

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.344-360

О ЛОКАЛЬНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Г. И. Кривень, Д. С. Шавелкин

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

Исследованы критические сжимающие напряжения, при которых образец композитного материала, образованный модифицированными волокнами, остается прямым, в то время как волокна внутри материала изогнуты. Предположено, что рассматриваемый модифицированный композит состоит из трех фаз – волокна, вискеризованного межфазного слоя и матрицы. Рассмотрен частный пример композитного материала, который состоит из углеродного волокна, вискеризованного слоя, образованного углеродными нанотрубками и эпоксидной матрицей, и эпоксидной матрицы. Оценены физические параметры композитного материала, влияющие на критические сжимающие напряжения, и предложены методы их определения. Для определения эффективных свойств включения и связующего композитного материала использованы методы Фойхта и Рейса, а для оценки эффективных свойств межфазного вискеризованного слоя – метод трех фаз. Определены степени влияния длины волны волокна и фазового сдвига (параметров, характеризующих механизм разрушения композитного материала) на величину критического сжимающего напряжения. Установлено, при каких длинах волн происходит разрушение композитного материала. Также проведен анализ влияния объемного содержания модифицированного включения на минимальное критическое значение сжимающего напряжения. Полученные результаты для модифицированных композитов сравнены с результатами для классических композитов с аналогичным объемным содержанием включения.

Ключевые слова: композитный материал, устойчивость волокнистых композитов, модификация поверхности волокна, УНТ, метод трех фаз

Введение

При сжимающем нагружении волокнистого композитного материала вдоль волокон реализуются различные механизмы разрушения материала, среди которых – сдвиговые разрушения в некоторой наклонной плоскости и поперечное растяжение (выпучивание слоя, расслоение). Оба механизма разрушения сопровождаются изгибом волокон, вызванным локальным выпучиванием волокна.

Известно, что для увеличения прочности на сжатие волокнистого композита необходимо применять волокна с высокими жесткостными характеристиками [1]. Например, прочность композитов из углеродных волокон вдвое превышает прочность на сжатие композитов из стеклянных волокон того же диаметра. В то же время увеличение жесткости матрицы не сопровождается увеличением прочности

волокнутого композита на сжатие, а может даже привести к расслоению композита при относительно небольших нагрузках.

В последнее время широкое распространение в качестве армирующего материала, позволяющего улучшать свойства углеродного волокна, получили углеродные нанотрубки (УНТ) благодаря их исключительным механическим и физическим свойствам. Выращивание УНТ на поверхности волокна позволяет увеличить прочность связи между волокном и матрицей, что способствует повышению механических свойств и устойчивости композитных материалов [2]– [8]. Например, было показано [2], что модификация поверхности углеродного волокна углеродными нанотрубками позволяет увеличить модуль упругости более чем в полтора раза (с 390 ГПа до 600 ГПа), прочность при растяжении вдоль волокна – более чем в 1,1 раза [3,4]. Испытания, проведенные авторами работы [5], показали, что вискеризация волокна углеродными нанотрубками приводит к увеличению межфазной прочности композитного материала при продольном сдвиге на 206 % по сравнению с классическим волокнистым композитом. Аналогичные испытания, проведенные авторами работ [6,7], показали увеличение межфазной прочности у вискеризованных композитов по сравнению с классическими на 175 % и 150 % соответственно.

В работе [8] описаны испытания на наноуровне по определению продольной и поперечной прочностей сжатия композитов из углеродных волокон с выращенными на их поверхности УНТ. Показано, что продольная прочность вискеризованного композита увеличивается на 43 % по сравнению с классическим композитом, а поперечная прочность в свою очередь увеличивается на 94 %.

В работе [9] выращивались УНТ на поверхности одного слоя ткани из углеродного волокна. Слои ткани с выращенными нанотрубками складывались стопками, образуя многослойные ткани, а затем уплотнялись для получения композитных ламинатов, армированных УНТ. Для изучения влияния УНТ на механические свойства были проведены испытания на сжатие и межслойный сдвиг. Оказалось, что модификация УНТ позволяет увеличить межслойную сдвиговую прочность на 108 %, прочность на сжатие в направлении поперек укладки ткани – на 32 % и прочность на сжатие в направлении вдоль укладки ткани – на 115 %.

Кроме экспериментальных исследований прочности модифицированных композитов с вискеризованными волокнами проводятся аналитические исследования эффективных свойств [10,11], напряженно деформированных состояний в компонентах композитной структуры [12,13] и разрабатываются методы оценки прочности модифицированных композитов при различных видах нагружения [14].

В настоящей работе изучено локальное выпучивание волокна, определено критическое сжимающее напряжение, при котором образец композитного материала прямой, в то время как волокна внутри материала изогнуты. Рассмотрен модифицированный композит, у которого на поверхности волокна выращены специальные наноструктуры – вискерсы. Таким образом, исследуемый композит состоит из трех фаз – волокна, вискеризованного слоя и матрицы. Для определения критического сжимающего напряжения использован метод, описанный в работе [1], который в свою очередь основан на энергетическом методе Тимошенко. Согласно методу, предложенному в этой работе, продольными напряжениями, действующими в матрице, можно пренебречь, а на значение критического напряжения влияют жесткость волокна при изгибе, модули упругости вдоль волокна и продольного сдвига матрицы. Полагаем, что модификация волокна вискерсами одновременно позволяет как увеличивать жесткость волокна при изгибе, так и улучшать эффективные характеристики связующего. Исследуемый модифицированный композит с вискеризованными волокнами обладает трансверсально-изотропными свойствами

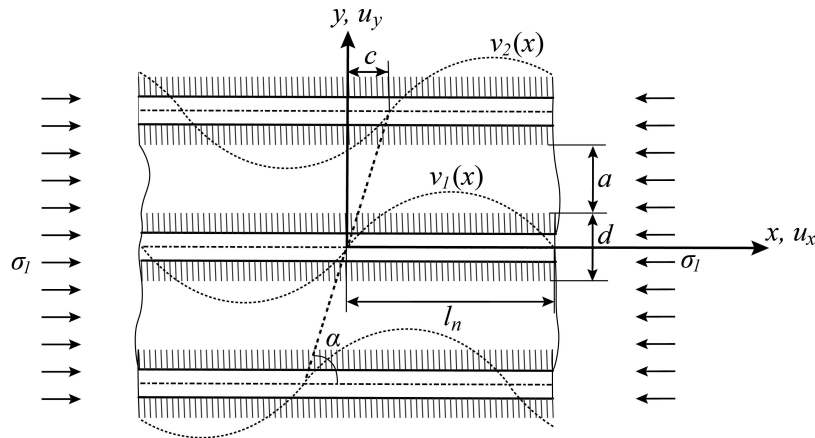


Рис. 1. Локальное выпучивание в однонаправленном слое волокон с выращенными на их поверхности вискерсами

с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси волокна, а вискеризованный слой – трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной оси вискерса. При оценке продольного модуля упругости модифицированного волокна использован метод Фойхта, который позволяет учитывать объемное содержание включения (волокна), а также модули продольного сдвига волокна и поперечного сдвига вискеризованного слоя. При оценке продольного модуля упругости связующего, состоящего из вискеризованного слоя и матрицы, также использован метод Фойхта, а при оценке продольного модуля сдвига – метод Рейса. Последний позволяет учитывать объемное содержание вискеризованного слоя и модули сдвига матрицы и поперечного сдвига вискеризованного слоя. Эффективные свойства вискеризованного слоя были получены по методу трех фаз, который позволяет учитывать размеры вискерсов (их диаметр и длины), объемное содержание вискерсов и физические свойства вискерсов и матрицы.

1. Постановка задачи

На рис. 1 показана модель локального выпучивания в однонаправленном слое волокон с вискерсами, выращенными на их поверхности. Прогиб модифицированных волокон при изгибе можно представить в виде функций $v_1(x) = V \sin(\pi x/l_n)$, $v_2(x) = V \sin(\pi(x-c)/l_n)$, где V – неизвестное значение амплитуды, одинаковое для всех волокон, l_n – половина длины волны волокна, $c = (a+d) \cot \alpha$ – фазовый сдвиг, a – толщина связующего слоя, d – диаметр включения (волокна или модифицированного волокна). В случае, когда $c = 0$, реализуется сдвиговой механизм разрушения в некоторой наклонной плоскости, а в случае, когда $c = l_n$, реализуется механизм разрушения, сопровождающийся выпучиванием слоя.

Для определения критического значения потери устойчивости воспользуемся формулой, полученной в работе [1]:

$$\sigma_1 = \frac{\pi^2 D_f}{\bar{l}_n^2 \bar{d}(1+\bar{d})a^4} + \frac{G_m(1+\bar{d})}{2\left(1 + \frac{\pi^2 G_m}{12\bar{l}_n^2 E_m}\right)} \left(1 + \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}\right) + \frac{2\bar{l}_n^2 E_m}{\pi^2(1+\bar{d})} \left(1 - \cos \frac{\pi \bar{c}}{\bar{l}_n}\right), \quad (1)$$

где $D_f = E_f \frac{\pi d^4}{64}$ – изгибная жесткость включения, E_f – модуль упругости вклю-

чения, E_m – модуль упругости связующего, G_m – модуль сдвига связующего, $\bar{l}_n = l_n/a$, $\bar{d} = d/a$, $\bar{c} = c/a$. Выражение (1) было получено с использованием энергетического метода Тимошенко [14] из следующего условия потери устойчивости: $A = W$, где $A = \frac{\pi^2}{4l_n} \sigma_1 V^2 ad(1 + \bar{d})$ – работа внешних сил, $W = W_f + W_m^s + W_m^e$ – энергия деформации, $W_f = \frac{\pi^4}{4l_n^3} D_f V^2$ – энергия деформации изгиба включения,

$$W_m^s = \frac{adl_n}{2G_m} \left[V \frac{\pi G_m (1 + \bar{d})}{2l_n (1 + \pi^2 a^2 G_m / (12l_n^2 E_m))} \right]^2 [1 + \cos(\pi c/l_n)]$$

– энергия деформации сдвига включения,

$$W_m^e = \frac{adl_n}{2E_m} \left[\frac{\pi^2 a^2}{12l_n^2} \frac{\pi G_m (1 + \bar{d})}{2l_n (1 + \pi^2 a^2 G_m / (12l_n^2 E_m))} \right]^2 \times \\ \times [1 + \cos(\pi c/l_n)] + \frac{E_m^2}{a^2} V^2 [1 - \cos(\pi c/l_n)]$$

– энергия поперечного растяжения включения. При определении энергии деформации сдвига не учитывается продольное напряжение в матрице в силу его малости по сравнению с теми же напряжениями, действующими в связующем.

Исследуем критическое значение потери устойчивости композитного материала, где в качестве включения рассматривается волокно с выращенными на его поверхности специальными наноструктурами – вискерсами (волокно с вискеризованным слоем), а в качестве связующего – матрица с вискеризованным слоем.

2. Эффективные свойства включения и связующего

В рамках этой задачи считается, что вискеризованный слой входит в состав как включения, так и связующего. Таким образом, в модифицированном композите с вискеризованными волокнами включением является волокно с вискеризованным слоем, а связующим – матрица с вискеризованным слоем. На значение потери устойчивости оказывают влияние такие физические свойства составных частей композита, как продольный модуль упругости включения E_f , продольный модуль упругости связующего E_m и модуль сдвига связующего G_m вдоль волокна (см. формулу (1)). Эти эффективные свойства можно найти, используя различные модели осреднения.

Осреднения по Фойхту и Рейсу являются самыми простыми методами для определения эффективных свойств. Эти методы позволяют учитывать объемное содержание и модули составных частей:

$$\frac{1}{\mu_{eff}} = \frac{f}{\mu_1} + \frac{1-f}{\mu_2}, \quad (2)$$

$$E_{eff} = fE_1 + (1-f)E_2, \quad (3)$$

где μ_{eff} – эффективный модуль сдвига, E_{eff} – эффективный модуль упругости, f – объемное содержание включения, μ_1 и μ_2 – модуль сдвига включения и модуль сдвига связующего соответственно, E_1 и E_2 – модуль упругости включения и модуль упругости связующего соответственно.

Весь рассматриваемый композит обладает трансверсально-изотропными свойствами в плоскости, перпендикулярной оси волокна, а вискеризованный межфазный слой обладает такими свойствами в плоскости, перпендикулярной оси вискерса. Поэтому в том в случае, когда вискеризованный межфазный слой рассматривается как включение или как связующее всего композита, в формулах (2) и (3)

необходимо в качестве продольных свойств вискеризованного слоя принимать его поперечные свойства, рассчитанные для него отдельно. Выше было сказано, что методы Рейса и Фойхта позволяют учитывать только объемное содержание включения, в то время как метод трех фаз позволяет учитывать одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое модифицированного композита с вискеризованными волокнами. В связи с этим считаем уместным определять эффективные свойства межфазного слоя, используя метод трех фаз.

Метод трех фаз основан на разрешающих уравнениях классической теории упругости. Выражения, определяющие перемещения во включении, матрице и эквивалентной гомогенной среде, определяются из уравнения равновесия и имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши, найдем выражения для деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Для нахождения напряжений используем закон Гука

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}.\quad (6)$$

На основе условий непрерывности перемещений и напряжений на границе фаз и условия на бесконечности (внешнего граничного условия) сформируем систему алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби найдем все неизвестные константы, в число которых включены эффективные модули. Так, эффективный модуль упругости и эффективный коэффициент Пуассона найдем при решении задачи об одноосном растяжении вдоль вискерса, где положим, что вне ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_z(z) = \varepsilon_0 z$. А эффективный модуль продольного сдвига найдем при решении задачи чистого сдвига вдоль вискерса, где, в свою очередь, полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$. Эффективный модуль плоской деформации найдем при решении задачи всесторонней нагрузки поперек вискерса, где полагаем, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформаций ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_r = \varepsilon_0 r$.

В случае, когда композитный материал состоит только из двух фаз – матрицы и вискерса, формулы для определения эффективных свойств имеют вид [15]

$$E_{11}^{eff} = c_b E_b + (1 - c_b) E_m + \frac{4c_b(1 - c_b)(\nu_b - \nu_m)^2 \mu_m}{(1 - c_b)\mu_m/(k_b + \mu_b/3) + c_b\mu_m/(k_m + \mu_m/3) + 1}, \quad (7)$$

$$\nu_{12}^{eff} = c_b \nu_b + (1 - c_b) \nu_m + \frac{c_b(1 - c_b)(\nu_b - \nu_m)(\mu_m/(k_m + \mu_m/3) - \mu_m/(k_b + \mu_b/3))}{(1 - c_b)(\mu_m/(k_b + \mu_b/3)) + c_b(\mu_m/(k_m + \mu_m/3)) + 1}, \quad (8)$$

$$\mu_{12}^{eff} = \frac{\mu_b(1 + c_b) + \mu_m(1 - c_b)}{\mu_m(\mu_b(1 - c_b) + \mu_m(1 + c_b))}, \quad (9)$$

$$K_{23}^{eff} = k_m + \frac{\mu_m}{3} + \frac{c_b}{1/(k_b - k_m + \frac{1}{3}(\mu_b - \mu_m)) + (1 - c_b)/(k_m + 4\mu_m/3)}, \quad (10)$$

где ν_m и ν_b – коэффициенты Пуассона матрицы и вискерса соответственно, k_m и k_b – модули плоской деформации матрицы и вискерса соответственно, μ_m и μ_b – поперечные модули сдвига матрицы и вискерса соответственно, c_b – объемное содержание вискерсов в вискеризованном межфазном слое, определяемое по формуле

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}. \quad (11)$$

Здесь M_b – число вискерсов, выращенных на поверхности волокна; d_b – диаметр вискерса; l_b – длина вискерса; D – диаметр базового волокна.

Эффективный модуль поперечного сдвига найдем из решения задачи чистого сдвига поперек волокна, где положим, что на внешней границе ячейки задано однородное поле деформации ε_0 , и перемещения вдали от включения имеют вид $u_{rr}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$, $u_{r\theta}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$.

Общее решение для неоднородной среды имеет вид $u_r = u_r(r) \cos 2\theta$, $u_\theta = u_\theta(r) \sin 2\theta$, $u_z = 0$, где $u_r(r)$ и $u_\theta(r)$ – неизвестные функции. Для простоты введем обозначение $u_r(r) = u(r)$, $u_\theta(r) = w(r)$.

По соотношениям деформации Коши (5) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = u', \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u - 2w}{r} \cos(2\theta), \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta/r \right) = (-w' - 2u + w/r) \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

и с помощью закона Гука (6) вместе с соотношениями (12) определим неравные нулю компоненты напряжений через перемещения

$$\sigma_{rr} = (C_{rr} u' + C_{r\theta} u - 2w/r) \cos(2\theta), \quad (13)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (C_{r\theta} u' + C_{\theta\theta} u - 2w/r) \cos(2\theta), \quad (14)$$

$$\sigma_{r\theta} = G_{r\theta} \left(-w' + \frac{w - 2u}{r} \right) \sin(2\theta). \quad (15)$$

Напряжения σ_w , $\sigma_{\theta\theta}$ и $\sigma_{r\theta}$ должны удовлетворять двум уравнениям из уравнений равновесия (4)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} = 0. \quad (16)$$

Оставшееся уравнение (4) равновесия выполняется тождественно.

Запишем уравнения равновесия (16) в перемещениях, учитывая соотношения (13)–(15):

$$\begin{aligned} C_{rr}(u''r^2 + u'r) - (4G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u - 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})w &= 0, \\ 2(G_{r\theta} + C_{r\theta})u'r + 2(G_{r\theta} + C_{\theta\theta})u + (w''r^2 + w'r)G_{r\theta} - (G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta})w &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Решения дифференциальных уравнений (17) будем искать в виде $u(r) = Fr^\lambda$, $w(r) = Dr^\lambda$, где F и D – неизвестные константы, для которых имеется линейная зависимость $F = 2 \frac{G_{r\theta}\lambda + C_{r\theta}\lambda - G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}{C_{rr}\lambda^2 - 4G_{r\theta} - C_{\theta\theta}} D$, λ определяется из характеристического уравнения, полученного из условия существования нетривиального нулевого решения системы уравнений [17], которое имеет вид

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0, \quad (18)$$

где

$$L = G_{r\theta}C_{rr}, M = 4(G_{r\theta} + C_{r\theta})^2 - C_{rr}(G_{r\theta} + 4C_{\theta\theta}) - G_{r\theta}(4G_{r\theta} + C_{\theta\theta}), N = 9G_{r\theta}C_{\theta\theta}.$$

Очевидно, что корни λ выражения (18) зависят от свойств материалов. В классической теории упругости в соответствии с работами Хашина [16] и Цукрова [17] эти корни являются вещественными числами. В целом, для любых действительных корней λ_1 , λ_2 , λ_3 и λ_4 выражения $u(r)$ и $w(r)$ имеют следующий вид

$$u(r) = F_1r^{\lambda_1} + F_2r^{\lambda_2} + F_3r^{\lambda_3} + F_4r^{\lambda_4}, \quad w(r) = D_1r^{\lambda_1} + D_2r^{\lambda_2} + D_3r^{\lambda_3} + D_4r^{\lambda_4}, \quad (19)$$

где λ^1 , λ^3 – положительные, а λ^2 , λ^4 – отрицательные величины.

С учетом (19) поля перемещений ортотропных фаз в этой задаче примут вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left(\phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos(2\theta) = \\ &= \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}}, \end{aligned}$$

$$u_\theta^{(i)}(r, \theta) = \left(D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin(2\theta) = \sin(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}},$$

где $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, D_3^{(i)}, D_4^{(i)}$ – неизвестные константы, которые определяются из граничных условий; $\lambda_j^{(i)}$ и $\phi_j^{(i)} = 2 \frac{G_{r\theta}\lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}\lambda_j^{(i)} - G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}{C_{rr}\lambda_j^{(i)2} - 4G_{r\theta} - C_{\theta\theta}}$ постоянны. Следовательно, используя соотношения малых деформаций, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r, \theta) = \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1}, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r, \theta) = \cos(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2), \quad (21)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) = \sin(2\theta) \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (-\lambda_j^{(i)} - 2\phi_j^{(i)} - 1). \quad (22)$$

Напряжения в каждой фазе определяются формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{23}^{(1)} & C_{22}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(1)} - C_{23}^{(1)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(2)} - C_{12}^{(2)}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

В случае изотропной или трансверсально-изотропных сред с осью симметрии, направленной вдоль волокон, материальные константы равны $\lambda_1^{(i)} = 1$, $\lambda_1^{(i)} = -1$, $\lambda_1^{(i)} = 3$, $\lambda_1^{(i)} = -3$, так как в этом случае в силу законов Гука имеем равенства $C_{rr}^{(i)} = C_{\theta\theta}^{(i)}$, или $C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)}$; $C_{rz}^{(i)} = C_{\theta z}^{(i)}$, или $C_{13}^{(i)} = C_{23}^{(i)}$.

С учетом соотношений (20)–(22) для деформаций выражения для определения напряжений в каждой из фаз (23), (24) приобретают явную форму как функции от координат r и θ и зависят от констант $D_1^{(1)}$, $D_2^{(1)}$, $D_3^{(1)}$, $D_4^{(1)}$, $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, $D_3^{(2)}$, $D_4^{(2)}$, $D_1^{(N)}$, $D_2^{(N)}$, $D_3^{(N)}$, $D_4^{(N)}$. Эти неизвестные константы можно найти из следующих условий:

- условия несингулярности напряжений в центре волокна ($r = 0$) для фазы 1: $D_1^{(1)} = D_4^{(1)} = 0$;
- условия непрерывности перемещений и напряжений на границах идеального контакта фаз

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad u_\theta^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_\theta^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta),$$

$$\sigma_{r\theta}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta) \quad (i = 1, 2, 3, N);$$

- внешнего граничного условия на бесконечности ($r_{N+1} \rightarrow \infty$):

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \cos(2\theta), \quad \sigma_{r\theta}^{N+1}(r_{N+1}, \theta) = \sin(2\theta);$$

- условия энергетической поверхности на контакте ($r = r_N$):

$$\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1})_{r=r_N} dS = 0,$$

где $u_r^{eff}(r, \theta) = \varepsilon_0 r \cos(2\theta)$, $u_\theta^{eff}(r, \theta) = -\varepsilon_0 r \sin(2\theta)$, $\sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff} \cos(2\theta)$, $\sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) = 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff} \sin(2\theta)$, μ_{23}^{eff} – эффективный поперечный модуль сдвига.

Таким образом, получили следующую систему из 8 уравнений с 8 неизвестными, среди которых $D_1^{(1)}$, $D_3^{(1)}$, $D_1^{(2)}$, $D_2^{(2)}$, $D_3^{(2)}$, $D_4^{(2)}$, D_4^{N+1} и эффективный

поперечный модуль сдвига μ_{23}^{eff} :

$$\left\{ \begin{aligned} &\phi_1^{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} + \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - \phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} \\ &- \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}} = 0, \\ &\phi_1^{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} + \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} + \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} + \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - \\ &- (-D_4^{(N+1)} / r_2^3 + r_2 \varepsilon_0) = 0, \\ &- D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}} - \phi_3^{(1)} D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}} - (-D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}} - D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}} - D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}} - D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}}) = 0, \\ &- D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}} - \phi_2^{(2)} D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}} - \phi_3^{(2)} D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}} - \phi_4^{(2)} D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}} - \\ &- (-D_4^{(N+1)} / r_2^3 - r_2 \varepsilon_0) = 0, \\ &D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(11)} \phi_1^{(1)} + C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_1^{(1)})) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} (C_{11}^{(1)} \lambda_{(31)} \phi_3^{(1)} + \\ &+ C_{12}^{(1)} (-2 + \phi_3^{(1)})) - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + \\ &+ D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\ &+ D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\ &+ D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) = 0, \\ &D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(12)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(12)} \phi_1^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_1^{(2)})) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(22)} \phi_2^{(2)} + \\ &+ C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_2^{(2)})) \\ &+ D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(32)} \phi_3^{(2)} + C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_3^{(2)})) + \\ &+ D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} (C_{11}^{(2)} \lambda_{(42)} \phi_4^{(2)} + \\ &+ C_{12}^{(2)} (-2 + \phi_4^{(2)})) - 2(3D_4^{(N+1)} r_2^{\lambda_{(4N+1)}-1} + \varepsilon_0) \mu_{23}^{eff} = 0, \\ &C_{66}^{(1)} (D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(11)}-1} (-\lambda_{(11)} - 1 - 2\phi_1^{(1)}) + D_3^{(1)} r_1^{\lambda_{(31)}-1} (-\lambda_{(31)} - 1 - 2\phi_3^{(1)})) - \\ &- C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(12)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)}) + D_2^{(2)} r_1^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) + \\ &+ D_3^{(2)} r_1^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_1^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)})) = 0, \\ &C_{66}^{(2)} (D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(11)}-1} (-\lambda_{(12)} - 1 - 2\phi_1^{(2)}) + D_2^{(2)} r_2^{\lambda_{(22)}-1} (-\lambda_{(22)} - 1 - 2\phi_2^{(2)}) + \\ &+ D_3^{(2)} r_2^{\lambda_{(32)}-1} (-\lambda_{(32)} - 1 - 2\phi_3^{(2)}) + D_4^{(2)} r_2^{\lambda_{(42)}-1} (-\lambda_{(42)} - 1 - 2\phi_4^{(2)})) - \\ &- (4D_4^{(N+1)} \mu_{23}^{eff} r_2^{\lambda_{(4N+1)}-1} - 4\varepsilon_0 \mu_{23}^{eff}) = 0. \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Эффективный модуль упругости поперек оси вискерса найдем по формуле [15]

$$E_{22}^{eff} = \frac{4\mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff}}{K_{23}^{eff} + \mu_{23}^{eff} + 4(\nu_{12}^{eff})^2 \mu_{23}^{eff} K_{23}^{eff} / E_{11}^{eff}}. \quad (26)$$

Таким образом, определены все выражения, необходимые для расчета эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя, а также эффективных свойств включения, образованного волокном и вискеризованным слоем, и связующего, образованного вискеризованным слоем и матрицей.

3. Оценки критических значений потери устойчивости

Определим критическое значение сжимающего напряжения потери устойчивости для композитов, состоящих из волокна, на поверхности которых выращены УНТ. Такое модифицированное волокно погружено в матрицу. Физические и геометрические свойства композита, необходимые для проведения численного анализа, на частном примере приведены в таблице 1.

Объемное содержание вискерсов в межфазном слое принято предельным и равно 65 % (см. формулу (11)). Эффективные свойства вискеризованного межфазного

Табл. 1

Физические и геометрические свойства исследуемого композита

Параметры	Углеродное волокно	УНТ	Эпоксидная матрица
Продольный модуль Юнга, ГПа	241	1100	3
Поперечный модуль Юнга, ГПа	14,5	—	—
Модуль продольного сдвига, ГПа	22,8	—	—
Модуль поперечного сдвига, ГПа	4,8	—	—
Коэффициент Пуассона	0,27	0,14	0,3
Диаметр, мкм	5	0,00051	—
Длина, мкм	—	1	—

слоя были получены по формулам (25), (26), а эффективные свойства включения и связующего (продольный модуль упругости включения E_f , продольный модуль упругости связующего E_m и модуль сдвига связующего G_m вдоль волокна) – по формулам (2), (3). Критическое значение сжимающего напряжения потери устойчивости определяется минимизацией функции (1) относительно $\bar{l}_n$ и $\bar{c}$.

Ниже приведены графики зависимостей сигма от фазового сдвига для различных длин волн (рис. 2). Объемное содержание включения (волокно с вискеризованным слоем) принималось равным 62 %. С увеличением длины волны возрастает амплитуда сжимающего напряжения и наблюдается уменьшение значения минимального критического напряжения. Так, при $\bar{l}_n = 1$ минимальное критическое значение реализуется при $\bar{c} = 1$ и равно 112 498 МПа (рис. 2 а), при $\bar{l}_n = 10$ реализуется при $\bar{c} = 20$ и равно 4 244 МПа (рис. 2 б), а при $\bar{l}_n = 100$ реализуется при $\bar{c} = 200$ и равно 3 153 МПа (рис. 2 в). Точка минимума функции одинакова для конкретных $\bar{l}_n$, поэтому мы можем найти $\bar{l}_n$ при фиксированных $\bar{c}$.

Графики зависимости минимального критического значения сжимающего напряжения σ_{1min} от $\bar{l}_n$ для классического и модифицированного композитов с объемным содержанием включения 62 % представлены на рис. 3. Известно, что типичным значением прочности на продольное сжатие для волокнистого композита, образованного углеродным волокном и эпоксидной матрицей, составляет величина порядка 1 200 МПа [1]. На графике рис. 3 видно, что при $\bar{l}_n > 40$ кривая приближается к асимптоте и значение минимального критического сжимающего напряжения для классического композита составляет порядка 2 000 МПа. Это превышает типичные значения прочности, но для более точной оценки соответствия полученного результата и предложенного в работе [1] нам не хватает данных. Однако мы можем судить, при каких длинах волн волокна реализуется потеря устойчивости волокнистого композита при сжатии. Для модифицированного композита и классического волокнистого композита механизм потери устойчивости реализуется при $\bar{l}_n > 40$, и тогда значение $\bar{l}_n$ не влияет на минимальное значение сжимающего напряжения. Из графиков также видно, что модификация поверхности углеродного волокна УНТ с максимально плотной упаковкой позволяет увеличить критическое значение сжимающего напряжения более чем в 1.5 раза по сравнению с классическим композитом с тем же объемным содержанием включения.

На рис. 4 для модифицированного композита с вискеризованными волокнами одновременно показаны график зависимости σ_{1min} от $\bar{l}_n$ и график зависимости $\bar{c}$ от $\bar{l}_n$. На графике видно, что в то время, как увеличение относительной величины фазового сдвига $\bar{c}$ сопровождается увеличением $\bar{l}_n$, значение σ_{1min} остается практически постоянной величиной.

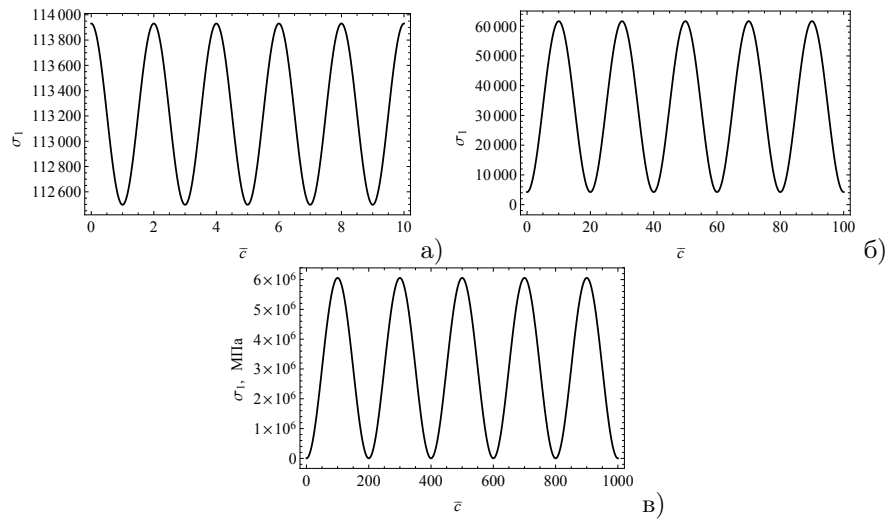


Рис. 2. Зависимость σ_1 от фазового сдвига для различных длин волн а) $\bar{l}_n = 1$, б) $\bar{l}_n = 10$, в) $\bar{l}_n = \infty$

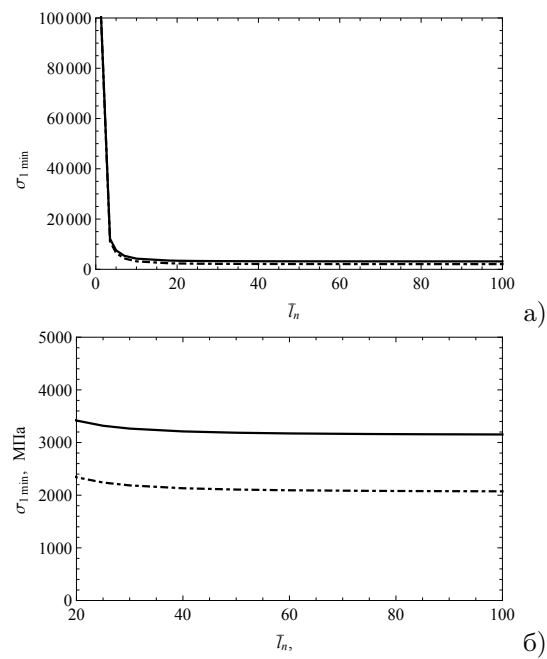


Рис. 3. Зависимость σ_{1min} от $\bar{l}_n$ для модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия)

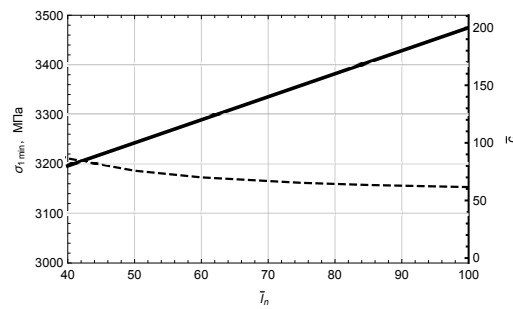


Рис. 4. Графики зависимости σ_{1min} от $\bar{l}_n$ (пунктирная линия) и $\bar{c}$ от $\bar{l}_n$ (сплошная жирная линия)

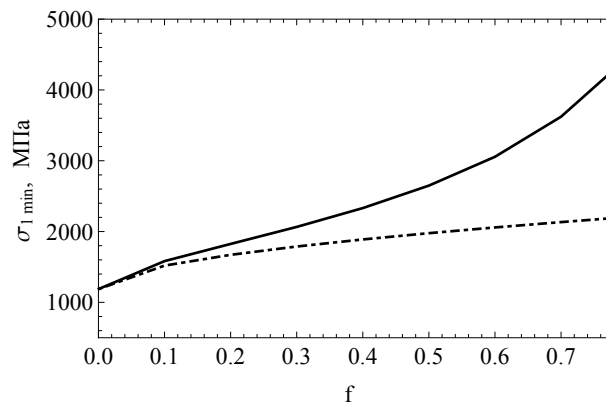


Рис. 5. Графики зависимости σ_{1min} от f для модифицированного композита (сплошная линия) и классического композита (штрихпунктирная линия)

Оценим влияние объемного содержания волокна, модифицированного УНТ, на критическое значение потери устойчивости. На рис. 5 приведены графики для классического и модифицированного композитов. Видно, что увеличение объемного содержания включения позволяет увеличить критическое значение потери устойчивости волокнистого композита при сжимающем нагружении вдоль волокна. Такой эффект наблюдается и для классического композита, и для модифицированного, однако при увеличении объемного содержания включения более 0.4 свойства модифицированного композита начинают значительно расти, в то время как для классического композита изменяются незначительно. А при достижении максимального значения объемного содержания, равного 0.78 (характерного для квадратной упаковки включения в композите), критическое значение потери устойчивости модифицированного композита превышает критическое значение потери устойчивости классического композита с тем же объемным содержанием включения более чем в 2 раза.

Заключение

Исследована устойчивость композитного материала, состоящего из волокна, модифицированного межфазного слоя и матрицы, при сжимающих напряжениях вдоль волокна. Выявлено, что как для модифицированного, так и для классического композита механизм потери устойчивости реализуется при относительных дли-

нах волн, превышающих значение 40, и при этом последующее увеличение значения относительной длины волны не сопровождается изменением минимального критического сжимающего напряжения, но сопровождается увеличением относительной величины фазового сдвига. Анализ влияния объемного содержания модифицированного волокна на минимальные критические значения сжимающего напряжения показал, что устойчивость модифицированного композита может быть увеличена более чем в 2 раза по сравнению с устойчивостью аналогичного классического композита.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-3607.2022.1.1.

Литература

1. *Vasiliev V. V., Morozov E. V.* Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures. Elsevier, 2018. 856 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
2. *Tsirka K., Tzounis L., Avgeropoulos A., Liebscher M., Mechtcherine V., Paipetis A. S.* Optimal synergy between micro and nano scale: Hierarchical all carbon composite fibers for enhanced stiffness, interfacial shear strength and Raman strain sensing // *Compos. Sci. Technol.* 2018. V. 165. P. 240–249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.07.003>.
3. *Fan W., Wang Y., Wang C., Chen J., Wang Q., Yuan Y., Niu F.* High efficient preparation of carbon nanotube-grafted carbon fibers with the improved tensile strength // *Appl. Surf. Sci.* 2016. V. 364. P. 539–551. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.12.189>.
4. *Guo J., Lu C., An F.* Effect of electrophoretically deposited carbon nanotubes on the interface of carbon fiber reinforced epoxy composite // *J. Mater. Sci.* 2012. V. 47. P. 2831–2836. <https://doi.org/10.1007/s10853-011-6112-5>.
5. *Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R.* Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites // *Carbon.* 2012. V. 50, No 10. P. 3949–3952. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023>.
6. *Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F.* Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers // *Carbon.* 2011. V. 49, No 14. P. 4665–4673. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064>.
7. *Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R.* Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid // *J. Mater. Sci.* 2009. V. 44, No 13. P. 3574–3577. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x>.
8. *Sharma S. P., Lakkad S. C.* Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites // *Surf. Coat. Technol.* 2010. V. 205, No 2. P. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055>.
9. *Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G.* Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition // *Mater. Sci. Eng.: A.* 2015. V. 626. P. 449–457. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044>.
10. *Lurie S. A., Minhat M.* Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites // *Composites, Part B.* 2014. V. 61. P. 26–40. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021>.

11. *Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N.* Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method // J. Eng. Math. 2015. V. 95, No 31. P. 7–29. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0>.
12. *Лурье С.А., Рабинский Л.Н., Кривень Г.И., Лыкосова Е.Д.* Напряженное состояние в элементах структуры модифицированных волокнистых композиционных материалов с вискеризованными волокнами // Механ. композ. матер. 2018. Т. 24, № 1. С. 122–144.
13. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N.* On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers // Int. J. Civ. Eng. Technol. 2018. V. 9, No 6. P. 294–308.
14. *Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н.* О прочности модифицированного композита с вискеризованными волокнами // Композиты и наноструктуры. 2019. Т. 11, № 1. С. 1–15.
15. *Кристенсен Р.М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
16. *Hashin Z.* Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites // Mech. Mater. 1990. V. 8, No 4. P. 293–308. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L).
17. *Tsukrov I., Drach B.* Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // Int. J. Solids Struct. 2010. V. 47, No 1. P. 25–33. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005>.

Поступила в редакцию 23.09.2023

Принята к публикации 25.11.2023

Кривень Галина Ивановна, кандидат технических наук, старший преподаватель
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: Kriven_Galina@inbox.ru

Шавелкин Денис Сергеевич, старший преподаватель
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское ш., д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: dshavelkin@inbox.ru

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.344-360

On Local Stability Loss of Modified Composites with Whiskerized Fibers

G.I. Kriven*, D.S. Shavelkin**

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

E-mail: *Kriven_Galina@inbox.ru, **dshavelkin@inbox.ru

Received September 23, 2023; Accepted November 25, 2023

Abstract

This article examines the critical compressive stresses required for a modified fiber composite to remain straight while the fibers within it bend. It was assumed that the modified composite consists of three phases: fiber, whiskerized interfacial layer, and matrix. An example of a composite material made up of carbon fibers, a whiskerized layer of carbon nanotubes with an epoxy matrix, and an epoxy matrix was considered. Its physical parameters affecting the critical compressive stresses were assessed, and methods for determining them were proposed. The effective properties of the inclusion and binder composite material were identified using the Voigt and Reis methods. Similarly, the effective properties of the interfacial whiskerized layer were analyzed by the three-phase method. The influence of fiber wavelength and phase shift, which define the destruction of the composite material, on the critical compressive stress value was explored. The wavelengths at which the composite material is destroyed were found. The effect of the volume content of the modified inclusion on the minimum critical compressive stress value was shown. The results for the modified composites were compared with those for the classical composites with a similar volume content of inclusions.

Keywords: composite material, stability of fiber composites, fiber surface modification, CNTs, three-phase method

Acknowledgments. This study was supported by the grant of the President of the Russian Federation (project no. MK-3607.2022.1.1).

Figure Captions

Fig. 1. Local buckling in the unidirectional layer of fibers with whiskers grown on their surface.

Fig. 2. Dependence of σ_1 on the phase shift for different wavelengths: a) $\bar{l}_n = 1$, b) $\bar{l}_n = 10$, c) $\bar{l}_n = 00$.

Fig. 3. Dependence of σ_{1min} on $\bar{l}_n$ for the modified (solid line) and classical (dash-dotted line) composites.

Fig. 4. Graphs showing the dependence of σ_{1min} on $\bar{l}_n$ (dashed line) and $\bar{c}$ on $\bar{l}_n$ (bold solid line).

Fig. 5. Graphs showing the dependence of σ_{1min} on f for the modified (solid line) and classical (dash-dotted line) composites.

References

1. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structures*. Elsevier, 2018. 856 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04497-2>.
2. Tsirka K., Tzounis L., Avgeropoulos A., Liebscher M., Mechtcherine V., Paipetis A.S. Optimal synergy between micro and nano scale: Hierarchical all carbon composite fibers for enhanced stiffness, interfacial shear strength and Raman strain sensing. *Compos. Sci. Technol.*, 2018, vol. 165, pp. 240–249. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2018.07.003>.
3. Fan W., Wang Y., Wang C., Chen J., Wang Q., Yuan Y., Niu F. High efficient preparation of carbon nanotube-grafted carbon fibers with the improved tensile strength. *Appl. Surf. Sci.*, 2016, vol. 364, pp. 539–551. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2015.12.189>.
4. Guo J., Lu C., An F. Effect of electrophoretically deposited carbon nanotubes on the interface of carbon fiber reinforced epoxy composite. *J. Mater. Sci.*, 2012, vol. 47, pp. 2831–2836. <https://doi.org/10.1007/s10853-011-6112-5>.
5. Qiang S., Ke-zhi L., Hai-liang L., He-jun L., Chang R. Grafting straight carbon nanotubes radially onto carbon fibers and their effect on the mechanical properties of carbon/carbon composites. *Carbon*, 2012, vol. 50, no. 10, pp. 3949–3952. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2012.03.023>.
6. Peng L., Yi-yu F., Peng Z., Hui-min C., Naiqin Z., Wei F. Increasing the interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of carbon nanotubes grown on the fibers. *Carbon*, 2011, vol. 49, no. 14, pp. 4665–4673. <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2011.06.064>.
7. Fu-Hua Z., Rong-Guo W., Xiao-Dong H., Chao W., Li-Ning R. Interfacial shearing strength and reinforcing mechanisms of an epoxy composite reinforced using a carbon nanotube/carbon fiber hybrid. *J. Mater. Sci.*, 2009, vol. 44, no. 13, pp. 3574–3577. <https://doi.org/10.1007/s10853-009-3484-x>.
8. Sharma S.P., Lakkad S.C. Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites. *Surf. Coat. Technol.*, 2010, vol. 205, no. 2, pp. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2010.06.055>.
9. Lei F., Ke-zhi L., Zi-shu S., Qiang S., He-jun L., Jin-hua L., Ling-jun G. Compressive and interlaminar shear properties of carbon/carbon composite laminates reinforced with carbon nanotube-grafted carbon fibers produced by injection chemical vapor deposition. *Mater. Sci. Eng.: A*, 2015, vol. 626, pp. 449–457. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2014.12.044>.
10. Lurie S.A., Minhat M. Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites. *Composites, Part B*, 2014, vol. 61, pp. 26–40. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.01.021>.
11. Lurie S.A., Minhat M., Tuchkova N. Estimation of effective dynamic properties of bristled fiber composite materials based on self-consistent Eshelby method. *J. Eng. Math.*, 2015, vol. 95, no. 31, pp. 7–29. <https://doi.org/10.1007/s10665-014-9719-0>.
12. Lurie S.A., Rabinsky L.N., Kriven G.I., Lykosova E.D. Stress state in structural elements of modified fibrous composite materials with whiskerized fibers. *Mekh. Kompoz. Mater.*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 122–144. (In Russian)
13. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Kriven G.I., Rabinskiy L.N. On estimating structural stresses in composites with whiskerized fibers. *Int. J. Civ. Eng. Technol.*, 2018, vol. 9, no. 6, pp. 294–308.
14. Lurie S.A., Kriven G.I., Rabinsky L.N. On strength of modified fiber composite with fuzzy fibers. *Kompoz. Nanostrukt.*, 2019, vol. 11, no. 1, pp. 1–15. (In Russian)

15. Christensen R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the Mechanics of Composites]. Moscow, Mir, 1982. 334 p. (In Russian)
16. Hashin Z. Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites. *Mech. Mater.*, 1990, vol. 8, no. 4, pp. 293–308.
[https://doi.org/10.1016/0167-6636\(90\)90049-L](https://doi.org/10.1016/0167-6636(90)90049-L).
17. Tsukrov I., Drach B. Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers. *Int. J. Solids Struct.*, 2010, vol. 47, no. 1, pp. 25–33.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.005>.

Для цитирования: Кривень Г.И., Шавелкин Д.С. О локальной потере устойчивости модифицированных композитов с вискеризованными волокнами // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 344–360.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.344-360>.

For citation: Kriven G.I., Shavelkin D.S. On local stability loss of modified composites with whiskerized fibers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 344–360.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.344-360>. (In Russian)