

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.361-388

НЕСОВМЕСТНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

С. А. Лычев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, г. Москва, 119526, Россия

Аннотация

В статье развиваются методы математического моделирования несовместных конечных деформаций гибких пластин. Несовместные деформации моделируются в рамках дифференциально-геометрической теории непрерывно распределенных дефектов. Для построения уравнений равновесия используются асимптотические разложения конечных мер деформаций по двум малым параметрам. Первый из них характеризует порядок малости перемещений из отсчетной (самонапряженной) формы, а второй – толщину. Асимптотические порядки различны для прогибов и перемещений в плоскости пластины, а также их производных и выбраны таким образом, чтобы при дополнительных предположениях – о возможности пренебрежения отдельными слагаемыми получаемых выражений и о совместности деформаций – уравнения сводились бы к известной системе Фешля–фон Кармана.

Введение

Упругие элементы микроэлектромеханических систем (МЭМС) в большинстве своем очень гибкие: они характеризуются большим отношением характерного размера в плане и толщины, которое может достигать десятков тысяч [1]. Для таких отношений, казалось бы, следует использовать классическую линейную (и очень простую) математическую модель мембраны, однако подобный путь в приложении к исследуемым явлениям приводит к неудовлетворительным результатам. Причин тому несколько. Во-первых, линейная модель мембраны предполагает задание натяжения, которое заранее неизвестно, и требует определения из условий закрепления. Переход к исследованию нелинейных уравнений Фешля–фон Кармана не спасает ситуацию, поскольку для краевых задач, порождаемых этими уравнениями, как правило, задаются краевые условия в терминах производных перемещений (или функции Эри), и для моделирования реального закрепления границы пластины требуется постановка интегральных краевых условий. Кроме того, применимость самих уравнений Фешля–фон Кармана, ввиду их асимптотической непоследовательности (отдельные члены отбрасываются без обоснования их малости), вызывает сомнения [2]. Во-вторых, полное игнорирование изгибной жесткости для ультратонких мембран оправдано для достаточно гладких по пространственным переменным и медленно изменяющимся во времени нагружениям. Вместе с тем в рамках технологических задач, возникающих при проектировании МЭМС, нельзя игнорировать локализацию воздействия. Подобная ситуация возникает, в частности, при разработке микроэлектромеханических узлов проекционной фотолитографии (на настоящий момент она является ключевой технологией

микроэлектроники) в силу ступенчатой структуры экранирующего слоя (шаблона) и коротких времен экспозиции. В этой связи использование как линейных, так и нелинейных классических моделей мембран и пластин при расчетах и проектировании деформируемых элементов МЭМС приводит к значительным погрешностям [3, 4]. В-третьих, неочевидна адаптация нелинейной теории несовместных деформаций [5–8] к моделям, которые получены не из общих соотношений нелинейной упругости, а посредством "очевидных" механических допущений и гипотез. Не имея ничего против этих допущений, которые доказали свою применимость за сотни лет их использования в расчетах на обычном для инженерии масштабном уровне, можно усомниться в адекватности их применения на уровне десятков и сотен нанометров. В то же время непосредственное использование нелинейных трехмерных уравнений, разумеется, приводит к вычислительной неудаче ввиду вырождения системы по малому параметру – толщине. В этой связи развитие теории тонкостенных тел, испытывающих конечные деформации, с учетом их возможной несовместности представляет собой актуальную задачу в рамках современной механики деформируемого твердого тела, равно как и в рамках теории технологических процессов. Этой задаче посвящена настоящая статья, в которой процедуры получения точных, асимптотических и редуцированных уравнений рассматриваются на примере круглой гибкой пластины. Уравнения равновесия выводятся из асимптотических разложений по двум малым параметрам. Первый параметр определяет степень малости перемещений, а второй – толщину. Меры несовместности деформаций, сформулированные в исходном виде в трехмерной постановке, естественно входят в полученные уравнения.

Теория гибких тонкостенных конструкций является классическим разделом механики деформируемого твердого тела, которому посвящен огромный объем публикаций в периодической печати и монографий [9–11]. Не имея возможности воспроизвести здесь сколь-нибудь полный обзор этой проблематики, укажем лишь некоторые источники, непосредственно связанные с настоящей работой. Уравнения для пластин, учитывающих конечные прогибы, впервые были получены Фешлем (без учета моментных составляющих) [12], а затем развиты фон Карманом [13]. Эти уравнения были получены "инженерными" методами, не претендующими на математическую строгость. В частности, вопрос о том, какая все же форма пластины – исходная или деформированная – использовалась для формулировки уравнений баланса, оказывался скрытым в тумане нестрогих рассуждений. Долгое время теория Фешля – фон Кармана оставалась в разряде "инженерных" методов расчета [14–16], хотя сами уравнения, ввиду их внутреннего математического изящества, стали предметом исследования чистых математиков [17–19]. Толчок к развитию строгого подхода к выводу уравнений для гибких пластин дали замечательные работы Съярле [2, 20, 21], в которых осуществлен детальный анализ процедур асимптотического вывода уравнений из точных трехмерных уравнений нелинейной теории упругости и выявлены асимптотически непоследовательные преобразования, приводящие к потере асимптотического порядка. Но даже не вполне корректно полученные уравнения Фешля – фон Кармана, будучи существенно нелинейными, привлекают значительное внимание в плане анализа характера бифуркации решений [22] и разнообразных численно-аналитических и вычислительных методов их решения [23–26].

Настоящая работа имеет следующую структуру. Сначала с учетом кинематических ограничений на допустимые поля перемещений, устанавливаемых гипотезами Кирхгофа – Лява, формулируются уравнения равновесия относительно компонент второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа. Затем строятся их асимптотики

по малому параметру, характеризующему перемещения, и выполняется "асимптотически непоследовательное" редуцирование к форме, обычно принимаемой в теории Фешля – фон Кармана. Таким образом, в явном виде оказываются сформулированы уравнения в трех формах: точной, асимптотической и редуцированной. Далее, следуя такой же методологии, строятся точные, асимптотические и редуцированные представления для тензоров деформаций, напряжений и результатов (сил и моментов), которые при подстановке в полученные до этого варианты уравнений равновесия дают набор различных постановок краевых задач: строгой, асимптотической и редуцированной. Поскольку все постановки идеологически связаны, оказывается возможной модификация соответствующих мер деформаций таким образом, чтобы учесть распределенные несовместные деформации. В качестве примера рассмотрен наиболее простой тип несовместности, порождаемый неоднородным расширением/сжатием. С точки зрения технологии такая несовместность характеризует неравномерные температурные поля, эволюционирующие в процессе изготовления тонкостенного элемента МЭМС. В завершение кратко описан итерационный алгоритм, позволяющий получать решения для краевых задач, порождаемых различными вариантами полученных уравнений для круглой пластины, жестко закрепленной на контуре.

1. Кинематика

Все представления формулируются в цилиндрических координатах (r, φ, z) , которые связаны с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Для координатных представлений полей используется нормированный локальный базис $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$, получаемый из прямоугольного базиса $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ преобразованиями:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

Поле перемещений точек пластины \mathbf{u} , компоненты которого в базисе $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ обозначены символами $U = U(r, \varphi, z)$, $V = V(r, \varphi, z)$, $W = W(r, \varphi, z)$ соответственно, аппроксимируются с учетом кинематических ограничений (гипотез), обычно принимаемых в теории пластин и оболочек Кирхгофа – Лява [10]:

$$\mathbf{u} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\varphi + W\mathbf{e}_z = (u - z\omega, r)\mathbf{e}_r + \left(v - \frac{z}{r}\omega, \varphi\right)\mathbf{e}_\varphi + \omega\mathbf{e}_z. \quad (1)$$

Здесь $u = u(r, \varphi)$ – радиальные, а $v = v(r, \varphi)$ – окружные перемещения точек на поверхности осреднения, $\omega = \omega(r, \varphi)$ – ее вертикальные перемещения (прогибы). При таких предположениях о допустимых полях перемещений их градиент \mathbf{D} , вычисляемый в цилиндрических координатах по формулам

$$\mathbf{D} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} U, r & \frac{1}{r}(U, \varphi - V) & U, z \\ V, r & \frac{1}{r}(U + V, \varphi) & V, z \\ W, r & \frac{1}{r}W, \varphi & W, z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

может быть представлен в виде:

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} u, r - z\omega, rr & \frac{1}{r}(u, \varphi - v) + \frac{z}{r^2}(w, \varphi - r\omega, r\varphi) & -w, r \\ \frac{z}{r^2}(w, \varphi - r\omega, r\varphi) + v, r & \frac{1}{r}(u + v, \varphi) - \frac{z}{r^2}(w, \varphi\varphi + r\omega, r) & -\frac{w, \varphi}{r} \\ w, r & \frac{1}{r}w, \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Замечание. Здесь и в дальнейшем квадратные скобки обозначают матрицу линейного оператора в нормированном диадном базисе цилиндрической системы координат, т.е. если тензор имеет следующее диадное разложение:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & D_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + D_{r\varphi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{rz} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z + \\ & + D_{\varphi r} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_r + D_{\varphi\varphi} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_z + \\ & + D_{zr} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + D_{z\varphi} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\varphi + D_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

то ему соответствует матрица

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{r\varphi} & D_{rz} \\ D_{\varphi r} & D_{\varphi\varphi} & D_{\varphi z} \\ D_{zr} & D_{z\varphi} & D_{zz} \end{bmatrix}.$$

Для симметрических тензоров элементы под главной диагональю заменяются символами "звездочка", т.е. если $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, то

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{rr} & D_{r\varphi} & D_{rz} \\ * & D_{\varphi\varphi} & D_{\varphi z} \\ * & * & D_{zz} \end{bmatrix}.$$

Тензорному полю градиента перемещений \mathbf{D} соответствует поле градиента деформации \mathbf{F} , которое вычисляется по формуле

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}. \quad (4)$$

Здесь \mathbf{I} – единичный тензор, который в диадном разложении представляется единичной матрицей.

2. Асимптотические порядки

Основным инструментом в дальнейших построениях будет асимптотическое разложение по двум малым параметрам, а именно, параметру ε , характеризующему порядок малости перемещений, и толщине h . Спецификой теорий типа Кармана является директивное назначение порядка малости индивидуально каждой компоненте поля перемещений и их производных, и последующая "асимптотическая непоследовательность", при которой некоторые из термов вне зависимости от их асимптотических порядков полагаются малозначимыми и приравниваются нулю.

Асимптотические порядки перемещениям их производным назначаются согласно следующей таблице:

Табл. 1
Асимптотические порядки перемещений и их производных

	\cdot	\cdot, r	\cdot, φ	\cdot, rr	$\cdot, r\varphi$	$\cdot, \varphi\varphi$
u	ε	ε^2	ε^2			
v	ε	ε^2	ε^2			
w	1	ε	ε	ε^2	ε^2	ε^2

В соответствии с назначенными порядками могут быть построены асимптотические представления векторных и тензорных полей, производимых функциями перемещений. Будем использовать индексы над символами для указания асимптотического порядка элементов представлений. В частности, асимптотическое представление

градиента деформации имеет вид:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^1 + \mathbf{F}^2,$$

где $[\mathbf{F}^0]_{..} = O(1)$, $[\mathbf{F}^1]_{..} = O(\varepsilon)$, $[\mathbf{F}^2]_{..} = O(\varepsilon^2)$. Элементы этих матриц согласно таблице 1 и соотношениям (3), (4) могут быть записаны следующим образом:

$$[\mathbf{F}^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}^1] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} - \frac{v}{r} & -w_{,r} \\ \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} & \frac{u}{r} - \frac{z}{r}w_{,r} & -\frac{1}{r}w_{,\varphi} \\ w_{,r} & \frac{1}{r}w_{,\varphi} & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{F}^2] = \begin{bmatrix} u_{,r} - zw_{,rr} & \frac{1}{r}u_{,\varphi} - \frac{z}{r}w_{,r\varphi} & 0 \\ v_{,r} - \frac{z}{r}w_{,r\varphi} & \frac{1}{r}v_{,\varphi} - \frac{z}{r^2}w_{,\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для того чтобы получить соотношения, принимаемые в теориях типа Кармана, упростим асимптотические представления, оставив в них лишь термины с двумя последовательными асимптотическими порядками. При этом различные компоненты одного и того же тензора будут представлены с точностью до различных порядков малого параметра, что, конечно, не согласуется с общей идеологией построения асимптотик (для корректного представления тензора во всех его компонентах должны удерживаться члены одного порядка малости). Вместе с тем, для того, чтобы в итоге прийти к классическим уравнениям Фешля – фон-Кармана, мы вынуждены пойти на этот шаг. Подобные асимптотически некорректно построенные разложения будем называть редуцированными. В частности, для построения матрицы редуцированного градиента деформации $[\mathbf{F}^r]$ возьмем матрицу $[\mathbf{F}^0]$ и неполную матрицу $[\mathbf{F}^1]$, в которой пренебрежем элементом $[\mathbf{F}^1]_{\varphi\varphi}$, полагая, что он не вносит существенный вклад по сравнению с $[\mathbf{F}^0]_{\varphi\varphi} = 1$. Имеем:

$$[\mathbf{F}^r] = [\mathbf{F}^0] + \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{F}^1]_{r\varphi} & [\mathbf{F}^1]_{rz} \\ [\mathbf{F}^1]_{\varphi r} & 0 & [\mathbf{F}^1]_{\varphi z} \\ [\mathbf{F}^1]_{zr} & [\mathbf{F}^1]_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} - \frac{1}{r}v & -w_{,r} \\ \frac{z}{r^2}w_{,\varphi} & 1 & -\frac{w_{,\varphi}}{r} \\ w_{,r} & \frac{w_{,\varphi}}{r} & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ясно, что

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^1 + O(\varepsilon^2), \quad \text{в то время как} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^r + \boldsymbol{\delta},$$

где, вообще говоря, $\boldsymbol{\delta} = O(\varepsilon)$. Выяснить вопрос о том, насколько асимптотика оказалась "искаженной", можно из непосредственного сопоставления этих двух полей для конкретных решений краевых задач. Для полноты изложения приведем выражение для матрицы редуцированного градиента деформации при осевой симметрии:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{,r} \\ 0 & 1 & 0 \\ w_{,r} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Уравнения равновесия

Уравнения равновесия в отсчетном описании могут быть записаны в следующем виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{K} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

где div – оператор дивергенции в отсчетных координатах, \mathbf{K} – плотность объемных сил, \mathbf{P} – тензор напряжений Пиола–Кирхгофа первого рода. Поскольку для рассматриваемой круглой пластины отсчетными являются цилиндрические координаты, то

$$\begin{aligned} [\operatorname{div} \mathbf{P}]_r &= [\mathbf{P}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{rz,z} + \frac{1}{r} ([\mathbf{P}]_{rr} - [\mathbf{P}]_{\varphi\varphi}), \\ [\operatorname{div} \mathbf{P}]_\varphi &= [\mathbf{P}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{\varphi z,z} + \frac{1}{r} ([\mathbf{P}]_{\varphi r} + [\mathbf{P}]_{r\varphi}), \\ [\operatorname{div} \mathbf{P}]_z &= [\mathbf{P}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{P}]_{zz,z} + \frac{1}{r} [\mathbf{P}]_{zr}. \end{aligned}$$

Для того чтобы в итоге прийти к уравнениям типа Кармана, следует записать уравнение равновесия (6) в терминах напряжений Пиола–Кирхгофа второго рода \mathbf{S} , которые связаны с \mathbf{P} соотношением

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

При этом уравнение (6) примет вид

$$\mathcal{L} \mathbf{S} + \mathbf{K} = \mathbf{0},$$

где \mathcal{L} – линейный дифференциальный оператор, действующий на \mathbf{S} по правилу

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}).$$

Явный вид этого оператора зависит от \mathbf{F} и, следовательно, может принимать различные формы для различных асимптотических представлений градиента деформации. Если в качестве \mathbf{F} взять выражение (4) без всяких упрощений, то получим следующие три дифференциальных выражения (линейных относительно компонент тензора напряжений):

$$\begin{aligned} [\mathcal{L} \mathbf{S}]_r &= (\underline{1} + u_{,r} - zw_{,rr}) \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \\ &+ \left(\frac{z}{r^2} zw_{,\varphi} - \frac{1}{r} (zw_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + \underline{v}) \right) \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\ &- \underline{w}_{,r} \left([\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left(\frac{2}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{2}{r} w_{,r\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{\varphi z} + \\ &+ \left(u_{,rr} - zw_{,rrr} + \frac{1}{r} (\underline{1} + u_{,r} - zw_{,rr}) \right) [\mathbf{S}]_{rr} - \left(2w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} \right) [\mathbf{S}]_{rz} - \\ &- \left(\frac{2z}{r^3} w_{,\varphi} - \frac{2z}{r^2} w_{,r\varphi} + \frac{2}{r} (zw_{,rr\varphi} - u_{,r\varphi} + v_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &- \left(\frac{1}{r} - \frac{2z}{r^3} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} (zw_{,r\varphi\varphi} - u_{,\varphi\varphi} + \underline{u} + 2v_{,\varphi} - zw_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \\ [\mathcal{L} \mathbf{S}]_\varphi &= \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + v_{,r} \right) \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \\ &+ \left(\underline{1} + \frac{1}{r} (\underline{u} + v_{,\varphi} - zw_{,r}) - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\ &- \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left(\frac{1}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{2}{r} w_{,r\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{rz} + \\ &+ \left(\frac{z}{r^2} w_{,r\varphi} - \frac{z}{r^3} w_{,\varphi} + v_{,rr} + \frac{1}{r} (v_{,r} - zw_{,rr\varphi}) \right) [\mathbf{S}]_{rr} - \left(\frac{2}{r} w_{,r} + \frac{2}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right) [\mathbf{S}]_{\varphi z} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{r} + \frac{2z}{r^3} w_{,\varphi\varphi} - \frac{2z}{r^2} w_{,r\varphi\varphi} + \frac{2}{r} (v_{,r\varphi} - z w_{,rr} + u_{,r}) \right) [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \\
& + \left(\frac{z}{r^3} (w_{,\varphi} - w_{,\varphi\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} (2u_{,\varphi} - 2z w_{,r\varphi} + v_{,\varphi\varphi} - \underline{v}) \right) [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \\
[\mathcal{L} \mathbf{S}]_z = & \underline{w}_r \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) + \\
& + \underline{1} \left([\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \\
& + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{rz} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}.
\end{aligned}$$

Термы с асимптотическими порядками не выше первого выделены знаком подчеркивания. Они в совокупности определяют асимптотическое представление первого порядка, которое далее будем обозначать символом $\overset{a}{\mathcal{L}}$.

Оператор \mathcal{L} допускает выделение части с асимптотическим порядком $O(1)$, которая есть ничто иное, как оператор дивергенции, характеризующий равновесие пластины в линейном приближении. Остаток, содержащий термы с коэффициентами, зависящими от компонент перемещений и их производных, обозначим символом \mathcal{A} :

$$\mathcal{L} \mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathcal{A} \mathbf{S}.$$

Операторы div и \mathcal{A} линейны относительно компонент второго тензора Пиола–Кирхгофа. Однако если считать, что напряжения зависят от перемещений, то, поскольку коэффициенты остатка \mathcal{A} также зависят от перемещений, этот оператор относительно последних оказывается нелинейным. Условно можно сказать, что \mathcal{A} характеризует "геометрическую нелинейность" упругой системы.

Использование редуцированного градиента деформации (5) вместо $\overset{r}{\mathbf{F}}$ приводит к существенному упрощению первых двух компонент оператора $\overset{r}{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}
[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_r = & \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \frac{z w_{,\varphi} - r v}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\
& - w_{,r} \left([\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{rr} - \frac{r(z w_{,r\varphi} - r v_{,r}) - 2z w_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\
& - \frac{r w_{,rr} + w_{,r}}{r} [\mathbf{S}]_{rz} - \frac{z w_{,\varphi\varphi} - r(r + v_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + \frac{2w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi z},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_{\varphi} = & \frac{z w_{,\varphi}}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} \right) + \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} \right) - \\
& - \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{zz,z} \right) + \frac{z(r w_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \\
& + \frac{2r^2 + z w_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{rz} + \frac{z w_{,\varphi} - r v}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} - \frac{r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi z}.
\end{aligned}$$

Третья компонента не изменяется:

$$[\overset{r}{\mathcal{L}} \mathbf{S}]_{\varphi} = [\mathcal{L} \mathbf{S}]_{\varphi}.$$

Соответствующий этим выражениям редуцированный оператор $\overset{r}{\mathcal{L}}$ сохраняет главную (дивергентную) часть, но остаток $\overset{r}{\mathcal{A}}$ становится более простым:

$$\overset{r}{\mathcal{L}}\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{S} + \overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}.$$

В рамках теории типа Кармана принято пренебрегать термами, в которых присутствуют произведения перемещений на касательные компоненты напряжений $[\mathbf{S}]_{rz}$, $[\mathbf{S}]_{\varphi z}$, и термами, содержащими $[\mathbf{S}]_{zz}$. В следующих формулах, дающих явные выражения компонент редуцированного остатка, эти члены перечеркнуты:

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_r &= \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z,z}} \right) - \\ &\quad - w_{,r} \left(\cancel{[\mathbf{S}]_{zr,r}} + \frac{1}{r} \cancel{[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi}} + \cancel{[\mathbf{S}]_{zz,z}} \right) - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &\quad - \frac{rw_{,rr} + w_{,r}}{r} \cancel{[\mathbf{S}]_{rz}} - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + \frac{2w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_{\varphi} &= \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{rz,z}} \right) - \\ &\quad - \frac{w_{,\varphi}}{r} \left(\cancel{[\mathbf{S}]_{zr,r}} + \frac{1}{r} \cancel{[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi}} + \cancel{[\mathbf{S}]_{zz,z}} \right) + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \\ &\quad + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{rz}} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} - \frac{rw_{,r} + w_{,\varphi\varphi}}{r^2} \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_z &= w_r \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{rz,z}} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \cancel{[\mathbf{S}]_{\varphi z,z}} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения вновь оказались подвергнутыми "асимптотически последовательному" преобразованию, обосновать которое сложно строго математическими методами, но можно оправдать тем фактом, что поставленные в итоге краевые задачи дают решение, близкое к ожидаемому. Приближенные выражения для компонент оператора $\overset{r}{\mathcal{A}}$ записаны ниже:

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_r &\approx \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \\ &\quad - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}, \end{aligned}$$

$$[\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_{\varphi} \approx \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi},$$

$$\begin{aligned} [\overset{r}{\mathcal{A}}\mathbf{S}]_z &\approx w_r \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \\ &\quad + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}. \end{aligned}$$

Используя полученные упрощенные выражения, вновь сформулируем систему уравнений равновесия, которая оказывается упрощенным (в духе теории типа Кармана) аналогом полной системы (6):

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) - \\
& \quad - \frac{r(zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - 2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} - \frac{zw_{,\varphi\varphi} - rv_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_r = 0, \\
& [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi r} - \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \\
& \quad + \frac{z(rw_{,r\varphi} - w_{,\varphi})}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_{\varphi} = 0, \\
& [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\
& \quad + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_z = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Третье уравнение этой системы характеризует равновесие относительно оси z , что является наиболее важным в технической теории пластин. Это уравнение допускает дальнейшее эффективное преобразование, если выразить "плоские" компоненты второго тензора напряжений Пиола-Кихгофа, а именно, $[\mathbf{S}]_{rr}$, $[\mathbf{S}]_{r\varphi}$, $[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}$ через двумерную функцию напряжений (которая, тем не менее, может параметрически зависеть от переменной z):

$$[\mathbf{S}]_{rr} = \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r}, \quad [\mathbf{S}]_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi}, \quad [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} = \psi_{,rr}.$$

Подстановка выражений "плоских" компонент напряжений в терминах функции Эри в третье уравнение дает

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left(\left(\frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r} \right)_{,r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right)_{,\varphi} \right) + \\
& \quad + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left(\left(\frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right)_{,r} + \frac{1}{r}(\psi_{,rr})_{,\varphi} \right) + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) \left(\frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}\psi_{,r} \right) + \\
& \quad + \frac{2w_{,r\varphi}}{r} \left(\frac{1}{r^2}\psi_{,\varphi} - \frac{1}{r}\psi_{,r\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2}(\psi_{,rr}) + [\mathbf{K}]_z = 0.
\end{aligned}$$

Легко видеть, что в этом выражении после раскрытия скобок третьи производные взаимно уничтожаются и левая часть уравнения может быть преобразована к виду:

$$[\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + L[w, \psi] + [\mathbf{K}]_z = 0,$$

где символом L обозначен нелинейный дифференциальный оператор, обычно возникающий в теории Кармана:

$$\begin{aligned}
L[w, \psi] = & \frac{1}{r}(w_{,r}\psi_{,rr} + \psi_{,r}w_{,rr}) + \frac{1}{r^2}(w_{,rr}\psi_{,\varphi\varphi} + \psi_{,rr}w_{,\varphi\varphi} - 2\psi_{,r\varphi}w_{,r\varphi}) + \\
& + \frac{2}{r^3}(w_{,r\varphi}\psi_{,\varphi} + \psi_{,r\varphi}w_{,\varphi}) - \frac{2}{r^4}\psi_{,\varphi}w_{,\varphi}.
\end{aligned}$$

Довольно сложный вид этого оператора может сделать его плохо узнаваемым, однако преобразование полярных переменных к декартовым

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(x, y)$$

приводит его к легко узнаваемому виду:

$$L[w, \psi] = \psi_{,yy} w_{,xx} + \psi_{,xx} w_{,yy} - 2\psi_{,xy} w_{,xy}.$$

Если из системы (7) исключить термы, асимптотический порядок которых выше первого, то придем к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\ + \frac{2zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{r\varphi} + [\mathbf{K}]_r = 0, \\ [\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathbf{S}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi r} - \frac{zw_{,\varphi}}{r^2} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) - \\ - \frac{zw_{,\varphi}}{r^3} [\mathbf{S}]_{rr} + \frac{zw_{,\varphi} - rv}{r^3} [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} + [\mathbf{K}]_{\varphi} = 0, \\ [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r} \left([\mathbf{S}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{r\varphi,\varphi} \right) + \frac{w_{,\varphi}}{r} \left([\mathbf{S}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi,\varphi} \right) + \\ + \frac{w_{,r}}{r} [\mathbf{S}]_{rr} + [\mathbf{K}]_z = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

В первых двух уравнениях все еще остались слагаемые (они подчеркнуты), нетипичные для классической линейной теории пластин Софи-Жермен–Лаганжа (а именно, она используется в процессе "инженерного" вывода уравнений Кармана). Эти слагаемые характеризуют конечный поворот в плоскости, касательной к изогнутой срединной поверхности пластины, сопровождающий неосесимметричную деформацию. В дальнейшем, для того чтобы получить уравнения типа Кармана в привычном виде, нам придется их отбросить. Вместе с тем в осесимметричном случае подобных проблем не возникает вовсе (здесь следует отметить, что практически все статьи, посвященные решениям уравнений типа Кармана в цилиндрических координатах, ограничиваются случаем осевой симметрии). Действительно, при осевой симметрии система (7) сокращается до двух уравнений:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}]_{rr,r} + [\mathbf{S}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathbf{S}]_{rr} - [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}) + [\mathbf{K}]_r = 0, \\ [\mathbf{S}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r}[\mathbf{S}]_{rr,r} + \left(\frac{w_{,r}}{r} + w_{,rr} \right) [\mathbf{S}]_{rr} + [\mathbf{K}]_z = 0. \end{aligned}$$

При этом второе уравнение может быть один раз проинтегрировано: если умножить левую часть на r , то придем к соотношению

$$(r [\mathbf{S}]_{zr} + [\mathbf{S}]_{zr} + r w_{,r} [\mathbf{S}]_{rr})_{,r} + r [\mathbf{K}]_z = 0.$$

Следовательно (см. также [30]),

$$[\mathbf{S}]_{zr} + \frac{1}{r}[\mathbf{S}]_{zr} + w_{,r}[\mathbf{S}]_{rr} = -\frac{1}{r} \int [\mathbf{K}]_z r dr.$$

4. Меры деформации

В качестве меры деформаций, определяющей упругий отклик пластины на внешнее силовое воздействие, выберем тензор, энергетически сопряженный к второму тензору напряжений Пиола–Кирхгофа, а именно, тензор деформаций Грина–Сен-Венана:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (9)$$

Зная выражения для компонент градиента деформации (4), не составляет труда записать в явном виде компоненты тензора \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]_{rr} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{z}{r^2} (w_{,\varphi} - rw_{,r\varphi}) + v_{,r} \right)^2 + (u_{,r} - zw_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right), \\ [\mathbf{E}]_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} w_{,\varphi} w_{,r} + (u_{,r} - zw_{,rr} + 1) \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} + \frac{1}{r} (u_{,\varphi} - v - zw_{,r\varphi}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right) \left(\frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (w_{,\varphi\varphi} + rw_{,r}) + 1 \right) \right), \\ [\mathbf{E}]_{rz} &= \frac{1}{2} \left(w_{,r} (zw_{,rr} - u_{,r}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} (zw_{,r\varphi} - rv_{,r}) - \frac{z}{r^3} (w_{,\varphi})^2 \right), \\ [\mathbf{E}]_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (w_{,\varphi\varphi} + rw_{,r}) + 1 \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} (w_{,\varphi})^2 + \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (v - u_{,\varphi} + zw_{,r\varphi}) \right)^2 - 1 \right), \\ [\mathbf{E}]_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} w_{,r} (v - u_{,\varphi}) + \frac{z}{r} \left(w_{,r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} w_{,\varphi\varphi} \right) - \frac{1}{r^2} (uw_{,\varphi} + v_{,\varphi} w_{,\varphi}) \right), \\ [\mathbf{E}]_{zz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + w_{,r}^2 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Выписанные соотношения являются точными, но в них входят функции перемещений и их производных различных асимптотических порядков. Соблюдая асимптотическую идеологию построения уравнений, принятую в настоящей работе, выпишем меру деформаций в форме асимптотических приближений, порядки которых не превосходят $O(\varepsilon^2)$. Имеем:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{rv-2zw_{,\varphi}}{2r^2} & 0 \\ * & \frac{u-zw_{,r}}{r} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) & \frac{r^3 v_{,r} - 2r^2 zw_{,r\varphi} + r^2 u_{,\varphi} + w_{,\varphi} (w_{,r} (r^2 - z^2) + uz)}{2r^3} & -\frac{zw_{,\varphi}^2}{2r^3} \\ * & \frac{2r^2 (rv_{,\varphi} - zw_{,\varphi\varphi}) + r^2 w_{,\varphi}^2 + (ru - rz w_{,r})^2 + (rv - zw_{,\varphi})^2}{2r^4} & \frac{rv w_{,r} - u w_{,\varphi}}{2r^2} \\ * & * & \frac{1}{2} \left(\frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, асимптотически строгое приближение второго порядка для тензора деформаций Грина–Сен-Венана дается соотношением

$$\mathbf{E} = \overset{1}{\mathbf{E}} + \overset{2}{\mathbf{E}} + O(\varepsilon^3). \quad (11)$$

Мы же пойдем дальше, выполнив "асимптотически непоследовательные" построения, используя для определения тензора Грина–Сен-Венана не точное выражение для градиента места (4), а его редуцированный аналог (5). В результате получим следующее соотношение:

$${}^r[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) & -\frac{rv - 2zw_{,\varphi}}{2r^2} & -\frac{zw_{,\varphi}^2}{2r^3} \\ * & \frac{u - zw_{,r}}{r} & \frac{rvw_{,r} - uw_{,\varphi}}{2r^2} \\ * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

которое, конечно, проще как точного (10), так и строгого асимптотического (11) представлений. Однако строго обосновать его не удастся и остается лишь выполнять проверку адекватности решений соответствующих краевых задач, подставляя найденные поля в точные или асимптотически строгие уравнения. Для полноты изложения приведем матрицу тензора Грина–Сен-Венана для случая осевой симметрии:

$$[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left((u_{,r} - zw_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right) & 0 & -\frac{1}{2} w_{,r} (u_{,r} - zw_{,rr}) \\ * & \frac{(u - zw_{,r})(-zw_{,r} + 2r + u)}{2r^2} & 0 \\ * & * & \frac{w_{,r}^2}{2} \end{bmatrix}$$

и его редуцированного аналога (деформации фон Кармана)

$${}^r[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2} - zw_{,rr} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u - zw_{,r}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Законы состояния

Для замыкания системы уравнения равновесия требуется дополнить уравнениями состояния, которые можно определить в рамках теории простого гиперупругого материала. Идеология этой теории предполагает достаточно произвольный выбор функций, конкретизирующих форму потенциала запасаемой упругой энергии (при известных ограничениях индифферентности и положительной определенности). Для того чтобы не сильно удаляться от теорий типа Кармана, будем использовать весьма частный вид потенциала, а именно, потенциал Сен-Венана–Кирхгофа:

$$W = \frac{\lambda}{2} (\mathbf{I} : \mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E}. \quad (13)$$

Здесь λ , μ – материальные константы, аналогичные константам Ламе, используемым в линейной теории упругости изотропного тела.

Потенциалу Сен-Венана–Кирхгофа соответствует (получается из формулы Дойля–Эриксона) закон состояния, линейно связывающий тензор деформаций \mathbf{E} со вторым тензором напряжений Пиола–Кирхгофа:

$$\mathbf{S} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (14)$$

Явные точные выражения для компонент тензора напряжений представлены ниже:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}]_{rr} &= \mu \left(\left(\frac{z(w_{,\varphi} - r w_{,r\varphi})}{r^2} + v_{,r} \right)^2 + (u_{,r} - z w_{,rr} + 1)^2 + w_{,r}^2 - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{r\varphi} &= \mu \left(\frac{1}{r} w_{,r} w_{,\varphi} + (u_{,r} - z w_{,rr} + 1) \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right) \left(1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}) \right) \right), \\
[\mathbf{S}]_{rz} &= -\mu \left(w_{,r} (u_{,r} - z w_{,rr}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} (r v_{,r} - z w_{,r\varphi}) + \frac{z}{r^3} w_{,\varphi}^2 \right), \\
[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} &= \mu \left(\left(1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) - \frac{z}{r^2} (r w_{,r} + w_{,\varphi\varphi}) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right)^2 - 1 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi z} &= \mu \left(\frac{z}{r} \left(w_{,r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi} w_{,\varphi\varphi} \right) + \frac{1}{r} w_{,r} (v - u_{,\varphi}) - \frac{1}{r^2} (u w_{,\varphi} + v_{,\varphi} w_{,\varphi}) \right), \\
[\mathbf{S}]_{zz} &= \mu \left(\frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
s &= (u_{,r} - z w_{,rr} + 1)^2 + 2w_{,r}^2 - 2 + \left(1 + \frac{1}{r} (u + v_{,\varphi}) + \frac{z}{r} w_{,r} - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} \right)^2 + \\
&\quad + \frac{2}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left(\frac{z}{r^2} w_{,\varphi} - \frac{1}{r} (z w_{,r\varphi} - u_{,\varphi} + v) \right)^2 + \left(v_{,r} - \frac{z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right)^2.
\end{aligned}$$

Асимптотические представления первого и второго порядков даются формулами:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{S}]^1 &= \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{r} (u - z w_{,r}) & -\frac{\mu}{r^2} (r v - 2z w_{,\varphi}) & 0 \\ * & \frac{\lambda + 2\mu}{r} (u - z w_{,r}) & 0 \\ * & * & \frac{\lambda}{r} (u - z w_{,r}) \end{bmatrix}, \\
[\mathbf{S}]_{rr}^2 &= \mu \left(\frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2z w_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{r\varphi}^2 &= \mu \left(v_{,r} - \frac{2z}{r} w_{,r\varphi} + \frac{1}{r} u_{,\varphi} + w_{,\varphi} \left(\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right) w_{,r} + \frac{z}{r^3} u \right) \right), \\
[\mathbf{S}]_{rz}^2 &= -\frac{\mu z w_{,\varphi}^2}{r^3}, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}^2 &= \mu \left(\frac{2}{r^2} (r v_{,\varphi} - z w_{,\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 + \left(\frac{1}{r} u - \frac{z}{r} w_{,r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} v - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi} \right)^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s, \\
[\mathbf{S}]_{\varphi z}^2 &= \frac{\mu}{r^2} (r v w_{,r} - u w_{,\varphi}), \\
[\mathbf{S}]_{zz}^2 &= \mu \left(\frac{w_{,\varphi}^2}{r^2} + w_{,r}^2 \right) + \frac{\lambda}{2} s,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overset{2}{s} = 2 \left(u_{,r} - zw_{,rr} + w_{,r}^2 + \frac{1}{r} v_{,\varphi} - \frac{z}{r^2} w_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r^2} w_{,\varphi}^2 \right) + \\ + \left(\frac{1}{r} u - \frac{z}{r} w_{,r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} v - \frac{z}{r} w_{,\varphi} \right)^2 + \frac{z^2}{r^4} w_{,\varphi}^2. \end{aligned}$$

Итак, точные и асимптотические представления для компонент тензора напряжений получены. Осталось лишь построить редуцированное представление, для чего следует подставить в закон состояния (14) редуцированный тензор деформаций (12). Имеем:

$$[\overset{r}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mu \left(\frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & -\frac{\mu}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu}{r^3} zw_{,\varphi}^2 \\ * & \frac{2\mu}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & \frac{\mu}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\overset{r}{s} = \frac{z^2}{r^4} w_{,\varphi}^2 + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} + \frac{2}{r} (u - zw_{,r}).$$

Полученное выражение содержит различные произведения, а также степени перемещений и их производных, в связи с чем оно может быть приведено к более простой форме за счет отбрасывания термов, асимптотический порядок которых выше второго. В итоге приходим к следующему асимптотическому представлению редуцированного тензора напряжений:

$$[\overset{r1}{\mathbf{S}}] = [\overset{1}{\mathbf{S}}], \quad [\overset{r2}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)}{2} \overset{r2}{s} & 0 & -\frac{\mu zw_{,\varphi}^2}{r^3} \\ * & \frac{1}{2} \lambda \overset{r2}{s} & \frac{\mu (rvw_{,r} - uw_{,\varphi})}{r^2} \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\overset{r2}{s} = \frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr}.$$

Суммируя асимптотические представления, приходим к так называемому тензору напряжений Кармана:

$$[\overset{k}{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \mu \left(\frac{z^2 w_{,\varphi}^2}{r^4} + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & -\frac{\mu}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu}{r^3} zw_{,\varphi}^2 \\ * & \frac{2\mu}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda}{2} \overset{r}{s} & \frac{\mu}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

При выводе соотношений для асимптотических и редуцированных представлений напряжений в качестве отправной точки был использован частный вид потенциала запасенной упругой энергии (13). Это позволило прийти в итоге к классической формулировке напряжений Кармана (15). Конечно, можно воспользоваться другими формулировками для потенциала запасенной упругой энергии, например, потенциалом Муни–Ривлина. Однако в этом случае получим иные выражения для компонент редуцированных напряжений, поскольку в исходных соотношениях для законов состояния будут использованы все алгебраические инварианты тензора деформаций, а их асимптотические и редуцированные представления будут отличаться от (15).

6. Результаты

Для получения двумерных уравнений равновесия, которые чаще всего используются при моделировании полей в пластинах и оболочках, следует произвести осреднение уравнений равновесия (8) по толщине пластины, что сводится к вычислению моментов (в математическом смысле) левых и правых частей этих уравнений по переменной z в пределах $(-h/2, h/2)$. Интегрирование (8) с весом 1 приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathfrak{T}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathfrak{T}]_{rr} - [\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi}) + \mathfrak{E}_r + [\mathfrak{D}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathfrak{T}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi r} + \mathfrak{E}_\varphi + [\mathfrak{D}]_\varphi &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{zr} + L[w, \hat{\psi}] + [\mathfrak{D}]_z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

а интегрирование первых двух уравнений (8) с весом z дает:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{r\varphi,\varphi} + [\mathfrak{M}]_{rz,z} + \frac{1}{r}([\mathfrak{M}]_{rr} - [\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi}) + \mathfrak{E}_r + [\mathfrak{Q}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi,\varphi} + [\mathfrak{M}]_{\varphi z,z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi r} + \mathfrak{E}_\varphi + [\mathfrak{Q}]_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\hat{\psi} = \int_{-h/2}^{h/2} \psi dz, \quad \mathfrak{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} dz, \quad \mathfrak{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S} z dz, \quad \mathfrak{D} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{K} dz, \quad \mathfrak{Q} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{K} z dz,$$

а \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ , \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ — соответствующие интегралы от зачеркнутых термов в уравнениях (8). Если предположить, что касательные напряжения $[\mathbf{S}]_{rz}$, $[\mathbf{S}]_{\varphi z}$ распределены по толщине непрерывно, а их значения на лицевых поверхностях пластины обращаются в ноль, то

$$[\mathfrak{T}]_{rz,z} = [\mathfrak{T}]_{\varphi z,z} = 0, \quad [\mathfrak{M}]_{rz,z} = -[\mathfrak{T}]_{rz}, \quad [\mathfrak{M}]_{\varphi z,z} = -[\mathfrak{T}]_{\varphi z}.$$

Полагая (здесь уже без всякого аналитического обоснования), что термами \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ , \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ можно пренебречь, приходим к системе пяти уравнений:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{T}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{r\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}([\mathfrak{T}]_{rr} - [\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi}) + [\mathfrak{D}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi\varphi,\varphi} + \frac{2}{r}[\mathfrak{T}]_{\varphi r} + [\mathfrak{D}]_\varphi &= 0, \\ [\mathfrak{T}]_{zr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{z\varphi,\varphi} + \frac{1}{r}[\mathfrak{T}]_{zr} + L[w, \hat{\psi}] + [\mathfrak{D}]_z &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{rr,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{r\varphi,\varphi} - [\mathfrak{T}]_{rz} + \frac{1}{r}([\mathfrak{M}]_{rr} - [\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi}) + [\mathfrak{Q}]_r &= 0, \\ [\mathfrak{M}]_{\varphi r,r} + \frac{1}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi\varphi,\varphi} - [\mathfrak{T}]_{\varphi z} + \frac{2}{r}[\mathfrak{M}]_{\varphi r} + [\mathfrak{Q}]_\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Легко видеть, что первые два уравнения (18) по форме совпадают с уравнениями плоской теории упругости в полярных координатах, а последние три без учета оператора $L[\cdot, \cdot]$ — с классическими уравнениями равновесия линейной теории пластин. Следует отметить, что эта система, которая представляет уравнения

Фешля – фон Кармана, точно как первая асимптотика (правда, в этом случае не требуется учитывать оператор $L[\cdot, \cdot]$), но не является математически строгой второй асимптотикой ввиду того, что в процессе ее вывода некоторые термы отбрасывались без должного обоснования. Валидацию этих уравнений следует основывать на конкретных расчетах, сопоставляя их результаты с аналогичными расчетами по полной асимптотической или точной системе уравнений, либо путем непосредственной оценки энергетического вклада отброшенных термов, явные выражения для которых приведены выше.

Результантами будем называть моменты (в математическом смысле) распределений напряжений по толщине пластины. Соответственно, момент нулевого порядка характеризует средние по толщине напряжения, умноженные на толщину пластины. В технической теории такие средние принято называть усилиями в плоскости осреднения. Однако следует отметить, что в приводимых далее соотношениях используются напряжения Пиола – Кирхгофа второго рода, в отличие от линейной теории пластин, в которой фигурируют напряжения Коши. Кроме того, ввиду нелинейной зависимости компонент напряжений от переменной z , эти соотношения требуют дополнительного асимптотического разложения по второму малому параметру – толщине. Итак, моменты нулевого порядка задаются двумерным тензорным полем

$$\mathfrak{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}^k dz = \overset{0}{\mathfrak{T}} + \overset{2}{\mathfrak{T}},$$

где $\overset{0}{\mathfrak{T}}$ – результат интегрирования термов, не содержащих переменную z , а $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ – результат интегрирования термов, содержащих переменную z^2 :

$$[\overset{0}{\mathfrak{T}}] = h \begin{bmatrix} \frac{\lambda u}{r} + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(2u_{,r} + w_{,r}^2) & -\frac{\mu v}{r} & 0 \\ * & \frac{u(\lambda+2\mu)}{r} + \lambda\left(u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2}\right) & \frac{\mu}{r^2}(rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\overset{2}{\mathfrak{T}}] = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{(\lambda+2\mu)w_{,\varphi}^2}{2r^4} & 0 & 0 \\ * & \frac{\lambda w_{,\varphi}^2}{2r^4} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

В классической теории компонентами $\overset{2}{\mathfrak{T}}$ пренебрегают.

Моменты первого порядка характеризуют двумерные тензорные поля, значения которых в технической теории называются изгибающими и крутящими моментами:

$$\mathfrak{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{S}^k z dz,$$

$$\mathfrak{M} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda w_{,r}}{r} - (\lambda + 2\mu)w_{,rr} & \frac{2\mu w_{,\varphi}}{r^2} & -\frac{\mu w_{,\varphi}^2}{r^3} \\ * & -\frac{(\lambda+2\mu)w_{,r}}{r} - \lambda w_{,rr} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

В осесимметричном случае $[\mathfrak{M}]^2 = [0]$, а остальные матрицы компонент оказываются диагональными:

$${}^0[\mathfrak{M}] = h \begin{bmatrix} \frac{\lambda u}{r} + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(2u_{,r} + w_{,r}^2) & 0 & 0 \\ * & \frac{u(\lambda+2\mu)}{r} + \lambda\left(u_{,r} + \frac{w_{,r}^2}{2}\right) & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{M} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} -\frac{\lambda w_{,r}}{r} - (\lambda + 2\mu)w_{,rr} & 0 & 0 \\ * & -\frac{(\lambda+2\mu)w_{,r}}{r} - \lambda w_{,rr} & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что компоненты $[\cdot]_{zz}$ всех результатов оказались равными нулю из-за того, что соответствующая компонента редуцированного тензора напряжений (Кармана) была положена (без должного асимптотического обоснования) равной нулю. Здесь мы попадаем в проблемное место, характерное для всех теорий типа Кирхгофа–Лява, в том числе линейных: кинематическая гипотеза, утверждающая о неизменности длины нормального элемента, не согласуется со статической гипотезой об отсутствии обжатия по толщине.

7. Несовместные деформации

Несовместные деформации характеризуют деформированное состояние среды локально, при этом сама такая локальная деформация (т.е. деформация, ассоциированная с инфинитезимальной окрестностью материальной точки) вовсе не обязательно должна быть геометрически согласована с локальными деформациями окрестностей соседних точек. Образно говоря, деформируемое тело получает внутренние источники напряжений, которые исчезнут, если позволить телу распасться на бесконечно малые элементы и позволить им деформироваться независимо. Разрушение закаленного стекла вследствие удара дает наглядную иллюстрацию этого соображения. Если предположить, что для описания отклика тела достаточно формализовать деформации, как локальные, так и глобальные, в терминах линейных операторов над векторным пространством, касательным к телу, то для учета несовместности достаточно заменить аргумент в функционале отклика с градиента деформации \mathbf{F} на композицию $\mathbf{F} \circ \mathfrak{K}$, где \mathfrak{K} – поле импланта [8], характеризующего локальную деформацию. На это поле, вообще говоря, накладывается лишь требование гладкости, и, в отличие от градиента деформации, оно не может быть представлено градиентом какого-либо векторного поля. Формально это означает, что если условие $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ выполняется во всех точках, то условие $\nabla \times \mathfrak{K} = \mathbf{0}$ истинно только в исключительных случаях; вообще говоря, $\nabla \times \mathfrak{K} \neq \mathbf{0}$. Для учета импланта в рамках теории, развиваемой в настоящей работе, следует изменить выражение для тензора деформаций Грина–Сен-Венана (9) следующим образом:

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{K}^T \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathfrak{K} - \mathbf{I} \right).$$

Это, конечно, приведет к существенному изменению выражений для всех компонент тензора деформаций. Однако качественно показать сущность несовместных деформаций можно на простом примере, в котором мы предположим, что в каждой точке имплант – шаровой тензор. Тогда

$$\mathfrak{K} = \mathbf{I} \theta,$$

где $\theta = \theta(r, \varphi, z)$ – некоторое скалярное поле, которое можно ассоциировать с объемной усадкой материала (его можно также интерпретировать как результат неоднородных температурных деформаций). Тогда выражение для полного тензора деформаций (который в этом случае более уместно назвать тензором локальной дисторсии [8]) принимает вид:

$$\mathbf{E}^* = \theta \mathbf{E} + \frac{\theta - 1}{2} \mathbf{I}.$$

Ему соответствуют следующие выражения для запасенной упругой энергии:

$$W^* = \left(\frac{\lambda\theta}{2} + \mu(\theta - 1) \right) \mathbf{I} : \mathbf{E} + \mu\theta^2 \mathbf{E} : \mathbf{E} + \frac{3}{2} \mu(\theta - 1)^2$$

и напряжений Пиола – Кирхгофа:

$$\mathbf{S}^* = \theta (\lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : \mathbf{E} + 2\mu \mathbf{E}) + \frac{\theta}{2} (3\lambda + 2\mu) \mathbf{I}.$$

Опуская довольно очевидные выкладки, приводящие к модифицированным (с учетом импланта) выражениям для точных и асимптотических представлений напряжений, приведем окончательный результат для напряжений Кармана:

$$[\mathbf{S}]^k = \begin{bmatrix} \mu\theta \left(\frac{z^2 w^2}{r^4} \varphi + 2u_{,r} + w_{,r}^2 - 2zw_{,rr} \right) + \frac{\lambda\theta}{2} \frac{r}{s} + s_0 & -\frac{\mu\theta}{r^2} (rv - 2zw_{,\varphi}) & -\frac{\mu\theta}{r^3} zw^2_{,\varphi} \\ * & \frac{2\mu\theta}{r} (u - zw_{,r}) + \frac{\lambda\theta}{2} \frac{r}{s} + s_0 & \frac{\mu\theta}{r^2} (rvw_{,r} - uw_{,\varphi}) \\ * & * & 0 \end{bmatrix},$$

$$s_0 = \frac{\theta}{2} (3\lambda + 2\mu).$$

Конкретную зависимость $\theta = \theta(r, \varphi, z)$ можно получить, например, из решения эволюционной задачи [8], в которой моделируется технологический процесс создания тонкостенного элемента за счет аддитивного присоединения материала (в частности, технологии CVD, PVD).

8. Итерационный алгоритм построения решения краевых задач

Решение уравнений типа Кармана представляет известную проблему, связанную с их существенной нелинейностью. Известны различные способы построения численных и численно-аналитических алгоритмов их решений [23–26, 29, 31]. В рамках настоящей статьи развивается методика численно-аналитического решения, в аналитической части которой используются явные представления операторов, обратных к дифференциальным операторам, порождаемым линейными частями уравнений. В численной части реализуется идеология метода последовательных приближений по нелинейной части задачи. При этом для стабилизации итерационного процесса используется регуляризация, позволяющая избежать его вычислительной неустойчивости.

Вначале рассмотрим осесимметричный (одномерный) случай и сформулируем краевую задачу в наиболее простом виде (именно так она записывается в большинстве исследований):

$$D\nabla^2 \nabla^2 \omega - hL[\psi, \omega] = q, \quad (19)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{E}{2} L[\omega, \omega] = 0. \quad (20)$$

Здесь D – цилиндрическая жесткость, ω – прогибы, h – толщина пластины, ψ – функция напряжений, q – интенсивность поперечной нагрузки, E – модуль Юнга;

$$\nabla^2 \nabla^2 f = f_{,rrrr} + \frac{2f_{,rrr}}{r} - \frac{f_{,rr}}{r^2} + \frac{f_{,r}}{r^3},$$

$$L[f, g] = \frac{1}{r} (f_{,r} g_{,rr} + f_{,rr} g_{,r}).$$

Уравнения дополняются краевыми условиями (без ограничения общности можем считать опорный контур окружностью единичного радиуса)

$$\begin{aligned} \omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad u|_{r=0} = 0, \\ \omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = u|_{r=1} = 0 \end{aligned}$$

и условиями нормировки функции напряжений

$$\psi|_{r=0} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = O(1).$$

В осесимметричном случае выражение для радиального смещения на границе может быть выражено через функцию напряжений:

$$u = \frac{1}{E} (r \psi_{,rr} - \nu \psi_{,r}).$$

Следовательно, краевые условия принимают вид

$$\begin{aligned} \omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad \omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = 0, \\ \psi|_{r=0} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = O(1), \quad \psi|_{r=1} = (\psi_{,rr} - \nu \psi_{,r})|_{r=1} = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Здесь и далее используются технические характеристики упругости E , ν , D , которые связаны с используемыми ранее модулями Ламе соотношениями (двумерный вариант):

$$E = 4\mu \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad D = \frac{\mu h^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Прежде чем перейти к описанию итерационного процесса, построим операторы, обратные к линейным частям (19), (20). Дифференциальные выражения для этих частей одинаковы – оба представлены бигармонической операцией, но их области определения различаются, поскольку различаются краевые условия для прогибов ω и функции напряжений ψ . Оба оператора, $(\nabla^2 \nabla^2)_{\omega}^{-1}$, $(\nabla^2 \nabla^2)_{\psi}^{-1}$, могут быть представлены единообразно как интегральные операторы

$$(\nabla^2 \nabla^2)_{\omega, \psi}^{-1} q = \int_0^r q(\zeta) K_{\omega, \psi}(\zeta, r) \zeta d\zeta + \int_r^1 q(\zeta) K_{\omega, \psi}(r, \zeta) \zeta d\zeta, \quad (21)$$

но с различными ядрами

$$K_{\omega}(\zeta, r) = \frac{h}{8D} (2(\zeta^2 + r^2) \ln r + (\zeta^2 + 1)(1 - r^2)),$$

$$K_{\psi}(\zeta, r) = \frac{h}{8D} \left(2(\zeta^2 + r^2) \ln r + \frac{3 - \nu - \zeta^2(1 + \nu)}{1 - \nu} (1 - r^2) \right).$$

Используя второй оператор, можно сразу исключить одну из искомым функций,

$$\psi = -\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega, \omega]],$$

и в итоге прийти к одному уравнению:

$$\nabla^2\nabla^2\omega = \frac{1}{D} \left(q + hL[-\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega, \omega], \omega]] \right). \quad (22)$$

Для его решения организуем итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} [q], \\ \omega_{k+1} &= \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} \left[q + hL[-\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi}[L[\omega_k, \omega_k], \omega_k]] \right], \end{aligned}$$

в ходе которого получается последовательность решений $(\omega_0, \omega_1, \dots)$. Эта последовательность сходится достаточно быстро, если на каждом шаге правая часть уравнения (22) мало отличается от q . Вместе с тем, именно случаи, когда нелинейный терм проявляет себя значительно, наиболее интересны. Для преодоления проблемы расходимости предлагается использовать регуляризацию итерационного процесса, идея которой подобна методу суммирования Фейера (средних арифметических). При этом на каждом шаге вычисляется выражение

$$\omega_{k+1} = \frac{1}{D} (\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\omega} \left[q + hL \left[-\frac{E}{2}(\nabla^2\nabla^2)^{-1}_{\psi} L[\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \omega_k] \right] \right],$$

где $\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k]$ – регуляризатор итерационного процесса, использующий ”память” о всех предыдущих итерациях и создающий ”вычислительную вязкость” в алгоритме:

$$\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k] = \sum_{n=1}^k \zeta_n \omega_n.$$

Последовательность весовых множителей $(\zeta_n)_{n=1}^k$ задает глубину ”памяти”. Если

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & n = k; \\ 0, & n < k, \end{cases}$$

то регуляризатор не вносит никаких поправок в итерации, если же $\forall n \quad \zeta_n = 1/k$, то регуляризатор учитывает всю предысторию итерационного процесса и осуществляет наилучшее сглаживание его вариативности. Конечно, в этом случае требуется большее число итераций. Можно использовать промежуточные варианты. Выбор конкретного вида последовательности весовых множителей $(\zeta_n)_{n=1}^k$ зависит от величины вклада нелинейных операторов в решение и в конечном итоге от отношения ожидаемого прогиба к характерному размеру пластины.

Для того чтобы показать, как приведенный выше алгоритм может быть применен для решения краевых задач, порождаемых другими вариантами рассмотренных выше уравнений, остановимся подробнее на системе, эквивалентной (19), (20), но сформулированной относительно функций прогибов и радиальных перемещений:

$$\begin{aligned} D\nabla^2\nabla^2\omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(u_{,r} + \frac{1}{2}\omega_{,r}^2 \right) \left(\omega_{,rr} + \nu \frac{\omega_{,r}}{r} \right) + \frac{u}{r} \left(\frac{\omega_{,r}}{r} + \nu \omega_{,rr} \right) \right] &= q, \quad (23) \\ u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} + \omega_{,r}\omega_{,rr} + \frac{\omega_{,r}^2}{2r} (1-\nu) &= 0. \end{aligned}$$

Краевые условия, соответствующие жесткому закреплению круглой пластины на контуре, записываются в виде

$$\begin{aligned} \omega|_{r=0} = O(1), \quad \omega_{,r}|_{r=0} = O(1), \quad \omega|_{r=1} = \omega_{,r}|_{r=1} = 0, \\ u|_{r=0} = O(1), \quad u|_{r=1} = 0. \end{aligned}$$

Эту систему можно записать формально следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1[\omega] + \mathfrak{N}_1[u, \omega] &= q, \\ \mathfrak{L}_2[u] + \mathfrak{N}_2[\omega] &= 0, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ – линейные дифференциальные операторы, $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ – нелинейные операторы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_1 &= D\nabla^2\nabla^2, \quad \mathfrak{N}_1 = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\left(u_{,r} + \frac{1}{2}\omega_{,r}^2 \right) \left(\omega_{,rr} + \nu\frac{\omega_{,r}}{r} \right) + \frac{u}{r} \left(\frac{\omega_{,r}}{r} + \nu\omega_{,rr} \right) \right], \\ \mathfrak{L}_2 &= u_{,rr} + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2}, \quad \mathfrak{N}_2 = \omega_{,r}\omega_{,rr} + \frac{\omega_{,r}^2}{2r} (1-\nu). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, построим итерационную последовательность

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mathfrak{L}_1^{-1}q, \\ \omega_{k+1} &= \mathfrak{L}_1^{-1} \left[q - \mathfrak{N}_1[\mathfrak{L}_2^{-1}[-\mathfrak{N}_2[\mathcal{R}[(\omega_n)_{n=1}^k], \omega_k]]] \right]. \end{aligned}$$

Осталось лишь уточнить явное представление операторов $\mathfrak{L}_1^{-1}, \mathfrak{L}_2^{-1}$. Первый, будучи обратным к бигармоническому, определяется формулой (21) (с точностью до множителя D), а второй может быть записан в той же форме, что и (21), но с ядром

$$K_u(\zeta, r) = \frac{\zeta(r^2 - 1)}{2r}.$$

В случаях иных редуцированных или асимптотических представлений, обсуждаемых в первой части работы, изменяются только явные формы нелинейных операторов $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$, а структура алгоритма остается той же.

Для реализации алгоритма важна вычислительная эффективность реализации обратных операторов $\mathfrak{L}_1^{-1}, \mathfrak{L}_2^{-1}$. Использование аналитических представлений на каждой итерации приводит к катастрофическому усложнению формул, вычисляемых в результате точного интегрирования. Заметим, что подобная проблема сопровождает большинство итерационно-аналитических методов решения уравнений Фешля–фон-Кармана (см., например, [25]). Вместе с тем сохранение аналитической формы промежуточных результатов ничего не дает, поскольку ответ в итоге все равно имеет численный характер. В этой связи предлагается сразу отказаться от аналитических представлений функций, попадающих под действие интегралов, и представить их кусочными интерполяциями, т.е. интерполяционными многочленами, задаваемыми над интервалами разбиения области интегрирования и используемыми в квадратурных формулах. Тогда на каждом шаге итерационного процесса будут производиться вычисления с массивом числовых величин одной и той же размерности, представляющих интерполяции промежуточных и окончательного результатов.

Сходимость итерационного процесса зависит от того, насколько начальное приближение ω_0 отличается от итогового ω_k . Для больших величин прогибов это отличие может быть очень значительным, и даже с использованием регуляризатора

итерационный процесс может расходиться. В этом случае следует воспользоваться нулевым приближением ω_0^* , более "близким" к ожидаемому ω_k . Поскольку отличие ω_0 от ω_k с точки зрения механики определяется влиянием "плоских" компонент напряжений $[\mathbf{S}]_{rr}$, $[\mathbf{S}]_{r\varphi}$, $[\mathbf{S}]_{\varphi\varphi}$, следует попытаться учесть их хотя бы приближенно уже на первой итерации. Этого можно достичь, если воспользоваться гипотезой о том, что напряжения можно приблизить однородным натяжением:

$$[\mathbf{S}]_{rr} \approx T, \quad [\mathbf{S}]_{r\varphi} \approx 0, \quad [\mathbf{S}]_{\varphi\varphi} \approx T, \quad T = \text{Const.}$$

Тогда уравнение (19) преобразуется в линейное:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - hT\nabla^2\omega = q,$$

и в итерационном расчете вместо операторов \mathfrak{L}_1 , \mathfrak{N}_1 можно взять операторы

$$\mathfrak{L}_1^* = \mathfrak{L}_1 - hT\nabla^2, \quad \mathfrak{N}_1^* = \mathfrak{N}_1 + hT\nabla^2.$$

В этом случае при больших прогибах влияние нелинейного оператора \mathfrak{N}_1^* уменьшается, что приводит к стабилизации вычислительного алгоритма. Оператор, обратный к \mathfrak{L}_1^* , также может быть представлен в интегральной форме (21), но с ядром

$$K_2(\zeta, r) = \frac{h}{\chi^2 D} \left\{ \frac{I_0(\chi\zeta) + I_0(\chi r) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi\zeta) I_0(\chi r) K_1(\chi)}{\xi I_1(\chi)} - I_0(\chi\zeta) K_0(\chi r) - \ln r \right\}.$$

Здесь $\chi = \sqrt{T/D}$, $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого рода (функции Инфельда), $K_0(z)$, $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя второго рода (функции Макдональда). Приближенное значение для T может быть приближенно вычислено по "инженерным" формулам.

Для перехода к двумерному случаю требуются лишь соответствующие двумерные линейные обратные операторы. Для круглой жестко закрепленной пластины ядра этих операторов определяются соответствующими фундаментальными решениями линейных краевых задач. В частности, оператор, обратный к бигармоническому, в единичном круге имеет вид [27]:

$$(\nabla^2\nabla^2)^{-1} q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 q(\zeta, \phi) K_3(r, \varphi; \zeta, \phi) \zeta d\zeta d\phi,$$

где

$$K_3(r, \varphi; \zeta, \phi) = \frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{16\pi} \left(\frac{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} - 1 + \ln \left(\frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} \right) \right).$$

Для практики важно исследовать изгиб пластины при условиях закрепления, отличных от идеальных. В этом случае также можно построить двумерный оператор, обратный к бигармоническому, если в качестве ядра взять следующую функцию [28, р. 1011]:

$$K_4(r, \varphi; \zeta, \phi) = \frac{1}{16\pi} \left\{ (r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)) \left(\frac{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} - 1 + \ln \left(\frac{r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)}{1 + r^2\zeta^2 - 2r\zeta \cos(\varphi - \phi)} \right) \right) + \frac{2}{1 - \gamma} (\zeta^2 - 1)(r^2 - 1) \times \right. \\ \left. \times \left({}_2F_1 \left(1, \frac{1 - \gamma}{2}, \frac{3 - \gamma}{2}; r\zeta e^{-i(\varphi - \phi)} \right) + {}_2F_1 \left(1, \frac{1 - \gamma}{2}, \frac{3 - \gamma}{2}; r\zeta e^{i(\varphi - \phi)} \right) - 1 \right) \right\}.$$

Здесь γ — коэффициент, характеризующий упругий отклик контура на поворот сечения пластины, ${}_2F_1(\dots)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Заключение

Исследование упругого деформирования гибких пластин — классический, но все еще далекий от завершения раздел нелинейной механики твердого деформируемого тела, который на настоящий момент содержит много открытых проблем. В настоящей работе предприняты шаги к решению некоторых из них. Кратко сформулируем итоги.

1. Построена иерархическая система представлений для полей, характеризующих напряженно-деформированное состояние круглой гибкой пластины, которая начинается с точных уравнений трехмерной нелинейной теории упругости и заканчивается редуцированными двумерными уравнениями типа Кармана. Эта иерархия схематично показана на рис. 1.

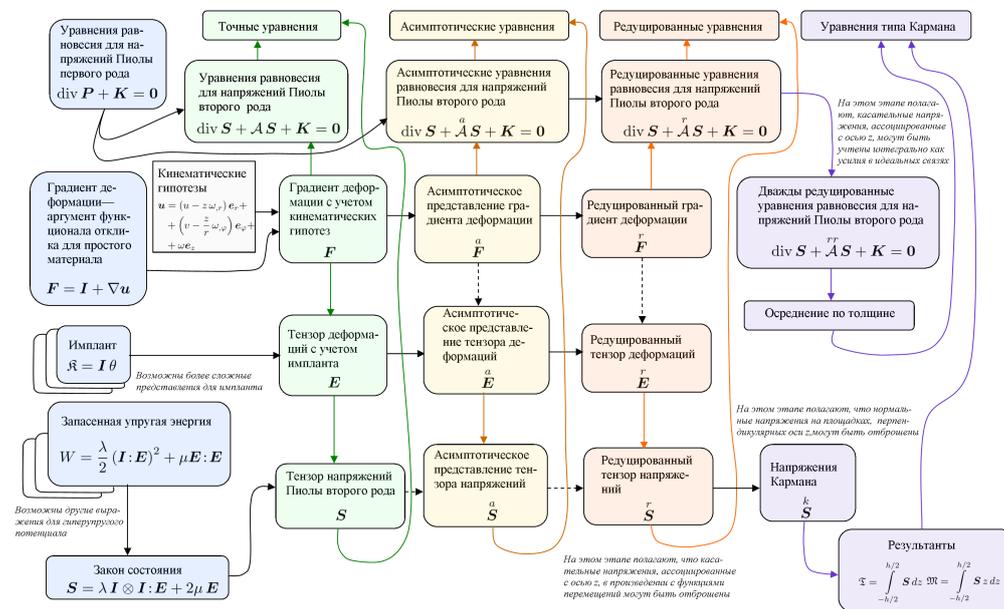


Рис. 1. Иерархия уравнений, характеризующих напряженно-деформированное состояние круглой гибкой пластины

2. Развѣт численно-аналитический метод, позволяющий найти распределения полей напряжений и деформаций на различных уровнях этой диаграммы.

Естественно было бы пожелать теперь произвести серию вычислительных экспериментов и дать оценки погрешностям, возникающим ввиду асимптотических и не совсем асимптотических упрощений. Однако исследование подобного рода не может вместиться в отдельный раздел и будет полноценно представлено в следующих публикациях.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

Список литературы

1. *Zorman C., Mehregany M.* Material aspects of micro- and nanoelectromechanical systems // Springer Handbook of Nanotechnology. Bhushan B. (Ed.). Ser.: Springer Handbooks. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. P. 333–356. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9_11.
2. *Ciarlet P.G.* A justification of the von Kármán equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1980. V. 73, No 4. P. 349–389. <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
3. *Дедкова А.А., Глаголев П.Ю., Гусев Е.Э., Дюжнев Н.А., Куреев В.Ю., Лычев С.А., Товарнов Д.А.* Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных характеристик // ЖТФ. 2021. Т. 91, № 10. С. 1454–1465. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
4. *Бычков П.С., Лычев С.А., Бут Д.К.* Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристаллизации меди в областях сложной формы // Вестн. Самарск. ун-та. Естественнонауч. сер. 2019. Т. 25, № 4. С. 48–73.
5. *Manzhurov A.V., Lychev S.A.* On the equilibrium of accreted plates // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics / Ed. by A.V. Manzhurov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elite Publ. House Pvt Ltd., 2011. P. 294–300.
6. *Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжуров А.В.* Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Изв. РАН. МТТ. 2011. №2. С. 199–208.
7. *Lychev S.* Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM. 2014. V. 94, No 1–2. P. 118–129. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
8. *Lychev S., Koifman K.* Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. De Gruyter, 2019. 388 p. <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
9. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1956. 210 с.
10. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 580 p.
11. *Freund L.B., Suresh S.* Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge Univ. Press, 2004. 750 p.
12. *Föppl A.* Vorlesungen über Technische Mechanik. Bd. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907.
13. *Kármán T.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. 4. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910.

14. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
15. Феодосьев В.И. Осесимметричные гибкие оболочки. В кн.: Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: МАШГИЗ, 1958.
16. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: МАШГИЗ, 1962. 455 с.
17. Knightly G.H. An existence theorem for the von Kármán equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1967. V. 27, No 3. P. 233–242. <https://doi.org/10.1007/BF00290614>.
18. Naumann J. An existence theorem for the v. Kármán equations under the condition of free boundary // Apl. Mat. 1974. V. 19, No 1. P. 17–27.
19. Bilbao S., Thomas O., Touzé C., Ducceschi M. Conservative numerical methods for the Full von Kármán plate equations // Numer. Methods Partial Differ. Equations. 2015. V. 31, No 6. P. 1948–1970. <https://doi.org/10.1002/num.21974>.
20. Ciarlet P.G., Rabie P. Les équations de von Kármán. Springer, 2006. 181 p.
21. Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity: Theory of Shells. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Soc. Ind. Appl. Math., 2022.
22. Borisovich A., Janczewska J. Stable and unstable bifurcation in the von Kármán problem for a circular plate // Abstr. Appl. Anal. 2005. V. 2005, No 8. Art. 845303. <https://doi.org/10.1155/AAA.2005.889>.
23. Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Föppl–von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // Int. J. Non-Linear Mech. 2017. V. 91. P. 8–21. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
24. Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // Numer. Algorithms. 2018. V. 79. P. 993–1020. <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
25. Frakes J.P., Simmonds J.G. Asymptotic solutions of the von Karman equations for a circular plate under a concentrated load // J. Appl. Mech. 1985. V. 52, No 2. P. 326–330. <https://doi.org/10.1115/1.3169048>.
26. Dickey R.W. Nonlinear bending of circular plates // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30, No 1. P. 1–9.
27. Michell J.H. The flexure of a circular plate // Proc. London Math. Soc. 1902. V. s1-34, No 1. P. 223–228. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-34.1.223>.
28. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists. 2nd ed. New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2016. 1643 p. <https://doi.org/10.1201/b19056>.
29. Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Föppl–von Kármán equations governing deflections of a thin flat plate // Int. J. Non-Linear Mech. 2012. V. 47, No 3. P. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
30. Reissner E. On finite deflections of circular plates // Proc. Symp. Appl. Math. 1949. V. 1. P. 213–219.
31. Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Sci. China: Phys., Mech. Astron. 2016. V. 59, No 2. Art. 624602. <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.

Поступила в редакцию 1.10.2023
Принята к публикации 12.11.2023

Сергей Александрович Лычев, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН
пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1, г. Москва, 119526, Россия
E-mail: lychevsa@mail.ru

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2023, vol. 165, no. 4, pp. 361–388

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.361-388

Incompatible Deformations of Elastic Plates

S.A. Lychev

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526 Russia
E-mail: lychevsa@mail.ru*

Received October 1, 2023; Accepted November 12, 2023

Abstract

This article considers the methods for mathematical modeling of incompatible finite deformations of elastic plates by using the principles of the differential geometry theory underlying continuously distributed defects. Equilibrium equations were derived by asymptotic expansions of the finite strain measures with respect to two small parameters. One parameter defines the order of smallness of displacements from the reference shape (self-stressed state), while the other specifies the thickness. Asymptotic orders were different for the deflections and displacements in the plate plane, as well as for their derivatives. They were selected in such a way that, with additional assumptions on the possibility of ignoring certain terms in the resulting expressions and the compatibility of deformations, the equations could be reduced to the system of Föppl–von Kármán equations.

Keywords: theory of thin-walled elastic structures, incompatible finite deformations of elastic plates, mathematical modeling methods, theory of continuously distributed defects, system of Föppl–von Kármán equations, numerical and analytical method, iteration algorithm

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00457).

Figure Captions

Fig. 1. Hierarchy of the equations for the circular elastic plate in a stress-strain state.

References

1. Zorman C., Mehregany M. Material aspects of micro- and nanoelectromechanical systems. In: Bhushan B. (Ed.) *Springer Handbook of Nanotechnology*. Ser.: Springer Handbooks. Berlin, Heidelberg, Springer, 2010, pp. 333–356. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02525-9_11.
2. Ciarlet P.G. A justification of the von Kármán equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1980, vol. 73, no. 4, pp. 349–389. <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.

3. Dedkova A.A., Glagolev P.Yu., Gusev E.E., Djuzhev N.A., Kireev V.Yu., Lychev S.A., Tovarnov D.A. Peculiarities of deformation of round thin-film membranes and experimental determination of their effective characteristics. *Zh. Tekh. Fiz.*, 2021, vol. 91, no. 10, pp. 1454–1465. <https://doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>. (In Russian)
4. Bychkov P.S., Lychev S.A., Bout D.K. Experimental methodology for determining the evolution of the bending shape of a thin substrate during electrocrystallization of copper in complex-shaped areas. *Vestn. Samar. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 48–73. (In Russian)
5. Manzhairov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates. In: Manzhairov A.V., Gupta N.K., Indeitsev D.A. (Eds.) *Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics*. Delhi, Elite Publ. House Pvt Ltd., 2011, pp. 294–300.
6. Lychev S.A., Lycheva T.N., Manzhairov A.V. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333. <https://doi.org/10.3103/S002565441102021X>.
7. Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM*, 2014, vol. 94, nos. 1–2, pp. 118–129. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
8. Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. De Gruyter, 2019. 388 p. <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
9. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., 1956. 210 p. (In Russian)
10. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York, McGraw-Hill, 1959. 580 p.
11. Freund L.B., Suresh S. *Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution*. Cambridge Univ. Press, 2004. 750 p.
12. Föppl A. *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Bd. 5. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1907. (In German)
13. Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*. Bd. 4. Leipzig, B.G. Teubner Verlag, 1910. (In German)
14. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksii* [Mechanics of Thin-Walled Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1977. 488 p. (In Russian)
15. Feodos'ev V.I. Axisymmetric flexible shells. In: *Raschety na prochnost' v mashinostroenii* [Strength Calculations in Mechanical Engineering]. Vol. 2. Moscow, MASHGIZ, 1958. (In Russian)
16. Andreeva L.E. *Uprugie elementy priborov* [Elastic Elements of Instruments]. Moscow, MASHGIZ, 1962. 455 p. (In Russian)
17. Knightly G.H. An existence theorem for the von Kármán equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1967, vol. 27, no. 3, pp. 233–242. <https://doi.org/10.1007/BF00290614>.
18. Naumann J. An existence theorem for the v. Kármán equations under the condition of free boundary. *Apl. Mat.*, 1974, vol. 19, no. 1, pp. 17–27.
19. Bilbao S., Thomas O., Touzé C., Ducceschi M. Conservative numerical methods for the Full von Kármán plate equations. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 2015, vol. 31, no. 6, pp. 1948–1970. <https://doi.org/10.1002/num.21974>.
20. Ciarlet P.G., Rabie P. *Les équations de von Kármán*. Springer, 2006. 181 p. (In French)
21. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity: Theory of Shells*. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Soc. Ind. Appl. Math., 2022.

22. Borisovich A., Janczewska J. Stable and unstable bifurcation in the von Kármán problem for a circular plate. *Abstr. Appl. Anal.*, 2005, vol. 2005, no. 8, art. 845303. <https://doi.org/10.1155/AAA.2005.889>.
23. Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Föppl–von Kármán equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2017, vol. 91, pp. 8–21. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
24. Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Föppl–von Kármán equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach. *Numer. Algorithms*, 2018, vol. 79, pp. 993–1020. <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
25. Frakes J.P., Simmonds J.G. Asymptotic solutions of the von Karman equations for a circular plate under a concentrated load. *J. Appl. Mech.*, 1985, vol. 52, no. 2, pp. 326–330. <https://doi.org/10.1115/1.3169048>.
26. Dickey R.W. Nonlinear bending of circular plates. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol. 30, no. 1, pp. 1–9.
27. Michell J.H. The flexure of a circular plate. *Proc. London Math. Soc.*, 1902, vol. s1-34, no. 1, pp. 223–228. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-34.1.223>.
28. Polyanin A.D., Nazaikinskii V.E. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. 2nd ed. New York, Chapman and Hall/CRC Press, 2016. 1643 p. <https://doi.org/10.1201/b19056>.
29. Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Föppl–von Kármán equations governing deflections of a thin flat plate. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2012, vol. 47, no. 3, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
30. Reissner E. On finite deflections of circular plates. *Proc. Symp. Appl. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 213–219.
31. Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Sci. China: Phys., Mech. Astron.*, 2016, vol. 59, no. 2, art. 624602. <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.

⟨ **Для цитирования:** Лычев С.А. Несовместные деформации гибких пластин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 361–388. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>. ⟩

⟨ **For citation:** Lychev S.A. Incompatible deformations of elastic plates. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 361–388. URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.361-388>. (In Russian) ⟩