} \neq 0$ .

В итоге равенство потоков энергии (закон сохранения энергии) примет вид  $P^+ + P^- = P^0$  или  $P^+ = P^0 + P^- = P^0 = 1$ , где

$$P^+ = \frac{pq}{2!} \sum_0 \sum_m \sum_n \frac{1}{m;n} [(k^2 - q_n^2) |a_{m;n}^+|^2 + (k^2 - p_m^2) |b_{m;n}^+|^2 + 2 p_m q_n \operatorname{Re} (a_{m;n}^+ b_{m;n}^{+*})];$$

$$P^- = \frac{pq}{2!} \sum_0 \sum_m \sum_n \frac{1}{m;n} [(k^2 - q_n^2) |a_{m;n}^-|^2 + (k^2 - p_m^2) |b_{m;n}^-|^2 + 2 p_m q_n \operatorname{Re} (a_{m;n}^- b_{m;n}^{-*})];$$

$$P^0 = \frac{pq}{2!} \sum_0 \frac{1}{0;0} [(k^2 - q_0^2) |a^0|^2 + (k^2 - p_0^2) |b^0|^2 + 2 p_0 q_0 \operatorname{Re} (a^0 b^{0*})];$$

В суммах учитываются только те слагаемые, в которых  $a_{m;n}$  – вещественные числа. Отметим также, что в задаче дифракции волны на бипериодической решетке  $a_{m;n}^+ = a_{m;n}^- = a_{m;n}$  и  $b_{m;n}^+ = b_{m;n}^- = b_{m;n}$ , но в нижнем полупространстве к  $a_{0;0}^-$  и  $b_{0;0}^-$  нужно добавить  $a^0$  и  $b^0$ .

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflicts of Interest.** The authors declare no conflicts of interest.

### Литература

1. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана – Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. 400 с.
2. *Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П.* Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ. 1962. Т. 32, вып. 4. С. 381–394.
3. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Маслов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 288 с.
4. *Modern Theory of Gratings. Resonant Scattering: Analysis Techniques and Phenomena.* Sirenko Yu.K., Ström S. (Eds.). Ser.: Springer Series in Optical Sciences. V. 153. New York, NY: Springer, 2010. xvi, 390 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1200-8>.
5. *Гандель Ю.В.* О парных рядах Фурье некоторых смешанных краевых задач математической физики // Теория функций, функц. анализ и их прил. Харьков: Вища шк., 1982. Вып. 38. С. 15–18.
6. *Гандель Ю.В.* О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков // Теория функций, функц. анализ и их прил. Харьков: Вища шк., 1983. Вып. 40. С. 33–36.
7. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
8. *Гандель Ю.В., Душкин В.Д.* Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. Харьков: Акад. ВВ МВД Украины, 2012. 544 с.
9. *Hou B., Xu G., Wen W., Wong G.K.L.* Diffraction by an optical fractal grating // Appl. Phys. Lett. 2004. V. 85, No 25. P. 6125–6127. <https://doi.org/10.1063/1.1840112>.
10. *Rodrigo J.A., Alieva T., Calvo M.L., Davis J.A.* Diffraction by Cantor fractal zone plates // J. Mod. Opt. 2005. V. 52, No 18. P. 2771–2783. <https://doi.org/10.1080/09500340500356973>.
11. *Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е.* Оптическая дифракция на фрактальных решетках // Вестн. Моск ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 2008. № 2. С. 7–10.
12. *Кошевой Г.И.* Некоторые классы самоподобных фракталов и их использование в радиофизике // Электромагн. волны и электрон. сист. 2007. Т. 12, № 11. С. 28–33.
13. *Koshovy G.I.* Systems approach to investigating pre-fractal diffraction gratings // Telecommun. Radio Eng. 2012. V. 71, No 6. P. 487–500. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v71.i6.10>.
14. *Koshovy G.I.* Scattering of  $H$ -polarized waves by pre-fractal diffraction gratings // Telecommun. Radio Eng. 2012. V. 71, No 11. P. 961–973. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v71.i11.10>.
15. *Nesvit K., Gandel Y.* Computational modeling of hypersingular integral equations for 2D pre-Cantor scattering structure // Int. J. Adv. Math. Sci. 2015. V. 3, No 2. P. 161–171. <https://doi.org/10.14419/ijams.v3i2.5410>.
16. *Nesvit K.V.* Scattering of TE wave on screened pre-Cantor grating based on hypersingular integral equations // Am. J. Comput. Appl. Math. 2014. V. 4, No 1. P. 9–16. <https://doi.org/10.5923/j.ajcam.20140401.02>.

17. Nesvit K.V. Diffraction problem of scattering and propagation TM wave on pre-fractal impedance strips above shielded dielectric layer // *Int. J. Appl. Math. Res.* 2014. V. 3, No 1. P. 7–14. <https://doi.org/10.14419/ijamr.v3i1.1444>.
18. Плещинский Н.Б., Тумаков Д.Н. О регуляризации уравнений задачи дифракции электромагнитной волны на периодической решетке // *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач.* Казань: Унипресс, 1999. С. 234–240.
19. Плещинский Н.Б. Распространение и дифракция электромагнитных волн: учеб. пособие. Казань: КФУ, 2022. 80 с. URL: <https://dspace.kpfu.ru/xmlui/handle/net/170837>.
20. Тумаков М.Д. Дифракция электромагнитных волн на фрактальных металлических экранах // *Сб. тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А.Г. Свешникова, «Актуальные проблемы электродинамики – 2024».* Москва, 19–20 ноября 2024 г. М.: МГУ, 2024. С. 56–58.
21. Pleshchinskii N.B. The uniqueness theorems in the electromagnetic wave theory and quasi-periodical solutions of the periodical diffraction problems // *Proc. PIERS 2013. Stockholm, 2013.* P. 416–420.
22. Pleshchinskii N.B. On equivalence of mathematical models in problems of diffraction of waves by thin screens // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 9. P. 4043–4053. <https://doi.org/10.1134/S1995080223090305>.

### References

1. Shestopalov V.P. *Metod zadachi Rimana–Gil’berta v teorii difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln* [The Riemann–Hilbert Problem Method in the Theory of Diffraction and Propagation of Electromagnetic Waves]. Kharkiv, Izd. Khar’k. Univ., 1971. 400 p. (In Russian)
2. Agranovich Z.S., Marchenko V.A., Shestopalov V.P. Diffraction of electromagnetic waves by plane metal gratings. *Zh. Tekh. Fiz.*, 1962, vol. 32, no. 4, pp. 381–394. (In Russian)
3. Shestopalov V.P., Litvinenko L.N., Maslov S.A., Sologub V.G. *Difraktsiya voln na reshetkakh* [Wave Diffraction by Gratings]. Kharkiv, Izd. Khar’k. Univ., 1973. 288 p. (In Russian)
4. *Modern Theory of Gratings. Resonant Scattering: Analysis Techniques and Phenomena.* Sirenko Yu.K., Ström S. (Eds.). Ser.: Springer Series in Optical Sciences. Vol. 153. New York, NY, Springer, 2010. xvi, 390 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1200-8>.
5. Gandel Yu.V. On paired Fourier series of some mixed boundary value problems of mathematical physics. In: *Teoriya funktsii, funktsional’nyi analiz i ikh prilozheniya* [Theory of Functions, Functional Analysis, and Their Applications]. Vol. 38. Kharkiv, Vyscha Shk., 1982. pp. 15–18. (In Russian)
6. Gandel Yu.V. On paired integral equations leading to a singular integral equation on a system of segments. In: *Teoriya funktsii, funktsional’nyi analiz i ikh prilozheniya* [Theory of Functions, Functional Analysis, and Their Applications]. Vol. 40. Kharkiv, Vyscha Shk., 1983, pp. 33–36. (In Russian)
7. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral’nykh uravneniyakh i ikh primeneniye v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical Methods

in Singular Integral Equations and Their Application in Aerodynamics, Elasticity Theory, and Electrodynamics]. Moscow, Nauka, 1985. 256 p. (In Russian)

8. Gandel Yu.V., Dushkin V.D. *Matematicheskie modeli dvumernykh zadach difraktsii: singulyarnye integral'nye uravneniya i chislennye metody diskretnykh osobennosti* [Mathematical Models of Two-Dimensional Diffraction Problems: Singular Integral Equations and Numerical Methods of Discrete Singularities]. Kharkiv, Akad. VV MVD Ukr., 2012. 544 p. (In Russian)
9. Hou B., Xu G., Wen W., Wong G.K.L. Diffraction by an optical fractal grating. *Appl. Phys. Lett.*, 2004, vol. 85, no. 25, pp. 6125–6127. <https://doi.org/10.1063/1.1840112>.
10. Rodrigo J.A., Alieva T., Calvo M.L., Davis J.A. Diffraction by Cantor fractal zone plates. *J. Mod. Opt.*, 2005, vol. 52, no. 18, pp. 2771–2783. <https://doi.org/10.1080/09500340500356973>.
11. Bogolyubov A.N., Petukhov A.A., Shapkina N.E. Optical diffraction on fractal lattices. *Moscow Univ. Phys. Bull.*, 2008, vol. 63, no. 2, pp. 87–90. <https://doi.org/10.3103/S0027134908020021>.
12. Koshovy G.I. Some classes of self-similar fractals and their use in radiophysics. *Electromagn. Waves Electron. Syst.*, 2007, vol. 12, no. 11, pp. 28–33. (In Russian)
13. Koshovy G.I. Systems approach to investigating pre-fractal diffraction gratings. *Telecommun. Radio Eng.*, 2012, vol. 71, no. 6, pp. 487–500. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v71.i6.10>.
14. Koshovy G.I. Scattering of  $H$ -polarized waves by pre-fractal diffraction gratings. *Telecommun. Radio Eng.*, 2012, vol. 71, no. 11, pp. 961–973. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v71.i11.10>.
15. Nesvit K., Gandel Y. Computational modeling of hypersingular integral equations for 2D pre-Cantor scattering structure. *Int. J. Adv. Math. Sci.*, 2015, vol. 3, no. 2, pp. 161–171. <https://doi.org/10.14419/ijams.v3i2.5410>.
16. Nesvit K.V. Scattering of TE wave on screened pre-Cantor grating based on hypersingular integral equations. *Am. J. Comput. Appl. Math.*, 2014, vol. 4, no. 1, pp. 9–16. <https://doi.org/10.5923/j.ajcam.20140401.02>.
17. Nesvit K.V. Diffraction problem of scattering and propagation TM wave on pre-fractal impedance strips above shielded dielectric layer. *Int. J. Appl. Math. Res.*, 2014, vol. 3, no. 1, pp. 7–14. <https://doi.org/10.14419/ijamr.v3i1.1444>.
18. Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. On regularization of equations of electromagnetic wave diffraction by periodical grating. In: *Tr. Matem. tsentra im. N.I. Lobachevskogo* [Proceedings of the Lobachevskii Mathematical Center]. Vol. 2: Iterative methods for solving linear and nonlinear grid problems. Kazan, Unipress, 1999, pp. 234–240. (In Russian)
19. Pleshchinskii N.B. *Rasprostranenie i difraktsiya elektromagnitnykh voln: ucheb. posobie* [Propagation and Diffraction of Electromagnetic Waves: A Textbook]. Kazan, KFU, 2022. 80 p. URL: <https://dspace.kpfu.ru/xmlui/handle/net/170837>. (In Russian)
20. Tumakov M.D. Diffraction of electromagnetic waves by fractal metal screens. *Sb. tez. dokl. Mezhdunar. konf., posvyashch. 100-letiyu so dnya rozhdeniya A.G. Sveshnikova, "Aktual'nye problemy elektrodinamiki – 2024"*. Moskva, 19–20 noyabrya 2024 g. [Proc. Int. Conf. Dedicated to the 100th Anniversary of A.G. Sveshnikov's Birth. Current Problems of Electrodynamics – 2024. Moscow, November 19–20, 2024]. Moscow, MGU, 2024, pp. 56–58. (In Russian)

21. Pleshchinskii N.B. The uniqueness theorems in the electromagnetic wave theory and quasi-periodical solutions of the periodical diffraction problems. *Proc. PIERS 2013*. Stockholm, 2013, pp. 416–420.
22. Pleshchinskii N.B. On equivalence of mathematical models in problems of diffraction of waves by thin screens. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 9, pp. 4043–4053.  
<https://doi.org/10.1134/S1995080223090305>.

### Информация об авторах

**Николай Борисович Плещинский**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [pnb@kpfu.ru](mailto:pnb@kpfu.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-091X>

**Максим Дмитриевич Тумаков**, младший научный сотрудник, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»; старший преподаватель кафедры прикладной математики и искусственного интеллекта, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [makdtumakov@kpfu.ru](mailto:makdtumakov@kpfu.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8028-6939>

### Author Information

**Nikolai B. Pleshchinskii**, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

E-mail: [pnb@kpfu.ru](mailto:pnb@kpfu.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1595-091X>

**Maxim D. Tumakov**, Junior Researcher, National Research Center “Kurchatov Institute”; Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics and Artificial Intelligence, Kazan Federal University

E-mail: [makdtumakov@kpfu.ru](mailto:makdtumakov@kpfu.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8028-6939>

Поступила в редакцию 6.12.2025  
Принята к публикации 12.03.2026

Received December 6, 2025  
Accepted March 12, 2026