

## ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.517.6

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>

# Асимптотическое исследование пропульсивного движения машущего цилиндрического крыла с эллиптической формой сечения

А.Н. Нуриев ✉, А.Р. Баймуратова, О.Н. Зайцева

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*

✉ [nuriev\\_an@mail.ru](mailto:nuriev_an@mail.ru)

## Аннотация

Исследовано пропульсивное движение в вязкой несжимаемой жидкости цилиндрического машущего крыла с эллиптической формой сечения. Исследование направлено на создание аналитической модели, позволяющей предсказывать крейсерскую скорость такого крыла без применения ресурсоемких численных методов. Математическая постановка задачи основана на нестационарных уравнениях Навье–Стокса. Движение крыла описано как плоскопараллельное поступательно-вращательное колебание с заданными скоростями. Решение задачи построено в рамках асимптотического подхода в предположении о высокочастотном и малоамплитудном характере колебаний. Получена структурная формула, описывающая изменение крейсерской скорости крыла в зависимости от угла поступательных колебаний, сдвига фаз между поступательными и вращательными колебаниями, амплитуды вращательных колебаний и соотношения полуосей эллиптического сечения. Продемонстрирована согласованность результатов с известными аналитическими решениями для круглого цилиндра. Рассмотрены пределы применимости модели в зависимости от частоты колебаний.

**Ключевые слова:** машущее крыло, вязкая несжимаемая жидкость, уравнение Навье–Стокса, асимптотические разложения, крейсерская скорость

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-79-10033-П).

---

**Для цитирования:** Нуриев А.Н., Баймуратова А.Р., Зайцева О.Н. Асимптотическое исследование пропульсивного движения машущего цилиндрического крыла с эллиптической формой сечения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 759–776. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>.

---

## ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>

## Asymptotic study of the propulsive motion of a flapping cylindrical wing with an elliptical cross-section

A.N. Nuriev ✉, A.R. Baimuratova, O.N. Zaitseva

*Kazan Federal University, Kazan, Russia*✉ [nuriev\\_an@mail.ru](mailto:nuriev_an@mail.ru)

### Abstract

The propulsive motion of a cylindrical flapping wing with an elliptical cross-section in a viscous incompressible fluid is investigated to develop an analytical model for predicting the cruising speed of such a wing without resorting to computationally expensive numerical methods. The mathematical formulation of the problem is based on the unsteady Navier–Stokes equations. The wing motion is described as a planar translational-rotational oscillation with prescribed velocities. The problem is solved using an asymptotic approach, under the assumption of high-frequency and low-amplitude oscillations. A structural formula is derived that describes the variation of the cruising speed in relation to the angle of translational oscillations, the phase shift between translational and rotational oscillations, the amplitude of rotational oscillations, and the aspect ratio of the elliptical cross-section. The consistency of the results with known analytical solutions for a circular cylinder is demonstrated. The limits of the model’s applicability with respect to the oscillation frequency are considered.

**Keywords:** flapping wing, viscous incompressible fluid, Navier–Stokes equation, asymptotic model, cruising speed

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-79-10033-P).

---

**For citation:** Nuriev A.N., Baimuratova A.R., Zaitseva O.N. Asymptotic study of the propulsive motion of a flapping cylindrical wing with an elliptical cross-section. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 759–776. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.759-776>. (In Russian)

---

### Введение

В последние несколько лет появление технологий для создания небольших беспилотных воздушных и подводных аппаратов по образу птиц, летающих насекомых и гидробионтов придало новый импульс исследованиям в области колебательных движителей. Это привело к актуализации широкого класса задач аэрогидромеханики машущего полета и рыбоподобного плавания. Одной из таких задач является создание относительно

простой универсальной теории, позволяющей описывать аэрогидродинамику колебательного движителя без использования ресурсоемкого прямого численного моделирования. В настоящее время развивается несколько подходов к решению этой задачи.

Классический подход основан на теории идеальной жидкости. Он начал формироваться еще в 1920–1940-х годах в работах Л. Прандтля [1], В. Бирнбаума [2], Т. Теодорсена [3], И. Гаррика [4], Г. Вагнера [5], Г. Глауэрта [6], М.В. Келдыша и М.А. Лаврентьева [7], Л.И. Седова [8], А.И. Некрасова [9] и продолжает успешно развиваться в наши дни [10,11]. Основные ограничения классического подхода состоят в необходимости дополнительных предположений о точках отрыва потока или структуре вихревого следа, которые необходимо формулировать для нестационарного процесса движения.

Альтернативный подход основан на построении асимптотических моделей вязкого обтекания. Первые асимптотические решения задач о поступательных колебаниях тел в покоящейся (на бесконечности) жидкости были получены в работах Дж. Стокса [12] в XIX веке, Г. Шлихтинга [13], Н. Райли [14,15] в XX веке. Современные исследования [16–19] демонстрируют возможности формирования общей асимптотической теории для описания пропульсивного движения колеблющегося тела. Так, в работах [16–19] были найдены решения, описывающие крейсерские режимы движения круглого цилиндрического крыла, совершающего вращательно-поступательные колебания. В настоящей работе представлено дальнейшее развитие асимптотического подхода, рассмотрена гидродинамика машущего крыла с эллиптической формой сечения.

## 1. Постановка задачи

Пусть цилиндрическое крыло с эллиптической формой сечения совершает плоскопараллельное поступательно-вращательное периодическое движение в вязкой жидкости со скоростями

$$\mathbf{U} = U \cos \alpha \cos(\omega t + \phi) \mathbf{i}_X + U \sin \alpha \cos(\omega t + \phi) \mathbf{j}_Y, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 \cos(\omega t) \mathbf{k}_Z, \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  – угловая скорость вращательного движения;  $\mathbf{U}$  – скорость поступательного движения, которая совпадает по частоте со скоростью вращательного движения, но смещена по фазе на  $\phi$ ;  $\mathbf{i}_X$ ,  $\mathbf{j}_Y$  и  $\mathbf{k}_Z$  – единичные вектора, параллельные основным осям неподвижной декартовой системы координат  $XYZ$  ( $\mathbf{k}_Z$  – вектор, параллельный оси цилиндра). Исследуем движение жидкости, вызванное колебаниями, и определим гидродинамическое воздействие на крыло.

Сформулируем соответствующую математическую задачу. Опишем движение жидкости около крыла с помощью уравнений Навье – Стокса и неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_X}{\partial t} + v_X \frac{\partial v_X}{\partial X} + v_Y \frac{\partial v_X}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X} + \nu \Delta_{XY} v_X, \\ \frac{\partial v_Y}{\partial t} + v_X \frac{\partial v_Y}{\partial X} + v_Y \frac{\partial v_Y}{\partial Y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial Y} + \nu \Delta_{XY} v_Y, \\ \frac{\partial v_X}{\partial X} + \frac{\partial v_Y}{\partial Y} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Delta_{XY}$  – оператор Лапласа в неподвижной системе координат,  $p$  – давление,  $v_X$  и  $v_Y$  – компоненты скорости,  $\rho$  и  $\nu$  – плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно.

Дополним систему (2) условиями прилипания на границе крыла, согласно (1), и условиями

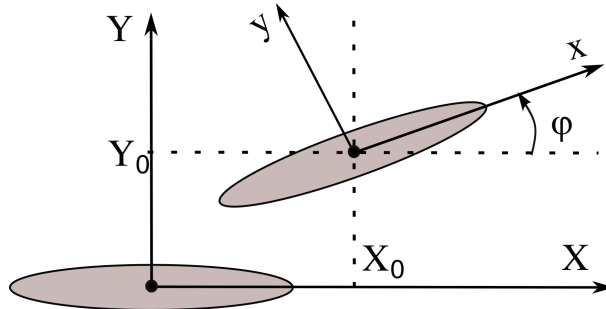
$$v_X = v_Y = 0$$

на бесконечности.

## 2. Переход в криволинейную систему координат

**2.1. Переход в подвижные декартовы координаты.** Для решения сформулированной математической задачи удобно перейти в подвижную систему координат  $xyz$ , жестко связанную с телом. Текущее положение тела охарактеризуем перемещениями  $X_0(t)$  и  $Y_0(t)$  его центра масс и углом поворота  $\phi(t)$ , как это показано на рис. 1. Связь координат подвижной  $xy$  и неподвижной  $XY$  систем координат зададим как

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I_\varphi \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} = I_{-\varphi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad I_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad I_{-\varphi} = I_\varphi^{-1}. \quad (3)$$



**Рис. 1.** Начальное и текущее положения тела и связанные с ними неподвижная и подвижная системы координат

**Fig. 1.** Initial and current positions of the body and the associated fixed and moving coordinate systems

Подвижная система  $xy$  перемещается поступательно относительно неподвижной системы со скоростью  $\mathbf{V}$  и вращается с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{V} = \dot{X}_0 \mathbf{i}_X + \dot{Y}_0 \mathbf{j}_Y = \overbrace{(\cos \varphi \dot{X}_0 + \sin \varphi \dot{Y}_0)}^{V_x(t)} \mathbf{i}_x + \overbrace{(-\sin \varphi \dot{X}_0 + \cos \varphi \dot{Y}_0)}^{V_y(t)} \mathbf{j}_y, \quad \mathbf{\Omega} = \dot{\varphi} \mathbf{k}_Z.$$

Перейдем в уравнениях (2) в подвижную систему координат, используя соотношения (3). Учитывая

$$\begin{aligned} \nabla_{XY} &= I_{-\varphi} \nabla_{xy}, \quad \Delta_{XY} = \Delta_{xy}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \left[ - \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} -\dot{X}_0 \\ -\dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy}, \\ \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \cdot [I_{-\varphi} \nabla_{xy}] &= \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy}, \end{aligned}$$

преобразуем уравнения количества движения к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} + \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} v_X - \dot{X}_0 \\ v_Y - \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] \cdot \nabla_{xy} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = -\frac{1}{\rho} I_{-\varphi} \nabla_{xy} p + \nu \Delta_{xy} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Связь между скоростями в подвижной и неподвижной системах координат дана соотношениями

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = I_\varphi \begin{pmatrix} v_X - \dot{X}_0 \\ v_Y - \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Поддействовав на обе части (4) матрицей  $I_\varphi$ , получим

$$I_\varphi \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla_{xy} p + \nu \Delta_{xy} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое в левой части преобразуем как

$$\begin{aligned} I_\varphi \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] - \dot{I}_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{d}{dt} \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} \right] - \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x - \dot{\varphi} y \\ v_y + \dot{\varphi} x \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix} - \ddot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} V_y \\ -V_x \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а второе —

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[ I_\varphi \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \nabla_{xy} \left[ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \right] = \\ &= \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} - \dot{\varphi} \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Собрав все члены, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x + 2\dot{\varphi} v_y + \dot{\varphi}^2 x + \ddot{\varphi} y - A_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y - 2\dot{\varphi} v_x + \dot{\varphi}^2 y - \ddot{\varphi} x - A_y, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} V_X \\ V_Y \end{pmatrix}.$$

Определив новое давление как

$$p^0 = p - p^1, \quad p^1 = \rho \frac{\dot{\varphi}^2}{2} (x^2 + y^2) - \rho (A_x x + A_y y),$$

приведем (6) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x} + \nu \Delta v_x + 2\dot{\varphi} v_y + \dot{\varphi}^2 x + \ddot{\varphi} y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial y} + \nu \Delta v_y - 2\dot{\varphi} v_x + \dot{\varphi}^2 y - \ddot{\varphi} x, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Введем функцию тока  $\psi$ :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Перепишем (7) в терминах функции тока:

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + 2\ddot{\varphi} - \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} = \nu \Delta^2 \psi, \quad \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (8)$$

В подвижной системе координат на теле должны выполняться условия прилипания. В терминах функции тока их можно записать следующим образом:

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0. \quad (9)$$

Для определения условия на бесконечности учтем, что абсолютные скорости связаны с относительными соотношениями (5), а также то, что на бесконечности в абсолютной системе координат жидкость покоится, т. е.  $v_X = v_Y = 0$ . В результате получим

$$(x, y) \rightarrow \infty: \quad \psi \sim \frac{1}{2} \dot{\varphi} (x^2 + y^2) + xV_y - yV_x. \quad (10)$$

**2.2. Переход в криволинейные координаты.** Далее перейдем в криволинейную подвижную эллиптическую систему координат  $(r, \theta)$ , жестко связанную с крылом (в которой крыло неподвижно) и заданную конформным отображением

$$z(r, \theta) = x + iy, \quad x = 2m_\infty \cosh r \cos \theta, \quad y = 2m_\infty \sinh r \sin \theta \quad (11)$$

области  $r_0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  во внешность сечения цилиндра (в физической плоскости), при котором  $r = r_0$  перейдет в замкнутую кривую, определяющую профиль сечения, а бесконечно удаленная точка перейдет в бесконечно удаленную. Заметим, что коэффициенты Ламе для эллиптических координат (11) равны

$$\lambda^2 = \lambda_r^2 = \lambda_\theta^2 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial \bar{z}}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta}, \quad \lambda = 2m_\infty (\cosh^2 r - \cos^2 \theta)^{1/2}.$$

Обозначим больший и меньший радиусы эллиптического цилиндра как  $R_x$  и  $R_y$  соответственно, а их соотношение как  $b = R_y/R_x \leq 1$ . Обезразмерим скорость на  $U$ , пространственные координаты на  $R_x$ , время на  $\omega^{-1}$ . Определим параметры отображения (11)  $m_\infty$  и  $r_0$  как

$$m_\infty = \sqrt{\frac{1-b^2}{2}}, \quad m_\infty e^{r_0} = \frac{1+b}{2}, \quad r_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+b}{1-b}.$$

Компоненты поля скорости  $(v_r, v_\theta)$  в эллиптической системе координат выразим через  $(v_x, v_y)$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left( v_\theta \frac{\partial x}{\partial \theta} + v_r \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) &= v_x, \quad \frac{1}{\lambda} \left( v_\theta \frac{\partial y}{\partial \theta} - v_r \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) = v_y, \\ v_r &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned}$$

Перепишем систему уравнений движения (8) в новой подвижной криволинейной системе координат в терминах функции тока  $\psi$  в безразмерных переменных в виде

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + 2\chi \sin(t) - \frac{\kappa}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(r, \theta)} = \varepsilon^2 \Delta^2 \psi, \quad (12)$$

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Безразмерные параметры задачи  $\varepsilon, \kappa, \chi$  теперь определим как

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\nu}{\omega R_x^2}}, \quad \kappa = \frac{U}{\omega R_x} = \frac{A}{R_x}, \quad \chi = \frac{\Omega_0 R_x}{U} = \frac{\Theta}{\kappa}.$$

Дополним задачу граничными условиями в соответствии с (9) и (10). На границе крыла получим

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

На бесконечности граничные условия примут следующий вид:

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \frac{1}{2} \chi \cos(t)(x^2 + y^2) + xV_y - yV_x.$$

Здесь  $V_x$  и  $V_y$  определяются как

$$V_x = (\cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha) \cos(t + \phi) = \cos(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$V_y = (\sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha) \cos(t + \phi) = \sin(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$\varphi = \Theta \sin(t).$$

Для рассматриваемой эллиптической системы координат получим

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim 2\chi m_\infty^2 ((\cosh r \cos \theta)^2 + (\sinh r \sin \theta)^2) \cos t +$$

$$+ 2m_\infty \cosh r \cos \theta \sin(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi) - 2m_\infty \sinh r \sin \theta \cos(\varphi + \alpha) \cos(t + \phi). \quad (14)$$

### 3. Асимптотическое разложение

**3.1. Предположение о малости амплитуд колебаний.** Построим асимптотическое решение задачи в предположении  $\Theta \sim \kappa \ll 1$ . Представим  $\psi$  в виде разложения по степеням  $\kappa$ :

$$\psi = \kappa^0 \psi_0 + \kappa^1 \psi_1 + O(\kappa^2).$$

Подставив разложение в (12), запишем уравнения для определения  $\psi_0$  и  $\psi_1$ :

$$\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta^2 \psi_0 = -2\chi \sin(t),$$

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} - \varepsilon^2 \Delta^2 \psi_1 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial(\psi_0, \Delta \psi_0)}{\partial(r, \theta)}.$$

При условии  $\Theta \ll 1$  граничные условия (14) на бесконечности запишем в форме

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \chi m_\infty^2 (\cosh 2r + \cos 2\theta) \cos t +$$

$$+ 2m_\infty \cos(t + \phi) (\cosh r \cos \theta \sin \alpha - \sinh r \sin \theta \cos \alpha) +$$

$$+ \Theta 2m_\infty \cos(t + \phi) \sin t (\cosh r \cos \theta \cos \alpha + \sinh r \sin \theta \sin \alpha) + O(\Theta^2),$$

или

$$r \rightarrow \infty : \quad \psi \sim \chi m_\infty^2 \left[ \frac{e^{2r}}{2} \right] \cos(t) - m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi) + \quad (15)$$

$$+ \kappa \chi m_\infty e^r \cos(\theta - \alpha) (-\sin \phi + \sin(2t + \phi)) / 2 + O(\kappa^2).$$

Заметим, что третье слагаемое определяет стационарную поправку к скорости на бесконечности порядка  $\Theta = \chi \kappa$  при  $\phi \neq 0$ .

Собрав члены при соответствующих степенях  $\kappa$  в (13) и (15), получим следующие граничные условия для  $\psi_0$  и  $\psi_1$ :

$$r = r_0 : \psi_0 = 0, \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \psi_0 \sim \chi m_\infty^2 \left[ \frac{e^{2r}}{2} \right] \cos(t) - m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi),$$

$$r = r_0 : \psi_1 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \psi_1 \sim \chi m_\infty e^r \cos(\theta - \alpha) \frac{(-\sin \phi + \sin(2t + \phi))}{2}.$$

**3.2. Предположение о высокочастотном характере колебаний.** Дополнительно предположим высокочастотный характер колебаний  $\varepsilon^2 \sim \Theta \sim \kappa \ll 1$ . Представим решение в членах  $O(\kappa^0)$  и  $O(\kappa^1)$ , согласно подходу Шлихтинга [13], в виде разложений во внешней ( $r \sim 1$ ) и внутренней погранслоиных ( $r \sim \varepsilon$ ) областях

$$r \sim \varepsilon : \quad \psi_k^{in} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_{k,j}, \quad r \sim 1 : \quad \psi_k^{out} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Psi_{k,j}, \quad k = 0, 1,$$

где  $\psi_k^{out}$  – внешнее решение,  $\psi_k^{in}$  – погранслоиное решение.

#### 4. Решение в главном члене $O(\kappa^0)$

Функция тока, описывающая внешнее нестационарное течение около крыла, в главном члене  $O(\kappa^0, \varepsilon^0)$  определим как решение задачи

$$\frac{\partial \Delta \Psi_{0,0}}{\partial t} = -2\chi \sin(t),$$

$$r = r_0 : \quad \Psi_{0,0} = 0; \quad r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{0,0} \sim \chi m_\infty e^r \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi).$$

Найдем его в виде

$$\Psi_{0,0} = \chi m_\infty^2 (\cosh 2r - \cosh 2r_0 + \cos 2\theta - e^{-2r+2r_0} \cos 2\theta) \cos(t) -$$

$$- m_\infty 2e^r \sinh(r - r_0) \sin(\theta - \alpha) \cos(t + \phi).$$

Заметим, что касательная составляющая скорости на границе эллиптического цилиндра не равна нулю:

$$-\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Psi_{0,0}}{\partial \theta} = -(V_1(\theta) \cos(t) + V_2(\theta) \sin(t)) =$$

$$= -2\chi m_\infty^2 (\sinh 2r_0 + \cos 2\theta) / \lambda(r_0) \cos(t) + 2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) / \lambda(r_0),$$

$$V = V_1 + iV_2 =$$

$$= \frac{2\chi m_\infty^2 (\sinh 2r_0 + \cos 2\theta) - 2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) \cos(\phi) + i2m_\infty e^{r_0} \sin(\theta - \alpha) \sin(\phi)}{\lambda(r_0)}.$$



Для удовлетворения условия прилипания рассмотрим поведение в погранслое. Введем погранслоиную координату

$$r = \varepsilon\eta + r_0.$$

Получим погранслоинное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \eta^2} \right) - \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{\partial^4 \psi_{0,1}}{\partial \eta^4} = 0$$

с граничными условиями

$$\eta = 0 : \quad \psi_{0,1} = 0, \quad \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \eta} = 0, \quad \eta \rightarrow \infty : \quad \psi_{0,1} \sim (V_1(\theta) \cos(t) + V_2(\theta) \sin(t)) \eta \lambda(r_0).$$

Используя подстановку  $\eta = \zeta/\lambda(r_0)$ , решение можно записать в виде

$$\psi_{0,1} = \text{Real} \left\{ e^{it} \left( \zeta + \frac{(1-i)(E-1)}{\sqrt{2}} \right) (V_1(\theta) - iV_2(\theta)) \right\}, \quad E = \exp \left( \frac{-(1+i)}{\sqrt{2}} \zeta \right).$$

## 5. Решение в члене $O(\kappa^1)$

**5.1. Стационарная составляющая решения.** Решение во втором члене по  $\kappa$  состоит из суммы осцилляционных и стационарных компонент. Далее вычислим стационарную компоненту решения.

Запишем погранслоиную задачу. Она может быть описана уравнением

$$-\left\{ \frac{\partial \left( \psi_{0,1}, \frac{1}{(\lambda(r_0))^2} \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \eta^2} \right)}{\partial(\eta, \theta)} \right\}_{\text{st}} = \frac{1}{(\lambda(r_0))^2} \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \eta^4}$$

с нулевыми граничными условиями.

Используя  $\eta = \zeta/\lambda(r_0)$ , перепишем ее как

$$-\frac{1}{\lambda(r_0)} \left\{ \left( \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \zeta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi_{0,1}}{\partial \zeta^2} \right) - \left( \frac{\partial \psi_{0,1}}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial^3 \psi_{0,1}}{\partial \zeta^3} \right) \right\}_{\text{st}} = \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \zeta^4}.$$

Подставив функции  $\psi_{0,1}$  в виде

$$\psi_{0,1} = \text{Real} \left\{ e^{it} (f_1(\zeta) + if_2(\zeta)) (V_1(\theta) - iV_2(\theta)) \right\},$$

получим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda(r_0)} \frac{\partial |V(\theta)|^2}{\partial \theta} \frac{1}{4} \text{Real} \left( \frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left( \frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) \right) - \\ & -\frac{1}{\lambda(r_0)} \left( \frac{\partial V_1}{\partial \theta} V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial \theta} V_1 \right) \frac{1}{4} \text{Imag} \left( \frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left( \frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) \right) = \\ & = \frac{\partial^4 \psi_{1,1,\text{st}1}}{\partial \zeta^4}. \end{aligned}$$

Решение этой задачи можно записать как

$$\psi_{1,1,st1} = -\frac{1}{\lambda(r_0)} \frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \frac{1}{4} \text{Real}(G) - \frac{i}{\lambda(r_0)} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right) \frac{1}{4} \text{Imag}(G),$$

$$\bar{V} = V_1 - iV_2, \quad |V|^2 = V_1^2 + V_2^2,$$

где функция  $G$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \zeta^4} = \frac{\partial(f_1 + if_2)}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2(f_1 - if_2)}{\partial \zeta^2} \right) - (f_1 - if_2) \left( \frac{\partial^3(f_1 + if_2)}{\partial \zeta^3} \right) =$$

$$= e^{-(-1)^{1/4}\zeta} \left( -(-1)^{3/4} + (-1)^{3/4} \left( 2e^{(-1)^{3/4}\zeta} - e^{i\sqrt{2}\zeta} \right) + i\zeta \right).$$

С учетом граничных условий эта функция определяется в виде

$$G = \frac{13}{2\sqrt{2}} + \frac{3i}{2\sqrt{2}} - \left( \frac{3}{2} + \frac{3i}{2} \right) \zeta +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-(-1)^{1/4}\zeta} \zeta \left( (-1)^{3/4} e^{(-1)^{3/4}\zeta} \left( 1 + 2e^{(-1)^{1/4}\zeta} \right) - 2(\sqrt{8 + 15i} + i\zeta) \right).$$

Отсюда получим граничное условие для внешней стационарной задачи:

$$\left( \frac{\partial \Psi_{1,0,st}}{\partial r} \right)_{r_0} = \left( \lambda(r_0) \frac{\partial \psi_{1,1,st1}}{\partial \zeta} \right)_{\infty} = \left( \frac{\partial \psi_{1,1,st1}}{\partial \eta} \right)_{\infty}.$$

Внешнюю стационарную задачу запишем как

$$\Delta^2 \Psi_{1,0,st} = 0. \quad (16)$$

Она имеет следующие граничные условия:

$$r = r_0 : \quad \left( \frac{\partial \Psi_{1,0,st}}{\partial r} \right)_{r_0} = \frac{3}{8} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \right) + \frac{3i}{8} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right), \quad \Psi_{1,0,st} = 0, \quad (17)$$

$$r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st} \sim -m_{\infty} \chi e^r \cos(\theta - \alpha) \sin \phi + O(e^r).$$

Решение этой задачи можно представить в виде двух слагаемых:

$$\Psi_{1,0,st} = \Psi_{1,0,st1} + \Psi_{1,0,st2}.$$

Первое удовлетворяет граничным условиям на теле (17), второе – следующим граничным условиям:

$$r = r_0 : \quad \Psi_{1,0,st2} = 0, \quad r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st2} \sim -m_{\infty} \chi e^r \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Второе слагаемое может быть описано гармонической функцией

$$\Psi_{1,0,st2} = -m_{\infty} e^{r_0} \chi \sinh(r - r_0) \cos(\theta - \alpha) \sin \phi. \quad (18)$$

Определение  $\Psi_{1,0,st1}$  является более сложной задачей.

### 5.2. Аналитическое решение стационарной задачи для кругового цилиндра.

Рассмотрим сначала частный случай колебаний круглого цилиндра. Имеем

$$V(\theta) = \chi - 2 \sin(\theta - \alpha) \cos \phi + i 2 \sin(\theta - \alpha) \sin \phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) = -4 \cos(\theta - \alpha) (\chi \cos \phi - 2 \sin(\theta - \alpha)), \quad i \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right) = -4 \chi \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Граничное условие на теле запишем как

$$\left( \frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = -\frac{3}{2} \cos(\theta - \alpha) (\chi \cos \phi - 2 \sin(\theta - \alpha)) - \frac{3}{2} \chi \cos(\theta - \alpha) \sin \phi.$$

Решение  $\Psi_{1,0,st1}$  определяется как

$$\Psi_{1,0,st1} = -\frac{3}{4} \sin 2(\theta - \alpha) \{e^{-2r} - 1\} - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \cos \phi - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \sin \phi.$$

Добавив (18), найдем функцию тока, описывающую внешнее стационарное течение:

$$\Psi_{1,0,st} = -\frac{3}{4} \sin 2(\theta - \alpha) \{e^{-2r} - 1\} - \frac{3}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \cos \phi - \frac{5}{4} \chi \cos(\theta - \alpha) \{e^r - e^{-r}\} \sin \phi.$$

Такое течение имеет ненулевую среднюю скорость в направлении, перпендикулярном оси поступательного колебательного движения:

$$(u_{x,\infty}, u_{y,\infty}) = \Theta \left( \frac{3}{4} \cos \phi + \frac{5}{4} \sin \phi \right) (-\sin \alpha, \cos \alpha). \quad (19)$$

В неподвижной системе координат  $(-u_{x,\infty}, -u_{y,\infty})$  – это крейсерская скорость движения крыла (стационарные составляющие силы, действующие на тело при движении с этой скоростью, равны нулю). Этот результат в точности совпадает с решением для круглого цилиндра, полученным ранее в работах [17, 18].

**5.3. Численное решение стационарной задачи для эллиптического цилиндра.** Полное аналитическое решение стационарной задачи для общего случая получить достаточно сложно. В настоящей работе для его определения используем численные методы.

Запишем подзадачу (16), (17) для  $\Psi_{1,0,st1}$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta W_{1,0,st1} &= 0, \quad \Delta \Psi_{1,0,st1} = -W_{1,0,st1}, \\ r = r_0 : \quad \left( \frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \right)_{r_0} &= \frac{3}{8} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (|V|^2) \right) + \frac{3i}{8} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \bar{V} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} V \right), \quad \Psi_{1,0,st1} = 0, \\ r \rightarrow \infty : \quad \Psi_{1,0,st1} &\sim O(e^r), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $W_{1,0,st1}$  – завихренность. Построим ее численное решение с помощью метода конечных разностей на основе численной схемы, описанной в работе [20]. Сформируем в ограниченной области  $r_0 \leq r \leq r_\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  равномерную (в пространстве конформного отображения) расчетную сетку с  $n_r \times n_\theta$  узлами. Дискретные значения переменных определим в узлах сетки. Для аппроксимации оператора Лапласа (в двумерной области) используем

стандартный симметричный пятиточечный шаблон. На границе цилиндрического крыла проведем дискретизацию граничных условий следующим образом:

$$\widetilde{\Psi}_{1,0,st1}(r_0) = 0, \quad \widetilde{W}_{1,0,st1}(r_0) = \frac{1}{\lambda(r_0)^2} \frac{2}{h^2} \left( \Psi_{1,0,st1}(r_0 + h_r) - h \frac{\partial \Psi_{1,0,st1}}{\partial r} \bigg|_{r=r_0} \right),$$

где тильда обозначает приближенную сеточную функцию,  $h$  – шаг сетки по координате  $r$ . Условие для завихренности здесь отражает широко известное условие Тома второго порядка точности.

На внешней границе, предположив, что в главном члене  $W_{1,0,st1}(r_\infty) \sim e^{-2r}$ , сформулируем следующее граничное условие для завихренности:

$$r = r_\infty : \quad 2\widetilde{W}_{1,0,st1}(r_\infty) + \frac{\partial^{(up2)} \widetilde{W}_{1,0,st1}}{\partial r}(r_\infty) = 0.$$

Здесь индекс  $(up2)$  у символа частной производной указывает на использование направленной разности второго порядка точности для аппроксимации соответствующей производной.

Аналогично, из предположения  $\Psi_{1,0,st1} \sim ce^r + de^{-r}$  (как это сделано в работе [19]) сформулируем граничное условие для функции тока

$$r = r_\infty : \quad \Psi_{1,0,st1}(r_\infty) = (e^{r_\infty} + e^{-r_\infty})\Psi_{1,0,st1}(r_\infty - h_r) - \Psi_{1,0,st1}(r_\infty - 2h_r).$$

**5.4. Результаты решения стационарной задачи в общем случае.** Анализ граничных условий задачи (20) показал, что общая формула для вычисления стационарной скорости на бесконечности (по модулю равной крейсерской скорости машущего крыла) может быть представлена в виде

$$(u_{x,\infty}, u_{y,\infty}) = \Theta \left( (u_{\pi/2,0} \cos(\phi) + u_{\pi/2,\pi/2} \sin(\phi)) \sin(\alpha), (u_{0,0} \cos(\phi) + u_{0,\pi/2} \sin(\phi)) \cos(\alpha) \right).$$

Таким образом, для получения полной параметрической зависимости в рамках численных расчетов необходимо определить поведение четырех функций  $u_{\pi/2,0}$ ,  $u_{\pi/2,\pi/2}$ ,  $u_{0,0}$ ,  $u_{0,\pi/2}$  от параметра  $b$ . Сделаем это с помощью численной схемы, изложенной в разделе 5.3, выбрав соответствующие значения  $\phi$  и  $\alpha$  при  $\Theta = 1$ .

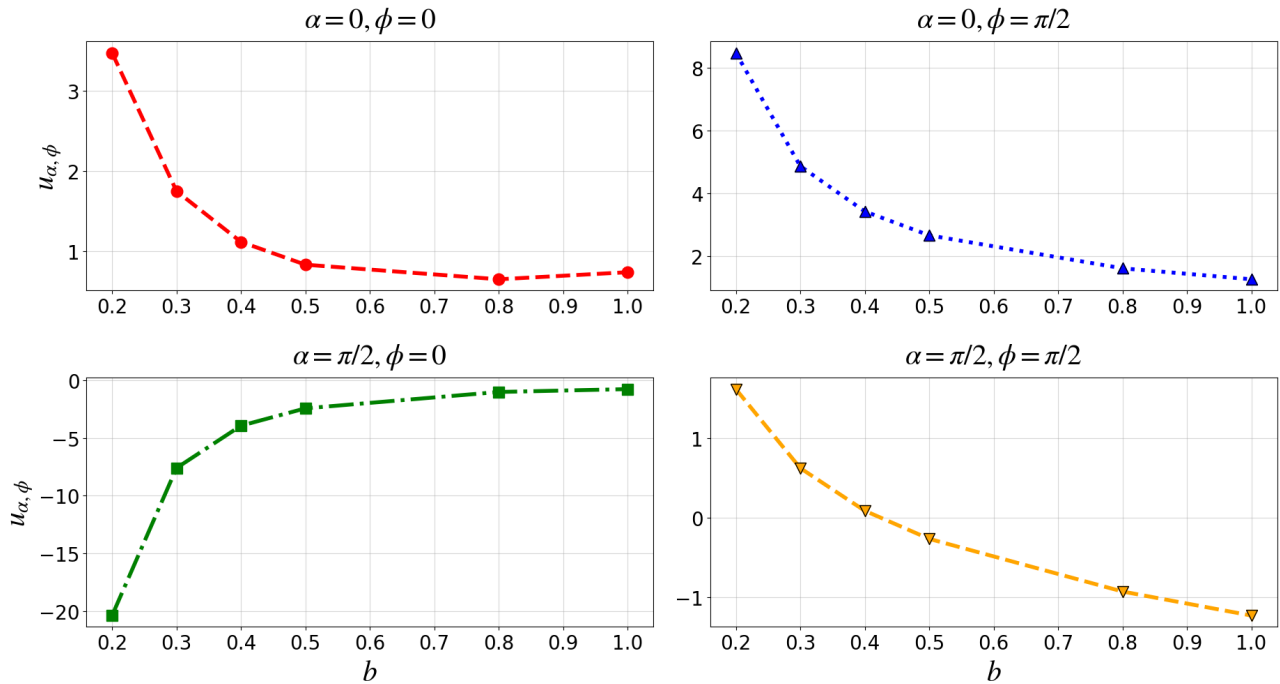
Для настройки параметров численной схемы проведем анализ сеточной сходимости, а также выполним сравнение результатов расчетов с точным решением (19), известным для случая  $b = 1$ . Результаты вычисления функции  $u_{\pi/2,\pi/2}$  для крыльев с соотношением полуосей  $b = 0.2, 1$  на разных сетках при  $r_\infty = 2.8$  представлены в табл. 1.

Как можно видеть, результаты слабо зависят от сетки. Наличие небольшой ошибки (порядка 0.1 % на самой подробной сетке) численного решения в случае  $b = 1$  объясняется ограниченной областью расчета и влиянием граничных условий.

**Табл. 1.** Значения функции  $u_{\pi/2,\pi/2}$ , вычисленные на разных сетках  
**Table 1.** Values of the function  $u_{\pi/2,\pi/2}$  calculated on different meshes

$b$	257x257	513x257	513x513	1025x512	Точное решение
0.2	0.61943	1.62456	1.62475	1.62484	—
1	-1.252717	-1.250936	-1.251266	-1.25128	-1.25

Результаты расчета  $u_{\pi/2,0}$ ,  $u_{\pi/2,\pi/2}$ ,  $u_{0,0}$ ,  $u_{0,\pi/2}$  для разных значений  $b$  на сетке  $n_r \times n_\theta = 513 \times 257$  при  $r_\infty = 2.8$  показаны на рис. 2.



**Рис. 2.** Зависимости  $u_{\pi/2,0}$ ,  $u_{\pi/2,\pi/2}$ ,  $u_{0,0}$ ,  $u_{0,\pi/2}$  от параметра  $b$

**Fig. 2.** Dependencies  $u_{\pi/2,0}$ ,  $u_{\pi/2,\pi/2}$ ,  $u_{0,0}$ , and  $u_{0,\pi/2}$  on parameter  $b$

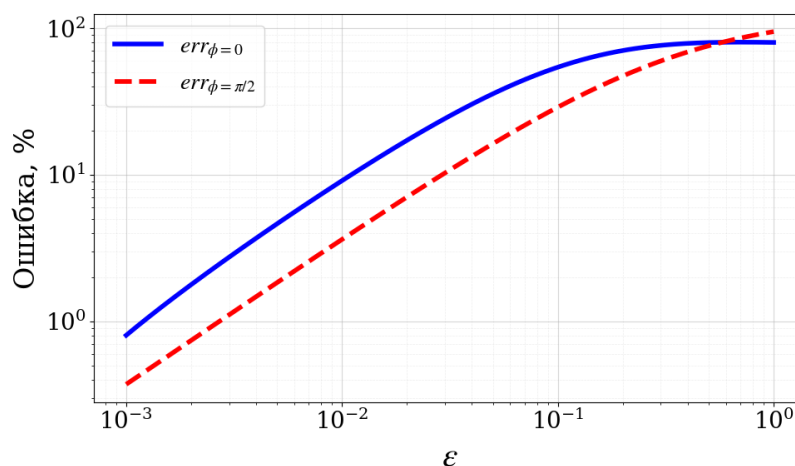
Полученные зависимости представляют первое приближение крейсерской скорости движения крыла при высоких частотах ( $\varepsilon \ll 1$ ) колебаний. Оценки области применимости модели по  $\varepsilon$  можно привести для случая  $b = 1$  на основании результатов, полученных в работе [17]. Так, в малоамплитудном диапазоне относительные ошибки  $\text{err}_\phi$  определения значений функций  $u_{\alpha,\phi}$  для  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi/2$  (значения функций при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$  совпадают) можно вычислить как

$$b = 1 : \quad \text{err}_{\phi=0} \approx \left| \frac{3}{4} - \frac{\varepsilon^{-2} - 3.7\varepsilon^{-1}}{1.33\varepsilon^{-2} + 12.7\varepsilon^{-1} + 41.7} \right| \cdot 100\%,$$

$$\text{err}_{\phi=\pi/2} \approx \left| \frac{5}{4} - \frac{\varepsilon^{-2} + 1.4\varepsilon^{-1}}{0.8\varepsilon^{-2} + 3.5\varepsilon^{-1} + 3.6} \right| \cdot 100\%. \quad (21)$$

Графики этих функций изображены на рис. 3.

Как можно видеть, высокочастотная асимптотическая модель предсказывает скорость с ошибкой менее чем в 10% при  $\varepsilon < 0.01$  для  $\phi = 0$  и  $\varepsilon < 0.029$  для  $\phi = \pi/2$ . Заметим, что для других значений  $b$  при разных  $\alpha$  и  $\phi$  диапазон применимости может отличаться. Об этом, в частности, говорит поведение функций  $u_{\alpha,\phi}$  при малых  $b$ . Так, для случая  $\alpha = \pi/2$  и  $\phi = \pi/2$  модель предсказывает эффект смены направления движения крыла при переходе от круглого цилиндра к тонкой пластине [21], аналогичный эффект при  $\alpha = \pi/2$  и  $\phi = 0$  моделью не предсказывается (из-за недостаточного количества членов разложения).



**Рис. 3.** График ошибки  $err_{\phi}$  для  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi/2$ , построенные по формулам (21), для случая  $b = 1$ ,  $\kappa \ll 1$

**Fig. 3.** Plot of the error  $err_{\phi}$  for  $\phi = 0$  and  $\phi = \pi/2$  based on formulas (21) for  $b = 1$  and  $\kappa \ll 1$

### Заключение

Построена высокочастотная малоамплитудная ( $\varepsilon^2 \sim \Theta \sim \kappa \ll 1$ ) асимптотическая модель пропульсивного движения цилиндрического машущего крыла с эллиптической формой сечения. На базе этой модели выведена структурная формула для определения крейсерской скорости движения машущего крыла в зависимости от значений параметров  $\alpha$ ,  $\phi$ ,  $\Theta$  и  $b$ . Зависимости от первых трех параметров получены аналитически, зависимость от  $b$  найдена численно. Продемонстрирована согласованность полученных результатов с аналитическими формулами для круглого цилиндра при  $b = 1$ .

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Conflicts of Interest.** The authors declare no conflicts of interest.

### Литература

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben // Kármán Th., Levi-Civita T. (Hrsg.) Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Berlin, Heidelberg: Springer, 1924. S. 18–33. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2).
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel // Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt. 1924. Bd. 15. S. 128–134.
3. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No NACA-TR-496. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935. P. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No NACA-TR-567. Washington, DC: Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936. P. 1–10.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln // Z. Angew. Math. Mech. 1925. Bd. 5, H. 1. S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>.

6. *Glauert H.* The force and moment on an oscillating aerofoil // Gilles A., Hopf L., Kármán Th. (Hrsg.) Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929). Berlin, Heidelberg: Springer, 1930. S. 88–95. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16).
7. *Келдыш М.В., Лаврентьев М.А.* К теории колеблющегося крыла // Техн. заметки ЦАГИ. 1935. Т. 45. С. 48–52.
8. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 440 с.
9. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.-Л.: АН СССР, 1947. 262 с.
10. *Alaminos-Quesada J., Fernandez-Feria R.* Propulsion of a foil undergoing a flapping undulatory motion from the impulse theory in the linear potential limit // J. Fluid Mech. 2020. V. 883. Art. A19. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.870>.
11. *Fernandez-Feria R., Alaminos-Quesada J.* Analytical results for the propulsion performance of a flexible foil with prescribed pitching and heaving motions and passive small deflection // J. Fluid Mech. 2021. V. 910. Art. A43. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1015>.
12. *Stokes G.G.* On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1851. V. 9, Pt. 2. P. 8–106.
13. *Schlichting H.* Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen // Phys. Z. 1932. Bd. 33. S. 327–335.
14. *Riley N.* Oscillatory viscous flows. Review and extension // IMA J. Appl. Math. 1967. V. 3, No 4. P. 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
15. *Riley N.* The steady streaming induced by a vibrating cylinder // J. Fluid Mech. 1975. V. 68, No 4. P. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001225>.
16. *Nuriev A.N., Egorov A.G.* Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section // J. Fluid Mech. 2022. V. 941. Art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.
17. *Егоров А.Г., Нуриев А.Н.* Крейсерская скорость цилиндрического крыла при малых поступательно-вращательных колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2022. Т. 164, кн. 2–3. С. 170–180. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>.
18. *Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M.* Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, No 8. P. 2250–2256. <https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
19. *Egorov A., Nuriev A., Anisimov V., Zaitseva O.* Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid // Phys. Fluids. 2024. V. 36, No 2. Art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
20. *Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R.* Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies // Fluid Dyn. 2024. V. 59, No 2. P. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
21. *Nuriev A., Baimuratova A., Zaitseva O., Zhuchkova O.* The dependence of the propulsive characteristics of a flapping wing on its cross-sectional shape // Proc. 2023 Ivannikov Ispras Open Conf. (ISPRAS). Moscow, 2023. P. 135–138. <https://doi.org/10.1109/ISPRAS60948.2023.10508181>.

### References

1. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben. In: Kármán Th., Levi-Civita T. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1924, S. 18–33. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-00280-3_2). (In German)
2. Birnbaum W. Der Schlagflügelpropeller und die kleinen Schwingungen elastisch befestigter Tragflügel. *Z. Flugtech. Motorluftschiffahrt*, 1924, Bd. 15, S. 128–134. (In German)
3. Theodorsen T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. NACA Technical Report No. NACA-TR-496. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1935, pp. 291–311.
4. Garrick I.E. Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Technical Report No. NACA-TR-567. Washington, DC, Natl. Advis. Comm. Aeronaut., 1936, pp. 1–10.
5. Wagner H. Über die Entstehung des dynamischen Auftriebes von Tragflügeln. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1925, Bd. 5, H. 1, S. 17–35. <https://doi.org/10.1002/zamm.19250050103>. (In German)
6. Glauert H. The force and moment on an oscillating aerofoil. In: Gilles A., Hopf L., Kármán Th. (Hrsg.) *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete (Aachen 1929)*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1930, S. 88–95. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-662-33791-2_16). (In German)
7. Keldysh M.V., Lavrentiev M.A. On the theory of the oscillating wing. *Tekh. Zametki TsAGI*, 1935, vol. 45, pp. 48–52. (In Russian)
8. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Two-Dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics]. Moscow, Leningrad, GITTL, 1950. 440 p. (In Russian)
9. Nekrasov A.I. *Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke* [Theory of Wings in Nonstationary Flow]. Moscow, Leningrad, Akad. Nauk SSSR, 1947. 262 p. (In Russian)
10. Alaminos-Quesada J., Fernandez-Feria R. Propulsion of a foil undergoing a flapping undulatory motion from the impulse theory in the linear potential limit. *J. Fluid Mech.*, 2020, vol. 883, art. A19. <https://doi.org/10.1017/jfm.2019.870>.
11. Fernandez-Feria R., Alaminos-Quesada J. Analytical results for the propulsion performance of a flexible foil with prescribed pitching and heaving motions and passive small deflection. *J. Fluid Mech.*, 2021, vol. 910, art. A43. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1015>.
12. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1851, vol. 9, pt. 2, pp. 8–106.
13. Schlichting H. Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen. *Phys. Z.*, 1932, Bd. 33, S. 327–335. (In German)
14. Riley N. Oscillatory viscous flows. Review and extension. *IMA J. Appl. Math.*, 1967, vol. 3, no. 4, pp 419–434. <https://doi.org/10.1093/imamat/3.4.419>.
15. Riley N. The steady streaming induced by a vibrating cylinder. *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 68, no. 4, pp. 801–812. <https://doi.org/10.1017/S0022112075001225>.
16. Nuriev A.N., Egorov A.G. Asymptotic theory of a flapping wing of a circular cross-section. *J. Fluid Mech.*, 2022, vol. 941, art. A23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.287>.



17. Egorov A.G., Nuriev A.N. Cruising speed of a cylindrical wing performing small translational-rotational oscillations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, nos. 2–3, pp. 170–180.  
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2022.2-3.170-180>. (In Russian)
18. Nuriev A.N., Egorov A.G., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M. Asymptotic study of the aerohydrodynamics of a flapping cylindrical wing in the high-frequency approximation. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 8, pp. 2250–2256.  
<https://doi.org/10.1134/S1995080222110233>.
19. Egorov A., Nuriev A., Anisimov V., Zaitseva O. Propulsive motion of an oscillating cylinder in a viscous fluid. *Phys. Fluids*, 2024, vol. 36, no. 2, art. 021908. <https://doi.org/10.1063/5.0189346>.
20. Nuriev A.N., Zaitseva O.N., Kamalutdinov A.M., Bogdanovich E.E., Baimuratova A.R. Asymptotic study of flows induced by oscillations of cylindrical bodies. *Fluid Dyn.*, 2024, vol. 59, no. 2, pp. 314–330. <https://doi.org/10.1134/S0015462824602110>.
21. Nuriev A., Baimuratova A., Zaitseva O., Zhuchkova O. The dependence of the propulsive characteristics of a flapping wing on its cross-sectional shape. *Proc. 2023 Ivannikov Ispras Open Conf. (ISPRAS)*. Moscow, 2023, pp. 135–138.  
<https://doi.org/10.1109/ISPRAS60948.2023.10508181>.

### Информация об авторах

**Артем Наилевич Нуриев**, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [nuriev\\_an@mail.ru](mailto:nuriev_an@mail.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

**Ангелина Рафилевна Баймуратова**, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [angelina.baimuratova@yandex.ru](mailto:angelina.baimuratova@yandex.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5012-5377>

**Ольга Николаевна Зайцева**, кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории «Интеллектуальные биомиметические и природосообразные системы», Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: [ZaitsevaON@corp.knrtu.ru](mailto:ZaitsevaON@corp.knrtu.ru)

ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

### Author Information

**Artem N. Nuriev**, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Leading Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: [nuriev\\_an@mail.ru](mailto:nuriev_an@mail.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1561-557X>

**Angelina R. Baimuratova**, Junior Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: [angelina.baimuratova@yandex.ru](mailto:angelina.baimuratova@yandex.ru)

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5012-5377>

**Olga N. Zaitseva**, Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Researcher, Laboratory of Intelligent Biomimetic and Nature-Inspired Systems, Kazan Federal University

E-mail: *olga\_fdpi@mail.ru*

ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-9724-7514>

Поступила в редакцию 9.10.2025  
Принята к публикации 25.10.2025

Received October 9, 2025  
Accepted October 25, 2025