

**ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ**

УДК 539.4

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>**Эффективный метод анализа гибких пористых функционально-градиентных наноконических секторных панелей с учетом температурных и электрических полей****Л.А. Калуцкий***Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук,  
г. Новосибирск, Россия**leon199703@gmail.com***Аннотация**

На основе модифицированной моментной теории упругости разработана новая математическая модель состояния пористых функционально-градиентных (ПФГ) конических секторных микро-/нанопластин со свойствами, зависящими от температуры. Метод вариационных итераций применен для решения нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изгиб гибких конических (кольцевых) секторных пластин под действием термомеханической нагрузки. Он позволил получить практически точное решение при существенно меньших затратах машинного времени по сравнению с методами конечных разностей и конечных элементов.

**Ключевые слова:** конические секторные пористые пластины, модифицированная моментная теория упругости, пористые функционально-градиентные материалы, метод вариационных итераций

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00160-П.

---

**Для цитирования:** Калуцкий Л.А. Эффективный метод анализа гибких пористых функционально-градиентных наноконических секторных панелей с учетом температурных и электрических полей // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 689–704. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>.

---

**ORIGINAL ARTICLE**

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>

# An effective method for analyzing flexible porous functionally graded nanoconical sector panels taking into account temperature and electric fields

**L.A. Kalutsky**

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,  
Novosibirsk, Russia*

*leon199703@gmail.com*

## **Abstract**

A new mathematical model of porous functionally graded (PFG) conical sector micro/nanoplates with temperature-dependent properties was developed based on the modified couple stress theory. The variational iteration method was employed to solve the nonlinear differential equations describing the bending of flexible conical (annular) sector plates under thermomechanical loading. The proposed method yielded an almost exact solution while requiring much less computational time compared to the finite difference and finite element methods.

**Keywords:** conical sector porous plates, modified couple stress theory, porous functionally graded materials, variational iteration method

**Acknowledgments.** This study was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00160-P).

---

**For citation:** Kalutsky L.A. An effective method for analyzing flexible porous functionally graded nanoconical sector panels taking into account temperature and electric fields. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 689–704.  
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.689-704>. (In Russian)

---

## **Введение**

Конические (кольцевые) секторные пластины из функционально-градиентных материалов находят применение в различных инженерных конструкциях. Секторные пластины применяются в авиации, космонавтике, строительстве, приборостроении, электро- и машиностроении в качестве крепежных элементов для лопаток и роторов турбин, оптических элементов, а также для соединения трубопроводов и крепления обшивки летательных аппаратов. Применение функционально-градиентных материалов (ФГМ) обеспечивает решение сложных инженерных задач за счет плавного изменения свойств материала.

Метод вариационных итераций (МВИ) использован в линейной постановке в исследованиях [1–5] для анализа состояния конических секторных пластин. В результате применения МВИ управляющее уравнение преобразуется в два отдельных обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ) относительно полярных координат  $r$  и  $\theta$ . Решения, полученные МВИ, хорошо согласуются с результатами, полученными методом конечных элементов с помощью ANSYS, как для функции прогибов, так и для напряжений [1]. Установлено, что предложенный метод применим для получения практически точных решений для других типов конструкций, таких как круговые цилиндры [4].

Исследование конических (кольцевых) пластин с использованием метода конечных элементов и его модификаций проведено в работах [6–11]. В них выполнен анализ геометрических параметров, количества элементов и типов распределения сетки конических секторных пластин. Метод конечных элементов применялся в рамках анализа конических (кольцевых) пластин с периодическими радиальными сквозными трещинами, параллельными радиальному направлению. Для этой цели был рассмотрен изопараметрический элемент секторного типа, имеющий четыре узла [6]. В работе [7] также исследовано влияние термомеханической нагрузки на НДС секторных пластин. Условия механической нагрузки включают равномерное осевое, окружное и двухосное давление, а тепловая нагрузка задана как равномерное повышение температуры по всему сектору. Было также исследовано влияние различных параметров, таких как размеры сектора, направления механической нагрузки, углы волокон каждого слоя пластины, на термомеханический изгиб секторной пластины. При этом в работах [1–11] не рассмотрены размерные микро- и наноэффекты.

С использованием аналитического метода, основанного на технике возмущения и рядах Фурье, были применены секторные функционально-градиентные методы анализа поведения пластин в линейной постановке [12–15]. На основе ряда Фурье в [12] исследованы сжатие кольцевой круговой секторной пластины, размеры отверстия, направления механической нагрузки и углы волокон каждого слоя на термомеханическую потерю устойчивости. В работах [14, 15] изучены механические свойства функционально-градиентных пористых структур.

В настоящей работе впервые построена новая математическая модель и проведено исследование напряженно-деформированного состояния конических секторных пластин, учитывающее совместное влияние пористости, функциональной градиентности, температурного поля и размерных эффектов. Для анализа предложенной модели разработан высокоточный вычислительно эффективный метод вариационных итераций [16–19]. Проведенный с его помощью комплекс вычислительных экспериментов позволил установить степень и характер влияния каждого из названных факторов на НДС пластин.

## 1. Постановка задачи и математическая модель

Исследуем напряженно-деформированное состояние (НДС) конической секторной пластины постоянной толщины  $h$  с углом сектора  $\alpha$  и радиусом выреза  $R$  при действии поперечной нагрузки  $q(r, \theta)$  с использованием полярной системы координат (рис. 1).

Управляющие уравнения выведем с учетом следующих гипотез:

- 1) гипотеза Кирхгофа;
- 2) размерные эффекты учтены в рамках модифицированной моментной теории упругости [20];

3) свойства материала зависят от температуры  $T$  и изменяются по толщине. Приняты три типа распределения пористых функционально-градиентных (ПФГ) материалов (ПФГ-У, ПФГ-Х, ПФГ-О). Модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и коэффициент температурного расширения  $\alpha$  являются функциями  $z$ .

1) ПФГ-У – поры распределены равномерно по всей пластине:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \frac{\Gamma}{2} (P_m + P_c). \quad (1)$$

2) ПФГ-Х – максимальное распределение пор вблизи середины поверхности секторной пластины:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \Gamma (P_m + P_c) \left( 1 - \frac{2|z|}{h} \right).$$

3) ПФГ-О – уменьшение концентрации пор от срединной поверхности к верхней и нижней граням секторной пластины:

$$P(z) = P_m V_m + P_c V_c - \Gamma (P_m + P_c) \left( \frac{2|z|}{h} \right),$$

где  $p$  – функционально-градиентный индекс, отвечающий за соотношения объемных долей материала;  $\Gamma$  – показатель пористости материала;  $E_m$  и  $E_c$  – модули Юнга;  $\nu_m$  и  $\nu_c$  – коэффициенты Пуассона;  $\alpha_m$  и  $\alpha_c$  – коэффициенты температурного расширения металлической и керамической фаз материала соответственно.

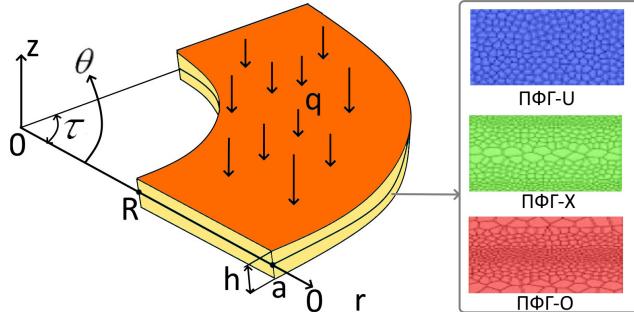


Рис. 1. Расчетная схема конической секторной пластины

Fig. 1. Schematic representation of a conical sector plate

На основе принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W) dt = 0, \quad (2)$$

где  $U$  – энергия упругой деформации конической секторной пластины,  $K$  – кинетическая энергия и  $W$  – работа внешних сил, получена система нелинейных дифференциальных уравнений

$$L_1(w, F) = \nabla^4 w - L(w, F) - \frac{\partial^2}{\partial r^2} (M_T + M_E) - q = 0, \quad (3)$$

$$L_2(w, F) = \nabla^4 F + \frac{1}{2} L(w, w) = 0, \quad (4)$$

где  $w$  – функция прогиба;  $F$  – функция усилий;  $M_T, N_T, P_T$  – температурные моменты;  $M_E$  – сумма электрических сил на единицу площади [21];  $\nabla^4$  – оператор Лапласа;  $l_1$  и  $l_2$  – размерно-зависимые параметры ( $l = 0$  для классической теории). Выведенная система уравнений описывает НДС гибких конических секторных ПФГ пластин, граничные и начальные условия с учетом произвольно температурного поля  $T(r, \theta, z)$ . Уравнения (3) приведены в безразмерном виде для статических задач.

Границные условия конической секторной пластины опишем следующими выражениями:

- шарнирное опирание на гибкие нерастяжимые ребра по контуру пластины

$$w = 0, \quad M_r = 0, \quad N_r = 0, \quad N_{r\theta} = 0; \quad (5)$$

- защемление на гибкие нерастяжимые по контуру пластины

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad N_r = 0, \quad N_{r\theta} = 0. \quad (6)$$

Уравнения (3) и (4) с граничными условиями (5) и (6) приведены к безразмерному виду согласно соотношениям

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{F} = \frac{F}{E_0 h^3}, \quad \bar{q} = \frac{qa^4}{E_0 h^4},$$

черточки над безразмерными параметрами для простоты опущены. Выведенные уравнения позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния гибких размерно-зависимых конических секторных ПФГ пластин, свойства которых зависят от температуры.

Для исследования изгиба конических секторных пластин используем высокоточный метод вариационных итераций, обладающий высоким быстродействием.

## 2. Методы решения

В основе метода вариационных итераций (МВИ) лежит идея метода Бубнова–Галеркина (МБГ). В отличие от МБГ, уравнения сводятся не к системе алгебраических уравнений, а к системе ОДУ. Решение системы уравнений в частных производных в операторном виде  $L_i(w, F) = 0$  ищем в виде суммы произведений функций  $w(r, \theta) = \sum_{i=1}^n R_i(r)\Theta_i(\theta)$ ,  $F(r, \theta) = \sum_{i=1}^n \underline{R}_i(r)\underline{\Theta}_i(\theta)$ . Применение процедуры Бубнова–Галеркина по координате  $\theta$  позволяет получить систему ОДУ

$$\int_0^1 \left[ \left[ L_i \left( \sum_{k=1}^N R_k(r)\Theta_k(\theta), \sum_{k=1}^N \overline{R}_k(r)\overline{\Theta}_k(\theta) \right) - q(r, \theta) \right] R_i(r) \right] dr = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

которую решим методом конечных разностей с дискретизацией координаты  $r$  на  $n$  отрезков. Для численного решения нелинейной системы алгебраических уравнений применим метод Ньютона–Рафсона. Последующее использование процедуры Галеркина по координате  $r$  приводит к итерационному алгоритму в рамках МВИ. Подробное описание данной процедуры приведено в работах [17, 18].

Чтобы гарантировать надежность и точность получаемых решений, описывающих НДС конических секторных пластин, необходимо решить рассматриваемую задачу различными методами. Нами проведен сравнительный анализ решений систем уравнений

в частных производных, полученных методами вариационных итераций (МВИ), конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ) для линейного случая ( $F = 0$ ) для граничных условий (2).

Решение МКЭ было получено с помощью программного обеспечения ANSYS [1]. В табл. 1 приведены сравнения безразмерного прогиба в центре пластины, полученные вышеописанными методами. Решения были получены для конических секторных пластин при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки  $q_0$  с радиусом выреза  $R = 0.2$  и углом  $\alpha = \pi/2$ .

**Табл. 1.** Сравнение решений МВИ, МКР и МКЭ

**Table 1.** Comparison of the solutions obtained by the variational iteration method, the finite difference method, and the finite element method

Метод	$w_{\max}$	Погрешность относительно МВИ2	Время решения
МКР, $n = 25$	0.2823	0.46 %	15.6 с
МКЭ (ANSYS) [1]	0.2840	0.14 %	-
МВИ, $n = 25$	0.2834	0.07 %	0.04 с
МВИ2, $n = 25$	0.2836	0.00 %	0.12 с

Результаты, полученные методами конечных элементов, конечных разностей и вариационных итераций, демонстрируют хорошее согласование: различие в результатах составляет менее 1% (см. табл. 1). При этом время решения для МКР превышает время расчета ВМИ более чем в сто раз. Расчеты проводились на процессоре с тактовой частотой 3 ГГц. Это показывает эффективность метода вариационных итераций как с точки зрения точности, так и быстродействия.

### 3. Исследование пористых функционально-градиентных конических секторных пластин при решении нелинейных уравнений с учетом температурного поля, когда свойства материалов $P(T)$ зависят от температуры

Решим задачу о нагружении ПФГ конических секторных пластин, находящихся в температурном поле, свойства которых зависят от температуры и изменяются по толщине  $P(T)$ . Анализу подвергнуты секторные пластины с тремя типами распределения пор (ПФГ-У, ПФГ-Х, ПФГ-О), функционально-градиентный материал пластин состоит из керамики и металла при действии равномерно распределенного температурного поля  $T_0$ . Параметры материала в зависимости от температуры секторной пластины определены многочленом

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3).$$

Параметры материалов секторных пластин  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  приведены в табл. 2.

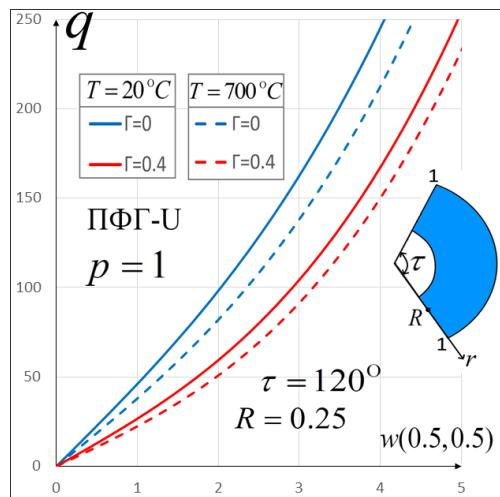
**Табл. 2.** Параметры композита для керамики и металла**Table 2.** Composite parameters for ceramic and metal

Параметр	Материал	$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$
$E$ (Па)	$Al_2O_3$	349.55e9	0	-3.853e-4	4.027e-7
	$SUS304$	201.04e9	0	3.079e-4	-6.534e-7
$\nu$	$Al_2O_3$	0.24	0	0	0
	$SUS304$	0.3262	0	-2.002e-4	3.797e-7
$\alpha$ (1/K)	$Al_2O_3$	6.8269e-6	0	1.838e-4	0
	$SUS304$	12.330e-6	0	8.086e-4	0

Напряженно-деформированное состояние секторных ПФГ пластин существенно зависит от пористости материала и температуры. Поэтому при анализе НДС конических секторных пластин необходимо учитывать объем и характер распределения пор. Также критически важно учитывать влияние температурного поля, которое существенно оказывается на свойствах материалов пластины, таких как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения.

**3.1. Анализ влияния показателя пористости на изгиб конических секторных пластин.** На секторные пластины действует термомеханическая нагрузка;  $q_0$  – равномерная поперечная нагрузка. На рис. 2 представлена зависимость  $w_{\max}(q_0)$  для секторной пластины для типа пор ПФГ-U (1) при  $p = 1$  с радиусом выреза  $R = 0.2$  и углом сектора  $\alpha = \pi/2$ . Дано сопоставление кривых для конических секторных пластин при действии постоянного температурного поля интенсивности  $T_0 = 300 K$ .

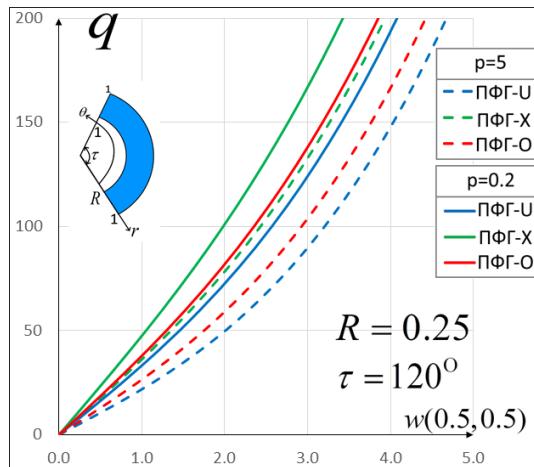
Увеличение показателя пористости приводит к существенному снижению несущей способности конических пластин. Увеличение температуры конических пластин приводит к значительному увеличению прогибов независимо от показателя пористости пластин и интенсивности нагрузки  $q_0$  (рис. 2).



**Рис. 2.** Зависимость  $w_{\max}(q_0)$  секторной пластины ПФГ-U для  $\Gamma = 0.1$  при действии температуры  $T_0 = 300 K$

**Fig. 2.** Dependency  $w_{\max}(q_0)$  of the PFG-U sector plate for  $\Gamma = 0.1$  at a temperature  $T_0 = 300 K$

**3.2. Исследование типов распределения пористости материала и влияние параметра  $p$  на НДС конических секторных ПФГ пластин.** Функционально-градиентный индекс определяет соотношение материалов в конической секторной пластине. Исследованы пластины для трех типов распределения пор (ПФГ-У, ПФГ-Х, ПФГ-О). Построены зависимости  $w_{\max}(q_0)$  для секторной пластины при  $\Gamma = 0.2$ . Представлено сравнение графиков для  $p = 0.5$  (сплошные линии),  $p = 2$  (пунктирные линии). Цвет кривых задан в соответствии с типом распределения пор (рис. 3).



**Рис. 3.** Зависимость  $w_{\max}(q_0)$  секторной ПФГ пластины для трех типов пор (U, X, O) при  $\Gamma = 0.2$   
**Fig. 3.** Dependency  $w_{\max}(q_0)$  of the PFG sector plate for three types of pores (U, X, O) at  $\Gamma = 0.2$

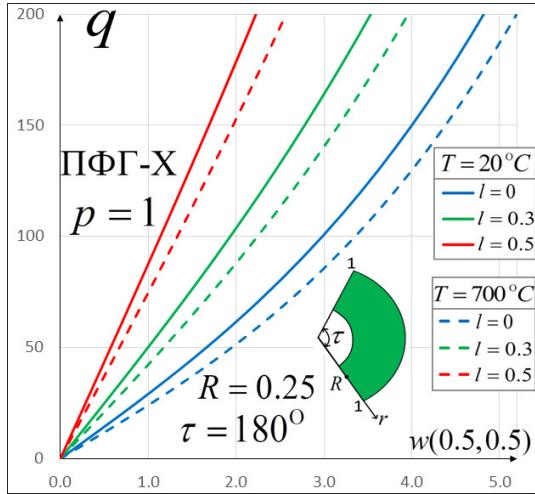
Результаты, представленные на рис. 3, показывают, что конические секторные пластины с распределением пор ПФГ-Х (максимальным объемом пор, сконцентрированным в центре пластины) обладают наибольшей несущей способностью из трех рассмотренных типов. Увеличение функционально-градиентного индекса приводит к увеличению доли стали SUS304 в материале секторной пластины и снижает несущую способность для всех значений поперечной нагрузки.

Свойства микро-/наномасштабных объектов существенно отличаются от макроскопических. Согласно модифицированной моментной теории упругости для учета микро-/nanoэффектов введем размерно-зависимый параметр  $l$ ; для классической теории упругости  $l = 0$ .

Исследуем НДС конических секторных пластин ПФГ-Х в зависимости от значения размерно-зависимого параметра  $l$ . На рис. 4 приведены зависимости  $w_{\max}(q_0)$  при действии равномерного температурного поля  $T_0 = 300 K$  (пунктирные линии),  $T_0 = 600 K$  (сплошные линии) для параметров  $\Gamma = 0.2$ ,  $p = 1$ . Цвет кривых, изображенных на графике, соответствует значениям размерно-зависимого параметра  $l$ .

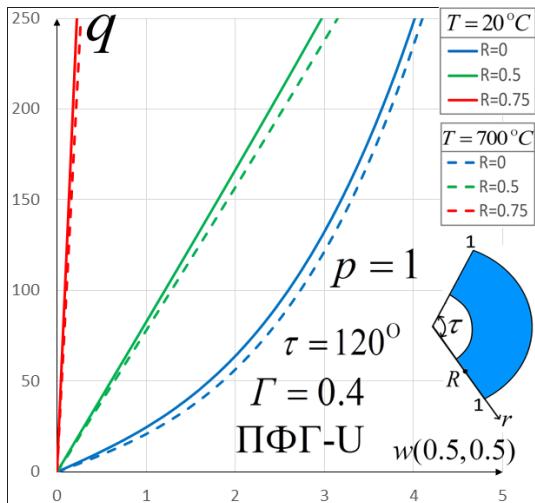
Увеличение размерно-зависимого параметра приводит к значительному снижению несущей способности конических секторных ПФГ пластин. При этом увеличение температуры приводит к увеличению прогибов не только для макропластин, но и для секторных микро-/нанопластин (рис. 4).

С целью анализа влияния геометрических параметров (радиуса выреза  $R$  и угла сектора  $\alpha$ ) на изгиб конических секторных пластин были проведены вычислительные эксперименты.



**Рис. 4.** Зависимость  $w_{\max}(q_0)$  секторной пластины ПФГ-Х для  $l = 0, 1, 2$  при действии температуры  $T_0 = 300\text{ K}, 600\text{ K}$

**Fig. 4.** Dependency  $w_{\max}(q_0)$  of the PFG-X sector plate for  $l = 0, 1, 2$  at a temperature  $T_0 = 300\text{ K}, 600\text{ K}$



**Рис. 5.** Зависимость  $w_{\max}(q_0)$  секторной пластины ПФГ-У для различных  $R$  при действии температуры  $T_0 = 300\text{ K}, 600\text{ K}$

**Fig. 5.** Dependency  $w_{\max}(q_0)$  of the PFG-U sector plate for various  $R$  at a temperature  $T_0 = 300\text{ K}, 600\text{ K}$

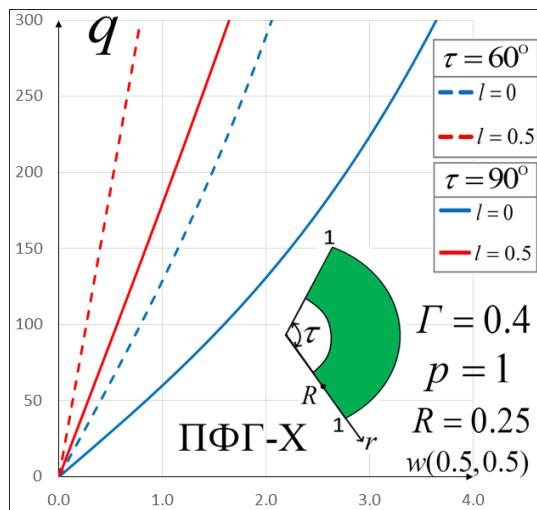
**3.3. Исследование радиуса выреза пластины.** На рис. 5 представлена зависимость  $w_{\max}(q_0)$  для конической секторной пластины U-PFGM ( $\Gamma = 0.2$ ) при различных значениях радиуса выреза  $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$ . Кривые для температурного поля  $T_0 = 300\text{ K}$  изображены пунктиром, для  $T_0 = 600\text{ K}$  – сплошными линиями.

Анализ графика на рис. 5 показал, что увеличение радиуса выреза конической секторной пластины от  $R = 0$  до  $R = 0.75$  приводит к значительному увеличению жесткости ПФГ пластин. Повышение температуры от  $T_0 = 300\text{ K}$  до  $T_0 = 600\text{ K}$  приводит к увеличению прогибов на 3–5 %.

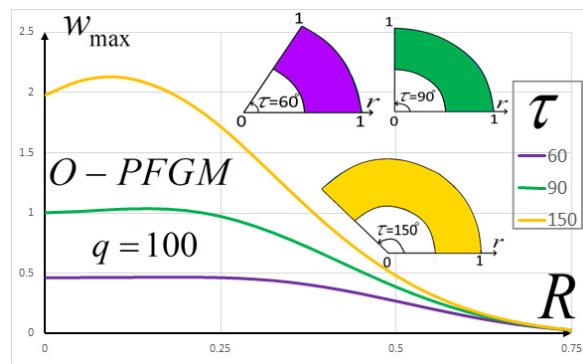
**3.4. Исследование угла секторной пластины и размерно-зависимого параметра  $l$ .** На рис. 6 показана зависимость  $w_{\max}(q_0)$  для конической секторной пластины ПФГ-У ( $\Gamma = 0.2$ ) при различных значениях угла  $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ . Кривые для случаев отсутствия учета размерной зависимости ( $l = 0$ ) и для нанопластин ( $l = 2$ ) изображены сплошными линиями.

Анализ данных, приведенных на рис. 6, показал, что увеличение угла секторной пластины оказывает существенное влияние на НДС как макро-, так и нанопластин и приводит к снижению их несущей способности. Увеличение размерно-зависимого параметра  $l$  приводит к уменьшению прогиба для всех рассматриваемых значений угла  $\alpha$ .

Проанализируем влияние радиуса выреза  $R$  и угла сектора пластины  $\alpha$  на изгибание пластин. На рис. 7 представлены графики зависимости значения  $w_{\max}$  в зависимости от радиуса выреза пластины  $R$  для значений угла  $\alpha = \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ . На рис. 8 показаны графики зависимости  $w_{\max}$  от угла сектора  $\alpha$  для радиуса выреза  $R = 0.2$ . Решения получены методом вариационных итераций для  $n = 35$  при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки.

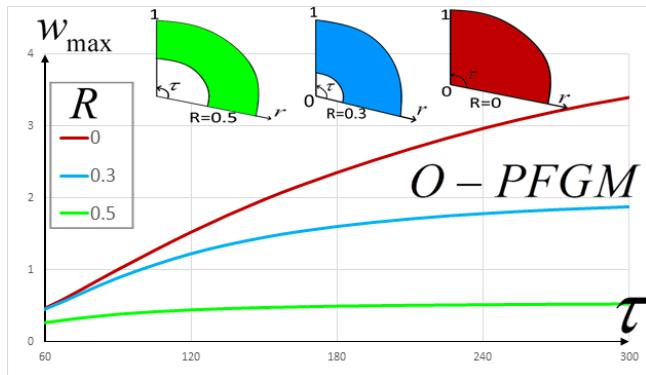


**Рис. 6.** Зависимость  $w_{\max}(q_0)$  секторной пластины ПФГ-У для различных  $\alpha$  при  $l = 0, 2$   
**Fig. 6.** Dependency  $w_{\max}(q_0)$  of the PFG-U sector plate for various  $\alpha$  at  $l = 0, 2$

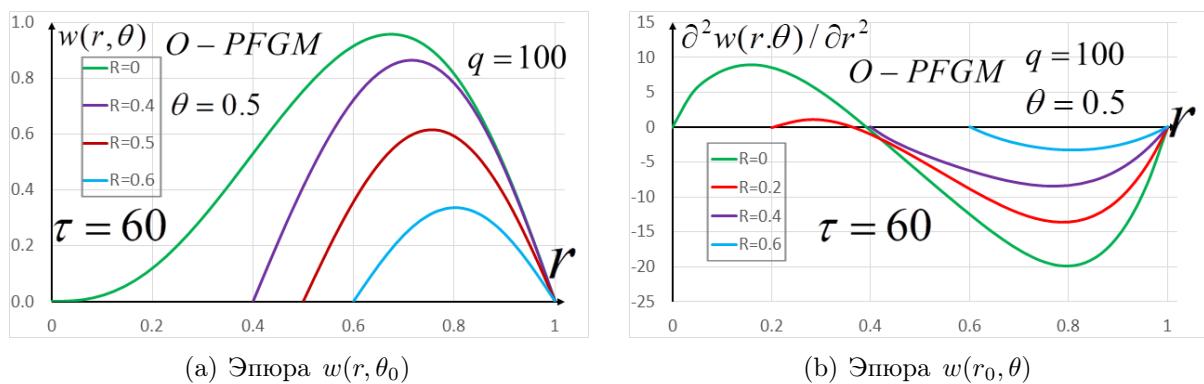


**Рис. 7.** Зависимость максимального прогиба  $w_{\max}(R)$  для шарнирно опертой пластины (5) для различных  $\alpha$

**Fig. 7.** Dependency of the maximum deflection  $w_{\max}(R)$  for the pivotally supported plate (5) at various  $\alpha$



**Рис. 8.** Зависимость максимального прогиба  $w_{\max}(\alpha)$  шарнирно опертой пластины (5)  
**Fig. 8.** Dependency of the maximum deflection  $w_{\max}(\alpha)$  for the pivotally supported plate (5)



**Рис. 9.** Эпюры: (а)  $w(r, \theta_0)$ , (б)  $w(r_0, \theta)$  шарнирно опертой секторной пластины (5) для радиуса выреза  $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$

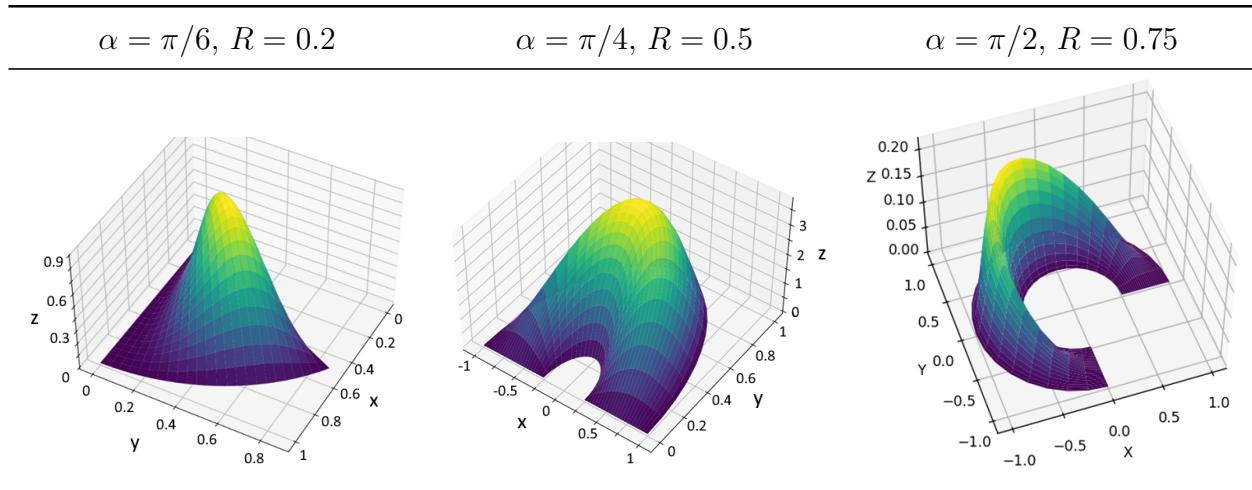
**Fig. 9.** Epures: (a)  $w(r, \theta_0)$ , (b)  $w(r_0, \theta)$  of the pivotally supported sector plate (5) for the cutout radius  $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$

Построены эпюры функций прогиба секторной пластины  $w(r, \theta)$  для секторной пластины с граничными условиями (5). На пластину действует поперечная нагрузка  $q_0 = 100$  для различных значений радиуса выреза  $R = 0, 0.2, 0.5, 0.75$ . Эпюры  $w(r, \theta_0)$ ,  $w(r_0, \theta)$  построены для угла сектора  $\alpha = \pi/2$ . Цвет кривых на рис. 9 задан в соответствии с выбором значения радиуса  $R$ .

Анализ результатов, представленных на рис. 5–9, показал, что увеличение угла  $\alpha$  и радиуса выреза пластины  $R$  приводит к уменьшению несущей способности. При этом влияние изменения параметра  $\alpha$  снижается с увеличением параметра  $R$ .

Построены поверхности изгиба  $w(r, \theta)$  для секторной макроразмерной пластины для различных значений углов сектора пластины  $\alpha$  и радиуса выреза  $R$  при действии равномерно распределенной нагрузки (табл. 3).

Результаты, приведенные на рис. 7–9 и в табл. 3, показывают, что характер изгиба секторных пластин  $w(r, \theta)$  существенно изменяется с увеличением параметра  $\alpha$ . Отметим, что влияние параметра  $R$  также уменьшается с ростом  $\alpha$  (рис. 7–9). Таким образом, варьирование геометрических параметров пластины – радиуса выреза и угла сектора – позволяет проектировать конструкции с улучшенными прочностными характеристиками.

**Табл. 3.** Поверхности прогиба конической секторной пластины**Table 3.** Deflection surfaces of the conical sector plate

### Заключение

1) Построена математическая модель гибких ПФГ конических секторных пластин, свойства материала которых зависят от температуры. Метод вариационных итераций позволил найти решения полученных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с высокой точностью и минимальными затратами машинного времени.

2) Распределение и величина объема пор существенно влияет на изгиб гибких ПФГ конических секторных пластин. Пластины ПФГ-Х обладают наибольшей несущей способностью из рассматриваемых. Увеличение параметра  $\Gamma$  приводит к существенному увеличению прогиба гибких секторных ПФГ пластин. Соотношение материалов в ПФГ секторных пластин оказывает значительное влияние на несущую способность, а увеличение функционально-градиентного индекса приводит к увеличению доли стали в композите и уменьшению несущей способности.

3) Увеличение температуры конических секторах пластин от  $T_0 = 300 K$  до  $T_0 = 600 K$  приводит к увеличению максимального значения прогиба  $w_{\max}$  на 3–5 % как для нано-, так и для макроразмерных секторных пластин.

4) Геометрические параметры секторных пластин оказывают существенное влияние на НДС конических секторных ПФГ пластин. Увеличение угла приводит к росту прогибов, причем эта зависимость существенно изменяется с изменением радиуса выреза  $R$ . В свою очередь, увеличение радиуса выреза от  $R = 0$  до  $R = 0.75$  приводит к значительному повышению несущей способности конических секторных пластин.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Conflicts of Interest.** The author declares no conflicts of interest.

## Литература

1. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Bigdeli K. Bending analysis of moderately thick functionally graded conical panels // Compos. Struct. 2011. V. 93, No 5. P. 1376–1384. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.10.020>.
2. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Mohammadi M. Extended Kantorovich method for static analysis of moderately thick functionally graded sector plates // Math. Comput. Simul. 2012. V. 86. P. 118–130. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.029>.
3. Fallah F., Khakbaz A. On an extended Kantorovich method for the mechanical behavior of functionally graded solid/annular sector plates with various boundary conditions // Acta Mech. 2017. V. 228, No 7. P. 2655–2674. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1851-2>.
4. Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V. Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method // Thin-Walled Struct. 2007. V. 45, No 12. P. 983–990. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.07.012>.
5. Aghdam M.M., Babaei M.H. Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using extended Kantorovich method // Proc. 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology. Stirlingshire: Civil-Comp Press, 2006. Art. 159. <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>.
6. Demir A., Mermertas V. A study on annular plates with radial through cracks by means of sector type element // J. Sound Vib. 2007. V. 300, Nos 3–5. P. 466–478. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.057>.
7. Shaterzadeh A., Behzad H., Shariyat M. Stability analysis of composite perforated annular sector plates under thermomechanical loading by finite element method // Int. J. Struct. Stab. Dyn. 2018. V. 18, No 7. Art. 1850100. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501006>.
8. Khan A.H., Patel B.P. Nonlinear periodic response of bimodular laminated composite annular sector plates // Composites, Part B. 2019. V. 169. P. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.061>.
9. Demir Ç., Ersoy H., Mercan K., Civalek Ö. Free vibration analysis of annular sector plates via conical shell equations // Curved Layered Struct. 2017. V. 4, No 1. P. 146–157. <https://doi.org/10.1515/cls-2017-0011>.
10. Babaei M., Asemi K., Kiarasi F. Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method // Mech. Based Des. Struct. Mach. 2023. V. 51, No 3. P. 1272–1296. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1864401>.
11. Xia L., Wang R., Chen W., Asemi K., Tounsi A. The finite element method for dynamics of FG porous truncated conical panels reinforced with graphene platelets based on the 3-D elasticity // Adv. Nano Res. 2023. V. 14, No 4. P. 375–389. <https://doi.org/10.12989/anr.2023.14.4.375>.
12. Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour S.R. An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates // Mater. Des. 2009. V. 30, No 9. P. 3679–3685. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.011>.
13. Alavi S.H., Eipakchi H. An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates // Mech. Adv. Mater. Struct. 2022. V. 29, No 23. P. 3372–3386. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896821>.

14. Afshari H., Adab N. Size-dependent buckling and vibration analyses of GNP reinforced microplates based on the quasi-3D sinusoidal shear deformation theory // Mech. Based Des. Struct. Mach. 2022. V. 50, No 1. P. 184–205. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1713158>.
15. Zheng J., Zhang C., Khan A., Sebaey T.A., Farouk N. On the asymmetric thermal stability of FGM annular plates reinforced with graphene nanoplatelets // Eng. Comput. 2022. V. 38, Suppl. 5. P. 4569–4581. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01463-y>.
16. Tahan N., Pavlovic M.N., Kotsovos M.D. Annular sector plates under in-plane loading: General symbolic solution and its application to the collinear compression case // J. Strain Anal. Eng. Des. 2004. V. 39, No 3. P. 299–313. <https://doi.org/10.1243/030932404323042722>.
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Jr., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Computing static behavior of flexible rectangular von Kármán plates in fast and reliable way // Int. J. Non-Linear Mech. 2022. V. 146. Art. 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>.
18. Krysko V.A., Jr., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates // Comput. Math. Appl. 2023. V. 133. P. 61–84. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>.
19. Крысько А.В., Калуцкий Л.А., Захарова А.Н., Крысько В.А. Математическое моделирование пористых геометрически нелинейных металлических нанопластин с учетом влажности // Изв. ТПУ. 2023. Т. 334, № 9. С. 36–48.
20. Krysko A.V., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. Thin-Walled Structures. 2024. V. 196. 111512. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>.
21. Karimipour I., Beni Y.T., Zeighampour H. Nonlinear size-dependent pull-in instability and stress analysis of thin plate actuator based on enhanced continuum theories including nonlinear effects and surface energy // Microsyst. Technol. 2018. V. 24, No 4. P. 1811–1839. <https://doi.org/10.1007/s00542-017-3540-4>.

## References

1. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Bigdeli K. Bending analysis of moderately thick functionally graded conical panels. *Compos. Struct.*, 2011, vol. 93, no. 5, pp. 1376–1384. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.10.020>.
2. Aghdam M.M., Shahmansouri N., Mohammadi M. Extended Kantorovich method for static analysis of moderately thick functionally graded sector plates. *Math. Comput. Simul.*, 2012, vol. 86, pp. 118–130. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2010.07.029>.
3. Fallah F., Khakbaz A. On an extended Kantorovich method for the mechanical behavior of functionally graded solid/annular sector plates with various boundary conditions. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, no. 7, pp. 2655–2674. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1851-2>.
4. Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V. Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method. *Thin-Walled Struct.*, 2007, vol. 45, no. 12, pp. 983–990. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.07.012>.

5. Aghdam M.M., Babaei M.H. Bending analysis of curve-sided quadrilateral thin plates using extended Kantorovich method. *Proc. 8th Int. Conf. on Computational Structures Technology*. Stirlingshire, Civil-Comp Press, 2006, art. 159. <http://dx.doi.org/10.4203/ccp.83.159>.
6. Demir A., Mermertaş V. A study on annular plates with radial through cracks by means of sector type element. *J. Sound Vib.*, 2007, vol. 300, nos. 3–5, pp. 466–478. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.03.057>.
7. Shaterzadeh A., Behzad H., Shariyat M. Stability analysis of composite perforated annular sector plates under thermomechanical loading by finite element method. *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, 2018, vol. 18, no. 7, art. 1850100. <https://doi.org/10.1142/S0219455418501006>.
8. Khan A.H., Patel B.P. Nonlinear periodic response of bimodular laminated composite annular sector plates. *Composites, Part B*, 2019, vol. 169, pp. 96–108. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.03.061>.
9. Demir Ç., Ersoy H., Mercan K., Civalek Ö. Free vibration analysis of annular sector plates via conical shell equations. *Curved Layered Struct.*, 2017, vol. 4, no. 1, pp. 146–157. <https://doi.org/10.1515/cls-2017-0011>.
10. Babaei M., Asemi K., Kiarasi F. Static response and free-vibration analysis of a functionally graded annular elliptical sector plate made of saturated porous material based on 3D finite element method. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2023, vol. 51, no. 3, pp. 1272–1296. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1864401>.
11. Xia L., Wang R., Chen W., Asemi K., Tounsi A. The finite element method for dynamics of FG porous truncated conical panels reinforced with graphene platelets based on the 3-D elasticity. *Adv. Nano Res.*, 2023, vol. 14, no. 4, pp. 375–389. <https://doi.org/10.12989/.2023.14.4.375>.
12. Jomehzadeh E., Saidi A.R., Atashipour S.R. An analytical approach for stress analysis of functionally graded annular sector plates. *Mater. Des.*, 2009, vol. 30, no. 9, pp. 3679–3685. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2009.02.011>.
13. Alavi S.H., Eipakchi H. An analytical approach for dynamic response of viscoelastic annular sector plates. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, 2022, vol. 29, no. 23, pp. 3372–3386. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896821>.
14. Afshari H., Adab N. Size-dependent buckling and vibration analyses of GNP reinforced microplates based on the quasi-3D sinusoidal shear deformation theory. *Mech. Based Des. Struct. Mach.*, 2022, vol. 50, no. 1, pp. 184–205. <https://doi.org/10.1080/15397734.2020.1713158>.
15. Zheng J., Zhang C., Khan A., Sebaey T.A., Farouk N. On the asymmetric thermal stability of FGM annular plates reinforced with graphene nanoplatelets. *Eng. Comput.*, 2022, vol. 38, suppl. 5, pp. 4569–4581. <https://doi.org/10.1007/s00366-021-01463-y>.
16. Tahan N., Pavlovic M.N., Kotsovos M.D. Annular sector plates under in-plane loading: General symbolic solution and its application to the collinear compression case. *J. Strain Anal. Eng. Des.*, 2004, vol. 39, no. 3, pp. 299–313. <https://doi.org/10.1243/030932404323042722>.
17. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Jr., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Computing static behavior of flexible rectangular von Kármán plates in fast and reliable way. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2022, vol. 146, art. 104162. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.104162>.

18. Krysko V.A., Jr., Awrejcewicz J., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Quantification of various reduced order modelling computational methods to study deflection of size-dependent plates. *Comput. Math. Appl.*, 2023, vol. 133, pp. 61–84. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2023.01.004>.
19. Krysko A., Kalutsky L., Zakharova A., Krysko V. Mathematical modeling of porous geometrically nonlinear metal nanoplates taking into account moisture. *Bull. Tomsk Polytech. Univ. Geo Assets Eng.*, 2023, vol. 334, no. 9, pp. 36–48. (In Russian)
20. Krysko A.V., Kalutsky L.A., Krysko V.A. Stress-strain state of a porous flexible rectangular FGM size-dependent plate subjected to different types of transverse loading: Analysis and numerical solution using several alternative methods. *Thin-Walled Struct.*, 2024, vol. 196, art. 111512. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.111512>.
21. Karimipour I., Beni Y.T., Zeighampour H. Nonlinear size-dependent pull-in instability and stress analysis of thin plate actuator based on enhanced continuum theories including nonlinear effects and surface energy. *Microsyst. Technol.*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 1811–1839. <https://doi.org/10.1007/s00542-017-3540-4>.

### Информация об авторах

**Леонид Александрович Калуцкий**, младший научный сотрудник, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук

E-mail: [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>

### Author Information

**Leonid A. Kalutsky**, Junior Researcher, Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences

E-mail: [leon199703@gmail.com](mailto:leon199703@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3335-4975>

Поступила в редакцию 27.08.2025

Принята к публикации 3.10.2025

Received August 27, 2025

Accepted October 3, 2025