ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ
УДК 539.4
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758

Упругопластический изгиб пластинок с центральным отверстием в трехмерной постановке

А.Е. Максеев[1] ✉, К.С. Бодягина[1], М.В. Жигалов[2], В.А. Крысько[2]

[1] *Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., г. Саратов, Россия*

[2] *Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, Россия*

✉ *makseevv.anton@mail.ru*

Аннотация

Представлены математическая модель и алгоритм анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) упругопластических пластин с центральным круглым отверстием в трехмерной постановке. Разработанный алгоритм позволяет рассматривать любые краевые условия, зависимости и материалы, для которых существуют экспериментальные зависимости диаграмм деформирования. Модель основана на деформационной теории пластичности и реализована с помощью комбинации метода конечных элементов (МКЭ) и метода переменных параметров упругости И.А. Биргера. Для получения достоверных результатов исследованы тип конечных элементов (КЭ) и их количество в 3D-постановке, а также сходимость решений на сетке из тетраэдральных и гексаэдральных конечных элементов для пластинки с отверстием в центре и без отверстия. Выявлено, что оптимальным является конечный элемент в форме гексаэдра. Приведены примеры расчета прямоугольной в плане пластинки, защемленной по контуру, при действии постоянной нагрузки. Материал пластинки – чистый алюминий, описываемый известной диаграммой деформирования Ю. Охаси и С. Мураками.

Ключевые слова: деформационная теория пластичности, метод переменных параметров упругости, метод конечных элементов, трехмерная постановка задачи

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00160-П.

Для цитирования: *Максеев А.Е., Бодягина К.С., Жигалов М.В., Крысько В.А.* Упругопластический изгиб пластинок с центральным отверстием в трехмерной постановке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 744–758.
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758.

ORIGINAL ARTICLE
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758

Elastic-plastic bending of plates with a central hole in a three-dimensional setting

A.E. Makseev [1] ✉, **K.S. Bodyagina** [1], **M.V. Zhigalov** [2], **V.A. Krysko** [2]

[1] *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russia*

[2] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

✉ *makseevv.anton@mail.ru*

Abstract

This article presents a mathematical model and algorithm for analyzing the stress–strain state (SSS) of elastic-plastic plates with a central circular hole in a three-dimensional setting. The developed algorithm can be applied to any boundary conditions, dependencies, and materials for which experimental stress–strain diagrams are available. The model is based on the deformation theory of plasticity and was implemented using a combination of the finite element method (FEM) and the method of I.A. Birger's variable elasticity parameters. To obtain reliable results, the type finite elements (FE) and their number in a three-dimensional setting were investigated, along with the convergence of the solutions on a mesh of tetrahedral and hexahedral FE for a plate with and without a hole in the center. The hexahedral FE was found to be the most optimal. Computational examples for a rectangular plate clamped along the contour and subjected to a constant load were provided. The plate material considered is pure aluminum described by the stress–strain diagram developed by Y. Ohashi and S. Murakami.

Keywords: deformation theory of plasticity, method of variable elasticity parameters, finite element method, three-dimensional problem setting

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00160-P).

For citation: Makseev A.E., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic bending of plates with a central hole in a three-dimensional setting. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 744–758. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.744-758. (In Russian)

Введение

Круговое отверстие является типовым концентратором напряжений, часто встречающимся в роторных дисках паровых турбин, лонжеронах клепаных рам грузовых автомобилей, звукопоглощающих конструкциях авиационных двигателей, шпангоутах и др. В процессе эксплуатации эти элементы подвержены нагружению, которое может приводить к деформациям пластичности и разгрузке. Остаточные напряжения [1, 2], возникающие при разгрузке, являются одной из основных причин формирования дефектов в материалах при снятии нагрузки. Анализу явления остаточных напряжений и его последствиям посвящен целый ряд исследований, некоторые из которых упомянуты ниже.

Очень важным является сопоставление результатов, полученных экспериментально и численными методами. Так, в работе [3] численные результаты, полученные методом конечных элементов (МКЭ) для пластинок Кирхгофа, были сравнены с экспериментальными данными для трех видов материала – низкоуглеродистой стали, алюминиевого и магниевого сплавов. Исследован вопрос влияния разгрузки при циклическом нагружении для трех указанных выше материалов [4,5]. Использована модель нелинейного кинематического упрочнения Chaboche для моделирования эффекта Баушингера, что позволило воссоздать последовательность упругопластических нагружений и разгрузок с использованием метода конечных элементов.

В работе [6] по модели Кирхгофа был проведен эксперимент для некоторых типов геометрии центрального отверстия в пластинке при одноосном растяжении, что позволило этим же авторам в [7] экспериментально для пластинок из никеля обнаружить эффект Портевена – Ле Шателье (ПЛШ) – пространственно-временной нестабильности пластического течения. В названных экспериментальных работах отсутствует сравнительный анализ влияния диаметра отверстия на пластические деформации при нагрузке – разгрузке. Также для пластинок Кирхгофа результаты численных исследований концентрации напряжений вокруг отверстий, полученные с помощью МКЭ, аналитических подходов на основе асимптотических разложений и метода наименьших квадратов (МНК), представлены в работах [8–10].

В [11] построена математическая модель контактного взаимодействия двух пластин (кинематическая модель Кирхгофа) с учетом разномодульности материалов, физической и конструктивной нелинейностей. Для исследования напряженно-деформированного состояния применен метод вариационных итераций, позволяющий свести уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ). Использован метод переменных параметров упругости Биргера [12].

Работа [13] посвящена построению и исследованию математических моделей физически нелинейных пластин и балок из бимодульных материалов. Для численного исследования использованы критерий пластичности Мизеса и метод переменных параметров теории упругости Биргера [12], МКЭ, для которого проанализирована его сходимость и достоверность результатов. Задача с разгрузкой была исследована в работе [14]. В [15] разработана математическая модель гибких (по теориям фон Кармана и Грина – Лагранжа) физически нелинейных пористых размерно-зависимых балок Эйлера – Бернулли под действием поперечной знакопеременной нагрузки. Использованы итерационные алгоритмы (конечно-разностный метод в сочетании с методом переменных параметров упругости при учете физической нелинейности) расчета хаотических и гиперхаотических колебаний как механической системы с «почти» бесконечным числом степеней свободы.

В работе [16] предложен подход неразрушающего контроля механических конструкций, состоящий из двух этапов. На первом этапе проводилась идентификация полостей/включений с разными физическими свойствами и произвольной геометрией в 3D-конструкциях на основе температурного поля, методов скользящих асимптот и конечных элементов. Приведены результаты, демонстрирующие обнаружение включений различной геометрической формы (куб, сфера, эллипсоид, тор и включения сложной формы) из стали, меди и алюминия.

В исследовании [17] показана принципиальная важность использования трехмерных моделей для анализа перфорированных конструкций. Авторы установили, что применение объемных конечных элементов позволяет выявить концентрации напряжений на внутренней поверхности оболочки, которые не учитываются в двумерных оболочечных моделях. Полученный коэффициент концентрации напряжений достигает значения 2, что подтверждает необходимость трехмерного анализа.

Важный аспект исследования нагрузки – разгрузки рассмотрен в работе [18]. Авторы используют модифицированную модель Леонова – Панасюка – Дугдейла с учетом зоны пластичности, что позволяет анализировать процессы деформирования при циклическом нагружении. Численное моделирование МКЭ подтверждает адекватность этих аналитических решений.

Особого внимания заслуживает исследование [19], где проанализировано влияние зазоров между болтом и отверстием на коэффициент концентрации напряжений (ККН). Показано, что изменение зазора в диапазоне 0–1 % диаметра приводит к изменению ККН до 10 %, что необходимо учитывать при расчетах нагружения – разгружения.

В работе [20] экспериментально исследовано влияние на прочностные характеристики соотношения ширины образца к диаметру отверстия. Полученные данные имеют важное значение для прогнозирования поведения пластин при циклическом нагружении.

Исследование [21], основанное на методе интегральных уравнений, показало, что характер распределения напряжений (сжатие или растяжение) на границе отверстия существенно зависит от соотношения его радиуса и зоны пластичности. В частности, для отверстий малого радиуса возникают высокие растягивающие напряжения, которые снижаются с увеличением размера отверстия. Этот вывод коррелирует с результатами решения упругопластической задачи для стрингерной пластины с круглым отверстием [9], где использованы условие пластичности Треска – Сен-Венана и комбинированный метод (теория возмущений, аналитические функции и МНК). Этот подход позволяет определить границу раздела упругой и пластической зон и исследовать НДС конструкции.

Исследование концентрации напряжений в псевдоупругих пластинах из сплавов с памятью формы (SMA) [22] подчеркивает важность учета фазовых превращений и пластичности. Использование метода цифровой корреляции изображений (DIC) для калибровки конечно-элементной модели позволило авторам продемонстрировать, что ККН не является постоянным и изменяется в зависимости от стадии фазового превращения и развития пластических деформаций. Это указывает на необходимость нелинейного анализа для современных материалов.

Ряд работ посвящен управлению пластическими деформациями в строительных конструкциях с целью повышения их сейсмической стойкости. Так, метод ослабления плит в приграничных зонах путем сверления отверстий [23] доказал свою эффективность для направления пластических шарниров в желаемые зоны (балки). Аналогично в стальных конструкциях [24] рассеивание энергии достигается за счет проектирования соединений, где пластические деформации концентрируются в опорных пластинах с отверстиями, обеспечивая предсказуемое пластическое поведение. Эти исследования показали, что отверстия являются не просто ослаблением, а инструментом для управления пластичностью всей конструкции.

Исследование усталостной прочности стопорных пластин [25] продемонстрировало, что наличие винтовых заглушек, создающих локальные пластические деформации в отверстиях, может значительно повысить усталостную прочность пластин из нержавеющей стали. Однако для титановых сплавов этот эффект не наблюдается, что подчеркивает зависимость упруго-пластического отклика от материала.

Следует отметить, что основные исследования по анализу НДС пластин проводились для кинематических моделей Кирхгофа, причем в трехмерной постановке при действии поперечной равномерно-распределенной нагрузки по деформационной теории пластичности такие исследования отсутствуют.

В настоящей работе построены математическая модель и алгоритм расчета НДС прямоугольных пластин с центральным круглым отверстием, с учетом разгрузки, в трехмерной постановке. Методом конечных элементов (тип конечного элемента, его сходимость) с помощью метода переменных параметров Биргера [12] для чистого алюминия исследовано НДС пластин в зависимости от диаметра центрального круглого отверстия.

1. Постановка задачи

Рассмотрим сплошное твердое тело в форме прямоугольной пластины, занимающей в декартовой системе координат трехмерную область (рис. 1). В этой системе координат пластинка, как трехмерная область Ω, определена следующим образом:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0,a], y \in [0,b], z \in [0,h]\right\}.$$

В центральной области пластины расположено сквозное цилиндрическое отверстие диаметром d. Граничные поверхности

$$\begin{aligned}
&S_1 = \{x = a,\ y \in [0,b],\ z \in [0,h]\},\\
&S_2 = \left\{x \in \left[0, \frac{a-d}{2}\right] \cup \left[\frac{a+d}{2}, a\right],\ y \in \left[0, \frac{b-d}{2}\right] \cup \left[\frac{b+d}{2}, b\right],\ z = h\right\},\\
&S_3 = \{x = 0,\ y \in [0,b],\ z \in [0,h]\},\\
&S_4 = \{x \in [0,a],\ y = 0,\ z \in [0,h]\},\\
&S_5 = \left\{x \in \left[0, \frac{a-d}{2}\right] \cup \left[\frac{a+d}{2}, a\right],\ y \in \left[0, \frac{b-d}{2}\right] \cup \left[\frac{b+d}{2}, b\right],\ z = 0\right\},\\
&S_6 = \{x \in [0,a],\ y = b,\ z \in [0,h]\},\\
&S_7 = \left\{x \in \left[\frac{a-d}{2}, \frac{a+d}{2}\right],\ y \in \left[\frac{b-d}{2}, \frac{b+d}{2}\right],\ z \in [0,h]\right\}.
\end{aligned} \tag{1}$$

На поверхность S_2 действует поперечная нагрузка интенсивности q. Поверхности S_5 и S_7 свободны от нагрузок. На поверхностях S_1, S_3, S_4 и S_6 заданы следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

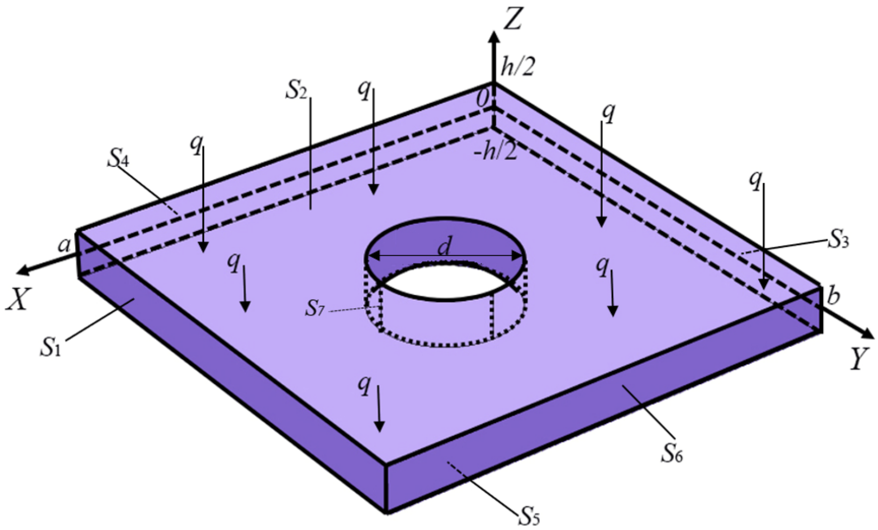

Рис. 1. Расчетная схема трехмерной пластины с центральным отверстием
Fig. 1. Schematic diagram of a three-dimensional plate with a central hole

Материал пластины упругий, пространственно неоднородный и физически нелинейный. Упругопластический отклик моделируем в рамках деформационной теории пластичности. Уравнения равновесия Коши в перемещениях имеют вид

$$(\lambda+\mu)\,\theta_x+\mu\Delta u+F=0,\ \overleftrightarrow{(\theta_x,\theta_y,\theta_z)},\ \overleftrightarrow{(u,v,w)},\ \overleftrightarrow{(F,G,H)}, \tag{2}$$

где $\theta_x,\theta_y,\theta_z$ – частные производные θ по координатам x,y,z соответственно,

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},\ \lambda=\frac{E(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0)\nu(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0)}{(1+\nu(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0))(1-2\nu(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0))},\ \mu=\frac{E(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0)}{2(1+\nu(x,y,z,\varepsilon_i,\varepsilon_0))},$$

E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона, соответственно, зависящие от координат и напряженно-деформированного состояния в пластинке.

Уравнения (2) приведем к безразмерному виду с помощью выражений

$$\widetilde{x}=\frac{x}{a},\quad \widetilde{y}=\frac{y}{b},\quad \widetilde{z}=\frac{z}{h},\quad \widetilde{u}=\frac{u}{u_c},\quad \widetilde{v}=\frac{v}{v_c},\quad \widetilde{w}=\frac{w}{w_c}.$$

Интенсивность деформаций примет вид

$$\varepsilon_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2+(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx})^2+\frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2)}.$$

При определении появления пластических деформаций используем критерий пластичности Мизеса. Для моделирования упругопластического изгиба трехмерной пластинки рассмотрим диаграмму для чистого алюминия [26]:

$$\begin{aligned}&\sigma_i=\sigma_s\left[1-e^{-\varepsilon_i/\varepsilon_s}\right]\quad \text{при}\quad d\varepsilon_i>0,\\ &\sigma_i=3G_0\left(\varepsilon_i-\varepsilon_p^1\right)\quad \text{при}\quad d\varepsilon_i<0.\end{aligned}$$

где ε_s – предел текучести материала, ε_p^1 – остаточные пластические деформации.

2. Вычисленный эксперимент

Численное исследование уравнения (2) с краевыми условиями (1) было проведено с помощью комбинации МКЭ и метода переменных параметров упругости Биргера [12]. Результаты получены с помощью программного пакета COMSOL Multiphysics. Использована пластина из чистого алюминия со следующими характеристиками: $a = 1\,\text{м}$, $b = 1\,\text{м}$, $h = 0.05\,\text{м}$, модуль сдвига $G_0 = 25 \cdot 10^9\,\text{Па}$ и модуль Юнга $E_0 = 66.6 \cdot 10^9\,\text{Па}$, объемный модуль $K = 1.94 G_0$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0.35$. Исследована сходимость МКЭ для пластины с центральным отверстием при варьировании параметров сетки. Результаты получены для двух типов конечных элементов: гексаэдры и тетраэдры. Рассмотрены два случая: пластина с отверстием $d = 0.3$ и сплошная пластина без отверстия $d = 0$. В табл. 1 представлены максимальные перемещения W_1 и W_2 пластины с отверстием, дискретизированной гексаэдральными (W_1) и тетраэдральными (W_2) элементами; W_3 и W_4 – максимальные перемещения сплошной пластины (без отверстия), дискретизированной гексаэдральными (W_3) и тетраэдральными (W_4) элементами; N_1 – количество конечных элементов в форме гексаэдра, N_2 – количество элементов в форме тетраэдра.

Табл. 1. Зависимость максимальных перемещений пластины от геометрических параметров $(a/h, d)$ и плотности сетки тетраэдальных N_2 и гексаэдральных N_1 КЭ

Table 1. Dependency of the maximum plate displacements on the geometric parameters $(a/h, d)$ and the density of the tetrahedral N_2 and hexahedral N_1 FE mesh

$d = 0.3,\ q = 40$				$d = 0,\ q = 40$			
N_1	W_1	N_2	W_2	N_1	W_3	N_2	W_4
109	$7.3486 \cdot 10^{-5}$	939	$7.3486 \cdot 10^{-5}$	100	$9.7769 \cdot 10^{-5}$	774	$9.9286 \cdot 10^{-5}$
156	$7.4814 \cdot 10^{-5}$	1316	$7.5492 \cdot 10^{-5}$	169	$9.9459 \cdot 10^{-5}$	1236	$1.0114 \cdot 10^{-4}$
341	$7.5939 \cdot 10^{-5}$	3895	$7.6712 \cdot 10^{-5}$	342	$1.008 \cdot 10^{-4}$	3281	$1.0293 \cdot 10^{-4}$
1442	$7.9228 \cdot 10^{-5}$	13769	$7.9454 \cdot 10^{-5}$	1682	$1.059 \cdot 10^{-4}$	13654	$1.0654 \cdot 10^{-4}$
6810	$8.05 \cdot 10^{-5}$	90168	$8.1031 \cdot 10^{-5}$	7500	$1.0842 \cdot 10^{-4}$	96163	$1.0936 \cdot 10^{-4}$
	$\delta = 1.58$		$\delta = 1.94$		$\delta = 2.27$		$\delta = 2.57$

Максимальное значение перемещения W по объему пластины V определено по формуле

$$W = \int_V w \, \mathrm{d}V,$$

а относительная погрешность решения вычислена следующим образом:

$$\delta = \frac{|w_{n-1} - w_n|}{|w_{n-1}|} \cdot 100\,\%.$$

В обоих случаях монотонная сходимость наблюдается для гексаэдральных элементов при увеличении N_1. Наличие отверстия снижает W на 20–25 % из-за перераспределения напряжений. Гексаэдры демонстрируют более быструю сходимость, например, при $N_1 \approx 150$ решение сходится к результатам для $N_2 \approx 1300$ при $d = 0.3$. Погрешность для грубых сеток N_1 достигает 8–10 %. При $N_1 > 3000$ погрешность не превышает 2.5 %.

Выводы: для моделирования перфорированных пластин рекомендованы гексаэдральных сетки с $N_1 > 3000$ $(\delta < 2.5\,\%)$. Тетраэдральные КЭ сетки требуют на порядок больше элементов для достижения сопоставимой точности. Наибольшая погрешность (до 10 %) характерна для зон концентрации напряжений у контура отверстия. Здесь и в дальнейшем цветовая шкала от синего до красного означает, что материал в данной области находится в упругом состоянии, т. е. $\varepsilon_i < \varepsilon_s$. Красным обозначены области пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$.

2.1. Пластина без отверстия. Исследуем задачу упругопластического изгиба пластины без отверстия $d = 0$ с геометрическими параметрами $a = 1$, $b = 1$, $h = 0.05$ в процессе циклического нагружения и последующей разгрузки (рис. 2). Цветовая шкала отношения $\varepsilon_i/\varepsilon_s$, которая показывает зоны пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$ – упругопластическая зона, $\varepsilon_i < \varepsilon_s$ – упругая зона.

В процессе нагружения при малой нагрузке $q = 5$ (рис. 2, точка A) зоны пластических деформаций первоначально возникают в центре длинных сторон пластины. С увеличением нагрузки $q = 20$ (рис. 2, точка B) пластические зоны расширяются, и появляется новая пластичная область в центре пластины. При максимальной нагрузке $q = 30$ (рис. 2, точка C) зоны пластичности формируют четкий контур по периметру пластины (исключая углы) в центре и по диагоналям, соединяющим центр с углами. В процессе разгружения поведение материала является упругим, что проявляется в гистерезисе на графике рис. 2. После полной разгрузки $q = 0$ (рис. 2, точка G) в пластине сохраняются остаточные пластические деформации $\varepsilon_{\text{опл}}$, локализованные преимущественно вдоль сторон пластины. Угловые области остаются упругими. Поведение сплошной пластины характеризуется последовательным развитием пластичности от краев к центру. После снятия нагрузки пластина не возвращается в исходное состояние, что свидетельствует о необратимом характере деформирования.

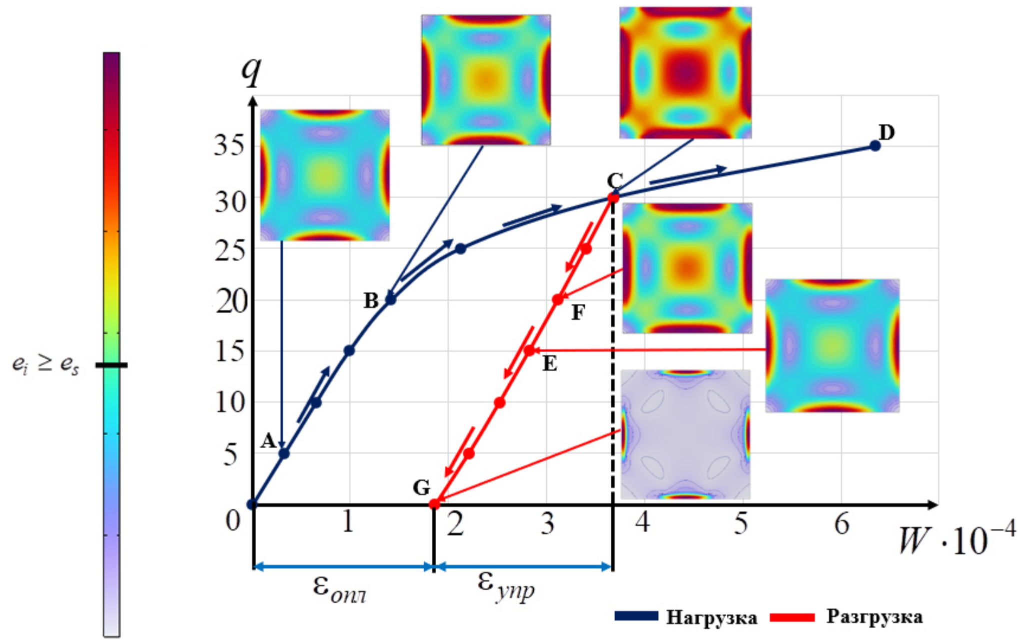

Рис. 2. Нагрузка и разгрузка пластины без отверстия

Fig. 2. Loading and unloading of the plate without a hole

2.2. Пластина с отверстием. Была решена задача упругопластического деформирования пластины с центральным круглым отверстием диаметра $d = 0.3$. Пластина имела следующие геометрические параметры: $a = 1$, $b = 1$ и толщину $h = 0.05$. Исследование включало в себя анализ поведения пластины как в процессе нагружения, так и в процессе последующей разгрузки (рис. 3). Цветовая шкала отношения $\varepsilon_i/\varepsilon_s$ показывает зоны пластических деформаций, где $\varepsilon_i \geq \varepsilon_s$ – упругопластическая зона, $\varepsilon_i < \varepsilon_s$ – упругая зона.

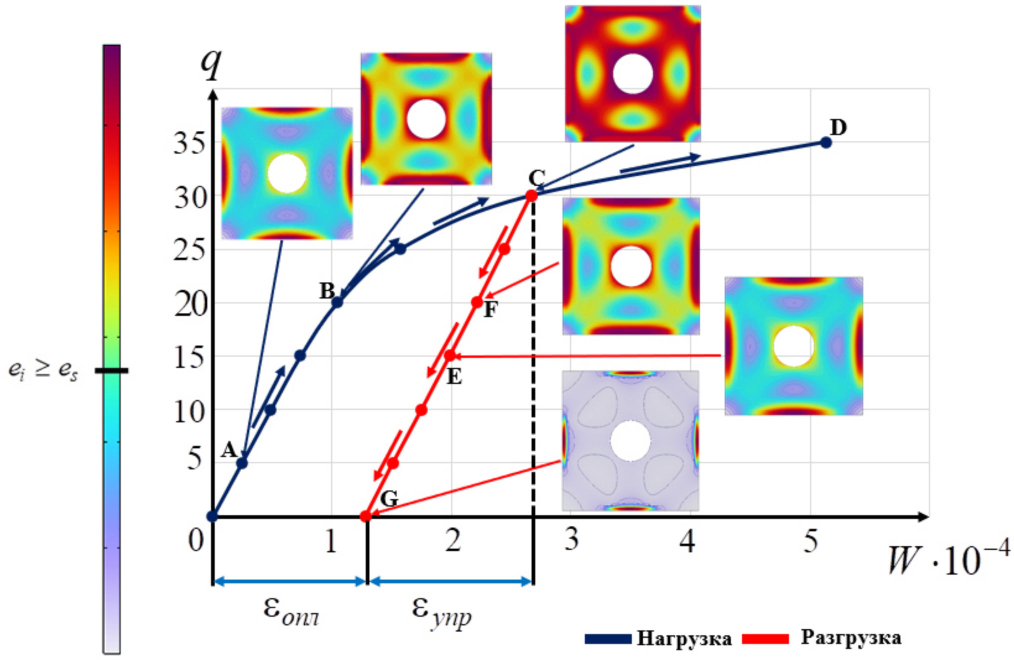

Рис. 3. Нагрузка и разгрузка пластины с отверстия
Fig. 3. Loading and unloading of the plate with a hole

На рис. 3 представлена зависимость в процессе нагружения пластины, иллюстрирующая ее реакцию на приложенную нагрузку q. При относительно низкой нагрузке $q = 10$ (рис. 3, точка A) зоны пластических деформаций в этот момент только начинают формироваться. Их возникновение наблюдается в областях с максимальной концентрацией напряжений, прежде всего по контуру отверстия (где геометрия приводит к концентрации напряжений) и в центре длинных сторон пластины или на защемленных краях. С увеличением нагрузки $q = 20$ (рис. 3, точка B) наблюдается значительное развитие пластических деформаций. Пластические зоны расширяются от контура отверстия и краев пластины, начинают сливаться, охватывая значительную часть объема материала. Интенсивность пластических деформаций возрастает. При максимальной исследуемой нагрузке $q = 30$ (рис. 3, точка C) пластические деформации носят масштабный характер. Значительная часть пластины, за исключением, возможно, некоторых угловых зон с низким уровнем напряжений, переходит в пластическое состояние. Материал подвергается интенсивной пластической деформации.

На графике рис. 3 разгрузка представляет собой нисходящую ветвь кривой. В процессе снижения нагрузки с максимального значения (рис. 3, точка F) поведение материала является упругим. Однако из-за накопленных пластических деформаций состояние пластины не возвращается в исходную точку B. Различие в перемещении при одной и той же нагрузке $q = 20$ на пути нагружения и разгрузки демонстрирует наличие остаточных деформаций $\varepsilon_{\text{опл}}$. При продолжении разгрузки $q = 15$ (рис. 3, точка E) остаточные деформации и смещенные пластические зоны сохраняются, хотя их интенсивность может несколько снижаться из-за упругого восстановления. После полной разгрузки $q = 0$ (рис. 3, точка G) пластина не возвращается в исходное нулевое состояние. Наблюдается значительное остаточное перемещение, и в материале фиксируются остаточные пластические деформации. Их распределение для точки G представляет собой состояние конструкции после снятия нагрузки.

Проведенное исследование наглядно демонстрирует, что наличие отверстия является мощным концентратором напряжений, что изменяет поведение пластины по сравнению со сплошной пластиной (без отверстия, $d = 0$). При одних и тех же уровнях внешней нагрузки q размеры зон пластических деформаций в пластине с отверстием больше. Критические нагрузки, при которых начинается интенсивное пластическое деформирование, для пластины с отверстием ниже, чем для сплошной пластины. Процесс разгрузки приводит к формированию остаточных напряжений и деформаций, карта распределения которых напрямую связана с историей нагружения и геометрией отверстия. Таким образом, полученные результаты подчеркивают критическую важность учета концентраторов напряжений, таких как отверстия, при проектировании и оценке прочности конструкций, работающих в упругопластической области, так как их наличие значительно снижает ресурс и несущую способность элемента.

Заключение

1. Построена математическая модель нагрузки – разгрузки пластинки в трехмерной постановке с учетом упругопластических деформаций по деформационной теории пластичности. В качестве метода решения использованы метод конечных элементов (в пакете Comsol Multiphysics) и итерационная процедура метода переменных параметров упругости Биргера. В качестве критерия пластичности принят критерий Мизеса.

2. Создан авторский алгоритм метода переменных параметров упругости Биргера, который запрограммирован и внедрен в программный пакет Comsol Multiphysics. Достоверность полученных результатов обеспечена исследованием сходимости МКЭ для тетраэдральных и гексаэдральных элементов.

3. Исследованы зоны пластической деформации при равномерно-распределенной нагрузке и граничных условиях типа защемления по всем сторонам в трехмерной пластинке без отверстия и с отверстием. Рассмотрены задачи с разгрузкой.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G.* Advanced issues in springback // Int. J. Plast. 2013. V. 45. P. 3–20. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.006.

2. *Geka T., Asakura M., Kiso T., Sugiyama T., Takamura M., Asakawa M.* Reduction of springback in hat channel with high-strength steel sheet by stroke returning deep drawing // Key Eng. Mater. 2013. Nos 554–557. P. 1320–1330. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.1320.

3. *Hama T., Matsudai R., Kuchinomachi Y., Fujimoto H., Takuda H.* Nonlinear deformation behavior during unloading of various metal sheets // ISIJ Int. 2015. V. 55, No 5. P. 1067–1075. https://doi.org/10.2355/isijinternational.55.1067.

4. *Федотова Д.В., Хамидуллин Р.М.* Анализ развития трещин смешанных форм разрушения по моделям циклической пластичности // XIII Всероссийск. съезд по теор. и прикл. механ.: сб. тез. докл. в 4 т. Санкт-Петербург, 21–25 авг. 2023 г. Т. 3. С. 724–726.

5. *Shlyannikov V., Fedotova D., Khamidullin R.* Mixed-mode crack growth analysis using a cyclic plasticity model // Theor. Appl. Fract. Mech. 2023. V. 128, Art. 104136. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104136.

6. *Надежкин М.В., Баранникова С.А.* Локализация пластической деформации при растяжении полос с концентратором напряжений // Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии: тез. докл. Международн. конф. Томск, 11–14 сент. 2023 г. С. 166.

7. *Barannikova S.A., Nadezhkin M.V.* Kinetics of localization of plastic deformation zones in polycrystalline nickel // Metals. 2021. V. 11, No 9. Art. 1440. https://doi.org/10.3390/met11091440.

8. *Шлянников В.Н., Ильченко Б.В., Бойченко Н.В., Тартыгашева А.М.* Пластина с отверстием в состоянии упругости, пластичности и ползучести // Изв. вузов. Пробл. энерг. 2004. № 1–2. С. 107–116.

9. *Mir-Salim-zade M.V.* Elastic-plastic problem for a stringer plate with a circular hole // J. Mech. Eng. 2021. V. 24, No 3. P. 61–69. https://doi.org/10.15407/pmach2021.03.061.

10. *Mamatova N.* Quasistatic elastic-plastic loading and unloading of rods with Coulomb dry friction // E3S Web Conf. 2021. V. 264. Art. 01040. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401040.

11. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V.* Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity // Nonlinear Dyn. 2018. V. 91, No 2. P. 1191–1211. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6.

12. *Биргер И.А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // ПММ. 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765–770.

13. *Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A.* Mathematical modeling of physically nonlinear 3D beams and plates made of multimodulus materials // Acta Mech. 2021. V. 232, No 9. P. 3441–3469. https://doi.org/10.1007/s00707-021-03010-8.

14. *Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V.* Nonlinear dynamics of contact interaction porous size-dependent Euler-Bernoulli beams resonators with clearance: Numerical analysis of the stability problem // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Model. 2024. V. 135. Art. 108038. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108038.

15. *Крысько В.А., Папкова И.В., Яковлева Т.В., Крысько А.В.* Хаотические, гиперхаотические колебания и устойчивость пористых балок Эйлера–Бернулли с учетом физической и геометрической нелинейностей // Докл. РАН. Физ., техн. науки. 2025. Т. 521, № 1. С. 50–58. https://doi.org/10.31857/S2686740025020059.

16. *Makseev A., Yakovleva T.V., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A.* Identification of inclusions of arbitrary geometry with different physical properties of materials in 3D structures. // Int. J. Mech. Mater. Des. 2025. V. 21, No 1. P. 53–79. https://doi.org/10.1007/s10999-024-09727-3.

17. *Петрик В., Трубачев С., Колодежний В.* Determination of stresses in a cylindrical shell taking into account holes // Молод. вчен. 2022. № 5 (105). С. 13–16. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-5-105-3.

18. *Астапов Н.С., Кургузов В.Д.* Моделирование упругопластического разрушения пластины с центральной трещиной // Вестн. ПНИПУ. Механ. 2023. № 1. С. 12–25. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.1.02.

19. *Рудаков К.М., Дифучин Ю., Бахтоваршоєв Т.* Концентрація напружень біля отвору, що контактує з жорстким циліндром, в композитній пластині, з урахуванням бічних зазорів // Mech. Adv. Technol. 2021. Т. 5, № 2. С. 183–192. https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.2243744.

20. *Khosravani M.R., Reinicke T.* Mechanical strength of 3D-printed open hole polymer plates // Procedia Struct. Integr. 2022. V. 41. P. 664–669. https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.05.075.

21. *Mirsalimov V.M.* Elastoplastic tension problem for a plate with a circular hole with account for crack nucleation in an elastic deformation region // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2020. V. 61, No 4. P. 641–651. https://doi.org/10.1134/S0021894420040185.

22. *Silva B.F., de Souza L.F.G., de Aguair R.A.A., Pacheco P.M.C.L.* Analysis of stress concentration in pseudoelastic plates using digital image correlation (DIC) and finite element method // Lat. Am. J. Solids Struct. 2025. V. 22, No 10. Art. e870. https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8703.

23. *Sococol I., Mihai P., Petrescu T.-C., Nedeff F., Nedeff V., Agop M., Luca B.-I.* Numerical study regarding the seismic response of a moment-resisting (MR) reinforced concrete (RC) frame structure with reduced cross-sections of the RC slabs // Buildings. 2022. V. 12, No 10. Art. 1525. https://doi.org/10.3390/buildings12101525.

24. *Wang Ch., González Ureña A., Afifi M., Rudman A., Tremblay R., Rogers C.A.* Conventional construction steel braces with bearing plate energy dissipation // Proc. 17th World Conf. on Earthquake Engineering (17WCEE). Sendai, 2020, art. 2i-0070.

25. *Hung L.-W., Chao C.-K., Huang J.-R., Lin J.* Screw head plugs increase the fatigue strength of stainless steel, but not of titanium, locking plates // Bone Jt. Res. 2019. V. 7, No 12. P. 629–635. https://doi.org/10.1302/2046-3758.712.BJR-2018-0083.R1.

26. *Ohashi Y., Murakami S.* The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate // Görtler H. (Ed.) Applied Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966. P. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25.

References

1. Wagoner R.H., Lim H., Lee M.-G. Advanced issues in springback. *Int. J. Plast.*, 2013, vol. 45. pp. 3–20. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.08.006.

2. Geka T., Asakura M., Kiso T., Sugiyama T., Takamura M., Asakawa M. Reduction of springback in hat channel with high-strength steel sheet by stroke returning deep drawing. *Key Eng. Mater.*, 2013, nos. 554–557, pp. 1320–1330. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.1320.

3. Hama T., Matsudai R., Kuchinomachi Y., Fujimoto H., Takuda H. Non-linear deformation behavior during unloading of various metal sheets. *ISIJ Int.*, 2015, vol. 55, no. 5, pp. 1067–1075. https://doi.org/10.2355/isijinternational.55.1067.

4. Fedotova D.V., Khamidullin R.M. Mixed-mode crack growth analysis using models of cyclic plasticity. *XIII Vserossiisk. s"ezd po teor. i prikl. mekhan. Sankt-Peterburg, 21–25 avg. 2023 g.* [Proc. XIII All-Russian Congr. on Theoretical and Applied Mechanics. St. Petersburg, August 21–15, 2023]. Vol. 3. St. Petersburg, 2023, pp. 724–726. (In Russian)

5. Shlyannikov V., Fedotova D., Khamidullin R. Mixed-mode crack growth analysis using a cyclic plasticity model. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2023, vol. 128, art. 104136. https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104136.

6. Nadezhkin M.V., Barannikova S.A. The localization of plastic deformation during stretching of strips by a stress concentrator. *Fizicheskaya mezomekhanika. Materialy s mnogourovnevoi ierarkhicheski organizovannoi strukturoi i intellektual'nye proizvodstvennye tekhnologii: tez. dokl. Mezhdunarodn. konf., Tomsk, 11–14 sent. 2023 g.* [Physical Mesomechanics. Materials with a Multilevel Hierarchical Structures and Intelligent Manufacturing Technologies: Proc. Int. Conf., Tomsk, September 11–14, 2023]. Tomsk, 2023. p. 166. (In Russian)

7. Barannikova S.A., Nadezhkin M.V. Kinetics of localization of plastic deformation zones in polycrystalline nickel. *Metals*, 2021, vol. 11, no. 9, art. 1440. https://doi.org/10.3390/met11091440

8. Shlyannikov V.N., Il'chenko B.V., Boichenko N.V., Tartygasheva A.M. The plate with a hole in a state of elasticity, plasticity, and creep. *Izv. Vuzov. Probl. Energ.*, 2004, nos. 1–2, pp. 107–116. (In Russian)

9. Mir-Salim-zade M.V. Elastic-plastic problem for a stringer plate with a circular hole. *J. Mech. Eng.*, 2021, vol. 24, no. 3, pp. 61–69. https://doi.org/10.15407/pmach2021.03.061.

10. Mamatova N. Quasistatic elastic-plastic loading and unloading of rods with Coulomb dry friction. *E3S Web Conf.*, 2021, vol. 264, art. 01040. https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401040.

11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Contact interaction of two rectangular plates made from different materials with an account of physical nonlinearity. *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 91, no. 2, pp. 1191–1211. https://doi.org/10.1007/s11071-017-3939-6.

12. Birger I.A. Some general methods for solving problems in the theory of plasticity. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1951, vol. 15, no. 6, pp. 765–770. (In Russian)

13. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Bodyagina K.S., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Mathematical modeling of physically nonlinear 3D beams and plates made of multimodulus materials. *Acta Mech.*, 2021, vol. 232, no. 9, pp. 3441–3469. https://doi.org/10.1007/s00707-021-03010-8.

14. Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Nonlinear dynamics of contact interaction porous size-dependent Euler-Bernoulli beams resonators with clearance: Numerical analysis of the stability problem. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Model.*, 2024, vol. 135, art. 108038. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.108038.

15. Krysko V.A., Papkova I.V., Yakovleva T.V., Krysko A.V. Chaotic, hyperchaotic vibrations and stability of porous Euler–Bernoulli beams considering physical and geometrical nonlinearities. *Dokl. Ross. Akad. Nauk. Fiz., Tekh. Nauki.*, 2025, vol. 521, no. 1, pp. 50–58. https://doi.org/10.31857/S2686740025020059. (In Russian)

16. Makseev A., Yakovleva T.V., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Identification of inclusions of arbitrary geometry with different physical properties of materials in 3D structures. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2025, vol. 21, no. 1, pp. 53–79. https://doi.org/10.1007/s10999-024-09727-3.

17. Petryk V., Trubachev S., Kolodezhnyi V. Determination of stresses in a cylindrical shell taking into account holes. *Young Sci.*, 2022, no. 5 (105), pp. 13–16. https://doi.org/10.32839/2304-5809/2022-5-105-3.

18. Astapov N.S., Kurguzov V.D. Simulation of elastoplastic fracture of a center cracked plate. *PNRPU Mech. Bull.*, 2023, no. 1, pp. 12–25. https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.1.02. (In Russian)

19. Rudakov K., Dyfuchyn Y., Bakhtovarshoiev T. Concentration of stresses near the hole in contact with rigid cylinder in composite plate, taking into account lateral clearances. *Mech. Adv. Technol.*, 2021, vol. 5, no. 2, pp. 183–192. https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.2243744. (In Ukrainian)

20. Khosravani M.R., Reinicke T. Mechanical strength of 3D-printed open hole polymer plates. *Procedia Struct. Integr.*, 2022, vol. 41, pp. 664–669. https://doi.org/10.1016/j.prostr.2022.05.075.

21. Mirsalimov V.M. Elastoplastic tension problem for a plate with a circular hole with account for crack nucleation in an elastic deformation region. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2020, vol. 61, no. 4, pp. 641–651. https://doi.org/10.1134/S0021894420040185.

22. Silva B.F., de Souza L.F.G., de Aguair R.A.A., Pacheco P.M.C.L. Analysis of stress concentration in pseudoelastic plates using digital image correlation (DIC) and finite element method. *Lat. Am. J. Solids Struct.*, 2025, vol. 22, no. 10, art. e870. https://doi.org/10.1590/1679-7825/e8703.

23. Sococol I., Mihai P., Petrescu T.-C., Nedeff F., Nedeff V., Agop M., Luca B.-I. Numerical study regarding the seismic response of a moment-resisting (MR) reinforced concrete (RC) frame structure with reduced cross-sections of the RC slabs. *Buildings*, 2022, vol. 12, no. 10, art. 1525. https://doi.org/10.3390/buildings12101525.

24. Wang Ch., González Ureña A., Afifi M., Rudman A., Tremblay R., Rogers C.A. Conventional construction steel braces with bearing plate energy dissipation. *Proc. 17th World Conf. on Earthquake Engineering (17WCEE)*. Sendai, 2020, art. 2i-0070.

25. Hung L.-W., Chao C.-K., Huang J.-R., Lin J. Screw head plugs increase the fatigue strength of stainless steel, but not of titanium, locking plates. *Bone Jt. Res.*, 2019, vol. 7, no. 12, pp. 629–635. https://doi.org/10.1302/2046-3758.712.BJR-2018-0083.R1.

26. Ohashi Y., Murakami S. The elasto-plastic bending of a clamped thin circular plate. In: Görtler H. (Ed.) *Applied Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Springer. 1966. pp. 212–223. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_25.

Информация об авторах

Антон Евгеньевич Максеев, аспирант, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

E-mail: *makseevv.anton@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0181-3460

Ксения Сергеевна Бодягина, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.

E-mail: *bodksen@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8822-410X

Максим Викторович Жигалов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук
E-mail: *zhigalovm@yandex.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0642-7211

Вадим Анатольевич Крысько, доктор технических наук, профессор, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук
E-mail: *tak@san.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4914-764X

Author Information

Anton E. Makseev, Postgradute Student, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
E-mail: *makseevv.anton@mail.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-0181-3460

Kseniya S. Bodyagina, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov
E-mail: *bodksen@mail.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8822-410X

Maksim V. Zhigalov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
E-mail: *zhigalovm@yandex.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0642-7211

Vadim A. Krysko, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences
E-mail: *tak@san.ru*
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4914-764X

Поступила в редакцию 27.08.2025
Принята к публикации 3.10.2025

Received August 27, 2025
Accepted October 3, 2025