


ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.253-268>**Методика оценки несущей способности элементов
композитных конструкций на основе модели
деструкции материала****Р.А. Каюмов , А.М. Шакирова, И.З. Мухамедова,
А.М. Сулейманов***Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия* *kayumovra@yandex.ru***Аннотация**

Рассмотрена задача об определении предельной нагрузки для композитных пластин. Необходимость проведенного исследования вызвана рядом причин. Во-первых, композит имеет различные прочностные характеристики на растяжение и сжатие, причем они различны в разных направлениях. Кроме того, прочность на сдвиг не связана с прочностью на растяжение или сжатие. Во-вторых, для композитных конструкций не применима теория предельного равновесия, которая использует модель идеально-пластического тела. В-третьих, известные подходы (например, метод деградаций в программном комплексе ANSYS) обычно приводят к появлению концентрации напряжений, что сильно занижает несущую способность. Кроме того, некоторые методы не всегда позволяют найти предельную нагрузку.

Предложена методика, основанная на использовании модели, которая исходит из представления, что деструкция материала уменьшает его жесткостные характеристики. Эта модель является альтернативой классическим подходам определения предельной нагрузки. Считается, что получаемая диаграмма «напряжение – деформация» гладкая, но имеет экстремум. При этом ее ниспадающая ветвь имеет горизонтальную асимптоту. Это позволяет избежать появления концентрации напряжений и всегда получать предельную нагрузку. При этом какие-либо критерии прочности не используются. Апробация предложенного подхода проведена численно методом конечных элементов (МКЭ) в двумерной постановке на примере расчета пластины с болтовым соединением при кинематическом нагружении. Для решения нелинейной задачи использованы два подхода. Первый основан на методе последовательных догружений, второй – на методе последовательных приближений. Проведены вычислительные эксперименты для анализа влияния параметров численных методов, геометрических и механических характеристик болтового соединения на его несущую способность.

Ключевые слова: предельная нагрузка, нелинейно-упругие соотношения, конечно-элементная модель, деформации, метод секущих жесткостей, метод последовательных догружений

Благодарности. Работа выполнена за счет представленного в 2025 г. Фондом науки и технологий Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и поисковых исследований в научных и образовательных организациях, предприятиях и организациях реального сектора экономики Республики Татарстан.

Для цитирования: *Каюмов Р.А., Шакирова А.М., Мухамедова И.З., Сулейманов А.М.* Методика оценки несущей способности элементов композитных конструкций на основе модели деструкции материала // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2026. Т. 168, кн. 2. С. 253–268. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.253-268>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.253-268>

A method for bearing capacity evaluation of composite structural elements using a material damage model

R.A. Kayumov , A.M. Shakirova, I.Z. Mukhamedova,
A.M. Suleymanov

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russia

 kayumovra@yandex.ru

Abstract

This article examines the problem of determining the ultimate load of composite plates, which is a pressing research question due to a number of reasons. First, composite materials have different tensile and compressive strength characteristics, both of which vary with direction. It is important that shear strength is not directly related to tensile or compressive strength. Second, the theory of limit equilibrium, relying on the model of an ideal plastic body, is not applicable to composite structures. Third, existing approaches (such as ANSYS-based simulation of material degradation) often lead to stress concentrations and therefore significantly underestimate the actual bearing capacity. Finally, some methods may fail to measure the ultimate load.

The approach proposed here employs a damage model in which material degradation is accompanied by a reduction in stiffness. It thus represents an alternative to traditional ultimate-load prediction methods. The resulting stress–strain curve is assumed to be smooth, but it has an extremum. The descending branch has a horizontal asymptote. The method eliminates stress concentrations and provides a robust estimate of the ultimate load, without requiring any strength criteria. It was validated numerically by a two-dimensional finite element analysis of a plate with the bolted joint under kinematic loading. The nonlinear problem was solved using two techniques, one based on successive loadings and the other on successive approximations. Numerical experiments were carried out to investigate how the bearing capacity of the bolted joint depends on the parameters of numerical methods and its geometric and mechanical characteristics.

Keywords: ultimate load, nonlinear elastic relations, finite element model, deformations, method of secant stiffness, method of successive loadings

Acknowledgments. This study was supported by the Science and Technology Foundation of the Republic of Tatarstan under the project (2025) for fundamental and exploratory research carried out at scientific and educational organizations, enterprises, and real-economy companies of the Republic of Tatarstan.

For citation: Kayumov R.A., Shakirova A.M., Mukhamedova I.Z., Suleymanov A.M. A method for bearing capacity evaluation of composite structural elements using a material damage model. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2026, vol. 168, no. 2, pp. 253–268. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2026.2.253-268>. (In Russian)

Введение

В последние десятилетия была и остается актуальной проблема анализа конструкций, изготовленных комбинацией композитных и металлических элементов. Как отмечено в [1], на сегодняшний день прогресс в авиационной, космической, автомобильной, судостроительной промышленности и ряде других отраслей в значительной степени определяется все более масштабной заменой традиционных металлических изделий конструкциями из композиционных материалов. Одним из самых сложных остается вопрос соединения деталей, изготовленных из полимерных композитных материалов (ПКМ), с металлическими частями конструкций. Обычно для этого используются болтовые соединения. При этом основная проблема сводится к оценке несущей способности этих соединений при передаче нагрузки через металлические элементы. Стандартные подходы, разработанные для металлических конструкций, при этом не могут дать хорошую оценку предельных нагрузок. Это вызвано, в частности, тем, что материал композита не изотропен. Кроме того, иногда при соединении двух композитных пластин используются клей, обжим через гайки и другие способы усиления соединений.

Сегодня существует ряд подходов, позволяющих определять предельную нагрузку, но все они имеют свои недостатки. Обычно эти подходы используются в пакетах программ, основанных на методе конечных элементов (МКЭ). Например, применение метода допустимых напряжений приводит иногда к очень заниженным оценкам несущей способности, поскольку разрушением конструкции считается выход из строя даже одного малого конечного элемента. При этом для композита приходится использовать какие-либо теории прочности, число которых также достаточно велико, что создает проблему их выбора.

Теория предельного равновесия, основанная на модели идеально-пластического тела, дает слишком завышенные значения предельной нагрузки. Здесь также встает вопрос о выборе критерия текучести.

Поэтому в некоторых пакетах программ используются другие способы. Например, в пакет ANSYS заложен метод деградаций. Согласно этому методу в элементе, в котором достигнуто предельное значение уровня напряженности (в соответствии с каким-либо критерием прочности), упругие характеристики уменьшаются. Степень уменьшения должна выбираться расчетчиком из каких-либо физических соображений, а также из условия обеспечения появления предельной нагрузки (то есть нагрузки, после которой дальнейшая деформация требует меньшей величины этой нагрузки). У этого подхода также есть недостатки. Во-первых, слишком сильное уменьшение жесткостных характеристик конечных элементов (КЭ) приводит к появлению большой концентрации напряжений около них.

Вследствие этого предельная нагрузка может получиться значительно меньше действительной. Во-вторых, если выбирать коэффициент уменьшения жесткостных характеристик недостаточно большим, то в зависимости «нагрузка – перемещение» исчезает точка экстремума, поэтому предельную нагрузку определить невозможно. В результате не удастся выбрать коэффициент уменьшения жесткости без сравнения с экспериментальными данными.

Трудности оценки несущей способности соединений элементов, изготовленных из металла и ПКМ, увеличиваются и в связи с тем, что обычные металлические болтовые соединения заменяются более сложными. Например, этому вопросу посвящена работа [1], в которой разработаны соединения, которые не нарушают целостность волокон основы ПКМ и, как следствие, не изменяют его механические характеристики. В [1] предложен вариант решения задачи с применением комбинированного соединения, в котором в зоне соединения металлических частей конструкции с элементами из ПКМ устанавливаются крепежные элементы особой формы. Они внедряются в пакет препрега ПКМ и подвергаются совместной полимеризации. В итоге волокна основы в зоне соединения сохраняют свою целостность, а крепежные элементы оказываются заформованными в тело композита.

В [2] рассматривается метод определения вида разрушения и вычисления величины разрушающей нагрузки в слоистых композитных пластин с загруженным через штифт с отверстием. Методом конечных элементов вычисляется распределение напряжений вокруг отверстия под болт. Для определения вида разрушения и величины разрушающей силы используется характеристическая кривая, предложенная Чангом, совместно с различными критериями разрушения. Результаты вычисления сравниваются с доступными экспериментальными данными. Проанализировано влияние критериев Цая – Хилла, Аззи – Цая – Хилла, Хофмана и Цая – Ву на значение разрушающей нагрузки и даны рекомендации по использованию этих критериев в практических расчетах. Одной из проблем является обеспечение прочности и долговечности конструкций при увеличении уровней эксплуатационного нагружения при одновременном снижении материалоемкости изделий. Например, основной целью работы¹ является исследование возможности эксплуатации изделий при применении комбинации «композит – металл». Для проведения сравнительного анализа было рассмотрено два различных способа соединения металлического днища и обечайки, состоящей из композиционного материала: самозаклинивающее соединение и резьбовое соединение.

В [3] проведено экспериментальное исследование прочности образцов двухсрезного болтового соединения, выполненного на основе углепластика. Рассмотрены образцы с разными схемами укладки, диаметрами отверстий, геометрическими параметрами образцов и усилиями затяжки болтов. На основе модели прогрессирующего разрушения проведена расчетная оценка разрушающей нагрузки и типа разрушения двухсрезных болтовых соединений в слоистых композитах. Модель прогрессирующего разрушения реализована в трехмерной постановке и включает в себя анализ напряженного состояния, анализ

¹ Трушин В.Р., Кольга В.В. Анализ возможности применения шпоночно-болтового соединения материалов «композит-металл» в ракетной технике // Решетневские чтения. Материалы XXVII Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. памяти генерального конструктора ракетно-космических систем акад. М.Ф. Решетнева. В 2-х ч. Красноярск: СибГУ им. акад. М.Ф. Решетнева, 2023. С. 55–57.

разрушений и деградацию свойств материала в соответствии с обнаруженным видом разрушения. Расчет напряженного состояния выполнен МКЭ в трехмерной постановке с учетом контактного взаимодействия болта с отверстием, наличия осевого натяга и трения в контактных парах. При анализе процесса разрушения использован критерий разрушения Хашина для задачи в объемной постановке, позволяющий идентифицировать различные механизмы разрушения композита, такие как растрескивание матрицы при растяжении и сжатии, разрушение волокна при растяжении и сжатии, отрыв матрицы от волокна посредством сдвига и расслоение при растяжении и сжатии. Оценка разрушающей нагрузки проведена на основе диаграммы «нагрузка – перемещение». Тип разрушения спрогнозирован по характерному распределению поврежденных элементов в области нагруженного отверстия. Эффективность использования модели прогрессирующего разрушения для прогнозирования разрушающей нагрузки и типа разрушения болтового соединения подтверждена сравнением результатов численного исследования с данными эксперимента.

В [4] приведены параметрические исследования коэффициентов концентрации напряжений в болтовых металлокомпозитных соединениях в зависимости от толщины композита и жесткости болтов, скрепляющих соединение. Рассмотрены односрезные и двухсрезные соединения с трехмерным моделированием контактного взаимодействия между металлическим болтом и углепластиком.

В [5] для проведения анализа прочности зон соединений типа «композит – металл», реализуемых с применением механического крепежа, учтены факторы, определяющие местную прочность этих зон: условия механического контакта тела, головки и шляпки болта с соединяемыми элементами, контакт соединяемых элементов друг с другом, а также эффекты трения. Учет указанных факторов реализован на основании применения подхода «глобально-локального моделирования» для построения расчетных трехмерных моделей зон соединений.

В работах, в частности в статье², рассмотрены основные методы соединения композитных материалов с металлами, включая болтовые, заклепочные, адгезивные и гибридные соединения. Проанализированы их преимущества и недостатки, а также области применения в современных инженерных конструкциях. В других работах, например в работе³, отмечено, что основным недостатком таких соединений является высокая концентрация напряжений, вызванных крепежным отверстием, из-за характерной анизотропии свойств ПКМ, сложной механики деформирования и разрушения. Целью исследования является разработка методики для оценки прочности металлокомпозитных соединений. В статье «сформирована и исследована методика расчета методом конечных элементов, которая основана на применении характеристических кривых Чанга к оценке прочности металлокомпозитных соединений, в качестве критериев повреждения в структурных элементах композита используются критерии Пинхо и Хашина. Показано, что данные критерии являются принципиально разными и что результаты расчета, полученные

²Сабанов С.Л., Меньшиков И.А. Способы соединения композитных материалов с металлом: преимущества, недостатки и перспективы // Сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. «Современные технологии в нефтегазовом деле – 2025». Уфа: УГНТУ, 2025. С. 782–786.

³Павлов М.В., Свиридов А.А. Методика оценки прочности металлокомпозитных соединений с применением характеристических кривых // Тез. докл. XVIII Всерос. конф. молодых ученых «Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии». Новосибирск – Шерегеш, 10–18 марта 2024 г. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2024. С. 133–135.

по критерию Пинхо, более достоверны по сравнению с данными, полученными по критерию Хашина».

В данной статье предлагается методика, по которой материал считается нелинейно-упругим, диаграмма «напряжение – деформация» – гладкой, но имеющей экстремум. При этом ниспадающая ветвь диаграммы имеет горизонтальную асимптоту. Это позволяет избежать появления концентрации напряжений и всегда получать предельную нагрузку. Следует также отметить, что никакие критерии прочности при этом не используются. Темам, близким к обсуждаемой в данной работе проблеме, посвящены также и другие исследования⁴ (см. [6–8]). Некоторые элементы используемых здесь идей отражены в работах авторов [9–11].

1. Определяющие соотношения

Для определения предельной нагрузки будем использовать нелинейную модель поведения материала, но с диаграммой, имеющей экстремум, как это показано на рис. 1. Считаем, что появление ниспадающей части диаграммы вызвано деструкцией материала, которая приводит к уменьшению его жесткостных характеристик. Принято, что параметры деструкции, вызывающие уменьшение жесткости композита, зависят от деформаций. Задача решается методом секущих жесткостей. В отличие от метода Ньютона – Рафсона (метода касательных жесткостей) он позволяет легко проходить экстремум диаграммы, если использовать кинематическое нагружение. Решив задачу для ряда увеличивающихся значений перемещений, можно получить диаграмму «нагрузка – перемещение» и найти предельное значение P^* (см. рис. 1).

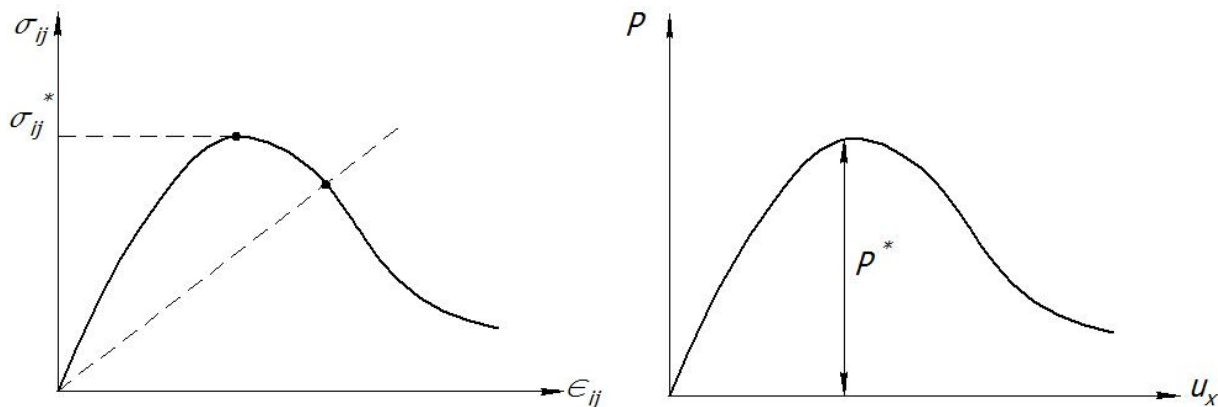


Рис. 1. Нелинейная модель материала и зависимость силы растяжения от перемещений болта

Fig. 1. Nonlinear material model and tensile force dependence on the bolt displacements

Аналогично случаю линейно-упругой задачи нелинейные соотношения для материала примем в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_1^{nel}(\sigma_{11})} - \frac{\sigma_{22}}{E_1^{nel}(\sigma_{11})} \nu_{12}^{nel}(\sigma_{11}); \\ \epsilon_{22} &= -\frac{\sigma_{11}}{E_1^{nel}(\sigma_{11})} \nu_{12}^{nel}(\sigma_{11}) + \frac{\sigma_{22}}{E_2^{nel}(\sigma_{22})}; \quad \epsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}^{nel}(\sigma_{12})}; \end{aligned} \quad (1)$$

⁴Мирсаятов Илшат Т., Апхадзе Г.Т., Симаков В.Д. Численный анализ нелинейного поведения железобетонных конструкций на твердотельных моделях: монография. Казань: КГАСУ, 2023. 208 с.

где σ_{ij} , ϵ_{ij} – напряжения, ϵ_{ij} , ϵ_{ij} – деформации, ϵ_{ij}^{nel} – нелинейные коэффициенты поперечной деформации. По аналогии с линейной задачей будем использовать следующие термины: E_i^{nel} – нелинейные модули упругости, G_{ij}^{nel} – нелинейные модули сдвига.

Для обеспечения условия симметрии упругих соотношений коэффициенты поперечной деформации примем в виде

$$\epsilon_{12}^{nel}(\sigma_{11}) = \frac{E_1^{nel}(\sigma_{11})}{E_1} \epsilon_{12}; \quad \epsilon_{21}^{nel}(\sigma_{22}) = \frac{E_2^{nel}(\sigma_{22})}{E_1} \epsilon_{12}; \quad (2)$$

Из (1) и (2) могут быть получены следующие соотношения для нормальных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left[E_1^{nel}(\sigma_{11}) \sigma_{11} + \epsilon_{12}^{nel}(\sigma_{11}) E_2^{nel}(\sigma_{22}) \sigma_{22} \right] \frac{1}{1 - \frac{2}{12} E_1^{nel}(\sigma_{11}) E_2^{nel}(\sigma_{22}) = E_1^2}; \\ \sigma_{22} &= \left[\epsilon_{12}^{nel}(\sigma_{11}) E_2^{nel}(\sigma_{22}) \sigma_{11} + E_2^{nel}(\sigma_{22}) \sigma_{22} \right] \frac{1}{1 - \frac{2}{12} E_1^{nel}(\sigma_{11}) E_2^{nel}(\sigma_{22}) = E_1^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

Согласно диаграмме, приведенной на рис. 1, секущие модули $E_1^{nel}(\sigma_{11})$ и $E_2^{nel}(\sigma_{22})$ могут только уменьшаться, а значит, знаменатели в (3) будут всегда положительны. Это обеспечивает положительную определенность матрицы жесткостных характеристик в соотношении (3).

В качестве параметров деструкции примем деформации ϵ_{ij} и ϵ_{ij} . При численных расчетах для модулей упругости и модуля сдвига нелинейные соотношения были приняты в следующем виде:

$$E_1^{nel} = \frac{B_{11}}{1 + |\sigma_{11}|^{m_{11}} C_{11}}; \quad E_2^{nel} = \frac{B_{22}}{1 + |\sigma_{22}|^{m_{22}} C_{22}}; \quad G_{12}^{nel} = \frac{B_{12}}{1 + |\sigma_{12}|^{m_{12}} C_{12}}; \quad (4)$$

Здесь m_{11} , m_{22} , m_{12} – задаваемые числовые параметры, C_{11} , C_{22} , C_{12} – функции, зависящие от m_{11} , m_{22} , m_{12} и предельных напряжений σ_{11}^* , σ_{12}^* , σ_{22}^* (пределов прочности при растяжении вдоль и поперек армирования и сдвиге), $m_{ij} > 1$, $m_{12} > 1$. Если имеет место сжатие, то σ_{11}^* , σ_{22}^* – пределы прочности при сжатии.

Принято, что выражения для E_i^{nel} , G_{ij}^{nel} связаны с прочностными характеристиками. Поскольку из (4) должны вытекать значения для пределов прочности, то из условия наличия экстремумов на диаграммах деформирования (рис. 1) можно получить выражения для C_{11} , C_{22} , C_{12} и B_{11} , B_{22} , B_{12} в виде

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{2} E_1 m_{11} (m_{11} - 1) \left(\frac{1}{m_{11}} - 1 \right); & B_{22} &= \frac{1}{2} E_2 m_{22} (m_{22} - 1) \left(\frac{1}{m_{22}} - 1 \right); \\ B_{12} &= \frac{1}{2} G_{12} m_{12} (m_{12} - 1) \left(\frac{1}{m_{12}} - 1 \right); \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_{11} = \left(\frac{E_1}{2 \sigma_{11}^*} \right)^{m_{11}}; \quad C_{22} = \left(\frac{E_2}{2 \sigma_{22}^*} \right)^{m_{22}}; \quad C_{12} = \left(\frac{G_{12}}{2 \sigma_{12}^*} \right)^{m_{12}}; \quad (6)$$

В численных экспериментах все m_{ij} принимались одинаковыми, поэтому на рисунках обозначались просто m . Для выбора m были проведены аналитические и численные расчеты о нагружении растяжением пластин с разными углами укладки волокон. Численные эксперименты показали, что хорошее согласование с натурными испытаниями и аналитическими расчетами получается при $m \approx 1:3$. Формально принятые соотношения представляют собой нелинейно-упругую модель материала.

При наличии разнопрочности можно ввести аппроксимацию функции Хевисайда, с помощью которой предельные напряжения σ_{11}^* , σ_{12}^* , σ_{22}^* выражаются через пределы прочности на растяжение σ_{11}^+ , σ_{22}^+ и сжатие σ_{11}^- , σ_{22}^- :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \sigma_{11}^- + (\sigma_{11}^+ - \sigma_{11}^-) \text{Heviside}(\sigma_{11}); & \text{Heviside}(\sigma_{11}) &\approx 2^{-2^{-\sigma_{11}}}; \\ \sigma_{22}^* &= \sigma_{22}^- + (\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-) \text{Heviside}(\sigma_{22}); & \text{Heviside}(\sigma_{22}) &\approx 2^{-2^{-\sigma_{22}}}. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь параметры $\sigma_{11}^+ \gg 1$, $\sigma_{11}^- \gg 1$, $\sigma_{22}^+ \gg 1$, $\sigma_{22}^- \gg 1$. Их нужно выбирать так, чтобы получать функцию, которая близка к кусочно-постоянной. В вычислительных экспериментах было принято $\sigma_{11}^+ = 1000 = \sigma_{11}^+$.

2. Решение на основе МКЭ

При решении задачи применены два подхода. Первый использует метод последовательных догружений (метод Петрова), второй – метод последовательных приближений (метод Биргера)⁵. С их помощью можно проходить точку экстремума диаграммы, если использовать кинематическое нагружение. При этом на каждом шаге итерации механические параметры вычисляются по деформациям предыдущего шага. Увеличивая значения перемещения центра болта, можно получить зависимость силы растяжения от этого перемещения и найти максимум P^* (см. рис. 1). Для упрощения задачи было использовано условие симметрии (на рис. 2 приведена схема болтового соединения). Области, снабженные цифрами, наделяются различными жесткостными и прочностными характеристиками. Цифрой 1 обозначена область пластины с механическими характеристиками $E_x^{(1)}$, $E_y^{(1)}$, $G_{xy}^{(1)}$; 2 – это область отрыва с $E_x^{(2)}$, $E_y^{(2)}$, $G_{xy}^{(2)} \ll E_x^{(1)}$, $E_y^{(1)}$, $G_{xy}^{(1)}$; 3 – область болта с $E_x^{(3)}$, $E_y^{(3)}$, $G_{xy}^{(3)} \gg E_x^{(1)}$, $E_y^{(1)}$, $G_{xy}^{(1)}$; область 4 – контактный слой с $E_x^{(4)} = E_x^{(3)}$, $E_y^{(4)} = E_y^{(3)}$, $G_{xy}^{(4)} \ll G_{xy}^{(1)}$. С помощью контактного слоя 4 моделируется эффект трения болта с пластиной путем введения различных $G_{xy}^{(4)}$.

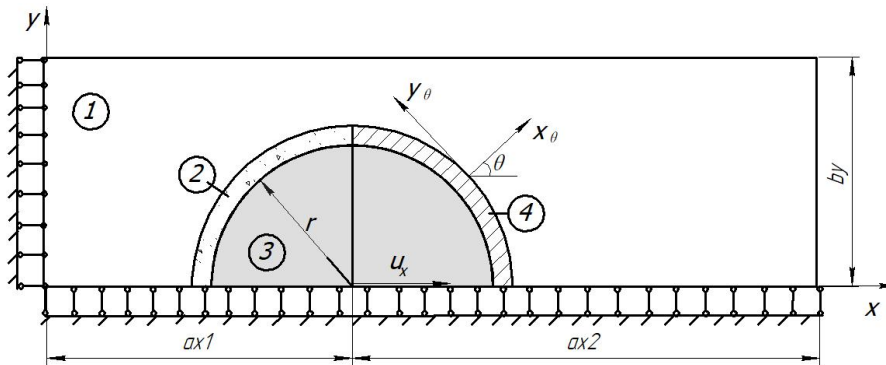


Рис. 2. Расчетная схема нагружения композитных пластин через болт

Fig. 2. Diagram of composite plate loading through the bolt

Ниже приведены основные соотношения МКЭ. В нашем случае использовано кинематическое нагружение, т. е. задавалось перемещение u_x . Тогда уравнение равновесия примет вид

$$[K]\{U\} = 0; \quad [K] = \int_A [B]^T [D_{xy}] [B] dA; \tag{8}$$

⁵ Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

где $[K]$ – матрица жесткости конструкции, $\{U\}$ – вектор узловых перемещений, $[B]$ – матрица, связывающая перемещения и деформации. Здесь некоторые компоненты вектора перемещения $\{U\}$ были заданы, а именно, перемещение центра болта u_x (см. рис. 2).

В обоих подходах на первом шаге матрица жесткостных характеристик $[D_{xy}]$ вычислялась через E_1 , E_2 и G_{12} . На втором и последующих шагах (на шаге k) матрица жесткостных характеристик $[D_{xy}]$ зависит от деформаций, найденных на предыдущем шаге с номером $(k-1)$:

$$[D_{xy}]^{(k)} = [D_{xy} \left(\begin{matrix} n \\ ij \end{matrix} \right)^{(k-1)}]; \quad k = 2; 3; 4; \dots : \quad (9)$$

Деформации в (9) вычислялись по формулам (1)–(7).

В первом подходе [12] (метод Петрова) для решения задачи был использован метод последовательных догрузений. Алгоритм метода заключается в следующем. Перемещение центра болта u_x разбивалось на k_{\max} частей, и получался отрезок Δu_x . Тогда на первом шаге перемещение торца $u_x^{(1)} = \Delta u_x$. Матрица $[D_{xy}]^{(1)}$ зависит только от E_1 , E_2 и G_{12} , так как компоненты деформации $\{''_{xy}\}^{(0)}$ изначально равны нулю. На первом шаге вычислялась матрица $[D_{xy}]^{(1)}$. После решения уравнения равновесия (8) вычислялся вектор деформации $\{''\}^{(1)}$. Далее сила растяжения образца стержня была рассчитана по формуле

$$P^{(1)} = 2t \int_0^b \sigma_{xx}^{(1)} dy: \quad (10)$$

Здесь t – толщина пластины.

Далее по соотношениям (1)–(7) вычислялся вектор деформаций $\{''_{12}\}^{(1)}$. На каждом последующем k -м шаге перемещение торца получало значение

$$u_x^{(k)} = u_x^{(k-1)} + \Delta u_x; \quad k = 2; 3; 4; \dots :$$

Второй подход основан на методе последовательных приближений (метод Биргера). Здесь было задано перемещение u_x , как показано на рис. 2. На начальном этапе (как и в предыдущем подходе) компоненты деформации $\{''_{xy}\}^{(0)}$ также равны нулю. Тогда на первом шаге итерационного процесса компоненты матрицы $[D_{xy}]^{(1)}$ зависят только от E_1 , E_2 и G_{12} . Решалось уравнение (8), вычислялся вектор деформации $\{''\}^{(1)}$, затем определялась сила растяжения образца по формуле (10). Из соотношений (1)–(7) вычислялись компоненты вектора $\{''_{xy}\}^{(1)}$. На k -м шаге определялась матрица $[D_{xy}]^{(k)}$ по формуле (9), компоненты которой уже зависят от $\{''_{xy}\}^{(k-1)}$. Аналогично из уравнения (8) определялись деформации $\{''\}^{(k)}$. Снова согласно (10) вычислялась сила растяжения образца $P^{(k)}$. Итерационный процесс продолжался до выполнения условия

$$|P^{(k)} - P^{(k-1)}| = P^{(k)} \leq \ll 1:$$

Эта процедура выполнялась для различных значений u_x . Затем из полученных значений $P^{(k)}$ выбиралось наибольшее, которое и является предельной нагрузкой P^* .

3. Вычислительные эксперименты

Согласно предложенной методике были получены численные решения по двум подходам, описанным выше. Разбиение области в расчетной схеме было проведено треугольными конечными элементами с квадратичной аппроксимацией перемещений. Для апробации метода был рассмотрен образец с болтом восьмиугольного сечения (рис. 3). Это позволило независимо от количества элементов исследовать сходимость предложенных методов расчета в зависимости от параметров, используемых в этих методах (круглую же область приходилось разбивать разными многоугольниками при разном количестве элементов). В частности, была исследована сходимость методов в зависимости от количества элементов и шагов по перемещениям. Это также позволило независимо от способа разбиения области сравнить полученное решение с тестовыми значениями P^* . Для изотропной области 2 (моделирующей пустоту) упругие характеристики были приняты на три порядка меньше, чем для пластины (область 1); а для области 3, моделирующей болт, напротив, на два порядка больше, чем для области 1. Для контактного слоя 4 модуль сдвига $G_{xy}^{(4)}$ (здесь x, y – это оси, касательные к слою 4) был принят много меньше модуля сдвига пластины 1, а остальные упругие характеристики принимались такими же, как и для области 3.

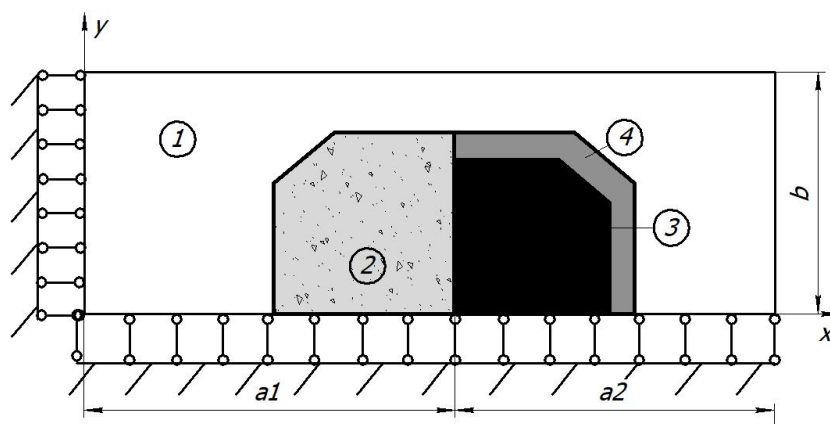


Рис. 3. Конечно-элементная схема соединения

Fig. 3. Finite element diagram of the joint

Для пластины были приняты следующие механические характеристики:

$$E_1 = 50000 \text{ МПа}; \quad E_2 = 16000 \text{ МПа}; \quad G_{12} = 3300 \text{ МПа}; \quad \nu_{12} = 0.25;$$

$$\mu_{11}^+ = 990 \text{ МПа}; \quad \mu_{11}^- = 338 \text{ МПа}; \quad \mu_{22}^+ = 160 \text{ МПа}; \quad \mu_{22}^- = 165 \text{ МПа}; \quad \mu_{12}^* = 62.1 \text{ МПа};$$

Выбранные размеры образца: $a_1 = 9$ мм, $b = 12$ мм, $R = 4.5$ мм, $t = 1$ мм.

Верификация программы проведена на тестовых задачах. При этом для получения теоретических значений предельной нагрузки при разных видах разрушения (срез, отрыв) предельные напряжения принимались в десять раз меньше тех, что даны выше. Результаты приведены в табл. 1.

На той же тестовой задаче на срез было рассмотрено влияние на предельную нагрузку P^* расстояния от «заделки» до центра болта a_1 (рис. 4). Видно, что при расчетах болтовых соединений расстояние a_1 до «закрепления» можно брать величиной порядка ширины профиля. Это позволяет ограничиться небольшим количеством КЭ.

Табл. 1. Верификация программы на тестовых задачах

Table 1. Program verification using test problems

	Теория	Метод Биргера	Метод Петрова
Срез	$P^* = a_2 \cdot a_{12}^* = 1210$	1170	1160
Отрыв	$P^* = (b - R) \cdot a_{11}^* = 750$	734	586

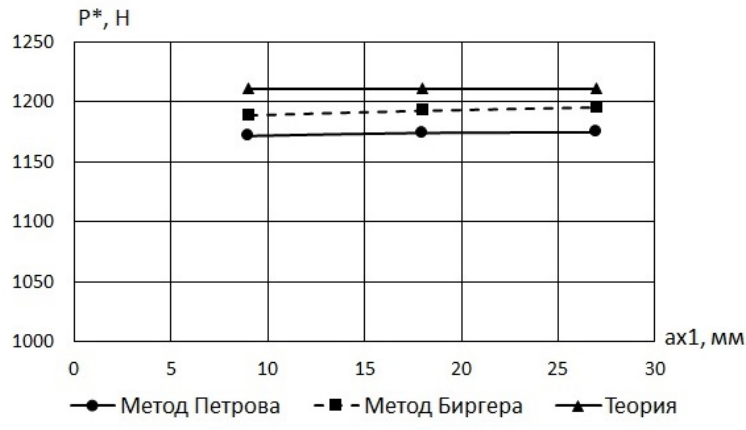


Рис. 4. Зависимость P^* от расстояния до центра болта a_1 для случая скола

Fig. 4. P^* dependence on the distance to the center of the bolt a_1 for the case of cleavage failure

Далее было исследовано влияние густоты конечно-элементной сетки на предельную нагрузку. Для этого варьировалось количество КЭ (см. рис. 5). Видно, что малая густота сетки достаточно сильно влияет на результат, но затем P^* быстро стабилизируется.

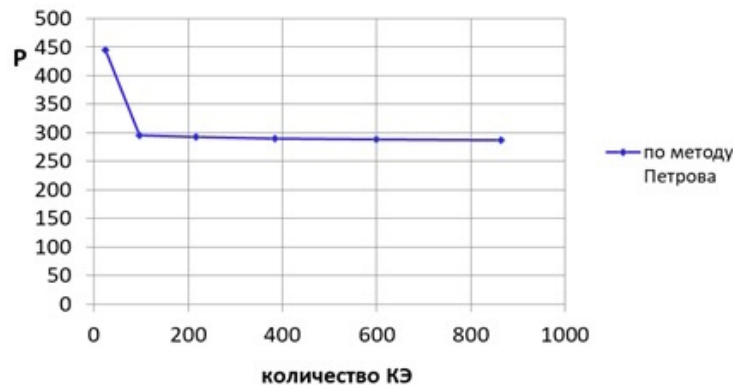


Рис. 5. Влияние количества конечных элементов на P^*

Fig. 5. Effect of the number of finite elements on P^*

Затем было изучено влияние величины приращения перемещения Δu_x на предельную нагрузку. За параметр разбиения было принято число n (число шагов):

$$n = \frac{u_x}{\Delta u_x}$$

Видно, что при использовании метода последовательных догрузений требуется достаточно большое количество шагов по перемещениям (рис. 6).

На рис. 7 приведены исходная сетка для образца с болтом и деформированная сетка в момент разрушения для различных тестовых задач. По картинкам деформирования сетки можно сделать заключение и о форме разрушения – срез, смятие. На рис. 8 показаны результаты экспериментов для болтового соединения (геометрические и механические характеристики приведены в начале данного раздела). Здесь также проанализировано влияние параметров МКЭ на несущую способность болтового соединения. Разбиение области в расчетной схеме проведено треугольными КЭ с квадратичной аппроксимацией перемещений. Представлены зависимости предельной нагрузки P^* от параметра m (см. формулу (4)). Горизонтальная верхняя линия – это экспериментальное значение предельной нагрузки. Видно, что значение $m = 1:3$ позволяет получать достаточно хорошее согласование результатов эксперимента и расчета.

Приведенные выше численные исследования, сравнения с тестовыми задачами и экспериментом позволяют утверждать, что предложенный подход к определению предельной нагрузки для болтового соединения дает возможность получать результат, близкий к экспериментальному.

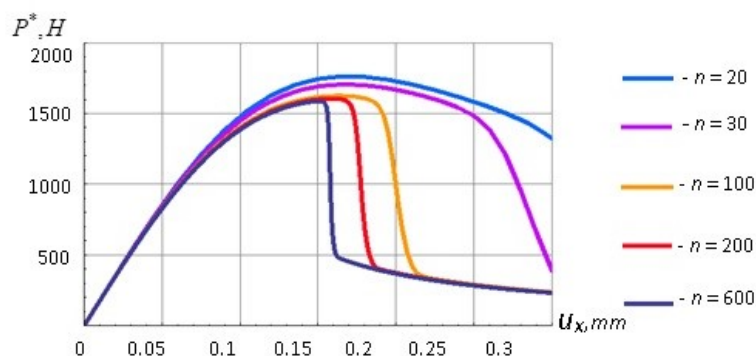


Рис. 6. Зависимость P^* от перемещения по горизонтали u_x центра болта при различном количестве n

Fig. 6. P^* dependence on the horizontal displacement u_x of the bolt center for different values of n

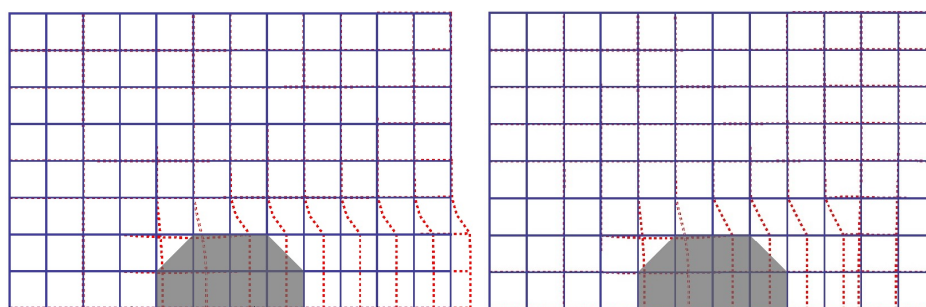


Рис. 7. Сетка образца с болтом в момент разрушения для различных тестовых задач (слева – срез, справа – смятие)

Fig. 7. Grid of a sample with the bolt at the moment of destruction for different test problems (shear-out failure on the left, bearing failure on the right)

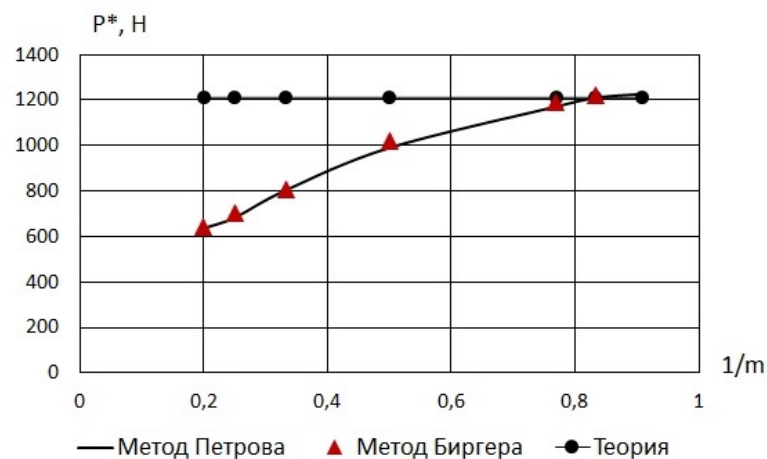


Рис. 8. Зависимости предельной нагрузки P^* от параметра m

Fig. 8. P^* dependence on the parameter m

Заключение

Разработанная методика определения предельной нагрузки для композитных пластин при растяжении основана на использовании нелинейной модели материала, но с диаграммой, имеющей экстремум. Считалось, что появление ниспадающей части диаграммы вызвано деструкцией материала, которая приводит к уменьшению его жесткостных характеристик. Было принято, что параметры деструкции, вызывающие уменьшение жесткости композита, зависят от деформаций. Для ее построения были использованы такие механические параметры материала, как упругие характеристики, предельные напряжения при растяжении, сжатии и сдвиге.

Поставленная задача решена методом секущих жесткостей. Использовано кинематическое нагружение, которое в отличие от других методов позволяет легко проходить экстремум диаграммы. Решив задачу для ряда увеличивающихся значений перемещений, можно найти значение предельной нагрузки. При этом были применены два подхода. Первый использует метод последовательных догрузений, второй – метод последовательных приближений. Предлагаемые подходы реализованы МКЭ в двумерной постановке при решении задачи оценки несущей способности композитной пластины в болтовом соединении при кинематическом нагружении. Проведен анализ влияния параметров численных методов, геометрических и механических характеристик, а также схематизации болтового соединения при оценке его несущей способности. Метод позволяет по картинкам деформирования сетки сделать заключение о форме разрушения соединения: срез, отрыв или смятие.

Результаты решения тестовых задач и сравнения с экспериментальными результатами показали применимость предложенного подхода для расчета болтовых соединений.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Сорокина И.И., Астахов М.В.* Исследование влияния формы крепежного элемента на прочность соединения «металл-композит» // Наука и образование: науч. изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 2. 9 с.
2. *Глебова М.А., Гришин В.И., Гусева Н.В.* Исследование видов разрушения болтовых соединений слоистых композитов // Учен. зап. ЦАГИ. 2022. Т. 53, № 1. С. 66–74.
3. *Гоцелюк Т.Б., Гришин В.И., Коваленко Н.А.* Исследование прочности болтовых соединений в слоистых композитах с использованием модели прогрессирующего разрушения // МКМК. 2016. Т. 22, № 2. С. 225–244.
4. *Глебова М.А., Гришин В.И., Гусева Н.В., Дзюба А.С.* Исследование концентрации напряжений в слоях металлокомпозитных соединений // Учен. зап. ЦАГИ. 2023. Т. 54, № 2. С. 83–95.
5. *Еремин В.П., Больших А.А.* Глобально-локальное моделирование односрезных болтовых соединений типа композит – металл и композит – композит в конструктивных силовых элементах самолета // Инженер. журн.: наука и инновации. 2020. № 5 (101). 11 с. <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2020-5-1981>.
6. *Шмелев Г.Н., Еремеев П.В., Файзуллина З.З., Иванова А.А.* Способ использования остаточных напряжений и регулирования усилий в деформированных сквозных прогонах и фермах // Строит. констр., здания и сооруж. 2025. № 3 (12). С. 10–18.
7. *Шмелев Г.Н., Галиев А.А., Файзуллина З.З., Иванова А.А., Агафонов Б.В.* Анализ напряженно-деформированного состояния узла крепления облицовочных плит к направляющим профилям навесной фасадной системы // Строит. констр., здания и сооруж. 2025. № 2 (11). С. 15–21.
8. *Шмелев Г.Н., Файзуллина З.З.* Соединение облицовки с направляющими вентилируемой фасадной системы // Строит. констр., здания и сооруж. 2024. № 3 (8). С. 4–9.
9. *Мирсаяпов Илшат Т., Минзянов Р.И., Зайнутдинов А.М.* Численное исследование напряженно-деформированного состояния в зоне контакта бетона и арматуры при статическом нагружении // Изв. КГАСУ. 2023. № 3 (65). С. 122–134. https://doi.org/10.52409/20731523_2023_3_122.
10. *Еремеев П.В., Шмелев Г.Н.* Определение нормальных напряжений в металлических стержневых конструкциях при произвольном сочетании усилий и кручении с учетом пластических деформаций при циклическом нагружении // Изв. КГАСУ. 2024. № 1 (67). С. 135–145. <https://doi.org/10.48612/NewsKSUAE/67.14>.
11. *Мирсаяпов Илшат Т., Гайнетдинов Р.Г., Салимзянов И.Р.* Узлы сопряжения железобетонных колонн с фундаментами // Изв. КГАСУ. 2024. № 2 (68). С. 124–135. <https://doi.org/10.48612/NewsKSUAE/68.11>.
12. *Беклемышева К.А., Петров И.Б.* Моделирование разрушения гибридных композитов под действием низкоскоростного удара // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 11. С. 27–43.

References

1. Sorokina I.I., Astakhov M.V. Effect of fastener geometry on the strength of metal–composite joints. In: *Nauka i obrazovanie* [Science and Education]. 2012, no. 2. 9 p. (In Russian)

2. Glebova M.A., Grishin V.I., Guseva N.V. Fracture types of laminate bolted joints. *Uch. Zap. TsAGI*, 2022, vol. 53, no. 1, pp. 66–74. (In Russian)
3. Gotselyuk T.B., Grishin V.I., Kovalenko N.A. Strength analysis of bolted joints in laminated composites using progressive damage model. *Mekh. Kompoz. Mater. Konstr.*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 225–244. (In Russian)
4. Glebova M.A., Grishin V.I., Guseva N.V., Dzyuba A.S. Stress concentrations in layers of metal–composite joints. *Uch. Zap. TsAGI*, 2023, vol. 54, no. 2, pp. 83–95. (In Russian)
5. Eremin V.P., Bolshikh A.A. Global-local modeling of single-shear composite–metal and composite–composite bolted joints in aircraft structural components. *Eng. J.: Sci. Innovation*, 2020, no. 5 (101). 11 p. (In Russian)
6. Shmelev G.N., Ereemeev P.V., Faizullina Z.Z., Ivanova A.A. Method for using residual stresses and regulating forces in deformed through girders and trusses. *Stroit. Konstr., Zdaniya Sooruzh.*, 2025, no. 3 (12), pp. 10–18. (In Russian)
7. Shmelev G.N., Galiev A.A., Faizullina Z.Z., Ivanova A.A., Agafonov B.V. Analysis of the stress–strain state of the joint between facing slabs and the guide profiles in the curtain wall system. *Stroit. Konstr., Zdaniya Sooruzh.*, 2025, no. 2 (11), pp. 15–21. (In Russian)
8. Shmelev G.N., Faizullina Z.Z. The connection of cladding to the rails of the curtain wall system. *Stroit. Konstr., Zdaniya Sooruzh.*, 2024, no. 3 (8), pp. 4–9. (In Russian)
9. Mirsayapov I.T., Minzyanov R.I., Zainutdinov A.M. Numerical study of the stress–strain state in the contact zone of concrete and reinforcement under static loading. *Izv. KGASU*, 2023, no. 3 (65), pp. 122–134. https://doi.org/10.52409/20731523_2023_3_122. (In Russian)
10. Ereemeev P.V., Shmelev G.N. Measuring normal stresses in metal rod structures under an arbitrary combination of forces and torsion with consideration of plastic deformations under cyclic loading. *Izv. KGASU*, 2024, no. 1 (67), pp. 135–145. <https://doi.org/10.48612/NewsKSUAE/67.14>. (In Russian)
11. Mirsayapov I.T., Gainetdinov R.G., Salimzyanov I.R. Connections of reinforced concrete columns with foundations. *Izv. KGASU*, 2024, no. 2 (68), pp. 124–135. <https://doi.org/10.48612/NewsKSUAE/68.11>. (In Russian)
12. Beklemysheva K.A., Petrov I.B. Damage modeling in hybrid composites subject to low-speed impact. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 469–478. <https://doi.org/10.1134/S2070048219030074>.

Информация об авторах

Рашит Абдулхакович Каюмов, доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: kayumovra@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0711-9429>

Алсу Минсалиховна Шакирова, кандидат физико-математических наук, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: shakirovaalsou@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9802-5182>

Инзилия Заудатовна Мухамедова, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: *muhamedova-inzilija@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5869-6686>

Альфред Мидхатович Сулейманов, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительные материалы», Казанский государственный архитектурно-строительный университет

E-mail: *alfred-sulejmanov@yandex.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4036-1121>

Author Information

Rashit A. Kayumov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Kazan State University of Architecture and Engineering

E-mail: *kayumovra@yandex.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0711-9429>

Alsu M. Shakirova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kazan State University of Architecture and Engineering

E-mail: *shakirovaalsou@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-9802-5182>

Inzilia Z. Mukhamedova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kazan State University of Architecture and Engineering

E-mail: *muhamedova-inzilija@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5869-6686>

Alfred M. Suleymanov, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Head of Department of Building Materials, Kazan State University of Architecture and Engineering

E-mail: *alfred-sulejmanov@yandex.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4036-1121>

Поступила в редакцию 18.03.2026

Принята к публикации 23.05.2026

Received March 18, 2026

Accepted May 23, 2026