

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.168

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.269-286>

Моделирование специализированных алгоритмов маршрутизации в сетях на кристалле, представленных сериями семейств циркулянтных топологий

М.А. Маликов¹, Э.А. Монахова²✉, Э.Р. Рзаев¹, А.Ю. Романов¹¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия²Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Россия✉ emilia.rav@sscc.ru

Аннотация

В качестве топологий сетей на кристалле рассмотрены серии семейств оптимальных по диаметру двумерных циркулянтных сетей с прямоугольным контуром укладки на плоскости. Прямоугольный контур укладки графа межмодульных соединений даёт возможность компоновки элементов в сетях на кристалле с минимальным количеством пересечений связей и ограниченной длиной максимальной из них, не зависящей от размера сети. Для серий семейств циркулянтных сетей с прямоугольным контуром укладки проведены исследование и моделирование в сети на кристалле новых алгоритмов маршрутизации, использующих координаты трёх соседних нулей укладки графов на плоскости для расчётов кратчайших путей. Отличительной особенностью новых алгоритмов маршрутизации является минимальное количество входных данных для расчёта кратчайших путей. В симуляторе сети на кристалле Noxim на оптимальных графах семейств реализованы четыре алгоритма маршрутизации: новый аналитический алгоритм, классический алгоритм Дейкстры, алгоритм маршрутизации с виртуальными координатами и алгоритм обхода по часовой стрелке. Сравнение алгоритмов проведено при различных профилях трафика по трём метрическим показателям – средней и максимальной задержкам и пропускной способности сети. Результаты моделирования показали преимущество по затратам памяти новых алгоритмов маршрутизации, специализированных для топологий циркулянтных сетей с прямоугольным контуром укладки, по сравнению с другими алгоритмами для всех рассмотренных профилей трафика при схожих или лучших метрических показателях.

Ключевые слова: циркулянтная сеть, прямоугольный контур укладки, минимальный диаметр, алгоритм маршрутизации, сеть на кристалле

Благодарности. Исследование поддержано Российским научным фондом (грант 25-11-00248).

Для цитирования: Маликов М.А., Монахова Э.А., Рзаев Э.Р., Романов А.Ю. Моделирование специализированных алгоритмов маршрутизации в сетях на кристалле, представленных сериями семейств циркулянтных топологий // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2026. Т. 168, кн. 2. С. 269–286. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.269-286>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.269-286>

Simulation of specialized routing algorithms in networks-on-chip represented by series of circulant topology families

M.A. Malikov¹, E.A. Monakhova²✉, E.R. Rzaev¹, A.Y. Romanov¹

¹*HSE University, Moscow, Russia*

²*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

✉ emilia.rav@sscc.ru

Abstract

This article examines series of families of two-dimensional circulant networks with rectangular L-shapes, optimal in diameter, as network-on-chip topologies with a minimal number of crossings between the links and a bounded length of the maximum link that does not depend on the network size. New network-on-chip routing algorithms, which use the coordinates of three adjacent zeros in the planar graph embedding to calculate the shortest paths, were investigated and simulated. A key advantage of the proposed routing algorithms is that they require minimal input data to calculate the shortest paths. Four routing algorithms were implemented in the Noxim network-on-chip simulator using the optimal graphs of the circulant network families under study: the new analytical algorithm, the traditional Dijkstra algorithm, the routing algorithm with virtual coordinates, and the clockwise routing algorithm. The above algorithms were compared under various traffic profiles across three metrics: average and maximum latencies and network throughput. The simulation results showed that, for all traffic profiles, the new routing algorithms designed for the topologies of circulant networks with rectangular L-shapes outperform other algorithms with similar metrics in terms of memory consumption.

Keywords: circulant network, rectangular L-shape, minimal diameter, routing algorithm, network-on-chip

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 25-11-00248).

For citation: Malikov M.A., Monakhova E.A., Rzaev E.R., Romanov A.Y. Simulation of specialized routing algorithms in networks-on-chip represented by series of circulant topology families. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2026, vol. 168, no. 2, pp. 269–286. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.269-286>. (In Russian)

Введение

Экспериментальное моделирование систем передачи данных с помощью пакетов прикладных программ показало, что оптимальные циркулянтные топологии [1–3] являются идеальными кандидатами для глобальных соединений, в том числе в масштабных иерархических сетях [4]. С развитием технологической базы и появлением масштабных сетей на кристалле (СтнК) с сотнями и тысячами узлов актуальным становится использование циркулянтных сетей в качестве топологий СтнК [5–8]. Такая тенденция обусловлена их лучшими структурными показателями при большом количестве узлов (низкое среднее расстояние, хорошая пропускная способность, высокая масштабируемость) по сравнению со стандартными двумерными топологиями сетей на кристалле. Для сетей на кристалле с циркулянтной топологией актуальным остаётся вопрос организации эффективной маршрутизации с минимумом ресурсных затрат СтнК при сохранении высокой пропускной способности в сети.

Дадим общее определение двумерной циркулянтной сети.

Пусть N ; $1 \leq s_1 < s_2 < N=2$ – целые числа. Неориентированный граф $C(N; s_1; s_2)$ с вершинами $V = \{0; 1; \dots; N-1\}$ и рёбрами $E = \{(i; j) : i - j \equiv \pm s_m \pmod{N}; m = 1; 2\}$ называется *двумерной циркулянтной сетью с образующими $\{s_1; s_2\}$ и порядком N* . Циркулянт связан, если $\text{НОД}(N; s_1; s_2) = 1$.

На рис. 1 показан двумерный циркулянт $C(10; 1; 4)$ с образующими $s_1 = 1$, $s_2 = 4$.

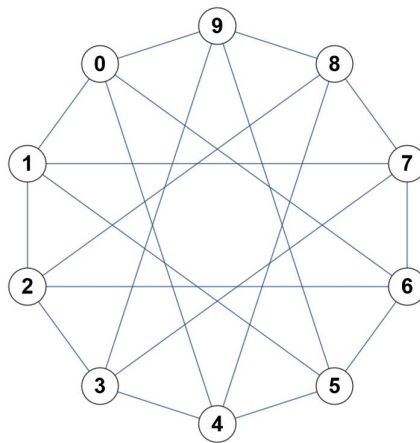


Рис. 1. Циркулянт $C(10; 1; 4)$

Fig. 1. Circulant $C(10; 1; 4)$

Диаметр $d(N; s_1; s_2)$ графа – это максимальная длина кратчайшего пути между любыми двумя вершинами. Точная нижняя граница диаметра для двумерных циркулянтов любого порядка $N > 4$ равна $D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil$: Оптимальным циркулянтом порядка N называется граф, диаметр которого совпадает с точной нижней границей $D(N)$.

Минимум диаметра при фиксированном количестве узлов и линий связи графа обеспечивает оптимум различных критериев функционирования сети [9].

В настоящей работе исследованы алгоритмы маршрутизации, специализированные для серий семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей класса $C(N; 1; s)$, представимых в виде решётчатых структур с прямоугольным контуром укладки графов на плоскости. Построение таких структур циркулянтов и их применение в качестве сетей связи рассмотрены в [10–12]. Планарное представление двумерных циркулянтов в виде прямоугольных контуров имеет минимальное число пересекающихся линий связи и ограниченную длину максимальной из них, не зависящую от размера сети¹, что является преимуществом при проектировании масштабных сетей на кристалле, содержащих сотни и тысячи узлов. Такие структуры подходят для практической реализации в качестве топологий СтнК ввиду возможности оптимального размещения компонентов в кристалле и, как показано в настоящей работе, эффективной организации маршрутизации, использующей аналитические описания параметров графов, представимых в виде серий семейств топологий СтнК.

В разделе 1 дано понятие серий семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей с прямоугольным контуром укладки на плоскости. В разделе 2 для графов рассмотренных серий семейств определены аналитические описания параметров их контуров укладки, используемых при маршрутизации. В разделе 3 описаны аналитические алгоритмы маршрутизации для серий семейств, использующие при расчёте кратчайших путей минимально возможное количество соседних нулей укладки. В разделе 4 приведены результаты моделирования в симуляторе Noxim [13, 14] для сетей на кристалле аналитических алгоритмов маршрутизации. Проведено сравнение с тремя известными алгоритмами маршрутизации по трём метрическим показателям – максимальной и средней задержкам и пропускной способности сети. В заключении сформулированы основные преимущества использования в СтнК алгоритмов маршрутизации, специализированных для серий семейств аналитически задаваемых циркулянтов с прямоугольным контуром укладки.

1. Серии семейств оптимальных циркулянтов с прямоугольным контуром укладки

В ряде алгоритмов маршрутизации [5, 15, 16], известных для двумерных циркулянтных сетей, использовано понятие L-контра укладки циркулянтного графа на плоскости. На рис. 2а дан общий вид такого L-контра укладки с параметрами $a > 0$, $b > 0$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ и числом вершин $N = ab - pq$. На рис. 2б показан L-контур графа $C(10; 1; 4)$, на рис. 2в – прямоугольный L-контур графа $C(12; 1; 4)$, где $a = 4$, $b = 3$, $p = 0$ и $q = 1$. Не показаны рёбра, связывающие граничные вершины контра. Подробное объяснение способов построения L-контуров укладки циркулянтов на плоскости можно найти в работе².

В настоящей работе исследован класс оптимальных двумерных циркулянтов $C(N; 1; s)$, образующих прямоугольные контуры укладки на плоскости, как перспективное направление для проектирования топологий СтнК. В [11] получены серии семейств $S_i(d; k)$, $i \in \{2; 3; 4; 5\}$; оптимальных двумерных циркулянтов с прямоугольным

¹Lau F.C.M., Chen G. Optimal layouts of multidimensional networks // IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 1996. V. 7, No 9. P. 954–961.

²Hwang F.K. A complementary survey on double-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2001. V. 263, Nos 1–2. P. 211–229.

контуром укладки на плоскости: $S_i(d; k) = \{C(N(d; k); 1; s(d; k)) \mid d \geq d_m\}$. В табл. 1 приведены описания серий семейств $S_i(d; k)$ с образующими $(1; s)$ графов и параметрами a, b, p, q прямоугольных контуров укладки. Для графов с прямоугольным контуром укладки число вершин $N = ab$ и один из параметров p или q равен нулю, в данном случае $p = 0$. При всех k каждая серия задаёт описания семейств оптимальных циркулянтных графов диаметров $d \geq d_m$, где d_m – минимальный диаметр, при котором каждый член семейства является оптимальным графом. Значения d_m найдены из необходимого условия оптимальности двумерного циркулянта [11]:

$$2d^2 - 2d + 1 < N(d; k) \leq 2d^2 + 2d + 1:$$

Области изменения диаметров $d \geq d_m$ справедливы для графов всех серий. Для графов серии $S_3(d; k)$ действует дополнительное условие $d \equiv k \pmod{2}$, то есть чётность диаметров членов семейства совпадает с чётностью параметра k .

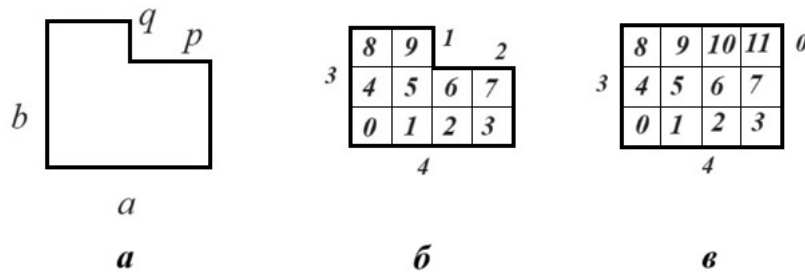


Рис. 2. Параметры L-контуров для циркулянтов $C(N; s_1; s_2)$: а), б) общего вида, в) прямоугольного вида

Fig. 2. Parameters of L-shapes for circulants $C(N; s_1; s_2)$: а), б) general type, в) rectangular type

Табл. 1. Серии семейств оптимальных циркулянтов с прямоугольным контуром

Table 1. Series of families of optimal circulants with rectangular L-shapes

Серия	$N(d; k)$	Образующие $(1; s)$	a	b	p	q	d_m
$S_2(d; k)$	$2d^2 - d - 2k^2 - k$	$1; 2d + 2k$	$d + k$	$2d - 2k - 1$	0	$d - k$	$2k^2 + k + 2, k \geq 0$
$S_3(d; k)$	$2d^2 - 2k^2$	$1; d^2 - d - k^2 - k$	$d + k$	$2d - 2k$	0	$d - k - 1$	$k^2 + 2; k \geq 0$
$S_4(d; k)$	$2d^2 + d - 2k^2 - k$	$1; 2d - 2k$	$d - k$	$2d + 2k + 1$	0	$d + k + 1$	$\lceil \frac{2k^2 + k + 2}{3} \rceil, k > 0$
$S_5(d; k)$	$2d^2 + d - 2k^2 + k$	$1; 2d + 2k$	$d + k$	$2d - 2k + 1$	0	$d - k + 1$	$\lceil \frac{2k^2 - k + 2}{3} \rceil, k > 0$

В [11] доказано, что графы всех серий семейств $S_i(d; k)$, $i \in \{2; 3; 4; 5\}$, обладают свойством L-масштабируемости по диаметру [8], актуальным при разработке алгоритмов маршрутизации в масштабных сетях на кристалле. Масштабируемость семейств циркулянтов с прямоугольным контуром означает, что параметры контуров a, b и q с ростом диаметра d растут линейно, и при всех допустимых диаметрах выполняются сравнения, определяющие расположение нулевых вершин при укладке графов на плоскости:

$$bs \equiv 0 \pmod{N};$$

$$a + (b - q)s \equiv 0 \pmod{N}; \quad (1)$$

Следует отметить, что при увеличении k каждая серия из табл. 1 включает неограниченное число порождаемых семейств оптимальных циркулянтных графов с прямоугольным контуром. При этом начальный диаметр d_m , с которого начинается каждое новое семейство, увеличивается с ростом k . Таким образом, количество графов серий из табл. 1 растёт с ростом диаметра графов. Например, при диаметре $d = 10$ существует одиннадцать циркулянтов с прямоугольным контуром, принадлежащих сериям, с числом вершин

$$N = \{182; 187; 189; 190; 192; 195; 200; 204; 207; 209; 210\};$$

при диаметре $d = 16$ таких циркулянтов пятнадцать с

$$N = \{483; 486; 492; 493; 496; 500; 504; 507; 512; 513; 518; 522; 525; 527; 528\};$$

2. Определение параметров контура укладки

Для алгоритмов маршрутизации, использующих L -контур укладки графов, при расчёте кратчайших путей в графах необходимо знание значений параметров a , b , p и q . Для циркулянтов общего вида $C(N; s_1; s_2)$, в том числе для $C(N; 1; s)$, значения этих параметров при заданных значениях порядка и образующих графа можно определить с помощью алгоритма сложности $O(N)$ из работы³. В случае прямоугольных контуров укладки графов эти значения и, соответственно, значения координат соседних нулей можно определить более простым методом, который представлен ниже.

Определение параметров для графов серии $S_5(d; k)$. В этом случае

$$N = 2d^2 + d - 2k^2 + k = (d + k)(2d - 2k + 1);$$

$s = 2d + 2k$ и $N = ab$. Так как при прямоугольных контурах укладки $p = 0$, то необходимо определить вид функций a , b и q при любых d и k . Пусть для определённости $a < b$. Тогда $a = d + k$ и $b = 2d - 2k + 1$. Остаётся определить q . Подставив a и b в (1), получим $d + k + (2d - 2k + 1 - q)(2d + 2k) = mN$, где $m \geq 1$. Сократив обе части уравнения на $d + k$ и решив его относительно q , получим

$$q = 2d - 2k + 1 - (m(2d - 2k + 1) - 1) = 2; \quad (2)$$

Нужно найти такое m , при котором областью значений линейной функции $q(d; k)$ являются целые положительные числа при всех d и k из области их определения. Таким свойством обладает $m = 1$. Подставив m в (2), получим $q = d - k + 1$:

Определение параметров для графов серии $S_2(d; k)$. В этом случае

$$N = 2d^2 - d - 2k^2 - k = (d + k)(2d - 2k - 1);$$

$s = 2d + 2k$ и $N = ab$. Нужно определить вид функций a , b и q при любых d и k . Возьмём для определённости $a < b$. Тогда $a = d + k$ и $b = 2d - 2k - 1$. После подстановки a и b в (1) имеем $d + k + (2d - 2k - 1 - q)(2d + 2k) = mN$, где $m \geq 1$. Сократив обе части уравнения на $d + k$ и решив его относительно q , получим

$$q = 2d - 2k - 1 - (m(2d - 2k - 1) - 1) = 2; \quad (3)$$

³ Hwang F.K. Там же.

Нужно найти значение m , при котором областью значений функции q являются целые положительные числа при всех d и k из области их определения. Таким свойством обладает $m = 1$. Подставив m в (3) и решив это уравнение относительно q , получим $q = d - k$:

Определение параметров для графов серии $S_3(d; k)$. В этом случае будем учитывать, что такие графы существуют при тех диаметрах $d \geq d_m$, которые имеют одинаковую чётность с k . В данном случае $N = 2d^2 - 2k^2 = (d + k)(2d - 2k)$, $s = (d + k)(d - k - 1)$ и $N = ab$. Нужно определить вид функций a , b и q при любых d и k одинаковой чётности. Возьмём для определённости $a < b$. Тогда $a = d + k$ и $b = 2d - 2k$: После подстановки a и b в (1) имеем $d + k + (2d - 2k - q)(d + k)(d - k - 1) = mN$, где $m \geq 1$. Сократив обе части уравнения на $d + k$ и решив его относительно q , получим

$$q = 2d - 2k - (2m(d - k) - 1) = (d - k - 1); \quad (4)$$

Нужно найти такое $m \geq 1$, при котором областью значений функции q являются целые положительные числа при всех d и k из области их определения. Таким свойством обладает функция $m = (d - k) = 2$, которая принимает целые значения при d и k одинаковой чётности. Подставив найденное m в (4), получим $q = d - k - 1$:

Параметры a , b , q для серии $S_3(d; k)$ можно найти аналогично.

3. Маршрутизация в графах семейств с прямоугольным контуром: аналитические алгоритмы маршрутизации

Рассмотрим проблему организации маршрутизации в графах серий $S_i(d; k)$, $i \in \{2; 3; 4; 5\}$. Такие графы существуют при диаметрах $d \geq d_m$, а единичная образующая $S_1 = 1$ является удобной при реализации простых локальных и более сложных адаптивных алгоритмов маршрутизации в СтнК.

Пусть требуется передать сообщение из вершины-источника u в вершину-приёмник w . В силу симметрии циркулянтов это равносильно передаче сообщения из нуля в вершину $v = w - u \pmod{N}$. Поэтому достаточно решить задачу определения кратчайшего пути из нуля в любую вершину $v \in \{1; \dots; N - 1\}$ графа. При расчётах кратчайших путей в семействах графов можно ограничиться применением координат трёх (для серий $S_2(d; k)$ и $S_5(d; k)$) или четырёх (для серий $S_3(d; k)$ и $S_4(d; k)$) соседних нулей укладки на плоскости, в отличие от алгоритмов маршрутизации из [5, 10, 15, 16], основанных на применении координат соседних нулей укладки, но использующих при этом девять, семь или пять нулей. Общая схема алгоритмов маршрутизации такого типа в графах серий $S_i(d; k)$, $i \in \{2; 3; 4; 5\}$, включает определение координат вектора $v^* = (x_v; y_v)$, задающего путь из $(0; 0)$ в вершину v в прямоугольном контуре с параметрами a , b и q графа межмодульных соединений, затем вычисление разности вектора v^* и векторов, соответствующих четырём (трём) соседним нулям укладки, после чего выбирается путь с минимумом длины – суммы шагов по двум образующим.

В отличие от алгоритмов такого типа аналитические алгоритмы маршрутизации не требуют дополнительных затрат времени на формирование путей ко всем соседним нулям и выбора пути с наименьшей длиной. Сложность их разработки заключается в получении соотношений между параметрами контуров графов серий и номерами вершин-приёмников графов для определения границ областей принадлежности вершин к ближайшим соседним нулям.

Отметим, что масштабируемость семейств рассматриваемых серий влечёт при росте диаметра графов масштабируемость (повторяемость) структуры расположения вершин

графов по расстояниям – длинам их кратчайших путей от ближайших соседних нулевых вершин. На рис. 3 показан пример такой масштабируемости при росте диаметра для графов серии $S_5(d; k)$, $k = 1$. На рис. 3а приведены расстояния вершин графа $C(20; 1; 8)$ диаметра 3, на рис. 3б – расстояния вершин графа $C(35; 1; 10)$ диаметра 4. При построении расстояний вершин в графе использован волновой принцип поиска кратчайшего пути до вершины приёмника от ближайшего из трёх источников волн – нулей $(0; 0)$, a^* и b^* . Прямые диагональные линии определяют распространение фронтов волн минимальных расстояний от источников до вершин графа. Найденное свойство графов всех рассматриваемых серий использовано далее при разработке аналитических алгоритмов маршрутизации.

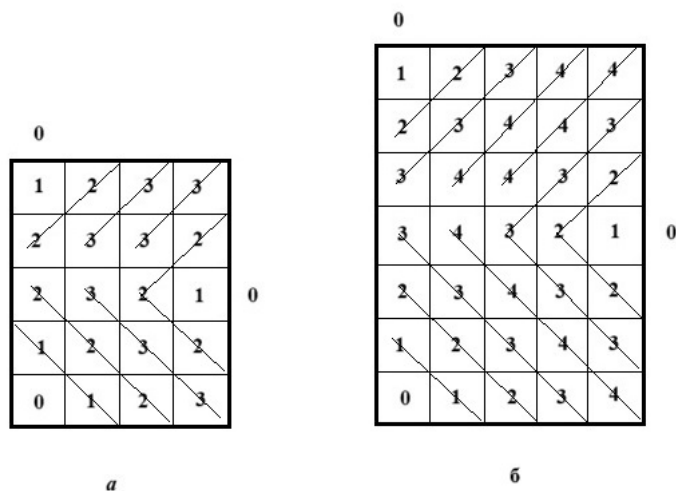


Рис. 3. Масштабируемость структуры расстояний вершин в графах серии $S_5(d; k)$ при диаметрах $d = 3$ (а) и $d = 4$ (б)

Fig. 3. Scalability of the structure of vertex distances in graphs of the series $S_5(d; k)$ with diameters $d = 3$ (a) and $d = 4$ (b)

Так как все семейства серий $S_i(d; k)$, $i \in \{2; 3; 4; 5\}$, являются масштабируемыми по диаметру с параметрами укладки графов, вычисляемыми по простым формулам, то для них были разработаны эффективные алгоритмы маршрутизации, основанные на применении этих параметров при расчётах кратчайших путей.

Рассмотрим для примера семейства графов из серии $S_5(d; k)$. Ниже дано описание аналитического алгоритма маршрутизации для графов семейств серии $S_5(d; k)$ при любых $d \geq d_m$, $k > 0$. Алгоритм требует минимума входных данных – задания графа, его диаметра и длин сторон его прямоугольного контура. Обозначим алгоритмы подобного типа как route-zero3, так как они основаны на поиске пути из приёмника к ближайшему из трёх соседних нулей укладки графов.

Алгоритм route-zero3 вычисления кратчайшего пути из нуля в любую вершину графа $C(N; 1; s_2) \in S_5(d; k)$

Даны: N , $s_1 = 1$, s_2 , d , a , b и номер вершины-приёмника $v \in \{1; \dots; N - 1\}$.

1: $x_v = v \bmod a$, $y_v = \lceil b/2 \rceil \lfloor v/a \rfloor - b \lfloor \lfloor v/a \rfloor / 2 \rfloor$,

2: Если $y_v < \lceil b/2 \rceil$ и $x_v + y_v \leq d$, то $== (0; 0)$ – вектор нуля, ближайшего к $v ==$

3: $\{p_1 = x_v, p_2 = y_v\}$,

4: иначе
 5: Если $y_v \geq \lceil b=2 \rceil$ и $y_v - x_v \geq b - d$, то $\mathbf{b} = (0; b)$ – вектор нуля, ближайшего к $\mathbf{v}$
 6: $\{p_1 = x_v, p_2 = y_v - b\}$,
 7: иначе $\{p_1 = x_v - a, p_2 = y_v - \lceil b=2 \rceil\}$; $\mathbf{a} = (a; \lceil b=2 \rceil)$ – вектор нуля, ближайшего к $\mathbf{v}$
 8: Конец алгоритма.

На выходе: кратчайший путь $\mathbf{P} = p_1 \mathbf{s}_1 + p_2 \mathbf{s}_2$ из нуля в $\mathbf{v}$.

Пример 1. Рассмотрим работу алгоритма route-zero3 для графа $\mathbf{C}(63; 1; 18) \in \mathbf{S}_5(d; k)$ с параметрами $d = 6; k = 3$. На входе имеем $\mathbf{N} = 63; \mathbf{s}_1 = 1; \mathbf{s}_2 = 18; a = 9; b = 7$ и $d = 6$.

(1) Найти кратчайший путь из нуля в вершину $\mathbf{v} = 56$.

На шаге 1 находим $x_v = 2$ и $y_v = 3$.

На шаге 2 определяем $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$. Вектор кратчайшего пути в вершину $\mathbf{v} = 56$ есть $\mathbf{P} = (2; 3)$.

(2) Найти кратчайший путь из нуля в вершину $\mathbf{v} = 12$.

На шаге 1 находим $x_v = 3$ и $y_v = 4$.

На шаге 5 определяем $p_1 = 3$ и $p_2 = -3$. Вектор кратчайшего пути в вершину $\mathbf{v} = 12$ есть $\mathbf{P} = (3; -3)$.

(3) Найти кратчайший путь из нуля в вершину $\mathbf{v} = 14$.

На шаге 1 находим $x_v = 5$ и $y_v = 4$.

На шаге 7 определяем $p_1 = -4$ и $p_2 = 1$. Вектор кратчайшего пути в вершину $\mathbf{v} = 14$ есть $\mathbf{P} = (-4; 1)$.

Ниже описан алгоритм маршрутизации (алгоритм 2) для графов серии $\mathbf{S}_2(d; k)$, выполнимый при любых $d \geq d_m$ и $k \geq 0$. В качестве ближайших соседних нулей для вершины приёмника рассмотрены нули $(0; 0)$, $\mathbf{a}^* = (a; \lceil b=2 \rceil)$, $\mathbf{b} = (0; b)$. Алгоритм 2 отличается от вышеописанного алгоритма для серии $\mathbf{S}_5(d; k)$ изменением одного из условий на шаге 2.

Алгоритм 2 route-zero3 вычисления кратчайшего пути из нуля в любую вершину графа $\mathbf{C}(\mathbf{N}; 1; \mathbf{s}_2) \in \mathbf{S}_2(d; k)$

Даны: $\mathbf{N}$, $\mathbf{s}_1 = 1$, $\mathbf{s}_2$, d , a , b и номер вершины-приёмника $\mathbf{v} \in \{1; \dots; \mathbf{N} - 1\}$.

1: $x_v = \mathbf{v} \bmod a$, $y_v = \lceil b=2 \rceil \lfloor v=a \rfloor - b \lfloor v=a \rfloor$,

2: Если $y_v < \lceil b=2 \rceil$ и $x_v + y_v < d$, то

3: $\{p_1 = x_v, p_2 = y_v\}$,

4: иначе

5: Если $y_v \geq \lceil b=2 \rceil$ и $y_v - x_v \geq b - d$, то

6: $\{p_1 = x_v, p_2 = y_v - b\}$,

7: иначе $\{p_1 = x_v - a, p_2 = y_v - \lceil b=2 \rceil\}$.

8: Конец алгоритма.

Аналогично могут быть построены аналитические алгоритмы поиска кратчайших путей в графах серий $\mathbf{S}_3(d; k)$ и $\mathbf{S}_4(d; k)$.

4. Тестирование производительности алгоритма маршрутизации

Для проверки работоспособности и измерения производительности новых алгоритмов маршрутизации было проведено тестирование в симуляторе сетей на кристалле Noxim [13, 14]. В симулятор была добавлена возможность создания оптимальных циркулянтов с прямоугольным L-контуром. Для тестирования был взят граф $C(63; 1; 18) \in S_5(d; k)$ из примера 1. Общие параметры симуляций приведены в табл. 2.

Табл. 2. Общие параметры симуляций в Noxim

Table 2. General parameters for simulations in Noxim

Параметр	Значение
Серия графа	$S_5(d; k)$
d	6
k	3
Объём входного буфера маршрутизатора	4 флита
Размер флита	32 бит
Размер пакета	8 флитов
Количество виртуальных каналов	4
Общее время симуляции	10000 циклов
Время разогрева сети	1000 циклов

В сети на кристалле были реализованы четыре алгоритма маршрутизации для циркулянтов: новый алгоритм route-zero3, классический алгоритм Дейкстры, алгоритм маршрутизации с виртуальными координатами [17] и алгоритм обхода по часовой стрелке [7]. Первые три алгоритма являются оптимальными, так как вычисляют кратчайший путь до узла-приёмника; алгоритм обхода по часовой стрелке не оптимален, так как допускает построение не кратчайшего пути до приёмника.

Работа каждого алгоритма была проверена при изменении скорости инъекции пакетов от 0.63 до 6.3 пакетов/цикл (от 0.01 до 0.1 пакетов/цикл в каждом узле). Использованы четыре профиля трафика, встроенные в Noxim: random uniform, bit-reverse, butterfly, shuffle [18]. Сравнение проведено по трём метрическим показателям: средней задержке в сети (циклов), максимальной задержке в сети (циклов) и пропускной способности сети (пакетов/цикл). Основные результаты моделирования представлены на рис. 4–6.

Результаты тестирования показали, что оптимальные алгоритмы маршрутизации обеспечивают похожие показатели по всем рассматриваемым метрикам. В случае применения неоптимального алгоритма обхода по часовой стрелке улучшение задержки, фиксируемое в некоторых сценариях, не является показателем его эффективности. Это следствие деградации пропускной способности: высокая локальная задержка многих пакетов приводит к их отбрасыванию или бесконечному ожиданию, и в статистику по задержке попадают только лучшие значения, что искажает общую картину. По максимальной задержке предложенный алгоритм route-zero3 почти всегда является лучшим. Средняя задержка примерно одинакова при использовании всех трёх оптимальных алгоритмов. По пропускной способности route-zero3 имеет преимущество при трафике shuffle. Аналитический алгоритм 2, применимый для другой серии циркулянтов с прямоугольным контуром укладки, в целом идентичен алгоритму route-zero3 и, соответственно, имеет такие же характеристики при моделировании.

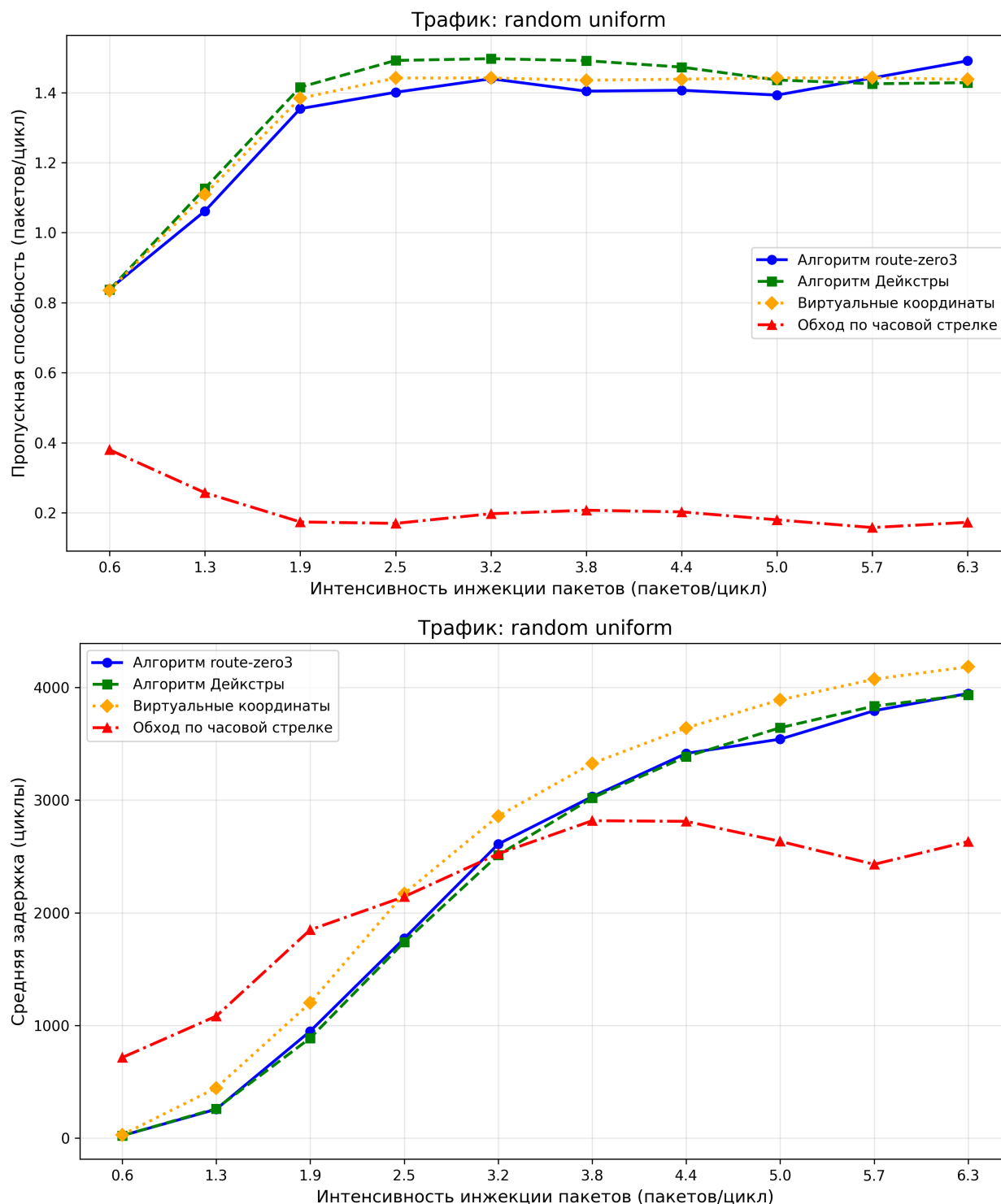


Рис. 4. Пропускная способность сети при трафике random uniform (слева), средняя задержка в сети при трафике random uniform (справа)

Fig. 4. Network throughput with random uniform traffic (on the left), average network latency with random uniform traffic (on the right)

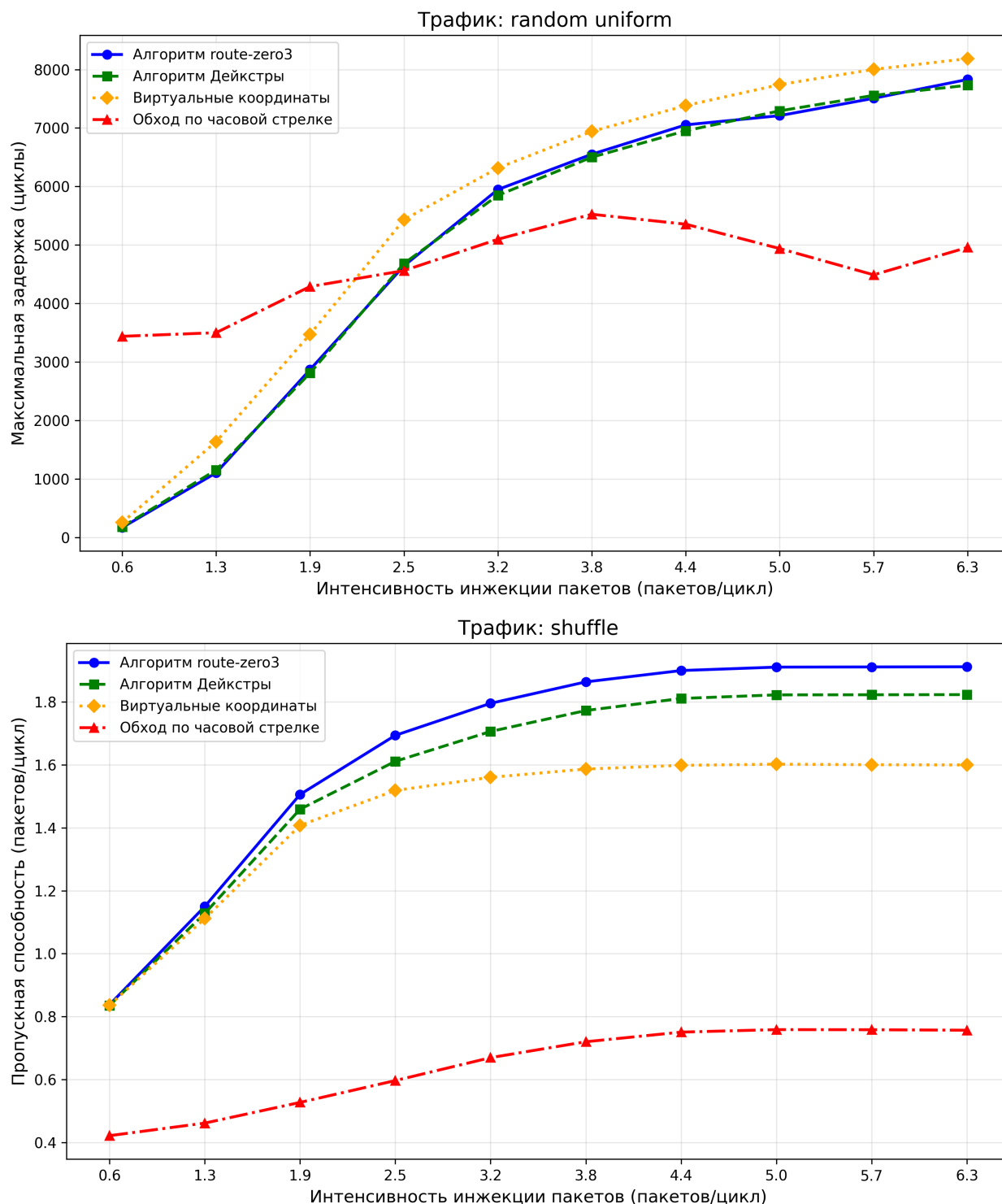


Рис. 5. Максимальная задержка в сети при трафике random uniform (слева), пропускная способность сети при трафике shuffle (справа)

Fig. 5. Maximum network latency with random uniform traffic (on the left), network throughput with shuffle traffic (on the right)

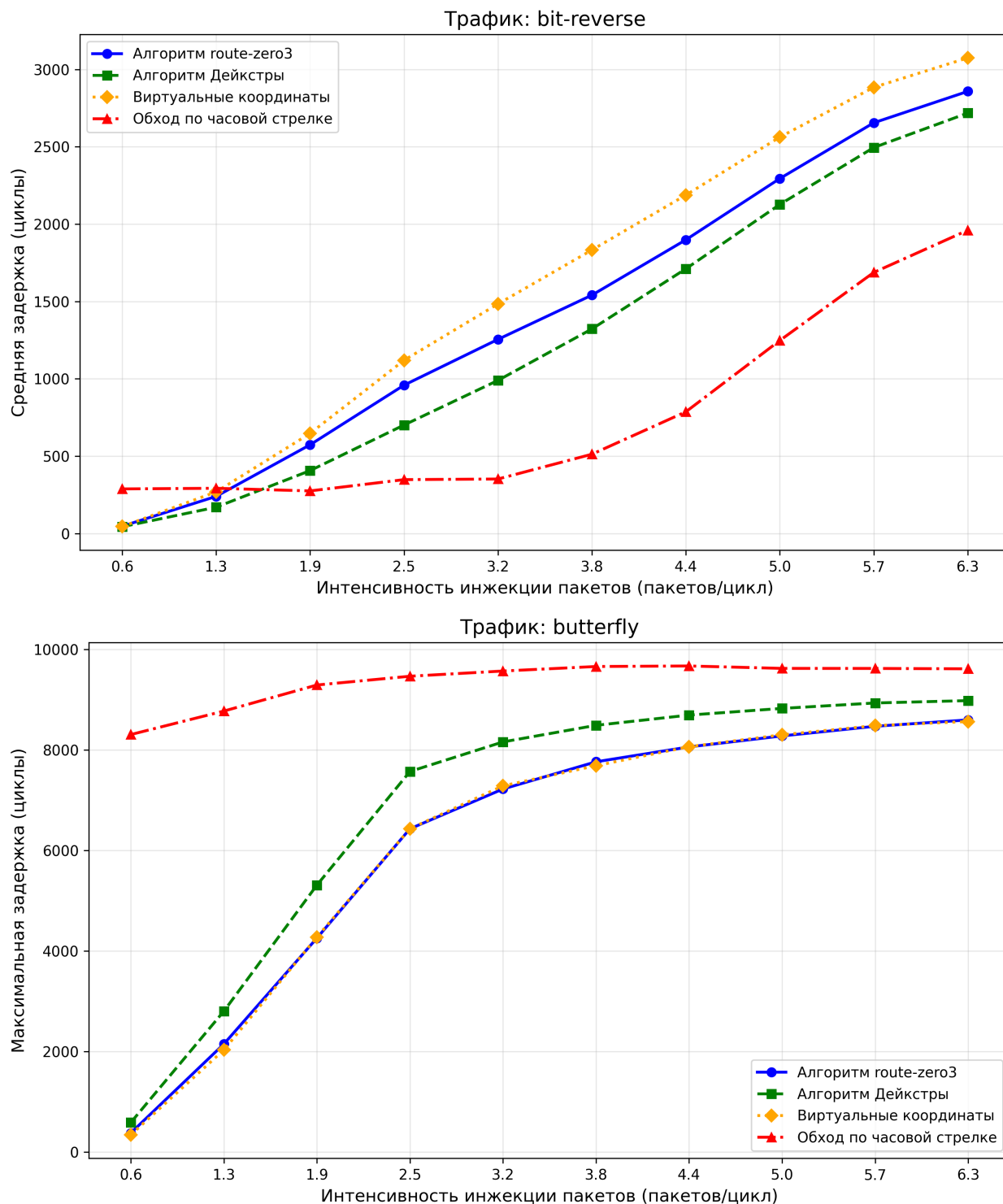


Рис. 6. Средняя задержка в сети при трафике bit-reverse (слева), максимальная задержка в сети при трафике butterfly (справа)

Fig. 6. Average network latency for bit-reverse traffic (on the left), maximum network latency with butterfly traffic (on the right)

Следует также отметить, что предложенные алгоритмы `route-zero3` позволяют находить множество оптимальных маршрутов одинаковой длины, отличающихся порядком прохождения по двум образующим циркулянтного графа. При реализации маршрутизации в сетях на кристалле с циркулянтной топологией указанное преимущество даёт возможность выбора наименее нагруженного маршрута и обхода при отказах узлов путём перехода по альтернативной образующей, что способствует увеличению пропускной способности и отказоустойчивости сети [17].

Заключение

Проведённое исследование моделей сетей на кристалле, где были реализованы предлагаемые алгоритмы, показало, что новые аналитические алгоритмы маршрутизации в целом не уступают другим оптимальным алгоритмам, а по максимальной задержке являются лучшими. Главным их преимуществом является простота реализации: алгоритм Дейкстры в принципе избыточно реализовать аппаратно, и он используется только для синтетического тестирования; алгоритм с использованием виртуальных координат требует использования памяти и значительного количества вычислительных ресурсов для начального расчёта позиций всех узлов и хранения этой информации. Предложенные аналитические алгоритмы используют минимальное количество ресурсов памяти, являются аппаратно реализуемыми и требуют меньших вычислительных затрат, не уступая при этом по эффективности другим оптимальным алгоритмам маршрутизации. Ещё одно преимущество новых алгоритмов маршрутизации заключается в их масштабируемости, то есть возможности простой параметрической настройки алгоритма без изменения его структуры при применении для всего множества топологий сетей, входящих в серию семейств.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Hwang F.K.* A survey on multi-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2003. V. 299, Nos 1–3. P. 107–121. [https://doi.org/10.1016/s0304-3975\(01\)00341-3](https://doi.org/10.1016/s0304-3975(01)00341-3).
2. *Liu H., Li X., Wang S.* Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // *Mathematics*. 2022. V. 10, No 21. Art. 4016. <https://doi.org/10.3390/math10214016>.
3. *Pérez-Rosés H., Bras-Amorós M., Seradilla-Merintero J.M.* Greedy routing in circulant networks // *Graphs Combinatorics*. 2022. V. 38, No 3. Art. 86. <https://doi.org/10.1007/s00373-022-02489-9>.
4. *Huang X., Ramos A.F., Deng Y.* Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // *J. Supercomput.* 2022. V. 78, No 11. P. 13491–13510. <https://doi.org/10.1007/s11227-022-04396-5>.
5. *Martinez C., Vallejo E., Beivide R., Izu C., Moretó M.* Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors // *Int. J. Parallel Program.* 2006. V. 34, No 3. P. 193–211. <https://doi.org/10.1007/s10766-006-0014-1>.

6. *Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., Chang J.-M.* Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks // *IEEE Trans. Network Sci. Eng.* 2022. V. 9, No 2. P. 932–946. <https://doi.org/10.1109/TNSE.2022.3140329>.
7. *Romanov A.Y.* Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies // *Heliyon*. 2019. V. 5, No 4. Art. e01516. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01516>.
8. *Монахов О.Г., Монахова Э.А.* Масштабируемый подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтных сетей степени четыре // *Дискретн. анализ и исслед. опер.* 2025. Т. 32, № 2. С. 88–106. <https://doi.org/10.33048/daio.2025.32.808>.
9. *Deng Y., Guo M., Ramos A.F., Huang X., Xu Z., Liu W.* Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement // *J. Supercomput.* 2020. V. 76, No 12. P. 9558–9584. <https://doi.org/10.1007/s11227-020-03216-y>.
10. *Camarero C., Martinez C., Beivide R.* L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks // *IEEE Trans. Comput.* 2013. V. 62, No 7. P. 1362–1375. <https://doi.org/10.1109/TC.2012.77>.
11. *Монахова Э.А.* Оптимальные циркулянтные графы с прямоугольным контуром укладки на плоскости // *Сиб. электрон. матем. изв.* 2025. Т. 22, № 2. С. 1538–1551. <https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.093>.
12. *Нестеренко Б.Б., Новотарский М.А.* Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // *Искусств. интеллект*. 2009. Т. 3. С. 132–138.
13. *Catania V., Mineo A., Monteleone S., Palesi M., Patti D.* Noxim: An open, extensible and cycle-accurate network on chip simulator // *Proc. IEEE 26th Int. Conf. on Application-Specific Systems, Architectures and Processors (ASAP)*. IEEE, 2015. P. 162–163. <https://doi.org/10.1109/ASAP.2015.7245728>.
14. *Catania V., Mineo A., Monteleone S., Palesi M., Patti D.* Cycle-accurate network on chip simulation with Noxim // *ACM Trans. Model. Comput. Simul.* 2017. V. 27, No 1. Art. 4. <https://doi.org/10.1145/2953878>.
15. *Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J.* A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *Jia X., Wu J., He Y. (Eds.) Mobile Ad-hoc and Sensor Networks. MSN 2005. Ser.: Lecture Notes in Computer Science*. V. 3794. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 308–316. <https://doi.org/10.1007/11599463.31>.
16. *Jha P.K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Interconnect. Networks*. 2013. V. 14, No 1. Art. 1350002. <https://doi.org/10.1142/s0219265913500023>.
17. *Сухов А.М., Романов А.Ю., Глушак Е.В.* Маршрутизация в циркулянтных графах на основе виртуальной координатной системы // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. 2023. Т. 165, кн. 3. С. 282–293. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.282-293>.
18. *Malikov M.A., Romanov A.Y.* Traffic patterns in networks-on-chip: A survey // *IEEE Access*. 2025. V. 13. P. 148803–148815. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3601971>.

References

1. Hwang F.K. A survey on multi-loop networks. *Theor. Comput. Sci.*, 2003, vol. 299, nos. 1–3, pp. 107–121. [https://doi.org/10.1016/s0304-3975\(01\)00341-3](https://doi.org/10.1016/s0304-3975(01)00341-3).
2. Liu H., Li X., Wang S. Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 21, art. 4016. <https://doi.org/10.3390/math10214016>.
3. Pérez-Rosés H., Bras-Amorós M., Seradilla-Merintero J.M. Greedy routing in circulant networks. *Graphs Combinatorics*, 2022, vol. 38, no. 3, art. 86. <https://doi.org/10.1007/s00373-022-02489-9>.
4. Huang X., Ramos A.F., Deng Y. Optimal circulant graphs as low-latency network topologies. *J. Supercomput.*, 2022, vol. 78, no. 11, pp. 13491–13510. <https://doi.org/10.1007/s11227-022-04396-5>.
5. Martinez C., Vallejo E., Beivide R., Izu C., Moretó M. Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors. *Int. J. Parallel Program.*, 2006, vol. 34, no. 3, pp. 193–211. <https://doi.org/10.1007/s10766-006-0014-1>.
6. Pai K.-J., Yang J.-S., Chen G.-Y., Chang J.-M. Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks. *IEEE Trans. Network Sci. Eng.*, 2022, vol. 9, no. 2, pp. 932–946. <https://doi.org/10.1109/TNSE.2022.3140329>.
7. Romanov A.Y. Development of routing algorithms in networks-on-chip based on ring circulant topologies. *Heliyon*, 2019, vol. 5, no. 4, art. e01516. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2019.e01516>.
8. Monakhov O.G., Monakhova E.A. A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks. *Discrete Anal. Oper. Res.*, 2025, vol. 32, no. 2, pp. 88–106. <https://doi.org/10.33048/daio.2025.32.808>. (In Russian)
9. Deng Y., Guo M., Ramos A.F., Huang X., Xu Z., Liu W. Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement. *J. Supercomput.*, 2020, vol. 76, no. 12, pp. 9558–9584. <https://doi.org/10.1007/s11227-020-03216-y>.
10. Camarero C., Martinez C., Beivide R. L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks. *IEEE Trans. Comput.*, 2013, vol. 62, no. 7, pp. 1362–1375. <https://doi.org/10.1109/TC.2012.77>.
11. Monakhova E.A. Degree four optimal circulant graphs with rectangular L-shapes. *Sib. Electron. Math. Rep.*, 2025, vol. 22, no. 2, pp. 1538–1551. <https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.093>. (In Russian)
12. Nesterenko B.B., Novotarski M.A. Cellular neuron networks on circulant graphs. *Artif. Intell.*, 2009, vol. 3, pp. 132–138. (In Russian)
13. Catania V., Mineo A., Monteleone S., Palesi M., Patti D. Noxim: An open, extensible and cycle-accurate network on chip simulator. *Proc. 2015 IEEE 26th Int. Conf. on Application-Specific Systems, Architectures and Processors (ASAP)*. IEEE, 2015, pp. 162–163. <https://doi.org/10.1109/ASAP.2015.7245728>.
14. Catania V., Mineo A., Monteleone S., Palesi M., Patti D. Cycle-accurate network on chip simulation with Noxim. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 2017, vol. 27, no. 1, art. 4. <https://doi.org/10.1145/2953878>.

15. Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J. A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks. In: Jia X., Wu J., He Y. (Eds.) *Mobile Ad-hoc and Sensor Networks. MSN 2005*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 3794. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005, pp. 308–316. <https://doi.org/10.1007/11599463.31>.
16. Jha P.K. Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants. *J. Interconnect. Networks*, 2013, vol. 14, no. 1, art. 1350002. <https://doi.org/10.1142/s0219265913500023>.
17. Sukhov A.M., Romanov A.Y., Glushak E.V. Routing in circulant graphs based on a virtual coordinate system. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 3, pp. 282–293. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.3.282-293>. (In Russian)
18. Malikov M.A., Romanov A.Y. Traffic patterns in networks-on-chip: A survey. *IEEE Access*, 2025, vol. 13, pp. 148803–148815. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3601971>.

Информация об авторах

Михаил Алексеевич Маликов, приглашенный преподаватель, стажер-исследователь, Национальный исследовательский институт «Высшая школа экономики»

E-mail: mmalikov@hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-7841-1968>

Эмилия Анатольевна Монахова, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6814-4655>

Эдвард Рамизович Рзаев, аспирант, стажер-исследователь, Национальный исследовательский институт «Высшая школа экономики»

E-mail: erzaev@hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3504-7429>

Александр Юрьевич Романов, доктор технических наук, доцент, профессор, ведущий научный сотрудник, Национальный исследовательский институт «Высшая школа экономики»

E-mail: a.romanov@hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9410-9431>

Author Information

Mikhail A. Malikov, Visiting Lecturer, Research Assistant, HSE University

E-mail: mmalikov@hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-7841-1968>

Emilia A. Monakhova, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor, Leading Researcher, Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: emilia@rav.sccc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6814-4655>

Edward R. Rzaev, Postgraduate Student, Research Assistant, HSE University

E-mail: erzaev@hse.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3504-7429>

Aleksandr Y. Romanov, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Leading Researcher, HSE University

E-mail: *a.romanov@hse.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9410-9431>

Поступила в редакцию 18.03.2026

Принята к публикации 30.04.2026

Received March 18, 2026

Accepted April 30, 2026