УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2023, Т. 165, кн. 4
С. 404–414

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 536.9

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.404-414

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ КЛАССИЧЕСКОЙ И ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. А. Орехов, Л. Н. Рабинский, Г. В. Федотенков

Московский авиационный институт, г. Москва, 125993, Россия

Аннотация

Приведены математические постановки задач нестационарной теплопроводности, соответствующие моделям классической теплопроводности на основе закона Фурье, обобщённой теплопроводности на основе закона Каттанео–Вернотта–Лыкова (модель Максвелла–Каттанео) и обобщённым моделям Грина–Нагди II-го и III-го типов. С использованием интегральных преобразований Фурье по пространственным координатам и Лапласа по времени построены фундаментальные решения уравнений классической и обобщённых моделей теплопроводности Максвелла–Каттанео, Грина–Нагди II-го типа и Грина–Нагди III-го типа. Представлены и проанализированы графические результаты. Показаны отличия рассмотренных моделей теплопроводности и даны рекомендации по их применению в практических расчётах.

Ключевые слова: классическая теплопроводность, теория Максвелла–Каттанео, закон Каттанео–Вернотта–Лыкова, теория Грина–Нагди, обобщенная теплопроводность, дифференциальные уравнения, интегральные преобразования

Введение

Классическая теория теплопроводности предполагает теоретически необоснованную неограниченную скорость распространения тепла. Надо отметить, что хотя указанное следствие из теории и не реализуется на практике, классическая теплопроводность достаточно точно описывает процессы, время протекания которых достаточно велико. Например, в квазистатических и статических задачах для тел достаточно больших размеров с помощью классической теории решение можно получить с достаточной степенью точности.

Чтобы снять противоречие, связанное с бесконечностью скорости распространения тепла, были сформулированы неклассические теории теплопроводности, называемые также обобщёнными моделями теплопроводности. Одними из наиболее часто применимых обобщённых теорий теплопроводности являются теории Максвелла–Каттанео и Грина–Нагди. Эти теории играют важную роль практически во всех текущих исследованиях в области обобщённой теплопроводности.

Обобщённая модель теплопроводности Максвелла–Каттанео основана на использовании закона теплопроводности Каттанео–Вернотта–Лыкова. Она учитывает время релаксации теплового потока. Вследствие этого соответствующее уравнение имеет гиперболический тип в отличие от уравнения классической теплопроводности, являющегося уравнением параболического типа.

Также широкое распространение получила модель теплопроводности Грина–Нагди. Существуют три альтернативных теории, которые Грин и Нагди назвали теориями I-го, II-го и III-го типов. В основе теории Грина–Нагди лежит закон Фурье, в правой части записи которого имеется градиент температурного смещения, пропорциональный свободному пробегу частиц. Это слагаемое вносит ощутимый вклад в температуру на масштабах, сопоставимых с длиной свободного пробега молекул.

Следует отметить, что варианты подобных обобщённых теорий, их понимание и объяснение в последние годы вызывают огромный интерес. В настоящей статье построены фундаментальные решения уравнений обобщённых теорий теплопроводности Максвелла–Каттанео и Грина–Нагди. Проведён анализ полученных решений в сравнении с решением классического уравнения теплопроводности.

1. Классическая и обобщенная модели теплопроводности

1.1. Общее уравнение теплопроводности. Для вывода линеаризованного уравнения теплопроводности можно воспользоваться вторым законом термодинамики, математическим выражением которого является уравнение баланса энтропии [1]

$$\rho T_0 \dot{S} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \rho q^{(e)}, \tag{1}$$

где ρ – плотность среды, T_0 – начальная температура, S – удельная энтропия, $\mathbf{q} = q^i\mathbf{e}_i$ – вектор объемной плотности теплового потока, $q^{(e)}$ – массовая плотность объёмных источников тепла. Здесь и далее точка над функцией означает её производную по времени.

К уравнению (1) следует добавить физический закон для энтропии [1]

$$S = \frac{c_\varepsilon}{T_0}\vartheta, \tag{2}$$

где c_ε – коэффициент удельной теплоёмкости при постоянной деформации, $\vartheta = T - T_0$ – приращение температуры.

Подставив (2) в (1), придем к общему уравнению теплопроводности

$$\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \rho q^{(e)}. \tag{3}$$

Из этого уравнения вытекают как классическая, так и различные обобщённые теории. Различия между ними состоят в разных законах теплопроводности, связывающих приращение температуры ϑ с плотностью теплового потока $\mathbf{q}$.

1.2. Классическая модель теплопроводности. В этом случае связь между ϑ и $\mathbf{q}$ выражается классическим законом теплопроводности Фурье, который в случае изотропной среды имеет вид [1,2]

$$\mathbf{q} = -\kappa \operatorname{grad}\vartheta. \tag{4}$$

Подставив (4) в (3), придем к классическому уравнению теплопроводности параболического типа

$$\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} = \kappa\Delta\vartheta + \rho q^{(e)}, \tag{5}$$

где $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ – оператор Лапласа.

1.3. Модель теплопроводности Максвелла–Каттанео. В этой модели изменение температуры и плотность теплового потока связывает закон Каттанео–Вернотта–Лыкова [3–5]

$$\mathbf{q} + t_R \dot{\mathbf{q}} = -\kappa \text{grad}\ \vartheta. \tag{6}$$

Здесь t_R – время релаксации тепловых потоков, т. е. период времени, за который амплитудные значения возмущений в выведенных из состояния равновесия физических систем уменьшатся в e раз (e – основание натурального логарифма).

Применим к (6) оператор div:

$$-\operatorname{div} \mathbf{q} = t_R \operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} + \kappa \Delta \vartheta. \tag{7}$$

Подставим (7) в (3) и выразим оттуда $-\operatorname{div} \dot{\mathbf{q}}$:

$$-\operatorname{div} \dot{\mathbf{q}} = -\frac{\rho c_\varepsilon \dot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta - \rho q^{(e)}}{t_R}. \tag{8}$$

Продифференцируем (3) по времени и подставим (8) в полученное уравнение. Придем к уравнению теплопроводности Максвелла–Каттанео

$$\rho c_\varepsilon \left(\dot{\vartheta} + t_R \ddot{\vartheta} \right) = \kappa \Delta \vartheta + \rho \left(q^{(e)} + t_R \dot{q}^{(e)} \right). \tag{9}$$

Уравнение (9) имеет гиперболический тип. Отметим, что получим классическое уравнение теплопроводности (5), положив в (9) $t_R = 0$.

1.4. Модели теплопроводности Грина–Нагди. Существуют три типа модели теплопроводности Грина–Нагди [6–8]. Модель первого типа по существу совпадает с классической моделью теплопроводности, в основе которой лежит закон Фурье (4). Модели второго и третьего типа сильно отличаются, поскольку они основаны на дополнительном параметре теплового состояния, названным "тепловое смещение" $\alpha(\mathbf{x}, t)$, которое определяется так [6–8]:

$$\alpha = \alpha_0 + \int\limits_0^t \vartheta d\xi, \ \alpha_0 = \alpha|_{t=0}. \tag{10}$$

Модель Грина–Нагди III-го типа характеризуется следующим законом теплопроводности

$$\mathbf{q} = -\kappa \text{grad}\ \vartheta - \tilde{\kappa} \text{grad}\ \alpha, \tag{11}$$

где $\tilde{\kappa}$ – скорость теплопроводности. Если в (11) положить $\tilde{\kappa} = 0$, то придём к классической модели теплопроводности Фурье (модель Грина–Нагди I-го типа). Если же в (11) положить $\kappa = 0$, то получим модель теплопроводности Грина–Нагди II-го типа. Отметим, что из (10) следует

$$\dot{\alpha} = \vartheta. \tag{12}$$

Продифференцируем (11) по времени и применим к полученному равенству оператор div. С учётом (12) получим

$$\operatorname{div}\ \dot{\mathbf{q}} = -\kappa \Delta \dot{\vartheta} - \tilde{\kappa} \Delta \vartheta. \tag{13}$$

Подставив (13) в уравнение (3), предварительно продифференцированное по времени, придем к уравнению теплопроводности Грина–Нагди III-го типа

$$\rho c_\varepsilon \ddot{\vartheta} = \kappa \Delta \dot{\vartheta} + \tilde{\kappa} \Delta \vartheta + \rho \dot{q}^{(e)}. \tag{14}$$

Отметим, что если в (14) положить $\tilde{\kappa} = 0$ и проинтегрировать полученное уравнение по времени, то получим классическое уравнение теплопроводности (5). Если же в (14) положить $\kappa = 0$, то придём к уравнению теплопроводности Грина–Нагди II-го типа

$$\rho c_\varepsilon \ddot{\vartheta} = \tilde{\kappa} \Delta \vartheta + \rho \dot{q}^{(e)}. \tag{15}$$

Отметим, что уравнения (14) и (15) имеют гиперболический тип, а также, что уравнение нестационарной теплопроводности теории Грина–Нагди II-го типа – единственное из всех уравнений, имеющее вид классического волнового уравнения. При этом величина $c_T^2 = \tilde{\kappa}/\rho c_\varepsilon$ имеет размерность квадрата скорости: $\left[c_T^2\right] = \left[{}^2/\mathrm{c}^2\right]$.

На основе представленных выше моделей рассмотрим нестационарные процессы распространения тепла в неограниченной теплопроводной среде. Введём декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. В дальнейшем всем функциям, переменным и параметрам придадим безразмерную форму. Для этого используем систему безразмерных величин (размерные величины обозначены символом «$*$»):

$$\begin{gathered} x = \frac{x^*}{L},\ y = \frac{y^*}{L},\ z = \frac{z^*}{L},\ t = \frac{c_T t^*}{L},\ c_T^2 = \frac{\tilde{\kappa}}{\rho c_\varepsilon}, \\ \vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0},\ \kappa = \frac{\kappa^*}{\rho c_\varepsilon c_T L},\ q^{(e)} = \frac{q^{*(e)} L}{c_\varepsilon c_T T_0},\ t_R = \frac{c_T t_R^*}{L}. \end{gathered} \tag{16}$$

где L – характерная длина.

В безразмерных величинах (16) уравнения представленных выше теорий теплопроводности примут следующий вид.

Классическая теория

$$\dot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta = q^{(e)}. \tag{17}$$

Теория Максвелла–Каттанео

$$\dot{\vartheta} + t_R \ddot{\vartheta} - \kappa \Delta \vartheta = q^{(e)} + t_R \dot{q}^{(e)}. \tag{18}$$

Теория Грина–Нагди III-го типа

$$\ddot{\vartheta} - \kappa \Delta \dot{\vartheta} - \Delta \vartheta = \dot{q}^{(e)}. \tag{19}$$

Теория Грина–Нагди II-го типа

$$\ddot{\vartheta} - \Delta \vartheta = \dot{q}^{(e)}. \tag{20}$$

В случае неограниченной среды положим, что решения уравнений (17)–(20) должны удовлетворять условию ограниченности на бесконечности

$$\left.\vartheta\right|_{r \to \infty} = O(1),\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Не умаляя общности, положим, что начальные условия являются нулевыми

$$\left.\vartheta\right|_{t=0} = \left.\dot{\vartheta}\right|_{t=0} = 0.$$

В противном случае задачу всегда можно свести к нулевым начальным условиям с помощью элементарной замены искомой функции

$$\vartheta = \tilde{\vartheta} + f(x,y,z) + t g(x,y,z),\ f(x,y,z) = \left.\vartheta\right|_{t=0},\ g(x,y,z) = \left.\dot{\vartheta}\right|_{t=0}.$$

Отметим, что в случае классического уравнения теплопроводности (17) необходимо только одно начальное условие $\left.\vartheta\right|_{t=0} = 0$.

2. Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенных теорий теплопроводности

При исследовании нестационарных процессов в теплопроводной среде удобно использовать фундаментальные решения (функции влияния) соответствующих начально-краевых задач. Имея функции влияния, можно построить решения любых задач из заданного класса в квадратурах. Фундаментальные решения – это обобщённые функции, которые являются ограниченными на бесконечности решениями уравнений (17)–(20) с нулевыми начальными условиями и специальными правыми частями вида $\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)$, где δ – дельта-функция Дирака [9–12]. Для решения этих задач используем интегральные преобразования Фурье по координатам и Лапласа по времени [9–12]:

$$f^{FL}(q_1, q_2, q_3, s) = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty f(x, y, z, t)\, e^{i(q_1 x + q_2 y + q_3 z) + st} dx dy dz dt,$$

где q_k, $k = 1, 2, 3,$ – параметры преобразований Фурье, s – параметр преобразования Лапласа, верхний знак «F» у функции означает её преобразование по Фурье, а «L» – преобразование по Лапласу.

Далее воспользуемся следующими известными свойствами интегральных преобразований и дельта-функции Дирака [9–12]:

$$[\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)]^{FL} = 1,\ (\Delta f)^F = -q^2 f^F,\ \left(\frac{\partial^n f}{\partial t^n}\right)^L = s^n f^L, \tag{21}$$

где $q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$. Третья формула в (21) записана с учётом нулевых начальных условий.

2.1. Фундаментальное решение классического уравнения теплопроводности.

Задача о фундаментальном решении $G_1(x, y, z, t)$ для уравнения классической теплопроводности имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{G}_1 - \kappa \Delta G_1 = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)\,; \\ G_1|_{t=0} = 0,\ G_1|_{r\to\infty} = O(1)\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Применив интегральные преобразования Фурье и Лапласа к (22), с учётом (21) найдем

$$G_1^{FL} = \frac{1}{s + \kappa q^2}. \tag{23}$$

Оригинал функции (23) определяется последовательным обращением интегральных преобразований Лапласа и Фурье. В результате получим фундаментальное решение классического уравнения теплопроводности

$$G_1(r, t) = \frac{\mathrm{e}^{-r^2/4\kappa t}}{8(\kappa\pi t)^{3/2}}.$$

2.2. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео.

Поставим задачу о фундаментальном решении $G_2(x, y, z, t)$ для уравнения теплопроводности Максвелла–Каттанео

$$\begin{gathered} \dot{G}_2 + t_R \ddot{G}_2 - \kappa \Delta G_2 = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)\,; \\ G_2|_{t=0} = \dot{G}_2\Big|_{t=0} = 0,\ G_2|_{r\to\infty} = O(1)\,. \end{gathered} \tag{24}$$

Применив к (24) интегральные преобразования Фурье и Лапласа, получим

$$G_2^{FL} = \frac{1}{s + t_R s^2 + \kappa q^2}. \tag{25}$$

Последовательно обратив в (25) сначала преобразование Фурье, а затем преобразование Лапласа, получим

$$G_2(r,t) = \frac{e^{-\alpha t}}{4\pi\kappa r}\left[\frac{\alpha\beta}{\sqrt{t^2-\beta^2}} I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) H(t-\beta) + \delta(t-\beta)\right],$$
$$\alpha = 1/2t_R\,,\ \beta = r\sqrt{t_R/\kappa}\,,$$

где $I_1(x)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, $H(x)$ – функция Хевисайда.

2.3. Фундаментальные решения уравнений теплопроводности Грина–Нагди II-го и III-го типов. Рассмотрим уравнение (20) теории теплопроводности Грина–Нагди II-го типа. Обозначим соответствующее фундаментальное решение G_{32} и рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \ddot{G}_{32} - \Delta G_{32} = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)\,; \\ G_{32}|_{t=0} = \dot{G}_{32}\Big|_{t=0} = 0,\ G_{32}|_{r\to\infty} = O(1)\,. \end{gathered} \tag{26}$$

Решение (26), как и ранее, построим с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа. В пространстве изображений найдем

$$G_{32}^{FL} = \frac{1}{s^2 + q^2}. \tag{27}$$

Оригинал (27) не составляет труда построить аналитически с помощью последовательного обращения сначала преобразования Фурье

$$G_{32}^{L} = \frac{e^{-sr}}{4\pi r},$$

а затем преобразования Лапласа

$$G_{32}(x,y,z,\tau) = \frac{\delta(\tau - r)}{4\pi r}.$$

Перейдём теперь к уравнению теории Грина–Нагди III-го типа. Соответствующее фундаментальное решение обозначим G_{33}. Оно является решением следующей задачи

$$\begin{gathered} \ddot{G}_{33} - \kappa\Delta\dot{G}_{33} - \Delta G_{33} = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,\delta(t)\,; \\ G_{33}|_{t=0} = \dot{G}_{33}\Big|_{t=0} = 0,\ G_{33}|_{r\to\infty} = O(1)\,. \end{gathered} \tag{28}$$

Применив к (28) интегральные преобразования Фурье по координатам и Лапласа по времени, найдем

$$G_{33}^{FL} = \frac{1}{s^2 + \kappa s q^2 + q^2}. \tag{29}$$

В этом случае построение оригиналов аналитическими способами затруднено. Поэтому применим численно-аналитический способ обращения. Построим аналитически оригинал (29) по Лапласу:

$$G_{33}^{F} = \frac{2e^{-t\frac{\kappa q^2}{2}}}{\sqrt{q^2\left(q^2\kappa^2 - 4\right)}}\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{q^2\left(q^2\kappa^2-4\right)}}{2}t\right).$$

Оригинал по Фурье вычислим аналитически с использованием формулы обратного преобразования и перехода в пространстве параметров преобразования к сферическим координатам:

$$
\begin{gathered}
G_{33}(r,t) = \tfrac{1}{8\pi^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{33}^F(q,t)\, e^{-i(q_1 x + q_2 y + q_3 z)} dq_1 dq_2 dq_3, \\
q_1 = q\cos\alpha\sin\beta,\ q_2 = q\sin\alpha\sin\beta,\ q_2 = q\cos\beta,\ \alpha\in(-\pi,\pi],\ \beta\in[0,\pi], \\
q = \sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}, \\
G_{33}(r,t) = \tfrac{1}{8\pi^3} \int\limits_{0}^{\infty} q^2 G_{33}^F(q,t)\, H_2(q,x,y)\, dq, \\
H_2(q,x,y) = \int\limits_{0}^{\pi} H_1(q\sin\beta,x,y)\, e^{-iq_3 z\cos\beta}\sin\beta d\beta, \\
H_1(q,x,y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-iq(x\cos\alpha + y\sin\alpha)} d\alpha = 2\pi J_0\left(q\sqrt{x^2+y^2}\right),
\end{gathered}
$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя I-го рода.

С помощью замены переменной $u = \cos\beta$ интеграл $H_2(q,x,y)$ вычислим аналитически:

$$
H_2(q,x,y) = \frac{4\pi}{qr}\sin(qr).
$$

Окончательно для оригинала $G_{33}(r,t)$ получим следующую формулу

$$
G_{33}(r,t) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int\limits_{0}^{\infty} q G_{33}^F(q,t)\sin(qr)\, dq. \tag{30}
$$

Интеграл в (30) вычислим приближённо, путём замены несобственного интеграла определённым:

$$
G_{33}(r,t) \approx \frac{1}{2\pi^2 r}\int\limits_{0}^{Q} q G_{33}^F(q,t)\sin(qr)\, dq,\ Q \gg 1. \tag{31}
$$

3. Анализ результатов

Рассмотрим теплопроводную среду, заполненную дюралюминием с размерными параметрами

$$
\begin{gathered}
\rho = 2780\ \tfrac{}{\text{з}},\ T_0 = 300\ ,\ \kappa^* = 134\ \tfrac{}{.},\ \Lambda^* = 4.94\cdot 10^6\ \tfrac{\text{Н}}{2.}, \\
c_\varepsilon = 920\ \tfrac{}{.},\ t_R^* = 10^{-5}\text{с},\ \tilde{\kappa}^* = 5\cdot 10^5\ \tfrac{}{\cdot\cdot\text{с}}\ L = 1\ ,
\end{gathered}
$$

чему согласно (16) соответствуют следующие безразмерные величины:

$$
\kappa\ =\ 0.442,\ tR = 4.42\cdot 10^{-6}.
$$

На рис. 1 представлено сравнение распределений фундаментальных решений $G_1(r,t)$ и $G_2(r,t)$ по радиусу r в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют классической модели теплопроводности (функция G_1), а пунктирные – модели теплопроводности Максвелла–Каттанео (функция G_2). Видно, что отличие в результатах проявляется только на начальном временном промежутке длительностью порядка $20t_R$. В дальнейшем решения практически совпадают.

На рис. 2 показана оценка практической сходимости приближенной формулы (31) в зависимости от значения верхнего предела интегрирования Q. Сплошная

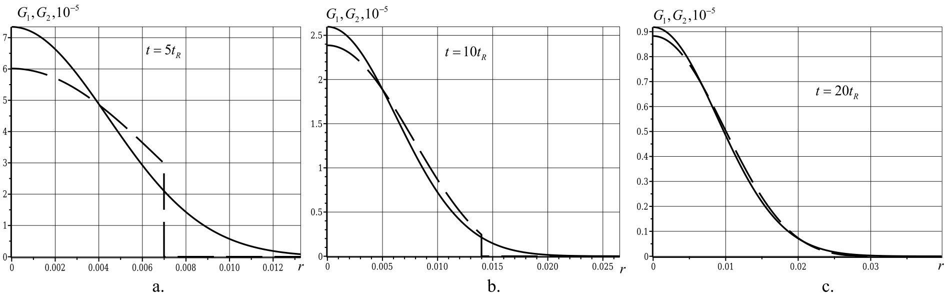

Рис. 1. Фундаментальные решения уравнений классической теории и теории Максвелла–Каттанео

кривая соответствует функции $G_{33}(r,4)$, построенной при $Q = 10$, пунктирная – при $Q = 20$, штрихпунктирная – при $Q = 30$. Видно, что все три кривые практически совпали, следовательно, для получения результата с достаточной степенью точности в данном случае можно ограничиться значением $Q = 20$.

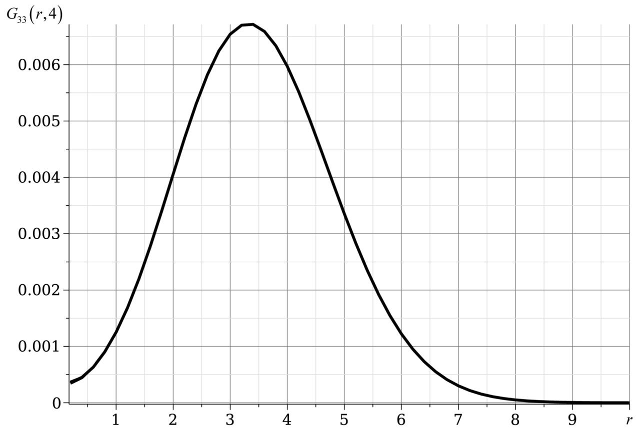

Рис. 2. Влияние параметра Q

На рис. 3 представлено сравнение распределений фундаментальных решений $G_1(r,t)$ и $G_{33}(r,t)$ по радиусу r в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют классической модели теплопроводности (функция G_1), а пунктирные – модели теплопроводности Грина–Нагди III-го типа (функция G_{33}).

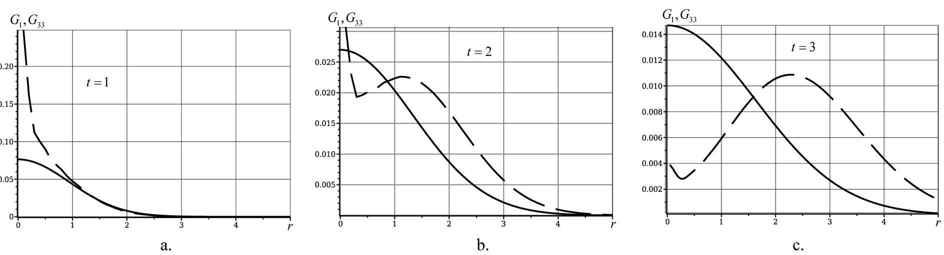

Рис. 3. Фундаментальные решения уравнений классической теории и теории Грина–Нагди III-го типа

Заключение

Построены фундаментальные решения уравнений для трёх вариантов обобщённой теории теплопроводности: теории Максвелла–Каттанео, Грина–Нагди II типа и Грина–Нагди III-го типа. Показано, что основные отличия в результатах проявляются на начальном временном этапе, длительность которого составляет порядка двадцати–тридцати времен релаксации. На основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что обобщённые теории следует привлекать в задачах о кратковременных интенсивных источниках тепла, например, при импульсном лазерном нагреве. Если рассматриваются задачи о длительном, плавно изменяющемся нагреве, то можно ограничиться классической теорией теплопроводности. Что касается теории Грина–Нагди, то на основе построенных решений однозначного определения относительно её применимости в практических задачах дать не удаётся. Для этого требуется проведение дополнительных исследований.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственного задания (FSFF-2023-0004).

Литература

1. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Математические основы термоупругости: учебное пособие. М.: МАИ, 2021. 92 с.

2. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Термоупругость. Одномерные нестационарные задачи: учебное пособие. М.: МАИ, 2023. 95 с.

3. *Cataneo C.* A form of heat conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 247. P. 431–433.

4. *Vernotte P.* Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur // C. R. Acad. Sci. Paris. 1985. T. 246, No 22. P. 3154–3155.

5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

6. *Green A.E., Naghdi P.M.* A re-examination of the basic postulates of thermomechanics // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1991. V. 432, No 1885. P. 171–194. https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012.

7. *Green A.E., Naghdi P.M.* Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. V. 31. P. 189–208. https://doi.org/10.1007/BF00044969.

8. *Green A.E., Naghdi P.M.* On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stresses. 1992. V. 15, No 2. P. 253–264. https://doi.org/10.1080/01495739208946136.

9. *Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G.* Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution // Symmetry. 2022. V. 14, No 4. Art. 650. https://doi.org/10.3390/sym14040650.

10. *Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S.* Conductive heat transfer in materials under intense heat flows // Symmetry. 2022. V. 14, No 9. Art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.

11. *Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z.* Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 60, No 8. P. 1912–1919. https://doi.org/10.1134/S1995080221080229.

12. *Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N.* Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 63, No 7. P. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.

Поступила в редакцию 10.10.2023
Принята к публикации 20.11.2023

Орехов Александр Александрович, к.т.н., доцент кафедры «Проектирование сложных технических систем» Московского авиационного института

Московский авиационный институт
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: *orekhovaa2@mai.ru*

Рабинский Лев Наумович, д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой «Перспективные материалы и технологии аэрокосмического назначения» Московского авиационного института

Московский авиационный институт
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: *rabinskiy@mail.ru*

Федотенков Григорий Валерьевич, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института

Московский авиационный институт
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: *greghome@mail.ru*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.404-414

Fundamental Solutions of the Equations of Classical and Generalized Heat Conduction Models

A.A. Orekhov, L.N. Rabinskiy**, G.V. Fedotenkov****

Moscow Aviation Institute, Moscow, 125993 Russia
E-mail: **orekhovaa2@mai.ru*, ***rabinskiy@mail.ru*, ****greghome@mail.ru*

Received October 10, 2023; Accepted November 20, 2023

Abstract

This article presents the mathematical formulations of transient heat conduction problems corresponding to the models of classical heat conduction using the Fourier law and generalized heat conduction based on the Cattaneo–Vernotta–Lykov law (Maxwell–Cattaneo model), as well as the generalized Green–Nagdy type II and III models. The Fourier transforms in spatial coordinates and the Laplace transforms in time were used to obtain the fundamental solutions of the equations of the Maxwell–Cattaneo and Green–Nagdy type II and III models of classical and generalized heat conduction. The results were displayed graphically and analyzed. Differences between the considered heat conduction models were shown, and suggestions for their practical application were given.

Keywords: classical heat conduction, Maxwell–Cattaneo theory, Cattaneo–Vernott–Lykov law, Green–Nagdy theory, generalized heat conduction, differential equations, integral transformations

Acknowledgments. This study was supported by the state assignment (project no. FSFF-2023-0004).

Figure Captions

Fig. 1. Fundamental solutions of the equations of the classical heat conduction theory and the Maxwell–Cattaneo theory.

Fig. 2. Effect of the parameter Q.

Fig. 3. Fundamental solutions of the equations of the classical heat conduction theory and the Green–Nagdy theory of type III.

References

1. Vestyak V.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Matematicheskie osnovy termouprugosti: uchebnoe posobie* [Mathematical Foundations of Thermoelasticity]. Moscow, MAI, 2021. 92 p. (In Russian)
2. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Termouprugost'. Odnomernye nestatsionarnye zadachi: uchebnoe posobie* [Thermoelasticity. One-Dimensional Non-Stationary Problems: A Text Book]. Moscow, MAI, 2023. 95 p. (In Russian)
3. Cataneo C. A form of heat conduction equations which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1958, vol. 247, pp. 431–433.
4. Vernotte P. Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1985, t. 246, no. 22, p. 3154–3155. (In French)
5. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of Heat Conduction]. Moscow, Vyssh. Shk., 1967. 600 p. (In Russian)
6. Green A.E., Naghdi P.M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1991, vol. 432, no. 1885, pp. 171–194. https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0012.
7. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation. *J. Elasticity*, 1993, vol. 31, pp. 189–208. https://doi.org/10.1007/BF00044969.
8. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid. *J. Therm. Stresses*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 253–264. https://doi.org/10.1080/01495739208946136.
9. Orekhov A., Rabinskiy L., Fedotenkov G. Analytical model of heating an isotropic half-space by a moving laser source with a Gaussian distribution. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 4, art. 650. https://doi.org/10.3390/sym14040650.
10. Fedotenkov G., Rabinskiy L., Lurie S. Conductive heat transfer in materials under intense heat flows. *Symmetry*, 2022, vol. 14, no. 9, art. 1950. https://doi.org/10.3390/sym14091950.
11. Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V., Hein T.Z. Heating of a half-space by a moving thermal laser pulse source. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 60, no. 8, pp. 1912–1919. https://doi.org/10.1134/S1995080221080229.
12. Dobryanskiy V.N., Fedotenkov G.V., Orekhov A.A., Rabinskiy L.N. Estimation of finite heat distribution rate in the process of intensive heating of solids. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 7, pp. 1832–1841. https://doi.org/10.1134/S1995080222100079.

***Для цитирования*:** *Орехов А.А., Рабинский Л.Н., Федотенков Г.В.* Фундаментальные решения уравнений классической и обобщенной моделей теплопроводности // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 404–414. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414.

***For citation*:** Orekhov A.A., Rabinskiy L.N., Fedotenkov G.V. Fundamental solutions of the equations of classical and generalized heat conduction models. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 404–414. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.404-414. (In Russian)