

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.4

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ ТЕЛ,
ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ К ЗЕРКАЛЬНЫМ ОТРАЖЕНИЯМ
ПРОСТРАНСТВА

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, 119526, Россия

Аннотация

Рассмотрен вариант теории теплопроводности, в рамках которого вектор потока тепла имеет вес -1 . С этим псевдовектором ассоциируются псевдоинварианты, чувствительные к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. Основной целью исследования является построение вектора теплового потока, алгебраически подобного вектору микроповорота. Во главу угла исследования положено измерение элементарных объемов и площадей с помощью псевдоинвариантов, чувствительных к зеркальным отражениям. Для представления спинорных перемещений выбраны контравариантный псевдовектор микроповорота веса $+1$. Как следствие, тепловой поток и плотность массы оказались псевдотензорными величинами нечетного веса. В качестве термодинамического потенциала использована свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице дублетного псевдоинвариантного объема, а в качестве функциональных аргументов выбраны температура, симметричные части и сопутствующие векторы для линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линеаризация. Продемонстрировано, что для упругих микрополярных тел коэффициент теплопроводности и теплоемкость оказались псевдоскалярами нечетного веса, проявляющими чувствительность к указанным выше преобразованиям пространства.

Ключевые слова: теплопроводность, микрополярность, тензорный элемент объема, псевдовектор потока тепла, псевдотензор, зеркальное отражение, полуизотропное тело

Введение

Термомеханическая обработка материалов и метаматериалов играет исключительно важную роль в современной технологической практике. Современные конструкционные метаматериалы проявляют сложные термомеханические свойства, в том числе аномальные с точки зрения классической механики сплошных сред. Математическое моделирование процессов технологической обработки и последующей эксплуатации изделий из указанных материалов требует привлечения методов современной термодинамики, геометрии и псевдотензорного исчисления. Большинство биоматериалов и метаматериалов с точки зрения их термомеханических свойств оказывается чувствительным к преобразованиям, изменяющим на противоположную ориентацию трехмерного пространства. Наличие микроструктуры в таких материалах требует привлечения теорий микрополярных тел.

Микрополярное твердое деформируемое тело, определяющие постоянные которого ротационно-инвариантны и при этом чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства, называется полуизотропным (гиотропным, ацентрически изотропным, ротационно инвариантным). Материалы могут проявлять полуизотропность в микромасштабе (кварц, сахар, биологические молекулы), а также в макромасштабе (кости, пористые материалы, витые композиты, содержащие волокна или включения) [1–3]. Полуизотропные тела из-за отсутствия геометрической симметрии между объектом и его зеркальным отображением известны в оптике как оптически активные материалы.

Простейшим геометрическим объектом, реагирующим на изменение ориентации пространства, является псевдоскаляр нечетного веса. Аппарат алгебры и анализа псевдотензоров (относительных тензоров) достаточно хорошо развит, о чем свидетельствуют многочисленные монографии по тензорному исчислению (например, [8–15]). Псевдотензоры естественным образом возникают в математических моделях микрополярного материала [16–20]. Использование алгебры и анализа псевдотензоров [9, 11, 13] позволяет получить геометрически и физически непротиворечивые формулировки теорий микрополярных тел, которые могут быть легко трансформированы к формулировкам в терминах абсолютных тензоров с помощью целых степеней псевдоскалярных единиц. Однако, как показывает литературный поиск, подавляющее большинство математических теорий разрабатывается в терминах абсолютных тензоров [4–7] и лишь сравнительно малое число публикаций посвящено описанию в терминах псевдотензоров [16–20]. Совсем отсутствуют публикации по возможной псевдовекторной природе теплового потока при распространении тепла в микрополярных телах. Устранение указанного пробела собственно и является одной из основных целей настоящей работы.

Описание микрополярного континуума базируется на двух фундаментальных аспектах: выборе способа представления трансляционных и спинорных перемещений и выборе способа измерения элементарных объемов и площадей. В конвенциональных микрополярных теориях механики деформируемых сред [4–7] обычно оперируют с двумя независимыми полями трансляционных и спинорных перемещений (микроповоротов), наиболее просто задаваемых псевдовекторами. Возможны различные способы задания псевдовектора спинорных перемещений. В частности, представлению с помощью контравариантного псевдовектора $\phi^{[+1]k}$ положительного веса $+1$ посвящены работы [16–19], а моделям микрополярных тел, в которых использовался ковариантный псевдовектор $\phi^{[-1]k}$ отрицательного веса -1 , посвящены работы [20, 21]. Указанные псевдовекторы легко преобразуются к абсолютным векторам спинорных перемещений ϕ^k (или ϕ_k).

Выбор тензорных измерений элементарных объемов и площадей также имеет исключительное значение в микрополярных теориях упругости [4–6]. Например, при выборе естественных элементов объема и площади тензор силовых напряжений становится псевдотензором положительного веса $+1$, что продемонстрировано в монографии Я. Схоутена [9] и работах [22, 23]. В данной статье для измерения элементарных объемов и площадей использованы дублетный элемент объема¹ и специально подобранный элемент площади. При этом существенно использованы терминология и понятия из работ [11, 27]. Минимальные сведения, обеспечивающие абсолютные тензорные элементы объема и площади, имеются в [8, см. приложение Дж. Л. Эриксона] и монографии [11]. В качестве термодинамического потенциала

¹Термин "дублетный" продиктован прочтением классической монографии Г.Б. Гуревича [13, с. 93].

принята свободная энергия Гельмгольца, отнесенная к единице псевдоинвариантного объема, а в качестве функциональных аргументов выбраны температура, симметричные части и сопутствующие векторы для линейного асимметричного тензора деформаций и псевдотензора изгиба–кручения. Получено нелинейное уравнение теплопроводности и выполнена его линейаризация. Продемонстрировано, что для упругих микрополярных тел коэффициент теплопроводности и теплоемкость оказываются псевдоскалярами нечетного веса, проявляющими чувствительность к указанным выше преобразованиям пространства.

1. Псевдотензоры в N -мерном пространстве

Подробное изложение основ алгебры и анализа псевдотензоров можно найти в руководствах по тензорному анализу [8–15] и в статьях [16, 17, 24–26]. В дальнейшем изложении сверху корневого символа псевдотензора в квадратных скобках будем отмечать его вес. Нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, в обозначениях отражаться не будет.

Обобщенная дельта Кронекера (абсолютный тензор) является одним из фундаментальных объектов многомерной геометрии ориентируемых пространств $\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M}$. Обобщенную дельту Кронекера можно определить в N -мерном пространстве для $M \leq N$ согласно следующему правилу

$$\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M} = \begin{cases} +1, & \text{если } k_1, k_2, \dots, k_M \text{ — различные натуральные} \\ & \text{числа } 1, 2, \dots, N \text{ и если } h_1, h_2, \dots, h_M \text{ является} \\ & \text{четной перестановкой } k_1, k_2, \dots, k_M; \\ -1, & \text{если } k_1, k_2, \dots, k_M \text{ — различные натуральные} \\ & \text{числа } 1, 2, \dots, N \text{ и если } h_1, h_2, \dots, h_M \text{ является} \\ & \text{нечетной перестановкой } k_1, k_2, \dots, k_M; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

С помощью абсолютного тензора $\delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{k_1 k_2 \dots k_M}$, определенного в соответствии с (1), нетрудно задать альтернирующие псевдотензоры (символы перестановок)

А. Ковариантный псевдотензор $\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_M}$ веса -1

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_M} = \delta_{h_1 h_2 \dots h_M}^{12 \dots M}. \quad (2)$$

В. Контравариантный псевдотензор $\epsilon^{k_1 k_2 \dots k_M}$ веса $+1$

$$\epsilon^{k_1 k_2 \dots k_M} = \delta_{12 \dots M}^{k_1 k_2 \dots k_M}. \quad (3)$$

Косое произведения N абсолютных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ в N -мерном пространстве можно определить согласно [27]

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N] = e_{i_1 i_2 \dots i_N} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_N^{i_N}, \quad (4)$$

где $e_{i_1 i_2 \dots i_N} = e \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$, $e = e_{12 \dots N}$ — псевдоскаляр веса $+1$. $e = e_{12 \dots N}$ позволяет ввести понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и разделить локальные базисные системы на право- и левоориентированные. В самом деле, если в качестве системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N$ принять векторы ковариантного базиса $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N$ в N -мерном пространстве, то на основании (4) найдем

$$[\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_N] = e. \quad (5)$$

Важно также отметить, что для символов перестановок (2) и (3) нарушаются правила жонглирования индексами. Поднимать или опускать индексы у символов перестановок необходимо согласно правилу

$$\epsilon_{h_1 h_2 \dots h_N} = e^{-2} g_{h_1 k_1} g_{h_2 k_2} \dots g_{h_N k_N} \epsilon^{k_1 k_2 \dots k_N}. \quad (6)$$

В трехмерном пространстве фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр веса +1 (5) и две псевдоскалярные единицы определим согласно [21]:

$$e = \mathbf{1} \cdot (\mathbf{2} \times \mathbf{3}), \quad \overset{[+1]}{1} = e, \quad \overset{[-1]}{1} = e^{-1}. \quad (7)$$

Отметим, что знак псевдоскалярной единицы в (7) определяет ориентации координатных систем, т.е. для правоориентированных $\overset{[+1]}{1} > 0$, для левоориентированных $\overset{[+1]}{1} < 0$.

Кроме того, целые степени псевдоскалярных единиц ковариантно постоянны, то есть

$$\nabla_k \overset{[\pm g]}{1} = \overset{[\pm g]}{0},$$

где ∇_k – оператор ковариантного дифференцирования в метрике g_{js} .

В дальнейшем изложении припишем функции w.g.t значение веса псевдотензора, на который действует эта функция. Например,

$$\text{w.g.t} \left(\overset{[g]}{1} \right) = g.$$

Пользуясь псевдоскалярными единицами, можно определить абсолютные e -тензоры (тензоры перестановок, дискриминантные тензоры) следующими равенствами:

$$e_{ijk} = \overset{[+1]}{1} \epsilon_{ijk}, \quad e^{ijk} = \overset{[-1]}{1} \epsilon^{ijk}.$$

В последних равенствах выполняется правило баланса весов [24–26]. В самом деле,

$$\text{w.g.t} (e_{ijk}) = \text{w.g.t} \left(\overset{[+1]}{1} \epsilon_{ijk} \right) = 0, \quad \text{w.g.t} (e^{ijk}) = \text{w.g.t} \left(\overset{[-1]}{1} \epsilon^{ijk} \right) = 0.$$

2. Тензорные элементы площади в N -мерном пространстве

В N -мерном евклидовом пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \dots, N$). Рассмотрим погруженное в него многообразие (поверхность) Σ размерности M ($M \leq N$). Пусть многообразие Σ задано его гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2, \dots, M$):

$$x^k = x^k(u^1, u^2, \dots, u^M). \quad (8)$$

В формуле (8) x^k являются внешними координатами для Σ , а u^α – внутренними.

Тензорный элемент объема, следуя работам А. Пуанкаре [28, 29], задается согласно [30, 31] в виде

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = M! dx^{[i_1}_2 dx^{i_2} \dots dx^{i_M]}. \quad (9)$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется альтернирование.

Несложно заметить, что формулу (9) можно представить в следующем виде [11, с. 256–257]

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \delta_{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_M}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} du_1^{\gamma_1} du_2^{\gamma_2} \dots du_M^{\gamma_M}, \quad (10)$$

или, перейдя в (10) к символам перестановок, получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M} \partial_{\alpha_1} x^{i_1} \partial_{\alpha_2} x^{i_2} \dots \partial_{\alpha_M} x^{i_M} \det(du^\gamma). \quad (11)$$

В случае $M = N$ с учетом формулы (11) имеем

$$d\tau^{i_1 i_2 \dots i_N} = d\tau^{[-1]12\dots N}_{\epsilon^{[+1]i_1 i_2 \dots i_N}}, \quad (12)$$

где $d\tau^{[-1]12\dots N}$ – естественный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса -1 , который определяется следующим образом

$$d\tau^{[-1]12\dots N} = \det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \dots du^N = dx^1 dx^2 \dots dx^N. \quad (13)$$

Опустив в формуле (12) индексы, т. е. применив правило жонглирования индексами для символов перестановок (6), определим ковариантный тензорный элемент объема в виде

$$d\tau_{i_1 i_2 \dots i_N} = e^2 d\tau^{[-1]12\dots N}_{\epsilon^{[-1]i_1 i_2 \dots i_N}} = d\tau_{12\dots N}^{[+1]} \epsilon^{[-1]i_1 i_2 \dots i_N}, \quad (14)$$

где $d\tau_{12\dots N}^{[+1]}$ – дублетный элемент объема, представляющий собой псевдоскаляр веса $+1$.

С помощью псевдоскаляров $d\tau^{[-1]12\dots N}$, $d\tau_{12\dots N}^{[+1]}$ и псевдоскалярных единиц 1 можно образовать абсолютный скаляр $d\tau$, являющийся инвариантным элементом объема

$$d\tau = 1 d\tau^{[-1]12\dots N} = 1 d\tau_{12\dots N}^{[+1]}.$$

3. Тензорные элементы объема и площади поверхности в трехмерном пространстве

Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем поверхность, заданную естественной (гауссовой) параметризацией u^1, u^2 . Для этого случая в формулах раздела 3 примем $N = 3, M = 2$. Тогда тензорный элемент площади поверхности (10) преобразуется к виду [30, 31]

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i} \partial_2 x^{j]} du^1 du^2,$$

а для ковариантного тензорного элемента площади, опустив индексы у $d\tau^{ij}$ в соответствии с правилом жонглирования индексами (14), придем к тензорному элементу площади $d\tau_{ij}$.

Антисимметричным абсолютным тензорам $d\tau^{ij}$ и $d\tau_{ij}$ сопутствуют ковариантный и контравариантный псевдовекторы

$$dA_k^{[-1]} = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \quad dA^k^{[+1]} = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} d\tau_{ij}. \quad (15)$$

Абсолютные векторные элементы площади поверхности можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} dA_k &= \frac{1}{2} e_{kij} d\tau^{ij}, \\ dA^k &= \frac{1}{2} e^{kij} d\tau_{ij}. \end{aligned} \quad (16)$$

Векторные (16) и псевдовекторные (15) элементы площади поверхности связаны между собой соотношениями:

$$dA_k = \begin{smallmatrix} [+1] & [-1] \\ 1 & \end{smallmatrix} dA_k, \quad dA^k = \begin{smallmatrix} [-1] & [+1] \\ 1 & \end{smallmatrix} dA^k.$$

Пседоскалярные элементы площади поверхности задаются следующими формулами:

$$\begin{smallmatrix} [-1] \\ dA \end{smallmatrix} = (\text{sgn } e) \sqrt{g^{sk} \begin{smallmatrix} [-1] \\ dA_s \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} [-1] \\ dA_k \end{smallmatrix}}, \quad (17)$$

$$\begin{smallmatrix} [+1] \\ dA \end{smallmatrix} = (\text{sgn } e) \sqrt{g_{sk} \begin{smallmatrix} [+1] \\ dA^s \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} [+1] \\ dA^k \end{smallmatrix}}. \quad (18)$$

И тот, и другой элемент площади (17) и (18) оказались чувствительными к изменению ориентации координатной системы.

Инвариантный элемент площади поверхности определяются согласно

$$dA = \sqrt{dA^k dA_k}. \quad (19)$$

Использував введенные выше определения для элементов площади (17), (18) и (19), можно показать, что

$$\left(\begin{smallmatrix} [\pm 1] \\ dA \end{smallmatrix} \right)^2 = \frac{1}{2} \begin{smallmatrix} [\pm 2] \\ 1 \end{smallmatrix} d\tau^{is} d\tau_{is}, \quad (dA)^2 = \frac{1}{2} d\tau^{is} d\tau_{is}.$$

4. Баланс энтропии и приведенное уравнение энергии для тел, чувствительных к зеркальным преобразованиям пространства

Рассмотрим распространение тепла в средах, термомеханические характеристики которых проявляют чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного евклидова пространства. Элементарные площади и объемы будем измерять следующими псевдоинвариантными элементами:

$$\begin{smallmatrix} [+1] \\ dA, \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} [+1] \\ d\tau. \end{smallmatrix} \quad (20)$$

Количество тепла Q , поступающее через фиксированную замкнутую поверхность ∂ в единицу времени, с учетом (20) будет определяться соотношением

$$Q = \oint_{\partial} \begin{smallmatrix} [-1] \\ h \end{smallmatrix}_k \begin{smallmatrix} [+1] \\ n_k \end{smallmatrix} dA, \quad (21)$$

где $\begin{smallmatrix} [-1] \\ h \end{smallmatrix}_k$ – псевдовектор потока тепла, n_k – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂ (абсолютный вектор [22, 32]).

Баланс весов в соотношении (21) основан на предположении

$$\text{w.g.t}(Q) = 0,$$

откуда следует, что

$$\text{w.g.t} \left(h^{[-1]}_k n_k dA^{[+1]} \right) = 0.$$

Важно отметить, что в этом случае вектор потока тепла оказывается псевдовектором отрицательного веса -1 .

Аналогичным образом можно показать, что для плотности ρ , тензора силовых t^{ik} и моментных μ^i_k напряжений справедливы равенства

$$\text{w.g.t}(\rho) = -1, \quad \text{w.g.t}(t^{ik}) = -1, \quad \text{w.g.t}(\mu^i_k) = -2. \quad (22)$$

В рамках развиваемой схемы исследования, учитывая (22), уравнение баланса энтропии принимает вид

$$\frac{[-1]}{\rho} \dot{s} = -\nabla_j J^{[-1]j} + \frac{[-1]}{\rho} \sigma + \frac{[-1]}{\rho} \xi, \quad (23)$$

где $J^{[-1]j}$ – псевдовектор потока энтропии, ξ – неконтролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы), σ – контролируемое производство энтропии (в единицу времени в расчете на единицу массы). Отметим, что s , ξ и σ являются абсолютными скалярами. В дальнейшем изложении будем полагать, что $\sigma = 0$, т.е. отсутствует лучистое тепло.

В качестве термодинамического потенциала выберем свободную энергию Гельмгольца ψ как функцию термодинамических переменных состояния:

$$\psi = \bar{\psi}(\epsilon_{(kl)}, \kappa^{[+1]}_{(kl)}, \varphi^{[+1]i}_i, \kappa_i, \theta).$$

Чертой сверху будем в дальнейшем обозначать потенциалы состояния. Здесь в качестве термодинамических переменных, кроме температуры, выбраны симметричные части асимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения

$$\epsilon_{(kl)} = \nabla_{(k} u_{l)} = \frac{1}{2}(\nabla_k u_l + \nabla_l u_k), \quad \kappa^{[+1]}_{(kl)} = \nabla_{[k} \phi_{l]} = \frac{1}{2}(\nabla_k \phi_l - \nabla_l \phi_k), \quad (24)$$

а также сопутствующие псевдовектор и вектор:

$$\varphi^{[+1]i}_i = -\frac{1}{2}\epsilon^{ikl}\epsilon_{[kl]}, \quad \kappa_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}\kappa^{[+1][kl]}. \quad (25)$$

В термомеханике континуума абсолютная температура θ определяется как функция параметров термодинамического состояния и вычисляется как частная производная потенциальной функции (внутренней энергии u) по энтропии s , т.е.

$$\theta = \frac{\partial \bar{u}(\epsilon_{(kl)}, \kappa^{[+1]}_{(kl)}, \varphi^{[+1]i}_i, \kappa_i, s)}{\partial s}, \quad \inf \theta > 0. \quad (26)$$

Из определения (26) видно, что независимо от выбора веса элементарного объема

$$\text{w.g.t}(\theta) = 0.$$

Отсюда немедленно следует, что абсолютная температура является абсолютным скаляром.

Хорошо известно, что выполняются также соотношения

$$s = \bar{s}(\epsilon_{(kl)}, \kappa^{[+1]}_{(kl)}, \varphi^{[+1]i}_i, \kappa_i, \theta), \quad \bar{s} = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}.$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{matrix} [-1] \\ S \end{matrix} = \begin{matrix} [-1] \\ \rho \end{matrix} \bar{s}, \quad \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix} = \begin{matrix} [-1] \\ \rho \end{matrix} \bar{\psi}, \quad \begin{matrix} [-1] \\ \Xi \end{matrix} = \begin{matrix} [-1] \\ \rho \end{matrix} \bar{\xi}. \quad (27)$$

Приведенное уравнение баланса энергии с учетом (24), (25) и (27) примет вид

$$\begin{aligned} & -(\partial. \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix} + \begin{matrix} [-1] \\ S \end{matrix} \partial. \theta) + \begin{matrix} [-1] \\ t \end{matrix}^{(ij)} \partial. \epsilon_{(ij)} + \begin{matrix} [-2] \\ \mu \end{matrix}^{(ik)} \partial. \begin{matrix} [+1] \\ \kappa \end{matrix}_{(ik)} + \\ & + \begin{matrix} [-2] \\ \tau_i \end{matrix} \partial. \begin{matrix} [+1] \\ \varphi \end{matrix}_i + \begin{matrix} [-1] \\ \mu \end{matrix}_i \partial. \kappa_i - \theta^{-1} \begin{matrix} [-1] \\ h \end{matrix}^i \nabla_i \theta = \begin{matrix} [-1] \\ \Xi \end{matrix} \theta. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь $\partial.$ – производная по времени при фиксированных координатах x^k , $\begin{matrix} [-2] \\ \tau_i \end{matrix}$ – ассоциированный (сопутствующий) псевдовектор силовых напряжений

$$2 \begin{matrix} [-2] \\ \tau_i \end{matrix} = -\epsilon_{ijk} \begin{matrix} [-1] \\ t \end{matrix}^{[jk]}, \quad \begin{matrix} [-1] \\ t \end{matrix}^{[jk]} = -\epsilon^{jki} \begin{matrix} [-2] \\ \tau_i \end{matrix}. \quad (29)$$

Ассоциированный (сопутствующий) вектор моментных напряжений определяется по аналогии с (29) в виде

$$2 \begin{matrix} [-1] \\ \mu \end{matrix}_i = \epsilon^{iks} \begin{matrix} [-2] \\ \mu \end{matrix}_{[ks]}, \quad \begin{matrix} [-2] \\ \mu \end{matrix}_{[js]} = \epsilon_{jsi} \begin{matrix} [-1] \\ \mu \end{matrix}_i.$$

В приближении малых деформаций мы считаем $\dot{a} = \partial. a$.

5. Уравнение теплопроводности и определяющие уравнения зеркально-чувствительного микрополярного термоупругого континуума

Для необратимых термодинамических процессов при условии выполнения фундаментального термодинамического неравенства определяющие уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{matrix} [-1] \\ t \end{matrix}^{(ij)} &= \frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \epsilon_{(ij)}}, \quad \begin{matrix} [-2] \\ \mu \end{matrix}^{(ik)} = \frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \begin{matrix} [+1] \\ \kappa \end{matrix}_{(ik)}}, \\ \begin{matrix} [-2] \\ \tau_i \end{matrix} &= \frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \begin{matrix} [+1] \\ \varphi \end{matrix}_i}, \quad \begin{matrix} [-1] \\ \mu \end{matrix}_i = \frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \kappa_i}, \\ \begin{matrix} [-1] \\ S \end{matrix} &= -\frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \theta}, \quad \begin{matrix} [-1] \\ J \end{matrix}^j = \frac{\partial \begin{matrix} [-1] \\ \Psi \end{matrix}}{\partial \theta} (\nabla_k \ln \theta). \end{aligned} \quad (30)$$

Для неконтролируемого производства энтропии справедливо уравнение

$$\begin{matrix} [-1] \\ \Xi \end{matrix} = -\theta^{-2} \begin{matrix} [-1] \\ h \end{matrix}^j \nabla_j \theta = -\theta^{-1} \begin{matrix} [-1] \\ J \end{matrix}^j \nabla_j \theta = -\begin{matrix} [-1] \\ J \end{matrix}^j (\nabla_k \ln \theta) \nabla_j \ln \theta. \quad (31)$$

На основании уравнения баланса энтропии (23) в силу (30), (31) и при условии, что

$$\theta \begin{matrix} [-1] \\ J \end{matrix}^j = \begin{matrix} [-1] \\ h \end{matrix}^j,$$

получим уравнение теплопроводности (справедливое также и в геометрически нелинейном случае)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \epsilon_{(ij)}} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \kappa_{(ik)}^{[+1]}} \partial \kappa_{(ik)}^{[+1]} + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \varphi_i^{[+1]}} \partial \varphi_i^{[+1]} + \\ + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \kappa_i} \partial \kappa_i + \frac{\partial S^{[-1]}}{\partial \theta} \partial \theta = -\theta^{-1} \nabla_j h^{[-1]j}. \end{aligned} \quad (32)$$

Линеаризованную по функциональным аргументам свободную энергию для анизотропного микрополярного термоупругого континуума можно принять в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = 2 \Psi = \frac{E^{[-1]}_{(ik)(lm)}}{I} \epsilon_{(ik)} \epsilon_{(lm)} + \frac{E^{[-3]}_{(ik)(lm)}}{II} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \\ + \frac{E^{[-2]}_{(ik)(lm)}}{III} \epsilon_{(ik)} \kappa_{(lm)}^{[+1]} + \frac{E^{[-2]}_{(ik)l}}{IV} \epsilon_{(ik)} \varphi_l^{[+1]} + \frac{E^{[-3]}_{(ik)l}}{V} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \varphi_l^{[+1]} + \\ + \frac{E^{[-1]}_{(ik)l}}{VI} \epsilon_{(ik)} \kappa_l + \frac{E^{[-2]}_{(ik)l}}{VII} \kappa_{(ik)}^{[+1]} \kappa_l + \frac{E^{[-3]}_{(ik)}}{VIII} \varphi_i^{[+1]} \varphi_k^{[+1]} + \frac{E^{[-1]}_{(ik)}}{IX} \kappa_i \kappa_k + \\ + \frac{E^{[-2]}_{ik}}{X} \varphi_i^{[+1]} \kappa_k + \frac{E^{[-1]}_{ik}}{XI} \epsilon_{(ik)} \theta + \frac{E^{[-1]}_{(ik)}}{XII} \kappa_{(ik)} \theta + \\ + \frac{E^{[-1]}_{i}}{XIII} \varphi_i^{[+1]} \theta + \frac{E^{[-1]}_{i}}{XIV} \kappa_i \theta + \frac{E^{[-1]}}{XV} \theta^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $\frac{E^{[-1]}_{(ik)(lm)}}{I}$, $\frac{E^{[-3]}_{(ik)(lm)}}{II}$, $\frac{E^{[-2]}_{(ik)(lm)}}{III}$, $\frac{E^{[-2]}_{(ik)l}}{IV}$, $\frac{E^{[-3]}_{(ik)l}}{V}$, $\frac{E^{[-1]}_{(ik)l}}{VI}$, $\frac{E^{[-2]}_{(ik)l}}{VII}$, $\frac{E^{[-3]}_{(ik)}}{VIII}$, $\frac{E^{[-1]}_{(ik)}}{IX}$, $\frac{E^{[-2]}_{ik}}{X}$, $\frac{E^{[-1]}_{ik}}{XI}$, $\frac{E^{[-1]}_{(ik)}}{XII}$, $\frac{E^{[-1]}_i}{XIII}$, $\frac{E^{[-1]}_i}{XIV}$, $\frac{E^{[-1]}}{XV}$ – определяющие тензоры анизотропного микрополярного термоупругого континуума, $\theta \rightarrow \theta - \theta_0$ – малый температурный инкремент (считается малой первого порядка), θ_0 – референциальная температура.

В качестве закона теплопроводности примем линейный закон Фурье

$$h^{[-1]k} = -\frac{E^{[-1]ki}}{XVI} \nabla_i \theta, \quad (34)$$

где $\frac{E^{[-1]ki}}{XVI}$ – псевдотензор коэффициентов теплопроводности. Отметим, что в (34)

псевдотензор коэффициентов теплопроводности $\frac{E^{[-1]ki}}{XVI}$, вообще говоря, проявляет чувствительность к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

После линеаризации уравнения теплопроводности (32) с учетом (33) и (34) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{E^{[-1](ij)}}{XI} \partial \epsilon_{(ij)} + \frac{1}{2} \frac{E^{[-2](ij)}}{XII} \partial \kappa_{(ij)}^{[+1]} + \frac{1}{2} \frac{E^{[-2]i}}{XIII} \partial \varphi_i^{[+1]} + \\ + \frac{1}{2} \frac{E^{[-1]i}}{XIV} \partial \kappa_i + \theta_0^{-1} C \partial \theta = \theta_0^{-1} \frac{E^{[-1]js}}{XVI} \nabla_j \nabla_s \theta, \end{aligned}$$

где C – теплоемкость в расчете на единицу дублетного элемента объема.

Отметим, что для полуизотропного тела псевдотензор коэффициентов теплопроводности является шаровым, т. е.

$$\underset{\text{XVI}}{E}^{js} = \underset{[-1]}{\lambda} g^{js}.$$

Коэффициент теплопроводности $\underset{[-1]}{\lambda}$ является псевдоскаляром отрицательного веса -1 , чувствительным к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства. То же самое касается и теплоемкости $\underset{[-1]}{C}$.

Заключение и выводы

В работе рассмотрен вариант теории теплопроводности микрополярной упругой среды, в рамках которого вектор потока тепла имеет вес -1 . С этим псевдовектором ассоциируются псевдоинварианты, чувствительные к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

- A. Продемонстрирована возможность приписать вектору теплового потока псевдотензорный вес -1 , что делает его алгебраически подобным псевдовектору микроповорота.
- B. Введены псевдоскалярный элемент объема и псевдовекторный элемент площади, обеспечивающие построение псевдовектора потока тепла веса -1 . С этой же целью спинорные перемещения представлены контравариантным псевдовектором веса $+1$.
- C. Предложена псевдоквадратичная форма для свободной энергии Гельмгольца, включающая XV определяющих псевдотензоров.
- D. Получено нелинейное уравнение теплопроводности. Выполнена его линейризация с учетом линейного закона теплопроводности Фурье. Показано, что коэффициент теплопроводности трактуется как псевдоскаляр веса -1 , чувствительный к преобразованиям зеркального отражения и инверсиям трехмерного пространства. То же самое касается и теплоемкости.

Благодарности. Авторы благодарят проф. С. А. Лурье за полезные дискуссии по широкому спектру проблем механики деформируемого твердого тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект No 23-21-00262).

Литература

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials // Int. J. Mech. Sci. 2001. V. 43, No 7. P. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T.G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: A review // SPIE Rev. 2010. V. 1, No 1. Art. 018003. <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S.K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium // Appl. Math. Modell. 2013. V. 37, No 22. P. 9409–9418. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.

4. *Besdo D.* Ein beitrage zur nichtlinearen Theorie des Cosserat–Kontinuums // *Acta Mech.* 1974. V. 20, No 1. P. 105–131. <https://doi.org/10.1007/BF01374965>.
5. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Berlin: Springer, 1972. 285 p.
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.
7. *Dyzlewicz J.* Micropolar Theory of Elasticity. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
8. *Truesdell C., Toupin R.* The classical field theories // *Principles of Classical Mechanics and Field Theory* / Ed. by S. Flügge. Book Ser.: Encyclopedia of Physics. V. III/1. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–902. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
9. *Схоутен Я.А.* Тензорный анализ для физиков. М.: Наука, 1965. 456 с.
10. *Сокольников И.С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с.
11. *Synge J.L., Schild A.* Tensor Calculus. New York: Dover Publ., 1978. 334 p.
12. *Das A.J.* Tensors. The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics. Berlin: Springer Sci. & Bus. Media, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
13. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.
14. *Veblen O., Thomas T.Y.* Extensions of relative tensors // *Trans. Am. Math. Soc.* 1924. V. 26, No 3. P. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
15. *Веблен О.* Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: Изд-во ин. лит., 1948. 139 с.
16. *Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В.* Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // *Пробл. прочн. и пластичн.* 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>.
17. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* On a micropolar theory of growing solids // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
18. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* К теории линейных гемитропных микрополярных сред // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2020. № 4 (46). С. 16–24. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>.
19. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation // *Mech. Solids.* 2023. V. 58, No 3. P. 802–813. <http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
20. *Murashkin E.V., Radaev Y.N.* A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 6. P. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
21. *Radaev Y.N.* Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids // *Mech. Solids.* 2023. V. 58, No 5. P. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
22. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Тензор силовых напряжений Схоутена и аффинорные плотности положительного веса // *Пробл. прочн. и пластичн.* 2022. Т. 84, № 4. С. 545–558. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>.

23. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations // *Mech. Solids*. 2023. V. 58, No 1. P. 153–160.
<http://dx.doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
24. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 1 (51). С. 17–26.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
25. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Элементы теории // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 2 (52). С. 106–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>.
26. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* Ковариантно постоянные тензоры в пространствах Евклида. Приложения к механике континуума // *Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2022. № 2 (52). С. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
27. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука, 1966. 648 с.
28. *Poincaré H.* Sur les résidus des intégrales doubles // *Acta Math*. 1887. Т. 6. P. 321–380.
29. *Poincaré H.* Analysis situs // *J. École Polytech*. 1895. Т. 2, No 1. P. 1–123.
30. *Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.* О согласовании ориентаций тензорных элементов площади в микрополярном континууме, погружаемом во внешнее плоское пространство // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 25, № 4. С. 776–786.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. *Murashkin E.V., Radayev Y.N.* On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space // *Mech. Solids*. 2022. V. 57, No 2. P. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. *Мурашкин Е.В.* О формулировках краевых условий в задачах синтеза тканых 3d материалов // *Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механ. пред. сост.* 2021. № 1 (47). С. 114–121. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2021.1.47.010>.

Поступила в редакцию 28.09.2023

Принята к публикации 15.11.2023

Мурашкин Евгений Валерьевич, к.ф.-м.н., с.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия
E-mail: murashkin@ipmnet.ru

Радаев Юрий Николаевич, д.ф.-м.н., проф., в.н.с. Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия
E-mail: radayev@ipmnet.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.389-403

**Heat Conduction of Micropolar Solids
Sensitive to Mirror Reflections of Three-Dimensional Space**

*E.V. Murashkin**, *Y.N. Radayev***

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia*

E-mail: **murashkin@ipmnet.ru, **radayev@ipmnet.ru*

Received September 28, 2023; Accepted November 15, 2023

Abstract

This article considers a variant of the heat conduction theory of thermal conductivity, in which the heat flux pseudovector has a weight of -1 . The pseudoinvariants associated to the heat flux pseudovector are sensitive to mirror reflections and inversions of three-dimensional space. The primary purpose of the study was to find a heat flux vector that is algebraically equivalent to the microrotation pseudovector and to measure elementary volumes and areas using pseudoinvariants that are sensitive to mirror reflections. To represent spinor displacements, a contravariant microrotation pseudovector with a weight of $+1$ was selected. Thus, the heat flux and mass density were expressed as odd-weight pseudotensors. The Helmholtz free energy per unit doublet pseudoinvariant volume was employed as the thermodynamic state potential of the following functional arguments: absolute temperature, symmetric parts, and accompanying vectors for the linear asymmetric strain tensor and the wryness pseudotensor. The results obtained show that the thermal conductivity coefficient and heat capacity of elastic micropolar solids are pseudoscalars of odd weight, indicating their sensitivity to mirror reflections.

Keywords: heat conduction, micropolarity, volume tensor element, heat flux pseudotensor, mirror reflection, semi-isotropic solid

Acknowledgments. We thank Professor S.A. Lurie for insightful discussions on a wide range of topics related to the mechanics of deformable solids. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00262).

References

1. Lakes R. Elastic and viscoelastic behavior of chiral materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 2001, vol. 43, no. 7, pp. 1579–1589. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(00\)00100-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(00)00100-4).
2. Mackay T.G., Lakhtakia A. Negatively refracting chiral metamaterials: A review. *SPIE Rev.*, 2010, vol. 1, no. 1, art. 018003. <https://doi.org/10.1117/6.0000003>.
3. Tomar S.K., Khurana A. Wave propagation in thermo-chiral elastic medium. *Appl. Math. Modell.*, 2013, vol. 37, no. 22, pp. 9409–9418. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.04.029>.

4. Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums. *Acta Mech.*, 1974, vol. 20, no. 1, pp. 105–131. <https://doi.org/10.1007/BF01374965>. (In German)
5. Nowacki W. *Theory of Micropolar Elasticity*. Berlin, Springer, 1972. 285 p.
6. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986. 383 p.
7. Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2004. 345 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
8. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. In: Flügge S. (Ed.) *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. Book Ser.: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1960, pp. 226–902. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
9. Schouten J.A. *Tenzornyi analiz dlya fizikov* [Tensor Analysis for Physicists]. Moscow, Nauka, 1965. 456 p. (In Russian)
10. Sokolnikoff I.S. *Tenzornyi analiz. Teoriya i primeneniya v geometrii i v mekhanike sploshnykh sred* [Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua]. Moscow, Nauka, 1971. 376 p. (In Russian)
11. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York, Dover Publ., 1978. 334 p.
12. Das A.J. *Tensors. The Mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. Berlin, Springer Sci. & Bus. Media, 2007. 290 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
13. Gurevich G.B. *Osnovy teorii algebraicheskikh invariantov* [Foundations of the Theory of Algebraic Invariants]. Moscow, Leningrad, OGIZ, GITTL, 1948. 408 p. (In Russian)
14. Veblen O., Thomas T.Y. Extensions of relative tensors. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, pp. 373–377. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
15. Veblen O. *Invarianty differentsial'nykh kvadratichnykh form* [Invariants of Quadratic Differential Forms]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1948. 139 p. (In Russian)
16. Radayev Y.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media. *Probl. Prochn. Plast.*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 399–412. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412>. (In Russian)
17. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a micropolar theory of growing solids. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, vol. 24, no. 3, pp. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>.
18. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On the theory of linear micropolar hemitropic media. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2020, no. 4(46), pp. 16–24. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2020.89.81.031>. (In Russian)
19. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Coupled thermoelasticity of hemitropic media. Pseudotensor formulation. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 3, pp. 802–813. <http://dx.doi.org/10.3103/s0025654423700127>.
20. Murashkin E.V., Radaev Y.N. A negative weight pseudotensor formulation of coupled hemitropic thermoelasticity. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 6, pp. 2440–2449. <https://doi.org/10.1134/S1995080223060392>.
21. Radaev Y.N. Tensors with constant components in the constitutive equations of hemitropic micropolar solids. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1517–1527. <https://doi.org/10.3103/S0025654423700206>.
22. Murashkin E.V., Radaev Y.N. Schouten's force stress tensor and affnor densities of positive weight. *Probl. Prochn. Plast.*, 2022, vol. 84, no. 4, pp. 545–558. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558>. (In Russian)

23. Murashkin E.V., Radayev Y.N. The Schouten force stresses in continuum mechanics formulations. *Mech. Solids*, 2023, vol. 58, no. 1, pp. 153–160.
<http://dx.doi.org/10.3103/s0025654422700029>.
24. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 1(51), pp. 17–26.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.51.1.002>.
25. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Elements of the theory. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 2(52), pp. 106–115. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.012>. (In Russian)
26. Murashkin E.V., Radayev Y.N. Covariantly constant tensors in Euclid spaces. Applications to continuum mechanics. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2022, no. 2(52), pp. 118–127.
<https://doi.org/10.37972/chgpu.2022.52.2.013>.
27. Rosenfeld B.A. *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces]. Moscow, Nauka, 1966. 648 p. (In Russian)
28. Poincaré H. Sur les résidus des intégrales doubles. *Acta Math.*, 1887, t. 6, pp. 321–380. (In French)
29. Poincaré H. Analysis situs. *J. École Polytech.*, 1895, t. 2, no. 1, pp. 1–123. (In French)
30. Murashkin E.V., Radayev Y.N. On a ordering of area tensor elements orientations in a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, vol. 25, no. 4, pp. 776–786.
<https://doi.org/10.14498/vsgtu1883>.
31. Murashkin E.V., Radaev Y.N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mech. Solids*, 2022, vol. 57, no. 2, pp. 205–213. <https://doi.org/10.3103/s0025654422020108>.
32. Murashkin E.V. On the boundary conditions formulation in the problems of synthesis of woven 3D materials. *Vestn. ChGPU im. I.Ya. Yakovleva. Ser. Mekh. Predel'nogo Sostoyaniya*, 2021, no. 1(47), pp. 114–121. (In Russian)

Для цитирования: Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Теплопроводность микрополярных тел, чувствительных к зеркальным отражениям пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 389–403.
 URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>.

For citation: Murashkin E.V., Radayev Y.N. Heat conduction of micropolar solids sensitive to mirror reflections of three-dimensional space. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 389–403.
 URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.389-403>. (In Russian)