

**ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ**

УДК 539.3

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>**Математически корректная постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, численно-аналитические методы и результаты решения задач****С.А. Кузнецов***Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия**skuznets@kpfu.ru***Аннотация**

Даны обоснование математически корректной постановки контактных задач теории пластин и оболочек и обзор решенных за последние годы статических и динамических контактных задач, их аналитических и численных решений, а также анализ полученных результатов. В том числе приведены примеры задач, в которых принципиально важным является корректное определение распределения контактных напряжений.

**Ключевые слова:** контактная задача, теория пластин и оболочек, математически корректная постановка

---

**Для цитирования:** Кузнецов С.А. Математически корректная постановка контактных задач для тонкостенных элементов конструкций, численно-аналитические методы и результаты решения задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 719–743. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>.

---

## REVIEW ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>

# Mathematically rigorous formulation of contact problems for thin-walled structural elements, numerical and analytical methods, and solution results

S.A. Kuznetsov

*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

*skuznets@kpfu.ru*

## Abstract

A mathematically rigorous formulation of contact problems in the theory of plates and shells is justified. An overview of the recently solved static and dynamic problems, their analytical and numerical solutions, is carried out, and the results of the obtained solutions are analyzed. Additionally, examples are provided of such problems where the correct determination of contact stress distribution is fundamentally important.

**Keywords:** contact problem, theory of plates and shells, mathematically rigorous formulation

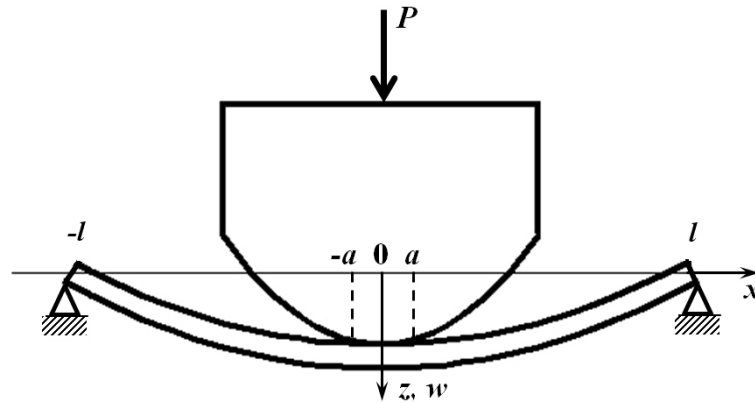
---

**For citation:** Kuznetsov S.A. Mathematically rigorous formulation of contact problems for thin-walled structural elements, numerical and analytical methods, and solution results. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 719–743. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.719-743>. (In Russian)

---

## 1. О математически корректной постановке

Одним из наиболее сложных разделов теории оболочек, имеющим широкую область практических приложений, являются задачи анализа прочности тонкостенных элементов конструкций при их взаимодействии с другими упругими или жесткими телами. При этом контактные задачи теории оболочек имеют свою специфику, отличающую их от контактных задач теории упругости. При рассмотрении последних трудности возникают, как правило, на этапе вывода и решения уравнений, а с выбором самой теории, используемой при формулировке задачи, все бывает ясно. В контактных задачах теории оболочек выбор той или иной теории существенно влияет на конечный результат. Рассмотрим, например, хорошо известное [1] решение задачи о цилиндрическом изгибе параболическим штампом пластины, шарнирно опертой по краям  $x = \pm l$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Контактная задача при цилиндрическом изгибе

**Fig. 1.** Contact problem in cylindrical bending

При решении задачи на основе классической теории Кирхгофа – Лява условие контакта записывается в виде равенства перемещений штампа перемещениям срединной поверхности пластины и приводит к уравнению

$$\int_{-a}^a G(x, \xi) \sigma(\xi) d\xi = \alpha - f(x), \quad |x| < a, \quad (1)$$

где  $G(x, \xi)$  – функция Грина, являющаяся решением краевой задачи

$$G^{IV}(x, \xi) = \frac{1}{D} \delta(x - \xi), \quad G(\pm l, \xi) = 0, \quad G''(\pm l, \xi) = 0,$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$  – изгибная жесткость пластины,  $\delta(x - \xi)$  – дельта-функция Дирака,  $\alpha$  и  $f(x)$  – жесткое смещение и форма подошвы штампа,  $\sigma(x)$  – неизвестное контактное давление.

Нетрудно получить функцию Грина в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{12Dl} [l|x - \xi|^3 + x\xi(x^2 + \xi^2 + 2l^2) - 3l^2(x^2 + \xi^2) + 2l^4].$$

Уравнение (1) является интегральным уравнением Фредгольма 1-го рода. Известно, что решение уравнений Фредгольма 1-го рода с гладким ядром (а у нас функция  $G(x, \xi)$  гладкая) является задачей, математически некорректной. Это значит, что бесконечно малому изменению правой части будет соответствовать конечное изменение решения. Физически же некорректность постановки может проявляться по-разному, в зависимости от решаемой задачи и от того объекта или процесса, который мы моделируем таким интегральным уравнением. Надо быть готовым в таком случае ко всяким неожиданностям. В нашем случае некорректность проявляется в том, что для штампа параболической формы  $f(x) = cx^2$  решение контактной задачи имеет вид

$$\sigma(x) = -\frac{P}{2} [\delta(x - a) + \delta(x + a)].$$

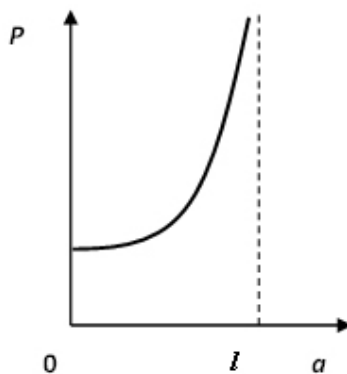
При этом смещение штампа  $\alpha$ , размер области контакта  $a$  и прижимающая сила  $P$  связаны соотношениями

$$P = \frac{4cD}{l-a}, \quad \alpha = -\frac{P}{12D}(a^3 - 3la^2 + 2l^3).$$

Что мы видим в этом решении?

Во-первых, напряжения под штампом отсутствуют, а на границах они настолько велики, что сосредоточены в точках  $x = \pm a$ . Но при гладкой форме штампа как раз на границе напряжений быть не должно, и из простых физических соображений ясно, что  $\sigma(\pm a) = 0$ .

Во-вторых, зависимость  $P(a)$  (рис. 2) имеет две особые точки:  $a = 0$  и  $a = l$ . В нулевой точке мы имеем конечное значение силы  $P$ , т. е. бесконечно малому приращению длины области контакта  $a$  соответствует конечное приращение силы  $P$ , прижимающей штамп. А для того чтобы область контакта распространилась на всю длину  $l$ , требуется бесконечно большое значение силы  $P$ .



**Рис. 2.** Зависимость  $P(a)$

**Fig. 2.** Dependence  $P(a)$

Контактную задачу теории оболочек можно сделать математически корректной, используя методы регуляризации для перехода к уравнению Фредгольма второго рода

$$k_0\sigma(x) + \int_{-a}^a G(x, \xi)\sigma(\xi) d\xi = \alpha - f(x), \quad |x| < a. \quad (2)$$

Важнейшим при этом является выбор значения параметра регуляризации  $k_0$ . Это значение должно делать решение устойчивым и вместе с тем незначительно искажать первоначальное интегральное уравнение первого рода. В методе регуляризации А.Н. Тихонова [2] используется априорная информация о решении для сужения области поиска и окончательного выбора параметра.

Другой подход к проблеме регуляризации уравнений рассматриваемых контактных задач основан на уточнении физической постановки задачи. В варианте Г.Я. Попова [3] срединная поверхность тонкостенного элемента покрывается слоем упругого винклера основания с коэффициентом податливости  $k_0$ , значение которого необходимо определять

экспериментально. Более логичной представляется интерпретация параметра регуляризации как коэффициента обжатия оболочки по толщине, характеризующего смещение контактирующей поверхности относительно срединной. Такая постановка была предложена независимо друг от друга и практически одновременно Э.И. Григолюком и В.М. Толкачевым [4], М.В. Блохом и С.Я. Цукровым [5], Ю.П. Артюхиным и С.Н. Карасевым [6]. Выражения для коэффициента обжатия получены ими путем интегрирования соотношений закона Гука для поперечной деформации при нормальном напряжении, найденном из уравнений равновесия. Позднее Ю.П. Артюхин [7] получил коэффициент обжатия из решения задачи о сжатии тонкого слоя, лежащего на недеформируемом основании.

Коэффициент обжатия может быть представлен в общем случае в виде  $k_0 = F(\nu)h/E$ , где  $F(\nu)$  – некоторая функция коэффициента Пуассона  $\nu$  или константа, которая представлена в табл. 1.

**Табл. 1.** Вид и значения функции  $F(\nu)$

**Table 1.** Type and values of the function  $F(\nu)$

Источник	[4]	[5]	[6]	[7]
Вид функции	13/32	3/8	$13(1 - \nu^2)/32$	$(1 + \nu)(0,5 - \nu)/(1 - \nu)$
$F(0,3)$	0,406	0,375	0,370	0,371

Диапазон изменения  $F(\nu)$  укладывается в  $\pm 5\%$ . В то же время ядро интегрального уравнения (2) можно переписать в виде

$$G(x, \xi) = (1 - \nu^2) \frac{h}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^4 G_0(x, \xi),$$

где

$$G_0(x, \xi) = |x_* - \xi_*|^3 + x_* \xi_* (x_*^2 + \xi_*^2 + 2) - 3(x_*^2 + \xi_*^2) + 2, \quad x_* = x/l, \quad \xi_* = \xi/l.$$

Тогда очевидно, что  $G(x, \xi)$  имеет порядок  $(1 - \nu^2)(h/E)(l/h)^4$ , и слагаемое  $k_0 \sigma(x)$  на несколько порядков меньше прогиба срединной поверхности не только для тонких, но и для пластин и оболочек средней толщины.

Решение уравнения (2) имеет вид

$$\sigma(x) = \frac{\lambda P}{s} (\sinh[\lambda(a+x)] \sin[\lambda(a-x)] + \sinh[\lambda(a-x)] \sin[\lambda(a+x)]),$$

где  $\lambda = 1/\sqrt{4k_0 D}$ ,  $s = \sinh \varphi - \sin \varphi$ ,  $\varphi = 2\lambda a$ . Смещение штампа  $\alpha$ , размер области контакта  $a$  и прижимающая сила  $P$  связаны при этом соотношениями

$$P = \frac{4cD\lambda s}{l_a \lambda s + \cosh \varphi + \cos \varphi}, \quad \alpha = \frac{P}{2D} \left( a_1 + a_2 \frac{\cosh \varphi + \cos \varphi}{\lambda s} - l_a \frac{\sinh \varphi + \sin \varphi}{2\lambda^2 s} \right),$$

$$l_a = l - a, \quad a_1 = \frac{a^3 - 3la^2 + 2l^3}{6}, \quad a_2 = \frac{a(2l - a)}{2}.$$

Главным критерием достоверности решения служит сравнение с решением, полученным по точным уравнениям теории упругости, если оно, конечно, существует.



**Рис. 3.** Сравнение контактных напряжений, полученных по теории упругости и теории пластин с учетом обжатия

**Fig. 3.** Comparison of contact stresses obtained from the theory of elasticity and the theory of plates with regard for compression

Как видно из рис. 3, учет обжатия позволяет получить контактные напряжения, близкие к тем, что дает расчет по теории упругости.

Приведенные решения позволяют сделать вывод, что для контактных задач без учета касательного взаимодействия между тонкостенными объектами условие контакта можно формулировать в виде равенства перемещений, состоящих из прогибов срединных поверхностей и местного поперечного обжатия в зоне контакта. При этом сохраняются все преимущества теории тонких оболочек по сравнению с теорией упругости. Возможно также определять функцию Грина для пластин и оболочек средней толщины на основе теорий типа Тимошенко, учитывающих деформации поперечного сдвига.

## 2. Метод сведения интегральных уравнений контактных задач к краевой задаче

Метод сведения интегральных уравнений контактных задач к краевой задаче, разработанный в Казанском университете Ю.П. Артюхиным для одномерных задач и распространенный впоследствии автором на двумерные и динамические задачи, изложим для простоты на примере уравнения (2).

Суть метода заключается в следующем [8]. Пусть функция влияния удовлетворяет некоторому уравнению

$$LG(x, \xi) = L_1 \delta(x - \xi), \quad (3)$$

вид операторов (в общем случае дифференциальных) определяется теорией оболочек, используемой в каждом конкретном случае.

Подействуем оператором  $L$  на уравнение (2)

$$k_0 L\sigma(x) + \int_{-a}^a LG(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = L(\alpha - f(x)). \quad (4)$$

Используя фильтрующие свойства  $\delta$ -функции, приведем (4) к виду

$$k_0 L\sigma(x) + L_1\sigma(x) = L(\alpha - f(x)). \quad (5)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$L_1 U(x) = \alpha - f(x) - k_0 \sigma(x). \quad (6)$$

Тогда  $L_1\sigma(x) = LL_1 U(x)$ . Отсюда получим

$$\sigma(x) = LU(x). \quad (7)$$

Подставим полученное соотношение в уравнение (5):

$$k_0 LLU(x) + L_1 LU(x) = L(\alpha - f(x))$$

и окончательно получим дифференциальное уравнение для  $U(x)$ :

$$(k_0 L + L_1)U(x) = \alpha - f(x). \quad (8)$$

Подставив (6) и (7) в (2), найдем

$$\int_{-a}^a G(x, \xi)LU(\xi)d\xi = L_1 U(x).$$

Здесь оператор  $L$  берется по переменной интегрирования  $\xi$ . Применив обобщенное интегрирование по частям, получим

$$\int_{-a}^a LG(x, \xi)U(\xi)d\xi + \Psi(G, U)|_{\xi=-a}^{\xi=a} = L_1 U(x),$$

где  $\Psi(G, U)$  – дифференциальное выражение, конкретный вид которого определяется оператором  $L$ .

В контактных задачах функция влияния симметрична по переменным  $x$  и  $\xi$ . Поэтому интеграл в левой части тождественно равен  $L_1 U(x)$ , и у нас остается краевое условие для  $U(x)$ :

$$\Psi(G, U)|_{\xi=-a}^{\xi=a} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (2) сведена к решению краевой задачи (8), (9). Если оператор  $L = d^4/dx^4$  или  $L = d^4/dx^4 + 4\lambda^4$ , то

$$\Psi(G, U) = G(x, \xi)U'''(\xi) - G'_\xi(x, \xi)U''(\xi) + G''_{\xi\xi}(x, \xi)U'(\xi) - G'''_{\xi\xi\xi}(x, \xi)U(\xi).$$

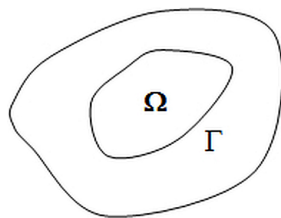
В двумерных контактных задачах сведение интегрального уравнения к краевой задаче при сохранении общего подхода имеет некоторые особенности [9]. Интегральное уравнение, являющееся условием контакта тонкой оболочки, взаимодействующей с жестким телом – штампом, имеет вид

$$k_0\sigma(x, y) + \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\sigma(\xi, \eta)d\xi d\eta = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь  $\Omega$  – область контакта, ограниченная контуром  $\Gamma$  (рис. 4);  $f(x, y)$  – функция формы и жесткого смещения штампа и оболочки;  $G(x, y, \xi, \eta)$  – функция влияния, удовлетворяющая уравнению

$$LG(x, y, \xi, \eta) = L_1\delta(x - \xi, y - \eta)$$

( $L, L_1$  – дифференциальные операторы) и соответствующим краевым условиям.



**Рис. 4.** Двумерная область контакта

**Fig. 4.** Two-dimensional contact area

Если форма штампа гладкая и область контакта заранее неизвестна, то к уравнению (10) необходимо добавить естественное условие непрерывности контактного давления на границе контакта  $\Gamma$ :  $\sigma(x, y) = 0$ ,  $(x, y) \in \Gamma$ .

Постоянные жесткого смещения определяются из условий статического равновесия штампа.

Для ряда теорий тонких оболочек, используемых в настоящее время, оператор  $L$  представим в виде  $L = \nabla^4 + \alpha_1\nabla^2 + \alpha_2$ , где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа,  $\alpha_1, \alpha_2$  – постоянные. Тогда краевая задача, соответствующая уравнению (10), относительно вспомогательной функции  $U(x, y)$ , связанной с контактным давлением зависимостью  $L_1U(x, y) = f(x, y) - k_0\sigma(x, y)$ , примет вид

$$(k_0L + L_1)U(x, y) = f(x, y), \quad (11)$$

$$\oint_{\Gamma} \Psi[G, U]d\Gamma = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi[G, U] \equiv & (\nabla^2 + \alpha_1)G(x, y, \xi, \eta)\frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} + G(x, y, \xi, \eta)\frac{\partial \nabla^2 U(\xi, \eta)}{\partial n} - \\ & - U(\xi, \eta)\frac{\partial \nabla^2 G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n} - (\nabla^2 + \alpha_1)U(\xi, \eta)\frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n}, \end{aligned}$$

$n$  – внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$ .



Соотношение (12) представляет собой краевое условие для функции  $U(x, y)$ . Таким образом, проблема решения интегрального уравнения (10) сведена к решению краевой задачи (11), (12). Основное отличие от одномерных контактных задач заключается в том, что краевое условие записано в виде контурного интеграла по границе области контакта.

Многосвязные контактные задачи также сводятся к решению (11), (12) [10].

При решении контактных задач для оболочек средней толщины с учетом деформаций поперечного сдвига отличие от рассмотренной постановки заключается только в операторе  $L_1$  в правой части уравнения для функции Грина.

### 3. Методика численного решения интегральных уравнений контактных задач [11]

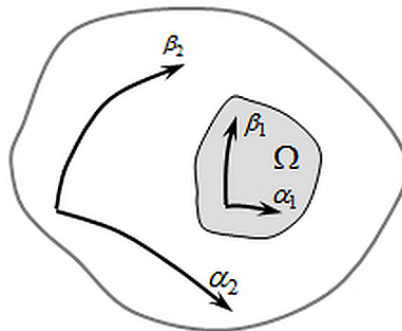
Геометрия взаимодействующих тел зачастую такова, что искать функцию влияния удобнее в системе координат  $(\alpha_2, \beta_2)$ , связанной с оболочкой, а условие контакта записывать в системе координат штампа  $(\alpha_1, \beta_1)$  (рис. 5):

$$L\tilde{G}(\alpha_2, \beta_2, \xi_2, \eta_2) = L_1\delta(\alpha_2 - \xi_2, \beta_2 - \eta_2),$$

$$k_0\sigma(\alpha_1, \beta_1) + \iint_{\Omega} G(\alpha_1, \beta_1, \xi_1, \eta_1)\sigma(\xi_1, \eta_1)d\Omega = f(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_1, \beta_1) \in \Omega.$$

При этом надо знать формулы перехода от одной системы координат к другой:

$$\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2, \beta_2), \quad \beta_1 = \beta_1(\alpha_2, \beta_2).$$



**Рис. 5.** Системы координат

**Fig. 5.** Coordinate systems

Область контакта покроем сеткой топологических прямоугольников, в каждом из которых проведем интегрирование с помощью квадратурной формулы Гаусса. Потребовав выполнения условия контакта пластины и штампа в каждой квадратурной точке, сведем проблему определения значений контактного давления в узлах интегрирования к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$k_0\sigma(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{n_{\beta_1}} (b_{kl} - a_{kl})(d_{kl} - c_{kl}) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}, \xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) \sigma(\xi_{1ikl}, \eta_{1jkl}) A_i A_j = f(\alpha_{1spq}, \beta_{1tpq}),$$

где  $A_i$  и  $N$  – весовые множители и число узлов в квадратурной формуле Гаусса;  $n_{\alpha_1}, n_{\beta_1}$  – количество фрагментов разбиения сетки по осям;  $s, t = 1, 2, \dots, N$ ;  $p = 1, 2, \dots, n_{\alpha_1}$ ;  $q = 1, 2, \dots, n_{\beta_1}$ .

#### 4. Результаты решения контактных задач

**4.1. Взаимодействие с жестким телом пластины средней толщины, лежащей на упругом основании [12].** Как известно, решение задач теории пластин и оболочек на основе классической теории Кирхгофа–Лява позволяет получать приемлемые по точности решения только для тонких объектов. Для пластин и оболочек средней толщины необходимо использовать теории, в которых учитываются деформации поперечного сдвига (искривление нормали к срединной поверхности). В работе [6] С.Н. Карасев, Ю.П. Артюхин исследовали влияние учета деформаций поперечного сдвига на распределение контактных напряжений, но ограничились тонкими пластинами. Рассмотрим контактную задачу о взаимодействии штампа с пластиной средней толщины, лежащей на упругом винклеровом основании.

Используем теорию Тимошенко, учитывающую деформации поперечного сдвига. Согласно этой теории операторы  $L$  и  $L_1$  в уравнении (3) имеют вид

$$L = \frac{d^4}{dx^4} + 4\lambda^4, \quad L_1 = \frac{1}{D} - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2},$$

где  $K = 5Eh/12(1 + \nu)$  – жесткость на сдвиг,  $4\lambda^4 = k/D$ ,  $k$  – коэффициент постели упругого основания.

Решение контактной задачи получим при трех различных вариантах закрепления пластины:

- 1) оба края жестко защемлены:  $G(\pm l, \xi) = G'_x(\pm l, \xi) = 0$ ;
- 2) оба края шарнирно оперты:  $G(\pm l, \xi) = G''_{xx}(\pm l, \xi) = 0$ ;
- 3) оба края свободны:  $G'''_{xx}(\pm l, \xi) = G''''_{xxx}(\pm l, \xi) = 0$ .

Общее решение уравнения (3) достаточно просто получить методом вариации произвольных постоянных. Удовлетворив граничным условиям, получим функцию влияния в виде

$$G(x, \xi) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_{ji} Y_i(\lambda \xi) Y_j(\lambda x) / D_0 + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 B_{ji} Y_i(\lambda \xi) Y_j(\lambda x) H(x - \xi) / (4\lambda^3 D K),$$

где  $H(x - \xi)$  – единичная функция Хевисайда,  $Y_i(x)$  – балочные функции Крылова:

$$Y_1(x) = \cosh x \cos x, \quad Y_2(x) = \sinh x \sin x, \quad Y_3(x) = \sinh x \cos x, \quad Y_4(x) = \cosh x \sin x,$$

$$(B_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_{dp} & -K_{dm} \\ 0 & 0 & -K_{dm} & -K_{dp} \\ -K_{dp} & K_{dm} & 0 & 0 \\ K_{dm} & K_{dp} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Конкретный вид  $C_{ji}$  определяется граничными условиями.

Для жестко зажатых краев

$$C_{11} = (C_s K_{dm} + C_h K_{dp} - 2K) S_{sm}, \quad C_{12} = (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sm},$$

$$\begin{aligned}
C_{21} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sm}, & C_{22} &= -(C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, \\
C_{33} &= (C_s K_{dm} - C_h K_{dp} - 2K) S_{sp}, & C_{34} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sp}, \\
C_{43} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sp}, & C_{44} &= (-C_s K_{dm} + C_h K_{dp} - 2K) S_{sp}, \\
C_{13} &= -K_{dp} S_{sm} S_{sp}, & C_{31} &= -C_{13}, & C_{24} &= -C_{13}, & C_{42} &= C_{13}, \\
C_{14} &= K_{dm} S_{sm} S_{sp}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, \\
D_0 &= \cos l_4 + \cosh l_4 - 2.
\end{aligned}$$

Для шарнирно опертых краев

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (C_s - C_h)(K_{dp} S_h - K_{dm} S_n), & C_{12} &= (C_h - C_s)(K_{dm} S_h + K_{dp} S_n), \\
C_{13} &= (C_h^2 - C_s^2) K_{dp}, & C_{14} &= (C_s^2 - C_h^2) K_{dm}, \\
C_{33} &= (C_h + C_s)(K_{dp} S_h + K_{dm} S_n), & C_{34} &= (C_h + C_s)(K_{dp} S_n - K_{dm} S_h), \\
C_{21} &= C_{12}, & C_{22} &= -C_{11}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{24} &= C_{31} = -C_{13}, \\
C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, & C_{42} &= C_{13}, \\
D_0 &= \cos l_4 - \cosh l_4.
\end{aligned}$$

Для свободных краев

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, & C_{12} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sm}, \\
C_{21} &= (-C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sm}, & C_{22} &= (-C_s K_{dm} - C_h K_{dp} + 2K) S_{sm}, \\
C_{33} &= (C_s K_{dm} - C_h K_{dp} + 2K) S_{sp}, & C_{34} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} + 4\lambda^2 D) S_{sp}, \\
C_{43} &= (C_h K_{dm} + C_s K_{dp} - 4\lambda^2 D) S_{sp}, & C_{44} &= (-C_s K_{dm} + C_h K_{dp} + 2K) S_{sp}, \\
C_{13} &= -K_{dp} S_{sm} S_{sp}, & C_{24} &= -C_{13}, & C_{31} &= -C_{13}, & C_{42} &= C_{13}, \\
C_{14} &= K_{dm} S_{sm} S_{sp}, & C_{23} &= C_{14}, & C_{32} &= -C_{14}, & C_{41} &= -C_{14}, \\
D_0 &= \cos l_4 + \cosh l_4 - 2.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
S_{sm} &= S_h - S_n, & S_{sp} &= S_h + S_n, \\
S_h &= \sinh l_2, & S_n &= \sin l_2, & C_h &= \cosh l_2, & C_s &= \cos l_2, \\
K_{dp} &= K + 2\lambda^2 D, & K_{dm} &= K - 2\lambda^2 D, & l_2 &= 2\lambda l, & l_4 &= 4\lambda l.
\end{aligned}$$

В случае плоского штампа  $f(x) = 0$ , и уравнение (8) примет вид

$$U^{IV}(x) - pU^{II}(x) + qU(x) = \alpha_0, \quad (13)$$

где  $p = 1/(k_0 K)$ ,  $q = (1 + k_0 k)/(k_0 D)$ ,  $\alpha_0 = \alpha/k_0$ .

Общее решение уравнения (13) представимо в виде

$$U(x) = \alpha_0 \left( \sum_{i=1}^4 A_i V_i(x) + 1/q \right), \quad (14)$$

$$V_1(x) = \cosh(a_1 x) \cos(a_2 x), \quad V_2(x) = \sinh(a_1 x) \sin(a_2 x),$$

$$V_3(x) = \sinh(a_1 x) \cos(a_2 x), \quad V_4(x) = \cosh(a_1 x) \sin(a_2 x),$$

$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{q} + p}$ ,  $a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{2\sqrt{q} - p}$  – действительная и мнимая части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (13).

Подставив  $U(\xi)$  и  $G(x, \xi)$  в условие (9), приведем его к виду

$$\sum_{i=1}^4 F_i(A_1, A_2, A_3, A_4, a) Y_i(x) = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при любом  $x \in [-a, a]$ , то коэффициенты при  $Y_i(x)$  должны равняться нулю. Таким образом, произвольные постоянные  $A_1, A_2, A_3, A_4$  суть решение системы линейных алгебраических уравнений

$$F_i(A_1, A_2, A_3, A_4, a) = 0, \quad i = \overline{1, 4},$$

которое может быть записано в замкнутом виде. Конкретные выражения здесь не приведены ввиду их громоздкости.

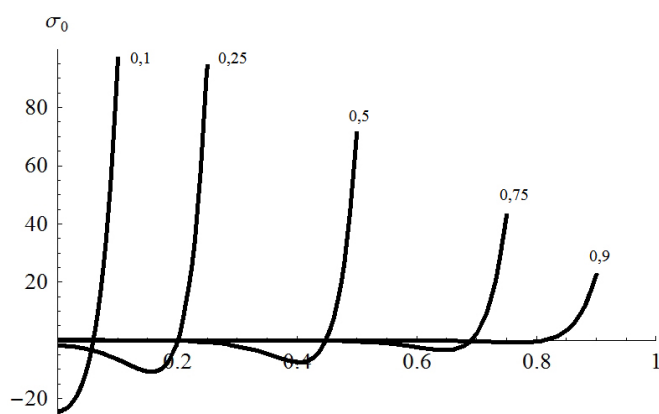
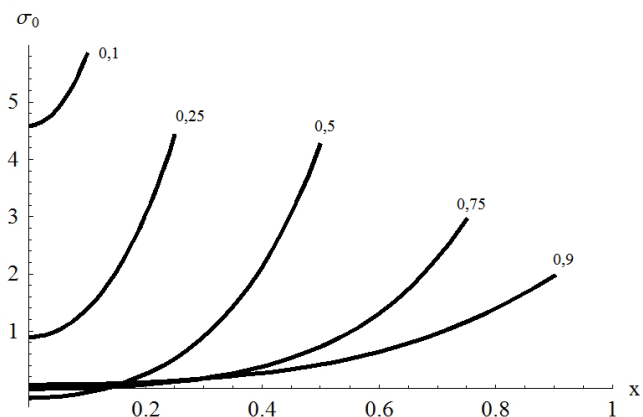
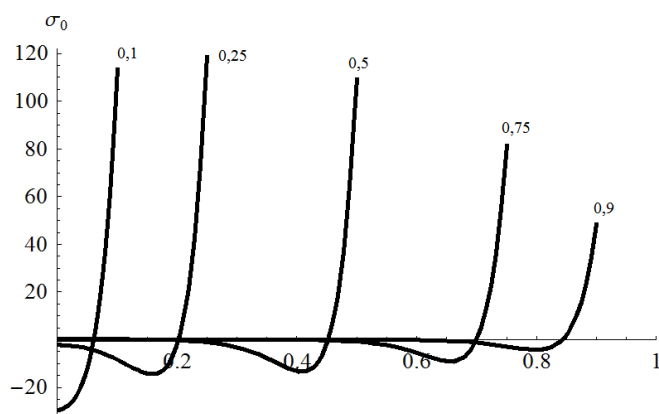
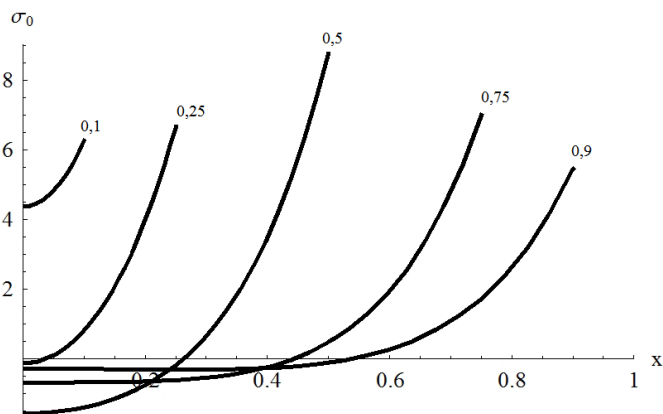
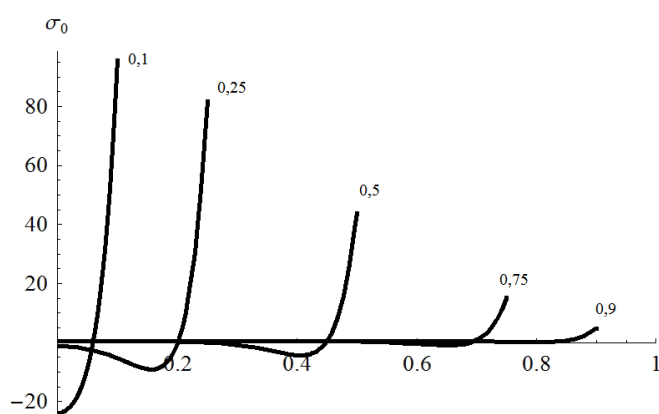
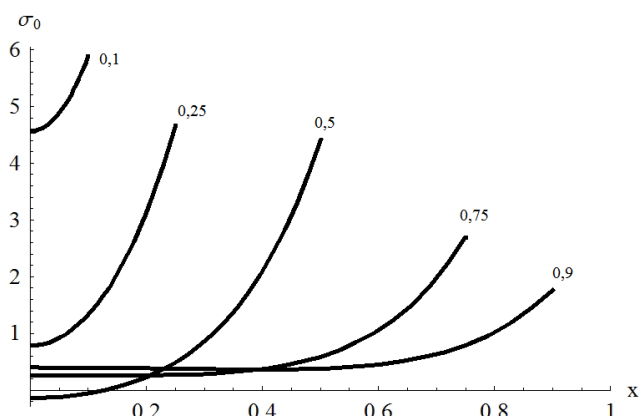
Далее представлены некоторые результаты расчетов относительного контактного давления  $\sigma_0(x) = \sigma(x)/P$ ,  $P = \int_{-a}^a \sigma(x) dx$  в зависимости от  $x/l$  для пластины  $l = 1$  различ-

ной толщины  $h$  при различных размерах симметрично расположенного штампа. В силу симметрии задачи графики построены только для правой половины штампа  $0 \leq x \leq a$ . Числами отмечены результаты, соответствующие различным относительным размерам штампа:  $a/l = 0, 1; 0, 25; 0, 5; 0, 75; 0, 9$ . На рис. 6, 7 показаны результаты для жесткого защемления, на рис. 8, 9 – для шарнирного опирания, на рис. 10, 11 – для свободного края. Рис. 6, 8, 10 иллюстрируют распределение относительного контактного давления для тонких пластин  $h = 0, 1l$ , рис. 7, 9, 11 – для пластин средней толщины  $h = 0, 5l$ .

Хорошо виден различный характер распределения контактных напряжений при разной толщине пластин. Для тонких пластин результаты совпадают с полученными ранее решениями на основе теории Кирхгофа–Лява. Для пластин средней толщины при малых областях контакта напряжения только положительные, в отличие от тонких пластин. При увеличении размера штампа в центральной зоне области контакта появляются отрицательные напряжения, т. е. в случае одностороннего взаимодействия в этой зоне будет происходить отрыв поверхности пластины от штампа. Размер этих зон зависит от условий закрепления краев пластины.

Анализ численных результатов также показал существенную зависимость распределения контактных напряжений от условий закрепления пластины не только для больших относительных размеров штампа, но и для малых, при значительном удалении границ области контакта от краев пластины.

Результаты исследования могут быть использованы при верификации алгоритмов и программ численного решения задач контактного взаимодействия.

Рис. 6.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 1$ Fig. 6.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 1$ Рис. 7.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 5$ Fig. 7.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 5$ Рис. 8.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 1$ Fig. 8.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 1$ Рис. 9.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 5$ Fig. 9.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 5$ Рис. 10.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 1$ Fig. 10.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 1$ Рис. 11.  $\sigma_0(x)$  при  $h = 0, 5$ Fig. 11.  $\sigma_0(x)$  for  $h = 0, 5$

**4.2. Вынужденные гармонические колебания пластины с жесткой накладкой [13].** Рассмотрим установившийся процесс вынужденных колебаний прямоугольной пластины шириной  $2l$ , взаимодействующей с жесткой накладкой шириной  $2a$  (рис. 12). Будем считать, что пластина находится в условиях цилиндрического изгиба, контакт безотрывный. Запишем уравнение движения пластины с учетом поперечного сдвига и инерции вращения [14] и уравнение движения накладки в виде

$$LW(x, t) = L_1\sigma(x, t), \quad (15)$$

$$M \frac{d^2 V}{dt^2} = P(t) - R(t). \quad (16)$$

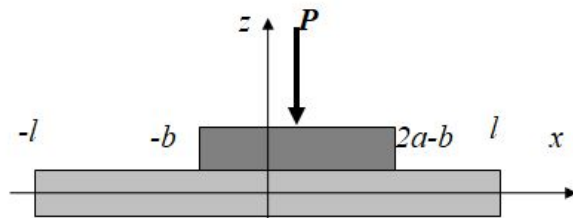
Здесь

$$L = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \left( \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{V_1^2 \cdot V_2^2} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$L_1 = \frac{1}{D} + \frac{1}{K} \left( \frac{1}{V_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right), \quad R(t) = \int_{-b}^{2a-b} \sigma(x, t) dx,$$

$$V_1^2 = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad V_2^2 = \frac{5\mu}{6\rho}, \quad c^2 = \frac{D}{\rho h}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{5Eh}{12(1+\nu)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$W$  – прогиб пластины;  $\sigma$  – контактное давление;  $M$  и  $V$  – масса и смещение накладки;  $P$  – сила, действующая на накладку;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\rho$  – плотность материала пластины.



**Рис. 12.** Пластина с накладкой

**Fig. 12.** Plate with an overlay

Как известно, в установившемся процессе вынужденных колебаний под действием силы  $P(t) = Pe^{i\omega t}$  можно считать, что прогиб  $W(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$ , контактное давление  $\sigma(x, t) = \sigma(x)e^{i\omega t}$ , смещение накладки  $V(t) = Ve^{i\omega t}$ . Тогда уравнение (15) примет вид

$$LW(x) = L_1\sigma(x),$$

где

$$L = \frac{d^4}{dx^4} + B \frac{d^2}{dx^2} + B_1, \quad L_1 = A - \frac{1}{K} \frac{d^2}{dx^2},$$

$$B = \omega^2 \left( \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} \right), \quad B_1 = \frac{\omega^4}{V_1^2 V_2^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad A = \frac{1}{D} - \frac{1}{K} \frac{\omega^2}{V_1^2}.$$

Остальные обозначения те же.

Согласно математически корректной постановке контактной задачи амплитуда контактных напряжений является решением интегрального уравнения

$$k_0\sigma(x) + \int_{-b}^{2a-b} G(x, \xi)\sigma(\xi)d\xi = V, \quad -b < x < 2a - b. \quad (17)$$

Для пластинки, защемленной по краям  $x = \pm l$ , функция влияния определяется как решение краевой задачи

$$LG(x, \xi) = L_1\delta(x - \xi), \quad G(\pm l, \xi) = G'_x(\pm l, \xi) = 0,$$

которое может быть представлено в виде

$$G(x, \xi) = \frac{1}{C} \left\{ \sum_{i=1}^4 C_i(\xi)G_i(x) + 2 \left[ \frac{\alpha_1}{k_1} \sinh[k_1(x - \xi)] - \frac{\alpha_2}{k_2} \sin[k_2(x - \xi)] \right] H(x - \xi) \right\}, \quad (18)$$

где

$$G_1(x) = \cosh(k_1x), \quad G_2(x) = \sinh(k_1x), \quad G_3(x) = \cos(k_2x), \quad G_4(x) = \sin(k_2x),$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 - 4B_1} - B}{2}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{B^2 - 4B_1} + B}{2}},$$

$$\begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ C_3(\xi) \\ C_4(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1}{k_1} \frac{f_3}{f_1} & \frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_2}{f_1} & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{k_1} & \frac{\alpha_1}{k_1} \frac{f_4}{f_2} & 0 & \frac{\alpha_2}{f_2} \\ \frac{\alpha_1}{f_1} & 0 & \frac{\alpha_2}{k_2} \frac{f_4}{f_1} & -\frac{\alpha_2}{k_2} \\ 0 & \frac{\alpha_1}{f_2} & \frac{\alpha_2}{k_2} & -\frac{\alpha_2}{k_2} \frac{f_3}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k_1 \xi \\ \operatorname{sh} k_1 \xi \\ \cos k_2 \xi \\ \sin k_2 \xi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1 \sinh l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \cosh l_1, & f_2 &= k_1 \cosh l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \sinh l_1, \\ f_3 &= k_1 \cosh l_1 \cos l_2 + k_2 \sin l_2 \sinh l_1, & f_4 &= k_1 \sinh l_1 \sin l_2 - k_2 \cos l_2 \cosh l_1, \end{aligned}$$

$$C = 2\sqrt{B^2 - 4B_1}, \quad \alpha_1 = A + \frac{k_1^2}{K}, \quad \alpha_2 = A + \frac{k_2^2}{K}, \quad l_i = lk_i \quad (i = 1, 2).$$

Отметим, что

$$B^2 - 4B_1 = \omega^4 \left( \frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2} \right)^2 + \frac{4\omega^2}{c^2} \geq 0$$

при любых  $\omega$ , а  $\sqrt{B^2 - 4B_1} - B \geq 0$  при

$$\omega \leq \frac{V_1 V_2}{c} = \sqrt{\frac{5E}{\rho h^2(1 + \nu)}} = \omega_k. \quad (19)$$

Таким образом, представление (18) для функции влияния справедливо при условии (19). При больших частотах корень характеристического уравнения  $k_1$  станет чисто

мнимым, и гиперболические функции в (18) нужно будет заменить на тригонометрические. Дальнейшее решение проведем для  $\omega \leq \omega_k$ , так как случай  $\omega \geq \omega_k$  рассматривается аналогично.

Для решения интегрального уравнения (17) применим метод, изложенный в разделе 2. Тогда для вспомогательной функции  $U(x)$ , связанной с искомой амплитудой контактных напряжений дифференциальным соотношением  $L_1 U(x) = V - k_0 \sigma(x)$ , получим краевую задачу

$$k_0 L U(x) + L_1 U(x) = V, \quad (20)$$

$$\left\{ \left[ G_\xi''(x, \xi) + B G(x, \xi) \right] U'(\xi) + G(x, \xi) U'''(\xi) - \right. \\ \left. - U(\xi) G_\xi'''(x, \xi) - [U''(\xi) + B U(\xi)] G'(x, \xi) \right\} \Big|_{-b}^{2a-b} = 0. \quad (21)$$

При условиях  $B_1 + \frac{A}{k_0} \geq 0$  и  $4 \left( B_1 + \frac{A}{k_0} \right) > \left( \frac{1}{k_0 k \mu h} - B \right)^2$ , т. е.  $\omega \leq \omega_\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho h k_0}} < \omega_k$ , корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (20),

$$\lambda_1 = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{B_1 + \frac{A}{k_0}} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k_0 K} - B \right) \right]^{1/2}, \quad \lambda_2 = \left[ \frac{1}{2} \sqrt{B_1 + \frac{A}{k_0}} - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k_0 K} - B \right) \right]^{1/2},$$

и функция  $U(x)$  имеет вид

$$U(x) = \frac{V}{A + k_0 B_1} \left( 1 + \sum_{i=1}^4 A_i u_i(x) \right),$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \cosh(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x), & u_3(x) &= \sinh(\lambda_1 x) \cos(\lambda_2 x), \\ u_2(x) &= \sinh(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x), & u_4(x) &= \cosh(\lambda_1 x) \sin(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Краевое условие (21) с учетом линейной независимости функций  $G_i(x)$  преобразуем в систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A_i$ . Эта система и ее решение в полном виде приведены в статье [15].

Зная  $U(x)$ , найдем амплитуды контактного давления и жесткого смещения накладки

$$\sigma(x) = \frac{V}{A + k_0 B_1} \left( B_1 - \sum_{i=1}^4 A_i^* u_i(x) \right),$$

$$V = \frac{P(A + k_0 B_1)}{2a B_1 - M \omega^2 (A + k_0 B_1) - \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} [Y_1 + Y_2]},$$

$$\begin{aligned} Y_1 &= (\lambda_1 A_{12} - \lambda_2 A_{21}) (s c_1 + s c_2) + (\lambda_1 A_{21} + \lambda_2 A_{12}) (c s_1 + c s_2), \\ Y_2 &= (\lambda_1 A_{34} - \lambda_2 A_{43}) (-c c_1 + c c_2) + (\lambda_1 A_{43} + \lambda_2 A_{34}) (-s s_1 + s s_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^* &= \frac{1}{k_0} \left[ \left( A - \frac{n_3}{K} \right) A_1 - \frac{n_4}{K} A_2 \right], & A_3^* &= \frac{1}{k_0} \left[ \left( A - \frac{n_3}{K} \right) A_3 - \frac{n_4}{K} A_4 \right], \\ A_2^* &= \frac{1}{k_0} \left[ \left( A - \frac{n_3}{K} \right) A_2 + \frac{n_4}{K} A_1 \right], & A_4^* &= \frac{1}{k_0} \left[ \left( A - \frac{n_3}{K} \right) A_4 + \frac{n_4}{K} A_3 \right], \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
cc_i &= \cosh(b_i \lambda_1) \cos(b_i \lambda_2), & ss_i &= \sinh(b_i \lambda_1) \sin(b_i \lambda_2), \\
sc_i &= \sinh(b_i \lambda_1) \cos(b_i \lambda_2), & cs_i &= \cosh(b_i \lambda_1) \sin(b_i \lambda_2), \\
i &= 1, 2, & b_1 &= b, & b_2 &= 2a - b.
\end{aligned}$$

Анализ численных результатов позволил сделать следующие выводы.

1. Качественная картина распределения давления вдоль области контакта совпадает с распределением контактного давления при статическом нагружении.
2. Увеличение относительной массы накладки  $M_0 = M/M_{\text{plate}}$  понижает частоту основного тона колебаний пластинки с накладкой. Понижаются и все остальные собственные частоты, т. е. весь спектр собственных частот смещается влево.
3. Уменьшение относительной толщины пластинки уплотняет спектр собственных частот.
4. Пренебрежение деформациями сдвига завышает значение собственных частот. Это завышение незначительно для низших частот и существенно для высших.
5. При определении частоты основного тона колебаний инерцию вращения можно не учитывать; неучет инерции вращения при определении второй и последующих собственных частот колебаний пластинки с накладкой приводит к погрешностям порядка 200–300 Гц.
6. Погрешности, связанные с пренебрежением деформациями сдвига и инерции вращения, малы для тонких пластин и увеличиваются при увеличении толщины пластины.
7. Задачу определения контактных напряжений при частотах, достаточно далеких от резонансных, можно решать с учетом одного лишь поперечного обжатия пластины, пренебрегая как сдвигом, так и инерцией вращения.
8. При увеличении частоты колебаний от нуля до  $\omega_1$  – частоты основного тона – уровень напряжений также повышается. Существуют такие  $\omega > \omega_1$ , при которых уровень напряжений значительно ниже статического.
9. Несимметрия расположения наклейки повышает частоту основного тона и уплотняет спектр собственных частот.

Пп. 2, 3, 8, 9 указывают пути снижения уровня контактных напряжений в реальных конструкциях. Так, например, при заданной частоте колебаний пластинки с жесткой накладкой мы можем, изменив массу наклейки, уменьшить частоту основного тона колебаний и избежать резонанса, не затрагивая геометрии пластины. Варьируя толщину пластины, массу и расположение наклейки, можно добиться того, чтобы частота вынуждающей силы оказалась лежащей между частотами собственных колебаний пластины с накладкой, и получить напряжения контакта меньшие, чем при статическом нагружении.

**4.3. Осесимметричный контакт цилиндрической оболочки с жесткой втулкой при наличии износа [16].** Жесткая втулка длиной  $2a$  посажена с натягом  $d$  на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. Поверхность оболочки изнашивается в результате вращения втулки с угловой скоростью  $\omega$ , износ абразивный [17].

Из решения статической задачи о посадке банджа на цилиндрическую оболочку [7] известно, что безотрывный контакт в неприклеенной оболочке невозможен – середина оболочки отходит от втулки. Поэтому естественно предположить, что при односторонней связи оболочки и втулки область контакта  $\Omega$  будет состоять из двух зон:  $b \leq |x| \leq a$ , причем точка отрыва  $b$  нам заранее неизвестна, и  $\sigma(\pm b, t) = 0$ .

Моделируя условие контакта внутренней поверхности втулки с наружной поверхностью оболочки в виде равенства перемещений с учетом обжатия оболочки по толщине и удалением части материала в результате изнашивания, приходим к интегральному уравнению смешанного типа

$$k_0 D \sigma(x, t) + \int_{\Omega} G(x, \xi) \sigma(\xi, t) d\xi + \aleph R_0 \int_0^t \sigma(x, t) dt = -Dd, \quad x \in \Omega, \quad (22)$$

где  $t$  – время,  $\aleph = K_* K_f \omega$ ,  $K_*$  – коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удаленного материала,  $K_f$  – коэффициент трения,  $R_0 = (R + 0,5h - d)D$ ,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки. Функция влияния  $G(x, \xi)$  является решением соответствующей краевой задачи и имеет вид [18]

$$G(x, \xi) = \frac{1}{8\lambda^3} e^{-\lambda|x-\xi|} (\sin \lambda |x - \xi| + \cos \lambda(x - \xi)), \quad 4\lambda^4 = \frac{Eh}{R^2 D}.$$

Применив к уравнению (22) преобразование Лапласа по времени и метод сведения к краевой задаче, получим изображение контактного давления  $\bar{\sigma}(x, p)$ . Обращение преобразования Лапласа проводилось по приближенному методу Тер-Хаара [19]:  $\sigma(x, t) \approx p\bar{\sigma}(x, p)$  при  $p = 1/t$ .

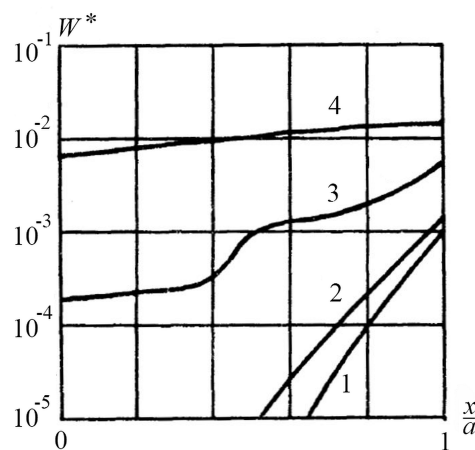
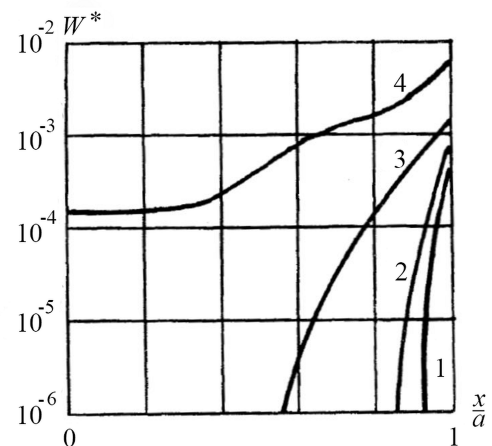
В табл. 2 представлена зависимость фактической длины области контакта  $a_0 = (a-b)/a$  от относительных размеров втулки  $a/h$  и радиуса оболочки  $R/h$ . На рис. 13, 14 показано распределение износа  $W^*(x, t) = \aleph R_0 \int_0^t \sigma(x, t) dt$  вдоль области контакта в различные моменты времени: кривая 1 соответствует  $t = 50$  с, 2 – 100 с, 3 – 1000 с, 4 – 10000 с.

Полученные результаты показывают, что со временем уровень контактных напряжений уменьшается, скорость изменения напряжений и скорость износа максимальны в начальный момент времени, затем они быстро падают и в дальнейшем остаются почти постоянными. Износ максимален на краю области контакта и минимален в центре. Различия в износе отдельных зон области контакта постепенно уменьшаются. Таким образом, в начальный период времени происходит приработка трущихся поверхностей, приводящая к более равномерному распределению контактного давления вдоль области контакта. Скорость приработки существенно зависит от постоянной изнашивания  $\aleph$ , радиуса оболочки и длины втулки.

**Табл. 2.** Фактическая длина области контакта  $a_0$

**Table 2.** Actual length of the contact area  $a_0$

$a/h$	$R/h$			
	20	50	100	200
2	0,143	0,085	0,063	0,048
5	-	0,049	0,026	0,017
10	-	-	0,040	0,012

Рис. 13.  $W^*(x, t)$  при  $a_0 = 0,143$ Fig. 13.  $W^*(x, t)$  for  $a_0 = 0,143$ Рис. 14.  $W^*(x, t)$  при  $a_0 = 0,012$ Fig. 14.  $W^*(x, t)$  for  $a_0 = 0,012$ 

**4.4. Взаимодействие плоских штампов с круглой пластиной, лежащей на упругом основании [20].** Численно-аналитическая методика, представленная в разделе 3, была успешно применена Д.Л. Егоровым при решении контактных задач для круглых пластин, лежащих на упругом основании и находящихся под действием плоских штампов различных форм в плане. Для функции влияния было найдено аналитическое представление путем разложения в ряд Фурье по окружной координате

$$G(r, \varphi, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} {}'G_n(r, \xi) \cos[n(\varphi - \eta)],$$

$$G_n(r, \xi) = C_{1n}(\xi)u_n(\lambda r) + C_{2n}(\xi)v_n(\lambda r) + \frac{1}{2\lambda^2 D} \begin{cases} v_n(\lambda r)f_n(\lambda \xi) - u_n(\lambda r)g_n(\lambda \xi), & 0 \leq r \leq \xi; \\ v_n(\lambda \xi)f_n(\lambda r) - u_n(\lambda \xi)g_n(\lambda r), & \xi \leq r, \end{cases}$$

$$u_n(z) = \text{ber}_n(z), \quad v_n(z) = -\text{bei}_n(z), \quad f_n(z) = -\text{hei}_n(z), \quad g_n(z) = \text{her}_n(z),$$

$C_{1n}(\xi)$  и  $C_{2n}(\xi)$  определяются условиями на контуре пластины и здесь не приведены ввиду их громоздкости, символ  $\sum'$  означает, что при  $n = 0$  вводится коэффициент  $1/2$ .

На рис. 15, 16 показаны системы координат, связанные с пластиной и штампами в случае различных форм штампов.

Формулы перехода от системы координат пластины к системе координат штампа имеют вид

$$r \cos \varphi = e + \rho \cos \chi, \quad r \sin \varphi = \rho \sin \chi$$

для круговых областей и

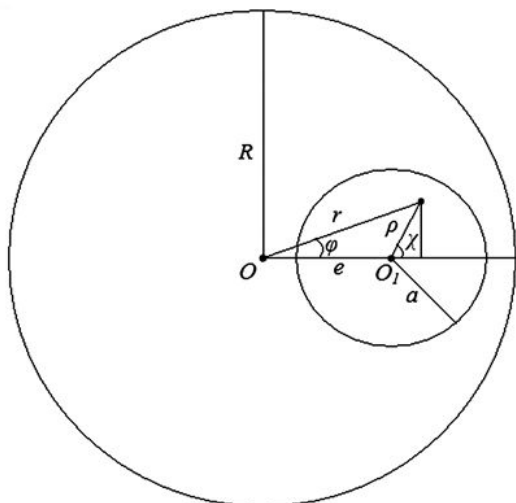
$$r \cos \varphi = e + x \cos \theta - x \sin \theta, \quad r \sin \varphi = x \sin \theta + y \cos \theta$$

для прямоугольных областей.

Сходимость рядов исследовалась численно, при этом было определено минимальное число членов ряда, которое необходимо для достижения заданной точности при определении напряжений.

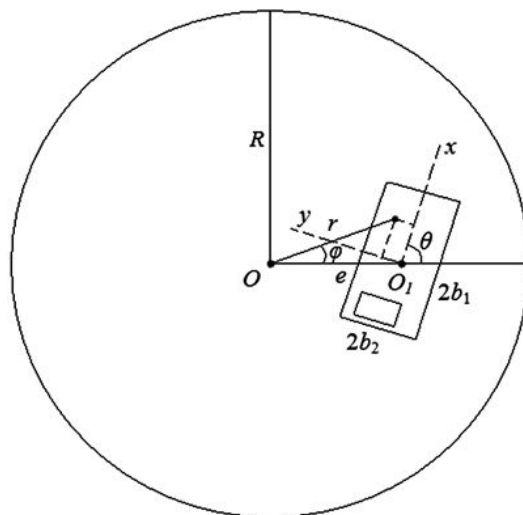
На рис. 17–22 показаны изолинии безразмерного параметра напряжений  $\sigma^*(\rho, \chi)$  для круглых или  $\sigma^*(x, y)$  для прямоугольных штампов, равного отношению контактных напряжений к среднему напряжению, определяемому делением прижимающей силы на площадь штампа.

На рис. 17, 19, 21 край пластины жестко зашцеилен; на рис. 18, 20, 22 – свободен. Эксцентриситет положения центра штампа  $e = 0.7R$  всюду.



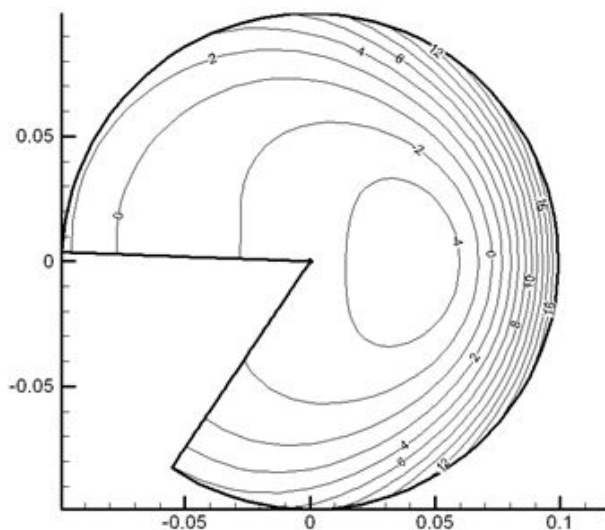
**Рис. 15.** Системы координат для круглых штампов

**Fig. 15.** Coordinate systems for round stamps



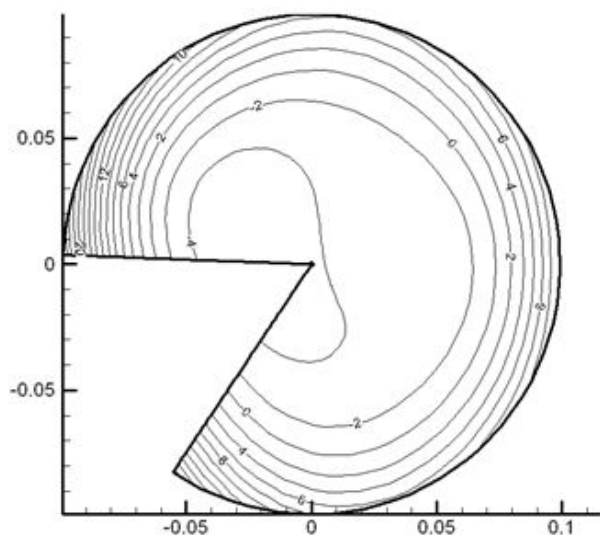
**Рис. 16.** Системы координат для прямоугольных штампов

**Fig. 16.** Coordinate systems for rectangular stamps



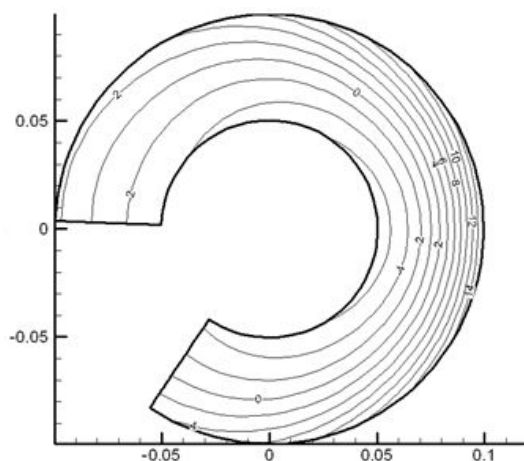
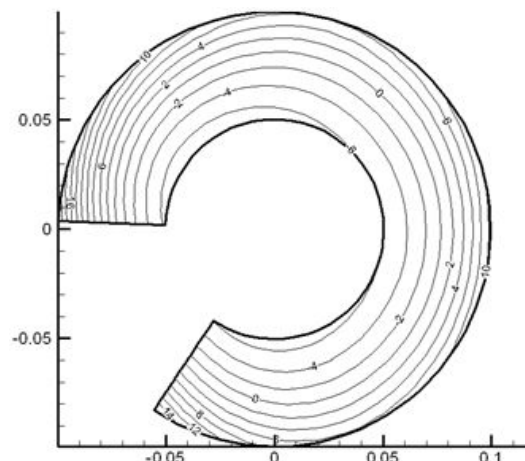
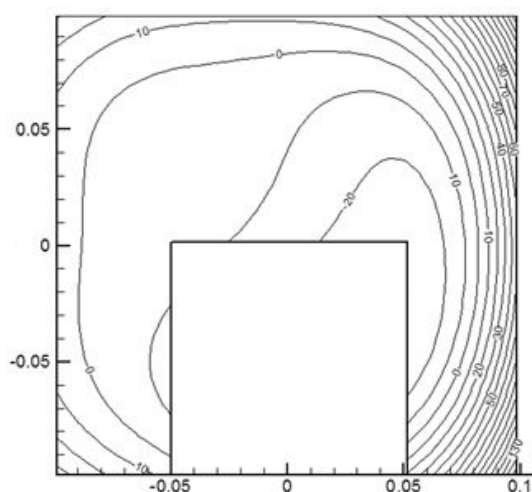
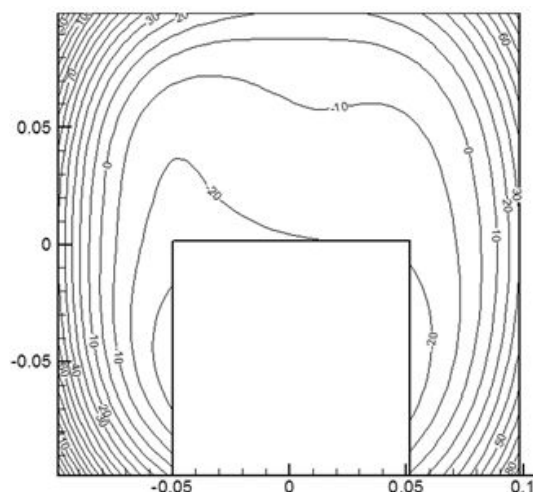
**Рис. 17.** Изолинии  $\sigma^*(\rho, \chi)$

**Fig. 17.** Isolines  $\sigma^*(\rho, \chi)$



**Рис. 18.** Изолинии  $\sigma^*(\rho, \chi)$

**Fig. 18.** Isolines  $\sigma^*(\rho, \chi)$

Рис. 19. Изолинии  $\sigma^*(\rho, \chi)$ Fig. 19. Isolines  $\sigma^*(\rho, \chi)$ Рис. 20. Изолинии  $\sigma^*(\rho, \chi)$ Fig. 20. Isolines  $\sigma^*(\rho, \chi)$ Рис. 21. Изолинии  $\sigma^*(x, y)$ Fig. 21. Isolines  $\sigma^*(x, y)$ Рис. 22. Изолинии  $\sigma^*(x, y)$ Fig. 22. Isolines  $\sigma^*(x, y)$ 

### Заключение

Представленные результаты подтверждают эффективность математически корректной постановки и метода решения интегральных уравнений контактных задач в статических и динамических случаях, для односвязных и многосвязных областей контакта, для штампов сложных форм.

Значительная часть исследовательской работы, начиная с получения аналитических и численных решений задач и заканчивая анализом результатов, была выполнена учениками автора – студентами и аспирантами А.А. Гордеевой, Е.А. Гордеевой, Д.Л. Егоровым, Г.Г. Зиганшиной, С.В. Красновым, О.Е. Кузнецовой, Э.Р. Лотфуллиной, Я.В. Моренко, А.Н. Нимаковым, А.С. Печениным, Д.М. Салаховой, Е.В. Сметаниной, М.А. Точкасовой, Д.Р. Хайрулиным, Р.Р. Хакимзяновым, А.Н. Шишовой при выполнении курсовых, дипломных и диссертационных работ. Автор благодарит их всех за энтузиазм и добросовестность!

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Conflicts of Interest.** The author declares no conflicts of interest.

### Литература

1. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 411 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 228 с.
3. Попов Г.Я. О контактных задачах для оболочек и пластин // Тр. X Всесоюзн. конф. по теор. оболочек и пластин. Кутаиси, 22–29 сент. 1975 г. Тбилиси: Мецниереба, 1975. Т. 1. С. 244–250.
4. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 5. С. 876–883.
5. Блох М.В., Цукров С.Я. О влиянии изменения толщины стенки на осесимметричный контакт тонких цилиндрических оболочек // Прикл. механ. 1974. Т. 10, вып. 4. С. 31–37.
6. Карасев С.Н., Артюхин Ю.П. Влияние поперечного сдвига и обжатия на распределение контактных напряжений // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Вып. 12. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. С. 68–76.
7. Артюхин Ю.П. Одномерные контактные задачи теории оболочек // Изв. АН СССР, МТТ. 1981. № 3. С. 55–65.
8. Артюхин Ю.П. Одномерные контактные задачи для тонкостенных трансверсально-изотропных элементов // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Вып. 13. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. С. 62–82.
9. Кузнецов С.А. Неосесимметричная контактная задача для тонкой пластины, лежащей на упругом основании, при внецентренном положении штампа // Механ. сплошн. сред: тез. докл. Респ. науч.-техн. конф. Набережные Челны, 1982. С. 105.
10. Кузнецов С.А. Решение интегральных уравнений многосвязных контактных задач сведением к краевой задаче // XI Всероссийск. съезд по фундам. пробл. теор. и прикл. механ.: сб. докл. Сост.: Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров. 2015. С. 2145–2147.
11. Егоров Д.Л., Кузнецов С.А. Методика численного решения задач контактного взаимодействия пластин со штампами // Актуализация социально-экономического и естественнонаучного образования в науке и предпринимательстве: Матер. II Международн. студ.-асп. форума. Казань: Отечество, 2009. С. 42–46.
12. Кузнецов С.А., Краснов С.В., Моренко Я.В., Сметанина Е.В., Старожилова О.В. Контактная задача о взаимодействии с жестким телом пластины средней толщины, лежащей на упругом основании // Супервычисления и математическое моделирование. Тр. XVII Международн. конф. / Под ред. Р.М. Шагалиева. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2019. С. 324–329.
13. Точкасова М.А., Кузнецов С.А. Контактная задача взаимодействия пластины и жесткой накладки при гармонических колебаниях // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского: Матер. VII молод. науч. шк.-конф. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2008. Т. 37. С. 111–113.
14. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

15. Коноплев Ю.Г., Кузнецов С.А., Саченков А.А., Точкасова М.А. Исследование контактного взаимодействия прямоугольной пластины с жесткой накладкой при гармонических колебаниях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т. 153, кн. 4. С. 98–111.
16. Кузнецов С.А. Осесимметричный контакт цилиндрической оболочки с жесткой втулкой при наличии износа // Исслед. по теор. пластин и оболочек. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. Вып. 20. С. 191–197.
17. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей // Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа: сб. статей. М.: Наука, 1971. С. 130–140.
18. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1948. 460 с.
19. Cost T.L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis // AIAA J. 1964. V. 2, No 12. <https://doi.org/10.2514/3.2757>. P. 2157–2166.
20. Егоров Д.Л., Кузнецов С.А. Исследование контактного взаимодействия круглых пластин со штампами на основе численно-аналитической методики // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 127–134.

## References

1. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek* [Contact Problems in the Theory of Plates and Shells]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 411 p. (In Russian)
2. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of Ill-Posed Problems Solving]. Moscow, Nauka, 1979. 228 p. (In Russian)
3. Popov G.Ya. On contact problems for shells and plates. *Tr. X Vsesoyuzn. konf. po teorii obolochek i plastin. Kutaisi, 22–29 sent. 1975 g.* [Proc. X All-Union Conf. on Shell and Plate Theory. Kutaisi, September 22–29, 1975]. Vol. 1. Tbilisi, Metsniereba, 1975, pp. 244–250. (In Russian)
4. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. Cylindrical bending of a plate by rigid stamps. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, pp. 841–848. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(75\)90124-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90124-0).
5. Blokh M.V., Tsukrov S.Ya. Effect of changing the wall thickness on the axisymmetric contact between thin cylindrical shells. *Prikl. Mekh.*, 1974, vol. 10, no. 4, pp. 31–37. (In Russian)
6. Karasev S.N., Artyukhin Yu.P. Influence of transverse shear and compression on the distribution of contact stresses. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 12. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1976, pp. 68–76. (In Russian)
7. Artyukhin Yu.P. One-dimensional contact problems in the theory of shells. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Tverd. Tela*, 1981, no. 3, pp. 55–65. (In Russian)
8. Artyukhin Yu.P. One-dimensional contact problems for thin-walled transversely isotropic structural elements. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 13. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1978, pp. 62–82. (In Russian)
9. Kuznetsov S.A. Non-axisymmetric contact problem for a thin plate on an elastic foundation in case of an eccentrically positioned stamp. *Mekhan. sploshn. sred: tez. dokl. Resp. nauch.-tekhn. konf.* [Mechanics of Continuous Media: Proc. Repub. Sci.-Techn. Conf.]. Naberezhnye Chelny, 1982, p. 105. (In Russian)

10. Kuznetsov S.A. Solving integral equations of multiply connected contact problems by reducing them to a boundary value problem. *XI Vserossiisk. s'ezd po fundament. probl. teor. i prikl. mekhan.: sb. dokl.* [Proc. XI All-Russ. Congr. on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Akhmetov D.Yu., Gerasimov A.N., Khaidarov Sh.M. (Compil.). 2015, pp. 2145–2147. (In Russian)
11. Egorov D.L., Kuznetsov S.A. A numerical method of solving contact problems for plates and stamps. *Aktualizatsiya sotsial'no-ekonomicheskogo i estestvennonauchnogo obrazovaniya v nauke i predprinimatel'stve: Mater. II Mezhdunarodn. stud.-asp. foruma* [Actualization of Socio-Economic and Natural Science Education in Science and Entrepreneurship: Proc. II Int. Forum for Students and Postgraduate Students]. Kazan, Otechestvo, 2009, pp. 42–46. (In Russian)
12. Kuznetsov S.A., Krasnov S.V., Morenko Ya.V., Smetanina E.V., Starozholova O.V. A contact problem on the interaction of a moderately thick plate on an elastic foundation with a rigid body. *Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie. Tr. XVII Mezhdunarodn. konf.* [Supercomputing and Mathematical Modeling. Proc. XVII Int. Conf.]. Shagaliev R.M. (Ed.). Sarov, RFYaTs-VNIIEF, 2019, pp. 324–329. (In Russian)
13. Tochkasova M.A., Kuznetsov S.A. A contact problem on the interaction of a plate with a rigid overlay under harmonic vibrations. *Tr. matem. tsentra im. N.I. Lobachevskogo: Mater. VII molod. nauch. shk.-konf.* [Proceedings of the Lobachevskii Mathematical Center: Mater. VII Sch.-Conf. for Young Scientists]. Vol. 37. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 2008, pp. 111–113. (In Russian)
14. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika plastinok i obolochek* [The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. Moscow, Nauka, 1972. 432 p. (In Russian)
15. Konoplev Yu.G., Kuznetsov S.A., Sachenkov A.A., Tochkasova M.A. Investigation of contact interaction of a rectangular plate with a hard cover plate under harmonic vibrations. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2011, vol. 153, no. 4, pp. 98–111. (In Russian)
16. Kuznetsov S.A. Axisymmetric contact between a cylindrical shell with a rigid insert in the presence of wear. In: *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations into the Theory of Plates and Shells]. Vol. 20. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1990, pp. 191–197. (In Russian)
17. Korovchinskii M.V. Local contact of elastic bodies during surface wear. In: *Kontaktnoe vzaimodeistvie tverdykh tel i raschet sil treniya i iznosa: sb. statei* [Contact Interaction of Solids and Calculation of Friction and Wear: A Collection of Articles]. Moscow, Nauka, 1971, pp. 130–140. (In Russian)
18. Timoshenko S.P. *Plastinki i obolochki* [Plates and Shells]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 460 p. (In Russian)
19. Cost T.L. Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis. *AIAA J.*, 1964, vol. 2, no. 12, pp. 2157–2166. <https://doi.org/10.2514/3.2757>.
20. Egorov D.L., Kuznetsov S.A. Investigation of contact interaction of round plates with stamps based on numerical-analytical technique. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2010, vol. 152, no. 4, pp. 127–134. (In Russian)



### Информация об авторах

**Сергей Аркадьевич Кузнецов**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *skuznets@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7201-6664>

### Author Information

**Sergej A. Kuznetsov**, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *skuznets@kpfu.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7201-6664>

Поступила в редакцию 17.06.2025

Принята к публикации 25.08.2025

Received June 17, 2025

Accepted August 25, 2025