

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.5

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>

Учет несовершенства вертикальных скважин в двумерной модели пласта

И.В. Еремин¹ ✉, Д.Р. Салимьянова^{1,2}, К.А. Поташев¹¹Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия²Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия✉ ieremin726@gmail.com

Аннотация

Рассмотрен вопрос о возможности учета несовершенства вертикальных скважин по степени вскрытия пласта в двумерной численной модели фильтрации, осредненной по высоте неоднородного коллектора. Для верификационного моделирования на прямоугольной сетке конечных объемов использован специализированный пакет MATLAB Reservoir Simulation Toolbox с открытым исходным кодом. В осредненной двумерной модели скважины моделируются точечными источниками с коэффициентами продуктивности, вычисляемыми через радиус скважин. Учет несовершенства скважин сведен к определению их эффективного радиуса. Для этого в работе использованы известные аналитические методы и метод локального численного апскейлинга радиуса скважины в ее призабойной зоне, который может быть использован как относительно простой инструмент при построении двумерной модели пласта. На основе сравнения двумерного и трехмерного численных решений задачи взаимодействия скважин показано существенное превосходство метода локального апскейлинга по сравнению с аналитическими моделями.

Ключевые слова: нефтяной пласт, гидродинамическое моделирование, осреднение по высоте пласта, двумерная фильтрационная модель, несовершенные скважины, продуктивность скважин, эффективный радиус скважин, взаимодействие скважин, линии тока

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030») и при финансовой поддержке Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» в рамках государственного задания.

Для цитирования: Еремин И.В., Салимьянова Д.Р., Поташев К.А. Учет несовершенства вертикальных скважин в двумерной модели пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 655–674. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>

Accounting for vertical well imperfection in a two-dimensional reservoir model

I.V. Eremin¹ ✉, D.R. Salimyanova^{1,2}, K.A. Potashev¹¹Kazan Federal University, Kazan, Russia²National Research Centre “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia✉ ieremin726@gmail.com

Abstract

In this study, a methodology is proposed to account for vertical well imperfection, depending on the degree of reservoir penetration, in a two-dimensional vertically averaged numerical flow model of a heterogeneous reservoir. Verification modeling is performed on a rectangular finite-volume grid using the open-source MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). In the averaged two-dimensional model, wells are represented as point sources with productivity indices calculated from the wellbore radius. Accounting for well imperfection is reduced to determining the effective wellbore radius by established analytical methods and local numerical upscaling of the wellbore radius in the near-wellbore region, which appears as a relatively simple tool for constructing a two-dimensional reservoir model. Based on a comparison of the two- and three-dimensional numerical solutions for the problem of well interference, a significant superiority of local numerical upscaling over analytical models is demonstrated.

Keywords: oil reservoir, hydrodynamic modeling, vertical averaging, two-dimensional flow model, imperfect wells, well productivity, effective wellbore radius, well interference, streamlines

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030) and performed as part of the state assignment to the National Research Centre “Kurchatov Institute”.

For citation: Eremin I.V., Salimyanova D.R., Potashev K.A. Accounting for vertical well imperfection in a two-dimensional reservoir model. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 655–674.
<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.655-674>. (In Russian)

Введение

Наилучшим способом моделирования фильтрационных процессов в нефтяных пластах с точки зрения достоверности результата и прозрачности формулировки вычислительных алгоритмов является трехмерное моделирование. Однако его главным недостатком при попытке учесть все значимые эффекты и особенности системы является огромная вычислительная сложность, которая, как правило, приводит к недопустимо большим затратам

машинного времени расчета, особенно в условиях большого числа многовариантных расчетов [1–4]. В этой связи многие исследования были посвящены вопросам построения упрощенных моделей фильтрации, позволяющих принципиально сократить вычислительную сложность алгоритмов решения поставленной задачи с сохранением приемлемой точности. Известны различные упрощенные (квази) модели [5–14], одной из которых является усредненная по высоте двумерная латеральная модель пласта. Эта модель, хоть и является достаточно простой и наглядной, однако требует определенной модификации вычислительных алгоритмов для учета трехмерных эффектов. Основными причинами, вызывающими зависимость от вертикальной координаты фильтрационных течений в пласте, являются неоднородность фильтрационно-емкостных свойств коллектора и неполное по высоте вскрытие пласта скважинами. Последнее условие принято называть несовершенством скважин по степени вскрытия пласта [15, 16].

Для несовершенных скважин известен ряд аналитических способов вычисления т. н. «эффективного радиуса», т. е. такого радиуса, с которым совершенная скважина обладала бы тем же коэффициентом продуктивности, что и рассматриваемая. Под коэффициентом продуктивности понимается отношение дебита скважины к перепаду давления между ее забоем и некоторым контуром питания в пласте или средним давлением в прискважинной области. К таким способам относятся, например, формулы Гириного, Маскета и Козени [17]. Их преимущество состоит в возможности мгновенного вычисления эффективного радиуса скважин, однако все они являются приближенными, поскольку получены в рамках некоторых упрощающих допущений о строении пласта и расположении интервалов перфорации вдоль ствола скважины. Таким образом, возникает вопрос об оценке достоверности и условий применимости перечисленных упрощенных методов в условиях, приближенных к реальным пластовым системам, причем их точность будет ожидаемо снижаться при нарушении предположений, заложенных при их выводе. Поэтому возникает необходимость разработки надежного универсального метода расчета эффективного радиуса скважин, не требующего значительных затрат вычислительных ресурсов.

В качестве такого метода в настоящей работе рассмотрен способ вычисления эквивалентного, или эффективного, радиуса несовершенной скважины, основанный на построении численного решения задачи пониженной размерности в малой призабойной области скважины. Понижение размерности задачи осуществляется переходом к двумерной постановке, симметричной относительно оси скважины, в предположении о сохранении высоты пласта и его преимущественно слоистой неоднородности в малой окрестности скважины. Такие допущения оказываются вполне обоснованными, поскольку радиус моделируемой призабойной зоны (~ 10 м) намного меньше характерного латерального масштаба неоднородности пласта ($\sim 10^2 \dots 10^3$ м) [18–20].

Решение указанной задачи приобретает особую ценность для реализации высокопроизводительной модели фильтрации в фиксированных трубках тока, для которой требуется надежный расчет поля давления в усредненной по высоте модели пласта с последующим построением латерального поля скорости фильтрации и структуры линий тока [21–24].

Оценка достоверности рассматриваемых методов выполнена на основе сравнения с результатами численного моделирования трехмерной задачи, которое явно воспроизводит все значимые факторы и потому условно считается «точным». Для численного моделирования на прямоугольной сетке конечных объемов использован специализированный пакет с открытым исходным кодом MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST) [25].

Предложенный метод локального численного апскейлинга радиуса несовершенной скважины может быть использован как относительно простой инструмент при построении двумерной модели пласта. Изложенный алгоритм реализован в виде отдельного расчетного модуля, который размещен в открытом доступе для использования на этапе осреднения трехмерных моделей пласта средствами данного программного пакета в рамках общедоступной лицензии [26].

1. Трехмерная модель

Математическая модель стационарной фильтрации несжимаемой жидкости в несжимаемой пористой среде в пренебрежении массовыми силами может быть описана системой уравнений [27]:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u} = -\sigma \operatorname{grad} p, \quad \sigma = \frac{k}{\mu}, \quad (1.2)$$

где (x, y, z) – эйлеровы координаты точки; z – вертикальная координата, направленная вверх от подошвы пласта; $\mathbf{u}(u, v, w)$ – вектор скорости фильтрации; p – давление в жидкости; k – абсолютная проницаемость пласта; μ – динамическая вязкость флюида.

Уравнения (1.1) и (1.2) записаны в области Ω нефтяного пласта, ограниченной снизу и сверху поверхностями $z = B(x, y)$ и $z = T(x, y)$, называемыми «подошвой» и «кровлей» пласта соответственно, а сбоку – вертикальной цилиндрической поверхностью $\Gamma(x, y)$ (рис. 1).

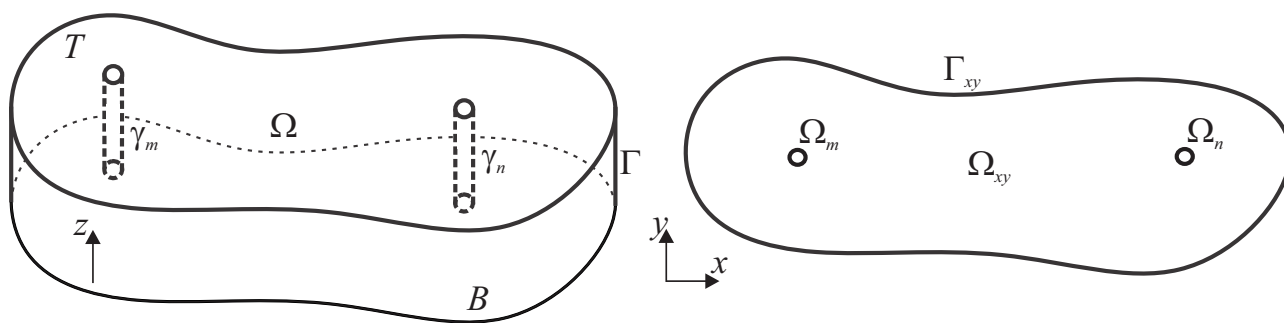


Рис. 1. Схема области решения трехмерной задачи и ее двумерное осреднение

Fig. 1. Schematic of the three-dimensional problem domain and its two-dimensional vertically averaged representation

Внутренними границами пласта являются поверхности $\gamma_m = \gamma_m^I \cup \gamma_m^{II}$ ($m = 1, \dots, M$) вертикальных скважин, пробуренных в нем, где γ_m^I и γ_m^{II} – перфорированные и невскрытые участки скважины.

Верхняя и нижняя поверхности пласта считаются непроницаемыми:

$$(x, y, z) \in B, T : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \equiv u_n = -\sigma \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{n}$ – вектор нормали, внешней к области Ω .

Изолированные участки скважины γ_m^{II} непроницаемы:

$$(x, y, z) \in \gamma_m^{II} : \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad (1.4)$$

а на вскрытых участках γ_m^I заданы забойное давление или нелокальное граничное условие в виде суммарного расхода (дебита)

$$(x, y, z) \in \gamma_m^I : p = p_m^I, \quad (1.5)$$

$$\int_{\gamma_m^I} u_n d\gamma = - \int_{\gamma_m^I} \sigma \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma = q_m. \quad (1.6)$$

Заметим, что с учетом (1.4) интеграл в (1.6) может быть взят по всей γ_m .

На вертикальной боковой границе Γ зададим давление или условие непроницаемости:

$$(x, y, z) \in \Gamma : p = p_\Gamma \quad \vee \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (1.7)$$

Решение трехмерной задачи (1.1)–(1.7) назовем «точным» и будем строить численно в специализированном пакете MRST [25], поскольку ее аналитическое решение в общем случае не существует.

2. Двумерная модель, усредненная по высоте пласта

С помощью операции усреднения параметра $(\cdot)$ по высоте пласта

$$\overline{(\cdot)}(x, y) = \frac{1}{h(x, y)} \int_{B(x, y)}^{T(x, y)} (\cdot)(x, y, z) dz, \quad h(x, y) = T(x, y) - B(x, y), \quad (2.1)$$

введем средние компоненты $(\bar{u}, \bar{v})(x, y)$ и $\bar{w} = 0$ вектора скорости фильтрации с учетом граничных условий (1.3), а также среднее давление $\bar{p}(x, y)$.

Обозначим через Ω_{xy} проекцию области Ω на плоскость (x, y) . В рамках данной работы будем полагать, что поверхности γ_m скважин являются вертикальными круговыми цилиндрами радиуса r_m . Тогда проекции скважин будут образовывать в Ω_{xy} внутренние круговые вырезы Ω_m . Через $\bar{\Omega}$ обозначим область в плоскости (x, y) , ограниченную лишь проекцией поверхности Γ , т. е. $\Omega_{xy} = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_m \Omega_m$.

Интегрирование уравнения (1.1) по высоте пласта в точках $(x, y) \in \Omega_{xy}$ дает

$$\int_B^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_B^T u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_B^T v dz = \frac{\partial h\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial h\bar{v}}{\partial y} = \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (2.2)$$

Обозначим через $h\bar{\mathbf{U}}$ непрерывное продолжение вектор-функции $h\bar{\mathbf{u}}$ на все области Ω_m . Такая функция определена на всей области $\bar{\Omega}$. Для проекции скважины с учетом смены направления нормали имеем

$$\int_{\Omega_m} \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{U}}) dV = \int_{\partial\Omega_m} h\bar{u}_n dV = -q_m \quad \forall m,$$

а в областях V , не содержащих области Ω_m скважин, согласно (2.2)

$$\int_V \operatorname{div}_{xy}(h\bar{\mathbf{U}}) dV = 0.$$

Следовательно, продолжение $h \bar{U}$ должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}_{xy} (h \bar{U}) = F(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (2.3)$$

с правой частью $F(x, y)$, обладающей для любого m следующими свойствами

$$1) (x, y) \notin \Omega_m : F(x, y) = 0; \quad 2) \int_V F dV = -q_m, \quad \Omega_m \in V. \quad (2.4)$$

В силу несоизмеримой малости радиусов скважин по сравнению с характерными расстояниями между ними можно перейти к пределу $r_m \rightarrow 0$, стягивая области Ω_m в точки с координатами (x_m, y_m) проекции оси скважин. Тогда свойства (2.4) позволят выразить функцию $F(x, y)$ через дельта-функции Дирака δ , а итоговое выражение (2.3) с учетом аддитивности второго свойства (2.4) для нескольких областей Ω_m перепишется в виде

$$\operatorname{div}_{xy} (h \bar{U}) = - \sum_m q_m \delta(x - x_m) \delta(y - y_m), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (2.5)$$

Таким образом, вертикальные скважины заменены точечными источниками ($q_m < 0$) или стоками ($q_m > 0$) заданной интенсивности q_m .

По аналогии со структурой закона Дарси (1.2) примем приближенные выражения средних компонент скорости фильтрации через компоненты градиента среднего давления

$$h \bar{U} = (h \bar{U}, h \bar{V}) = - \int_B^T \sigma \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) dz \approx -h \bar{\sigma} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right), \quad \bar{\sigma} = \frac{\bar{k}}{\mu}. \quad (2.6)$$

Определение усредненной абсолютной проницаемости в общем случае является решением специальных задач апскейлинга [28, 29]. Однако, предполагая вертикальную неоднородность пласта наиболее значимой, в рамках данного исследования для простоты будем использовать выражение эффективной проницаемости слоисто-неоднородного пласта, которое совпадает с записью $\bar{k}(x, y)$, определяемой согласно (2.1).

Граничные условия (1.7) на границе Γ перейдут в условия на ее проекции Γ_{xy} :

$$(x, y) \in \Gamma_{xy} : \bar{p} = \bar{p}_\Gamma \quad \vee \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = 0. \quad (2.7)$$

Задачу (2.5)–(2.7) решим в области $\bar{\Omega}$. В случае заданных дебитов скважин правая часть уравнения (2.5) определяется из условий (1.6). Если же заданы забойные давления условиями (1.5), то при записи правой части (2.5) применим выражения дебитов скважин как функций искомого давления, заданных величин забойного давления, проницаемости пласта, радиуса скважин r_m и параметров перфорации $\wp_m$:

$$q_m = q_m(r_m, \wp_m, p_m, \bar{p}, \bar{k}). \quad (2.8)$$

Задача настоящей работы состоит в решении уравнения (2.5) именно с заданным давлением на скважинах. Явный вид функции (2.8) в общем случае не может быть получен и на практике задается приближенно в зависимости от выбора схемы численного решения уравнения (2.5). В частности, при конечнообъемной (КО) схеме решения, когда искомыми

являются величины среднего давления в конечных объемах, зависимость (2.8) выражает линейную связь дебита с разностью искомого среднего давления в содержащем скважину КО и забойного давления на скважине. Обычно эту зависимость выводят из упрощенных решений, например, формулы Дююи для радиального притока в однородном круговом пласте к совершенной скважине радиуса r_m . Тогда учет всевозможных видов несовершенства скважин сведется к вычислению т. н. эффективного радиуса скважины r_m^{eff} , который обеспечивает тот же расход при заданном забойном давлении, вычисленный по введенной упрощенной зависимости.

3. Вычисление эффективного радиуса несовершенной скважины

Рассмотрим способ вычисления эффективного радиуса r_m^{eff} для скважины радиуса r_m , несовершенной по степени вскрытия пласта. С этой целью рассмотрим цилиндрическую область Φ высоты H и такого радиуса R вокруг несовершенной вертикальной скважины, на котором давление можно считать постоянным по вертикали (рис. 2). Расстояние R определяет возможную область распространения вертикального возмущения давления, вызванного неполным вскрытием пласта скважиной. Положив величину R меньшей характерного масштаба латеральной неоднородности пласта, основания цилиндра Φ будем считать горизонтальными, а распределение проницаемости в нем и притока к контуру скважины [30] – зависящим лишь от вертикальной координаты z . Последнее можно приблизить моделью слоисто-неоднородного пласта, эффективная проницаемость которого, как было указано выше, совпадает со средней по высоте величиной $\bar{k}$.

Фильтрация в области Φ описывается уравнениями (1.1), (1.2).

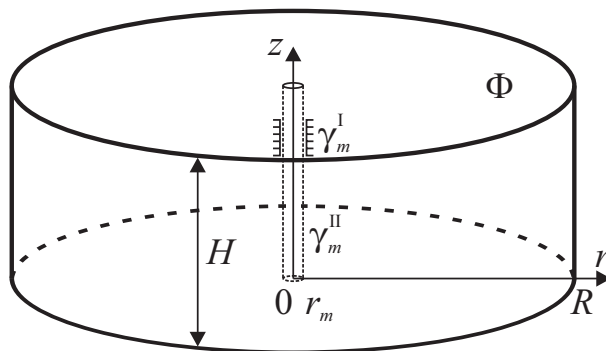


Рис. 2. Расчетная область задачи о дебите несовершенной скважины

Fig. 2. Computational domain for the imperfect well production rate

На основаниях цилиндра и на неперфорированной поверхности скважины поставим условия непроницаемости аналогично (1.3) и (1.4), на перфорированной поверхности скважины и на боковой поверхности цилиндра зададим величины давления граничными условиями (1.5) и

$$r = R : p = p_R. \quad (3.1)$$

Решение задачи (1.1)–(1.5), (3.1) в области Φ дает распределение давления в ней, по которому с помощью (1.6) вычисляется дебит несовершенной скважины q_m^l .

В силу перечисленных допущений данная задача может быть сведена к двумерной осесимметричной постановке в цилиндрических координатах (r, z) . Это приводит к понижению размерности задачи и тем самым расширяет возможности использования расчетных сеток повышенной детальности с локальным измельчением вблизи перфорированных интервалов ствола скважины. В общем случае для решения задачи может быть сохранена трехмерная постановка в координатах (x, y, z) с явным учетом поля проницаемости пласта.

3.1. Оценка допустимого размера расчетной области. Допустимый минимальный радиус R цилиндра Φ был определен из решения вспомогательной задачи (1.1)–(1.5) и (3.1) в области большого радиуса $100H$, на котором вертикальные возмущения давления пренебрежимо малы. Из полученного решения было найдено такое минимальное расстояние от скважины $\tilde{R}$, на котором среднеквадратичное отклонение давления от средней по вертикали величины с учетом (2.1) уже не превосходило заданного значения ε :

$$\tilde{R}: e(\tilde{R}) \leq \varepsilon, \quad e^2(r) = \overline{E}(r), \quad E(r, z) = \left(\frac{p(r, z) - \bar{p}(r)}{\bar{p}(r)} \right)^2.$$

На рис. 3 представлены варианты зависимости $\tilde{R}$ от положения перфорации и степени вскрытия пласта при $\varepsilon = 0.01$. При построении графика были рассмотрены два варианта расположения перфорации: 1) скважина вскрывает пласт от кровли на величину $l \in [0.02H, 0.98H]$; 2) скважина вскрывает пласт на величину $l = H/15$ с отметки $z = bH$. Задачи решались в однородном и слоисто-неоднородном пластах, когда $k = k(z)$ задавалась кусочно-постоянной функцией на трех равных интервалах со значениями $k_1 = 100k_2 = 10k_3$.

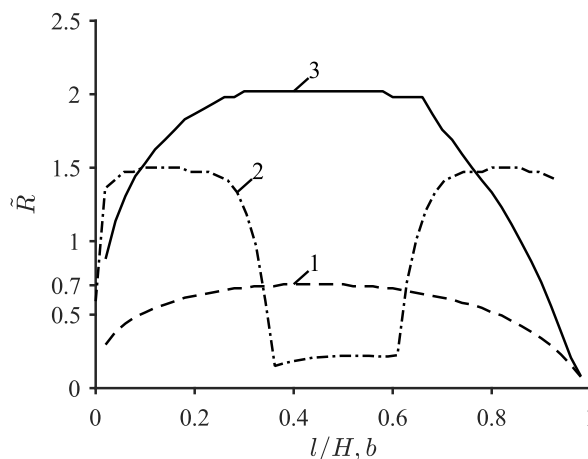


Рис. 3. Зависимость величины $\tilde{R}$ от степени вскрытия l при $b = 0$ (1, 3) и от положения перфорации b (2) при $l = H/15$ в слоистом (2, 3) и однородном (1) пластах

Fig. 3. Dependence of the $\tilde{R}$ value on the penetration degree l at $b = 0$ (1, 3) and on the perforation position b (2) at $l = H/15$ in the layered (2, 3) and homogeneous (1) reservoirs

Из рис. 3 видно, что $\tilde{R}$ заметно не превосходит двух высот пласта, что в реальности эквивалентно $10 \div 100$ м, что, как правило, кратно меньше характерного масштаба латеральной неоднородности и подтверждает принятую гипотезу о слабой горизонтальной изменчивости параметров пласта в призабойной зоне Φ скважины.

3.2. Алгоритм вычисления эффективного радиуса скважины. Значение r_m^{eff} эквивалентной совершенной скважины отыскивалось из условия равенства ее дебита, вычисляемого по формуле Дюпюи для радиального притока к скважине в гомогенизированном круговом пласте, дебиту несовершенной скважины q_m^l :

$$\frac{2\pi k H}{\mu} \frac{\Delta p}{\ln R/r_m^{eff}} = q_m^l.$$

Используя аналогичное выражение дебита совершенной скважины q_m^p исходного радиуса r_m , искомый эффективный радиус можно выразить через них, исключив величины разности давлений и гидропроводности пласта:

$$\frac{r_m^{eff}}{R} = \left(\frac{r_m}{R} \right)^{\frac{q_m^p}{q_m^l}}.$$

Вычислительный алгоритм решения задачи (1.1)–(1.5), (3.1) в двумерной осесимметричной постановке и определения r_m^{eff} был реализован в виде отдельной расчетной программы на языке C++ [26] с использованием ортогональной сетки конечных объемов и двухточечной аппроксимации потока на гранях [25, 31].

4. Апробация методики и результаты

4.1. Слоисто-неоднородный пласт. Верификация алгоритма вычисления эффективного радиуса скважины была выполнена на основе решения серии стационарных задач однофазной фильтрации (1.1)–(1.5), (1.7) в области $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$ (рис. 4):

$$L_x = 3L_y, \quad L_z = 0.1 L_y, \quad L_y = 100.$$

Пласт состоит из трех параллельных слоев толщины $h = L_z/3$ с величинами проницаемости $k/k_0 = 1, 0.1, 0.5$. Ось вертикальной нагнетательной скважины γ_I имеет координаты $(L_x/2, L_y/2)$. Симметрично от нее расположены две вертикальные добывающие скважины γ_{P1}, γ_{P2} с координатами осей $(L_x/2 \mp L_y, L_y/2)$ соответственно. Радиус всех трех скважин одинаков и равен $r_w = 0.1$ м. На скважинах с помощью условий (1.5) заданы одинаковые величины забойного давления для добывающих скважин $p_{P1} = p_{P2} \equiv p_P$ и величина забойного давления $p_I > p_P$ для нагнетательной скважины.

Скважина γ_{P1} вскрывает пласт по всей высоте. Скважина γ_{P2} вскрывает пласт только на интервале $z = [L_z - d - l, L_z - d]$.

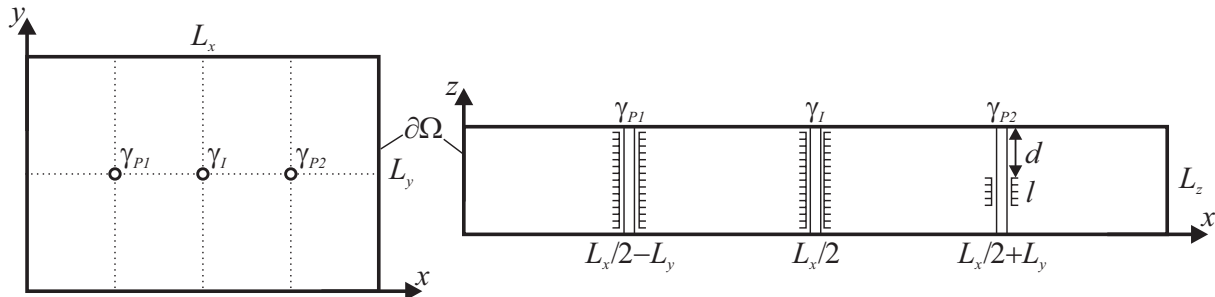


Рис. 4. Схема расчетной области

Fig. 4. Schematic of the computational domain

При записи условия (1.7) граница расчетной области полагалась непроницаемой, что вместе с граничными условиями (1.3) на кровле и подошве дает единое граничное условие изоляции на всей внешней границе расчетной области:

$$\partial\Omega : \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (4.1)$$

Расчеты проведены для фиксированного значения длины интервала перфорации $l = L_z/15$ и различных значений его заглубления $0 < d < L_z - l$.

Численное решение трехмерной задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5), (4.1) было построено в пакете MRST. Полученный результат принимался за эталонный при сравнении с решением двумерной задачи (2.5)–(2.8) в усредненной по высоте пласта области $\bar{\Omega} = [0, L_x] \times [0, L_y]$ с непроницаемой границей Γ_{xy} и со средней проницаемостью $\bar{k}$ согласно (2.1). Для несовершенной добывающей скважины в двумерной постановке были использованы значения r_w^{eff} , рассчитанные как по аналитическим формулам Гирина, Маскета и Козе-ни [17], так и по предложенному алгоритму.

Область Ω построения численного решения трехмерной задачи была покрыта равномерной конечно-объемной сеткой. Допустимые значения шага сетки по координатным осям были определены из анализа сеточной сходимости решения:

$$h_{x,y,z} = L_{x,y,z}/N_{x,y,z}, \quad N_x = 201, \quad N_y = 101, \quad N_z = 45.$$

Нечетные значения N_x, N_y задавались для расположения скважин в центрах блоков. Для двумерной области $\bar{\Omega}$ использовалось аналогичное разрешение N_x, N_y .

Для отыскания r_w^{eff} по изложенному алгоритму была использована конечно-объемная расчетная сетка размерности $N_r = 500$ и $N_z = 1035$ блоков с равномерным разбиением по оси z и логарифмическим сгущением по оси r вблизи скважины.

Точность алгоритма вычисления эффективного радиуса была оценена по величине относительного отклонения E распределения закачиваемой в пласт жидкости по добывающим скважинам, вычисленного по двумерной и трехмерной моделям:

$$E = (\alpha^{2D} - \alpha^{3D})/\alpha^{3D}, \quad \alpha = q_{P2}/q_{P1}.$$

Здесь $(\cdot)^{3D}$ – эталонное значение, вычисленное по трехмерной модели; $(\cdot)^{2D}$ – значение, полученное из двумерной модели с использованием эффективного радиуса скважины r_{eff} .

Результаты верификации приведены на рис. 5. Относительная ошибка вычисления распределения закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами в модели, усредненной по высоте пласта, с использованием изложенного метода расчета эффективного радиуса не превышает 30 %. При этом максимальное отклонение наблюдается для положения интервала перфорации, примыкающего к границе раздела слоев различной проницаемости. По-видимому, это связано с заложенными в вычислительный алгоритм пакета MRST поправочными коэффициентами в выражениях (2.8), выражающими продуктивность участка ствола скважины, полученными из упрощенных формул в случае двумерного течения, аналогично формуле Писмана [32]. Расчет же эффективного радиуса выполнялся на сетке высокого разрешения с подробной детализацией поля скорости фильтрации, как в области радиального, так и сферического притока к участкам перфорации скважины. Поэтому использование вычисленного предложенным способом эффективного радиуса может привести даже к повышению точности двумерной численной модели

по сравнению с трехмерной, с чем связаны фиктивные всплески отклонения E . Из рис. 6 видно, что при остальных вариантах расположения интервала перфорации отклонение E не превосходит 1 % при том, что сама величина α (распределение нагнетания по добывающим скважинам) изменяется примерно пятикратно от 0.1 до 0.5.

В то же время аналитические формулы расчета эффективного радиуса приводят к значительному увеличению относительной погрешности E от 1 до 2 порядков величины. В случае расположения перфорации в высокопроницаемом слое отклонение E для аналитических формул составило порядка 0.5 вместо 0.002 для изложенного алгоритма. Когда перфорация расположена в низкопроницаемом слое, соответствующие величины принимают значения порядка $2.5 \div 3.5$ вместо 0.01 (рис. 5). Это, очевидно, связано с отсутствием учета перечисленными аналитическими выражениями, во-первых, слоистой неоднородности пласта и, во-вторых, конкретного положения перфорации кроме степени вскрытия высоты пласта.

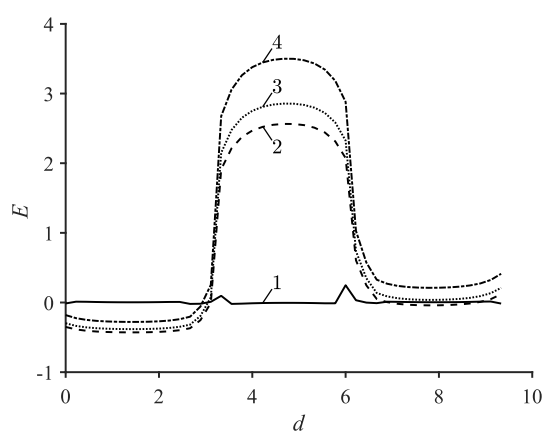


Рис. 5. Относительная ошибка распределения закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами: по предложенному методу (1) и по формулам Гиринского (2), Маскета (3) и Козени (4)

Fig. 5. Relative error in the distribution of injected fluid among production wells: using the proposed method (1) and according to the Girinsky (2), Muskat (3), and Kozeny (4) formulas

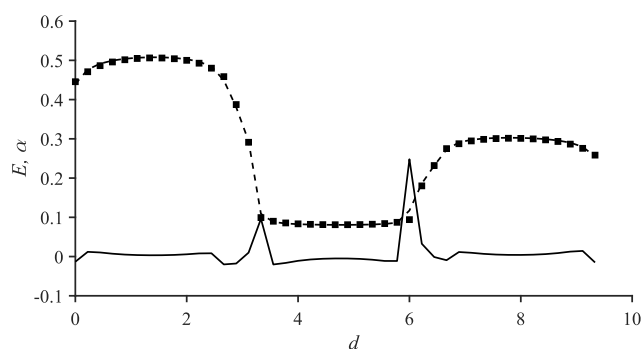


Рис. 6. Распределение закачиваемой в пласт жидкости между добывающими скважинами из трехмерного (маркеры) и двумерного (пунктир) решений по предложенному методу и относительная ошибка (сплошная линия)

Fig. 6. Distribution of injected fluid among the production wells from the three-dimensional (markers) and two-dimensional (dashed line) solutions, obtained using the proposed method, and the relative error (solid line)

Важно отметить, что указанные различия в расчетах приводят к существенной погрешности при вычислении распределения потоков между скважинами, структуре поля скорости фильтрации, а вместе с ним и в структуре линий тока (рис. 7). Последнее, в частности, может приводить к значительной погрешности при построении трубок тока и вычислении долей общего расхода между ними, которые, как было указано выше, необходимы для реализации расчетной схемы быстродействующей модели фильтрации в фиксированных трубках тока [33, 34].

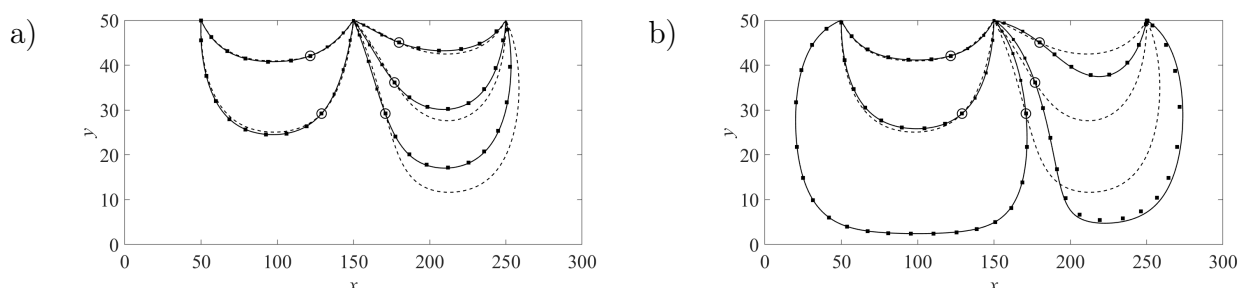


Рис. 7. Структура линий тока: маркеры – трехмерное решение; линии – двумерное решение: с применением формулы Гиринского (пунктир) и предложенного алгоритма (сплошная); а) $d = 0$; б) $d = 0.4Lz$; $\bigcirc$ – стартовые точки построения линий тока

Fig. 7. Streamline structure: markers – three-dimensional solution; lines – two-dimensional solution: using the Girinsky formula (dashed) and the proposed algorithm (solid); а) $d = 0$; б) $d = 0.4Lz$; $\bigcirc$ indicates the streamline starting points

4.2. Случайно-неоднородный пласт. В отличие от рассмотренного выше идеализированного случая реальное геологическое строение коллекторов обладает некоторой латеральной изменчивостью поля проницаемости вдоль пропластков [18, 19]. При этом средняя величина проницаемости в пределах каждого пропластка может принимать существенно различные значения, отражая преимущественно вертикальную (слоистую) неоднородность пласта, приобретенную в соответствующие геологические периоды формирования залежи.

Для верификации изложенного алгоритма в условиях, приближенных к реальным, была выполнена имитация неоднородной структуры поля проницаемости k с сохранением тех же наиболее вероятных величин в трех вертикальных интервалах h высоты пласта $k/k_0 = 1, 0.1, 0.5$ и с вариацией относительной величины корреляционного шага $\rho \equiv r^* = 0.1, 0.25, 0.5, 1$. Корреляционный шаг поля проницаемости определяет средний линейный масштаб латеральной неоднородности данного поля [35]. В пределах каждого интервала h фиксированной средней проницаемости («пачке») генерировалось от одного до трех пропластков, для каждого из которых строилось неоднородное двумерное поле проницаемости (рис. 8). Для каждого значения ρ генерировалось по десять реализаций для выполнения усредненной оценки достигаемой точности решения. Вычисление эффективного радиуса по изложенному алгоритму осуществлялось в предположении о локальной слоисто-неоднородной структуре пласта согласно последовательности величин проницаемости в пересеченных скважиной блоках расчетной сетки. Для использования аналитических моделей по тем же значениям вычислялась средняя проницаемость $\bar{k}$ по формуле (2.1).

Рис. 9 показывает, что при применении предложенного способа вычисления эффективного радиуса с увеличением параметра ρ уменьшается погрешность вычисления расходов скважин. Так, с увеличением ρ от 0.1 до 1 погрешность E в среднем снижается от двух (рис. 9, а) до пяти (рис. 9, б) раз в зависимости от числа пропластков. Это можно объяснить тем, что заложенные в алгоритм гипотезы о слабой латеральной изменчивости проницаемости вблизи скважины становятся более достоверными с увеличением масштаба неоднородности поля проницаемости. Сама ошибка по-прежнему лежит в интервале 1–5 %. При этом аналитические формулы приводят примерно к тем же неприемлемо высоким уровням погрешности, что и в случае слоисто-неоднородного пласта.

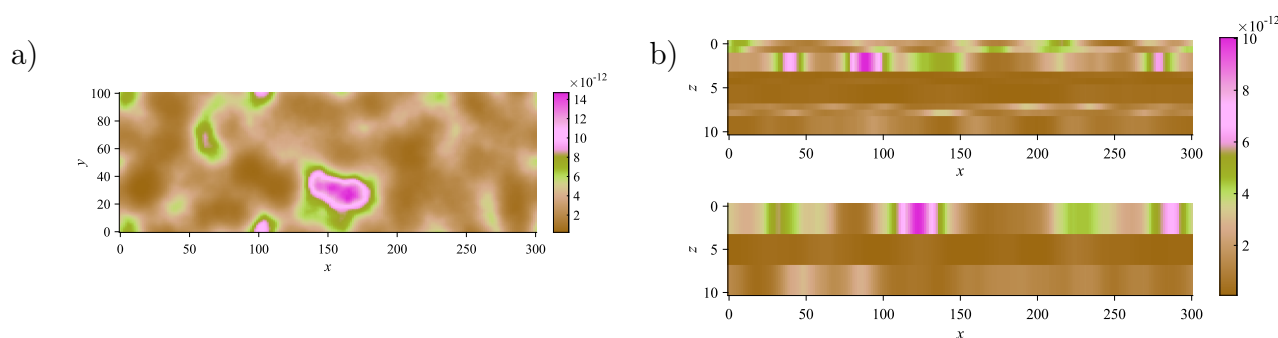


Рис. 8. Пример поля проницаемости в пределах одного пропластка (а) и в вертикальном сечении пласта (б) при корреляционном шаге $\rho = 0.2$

Fig. 8. Example of the permeability field within a single layer (a) and in a vertical cross-section of the reservoir (b) with correlation length $\rho = 0.2$

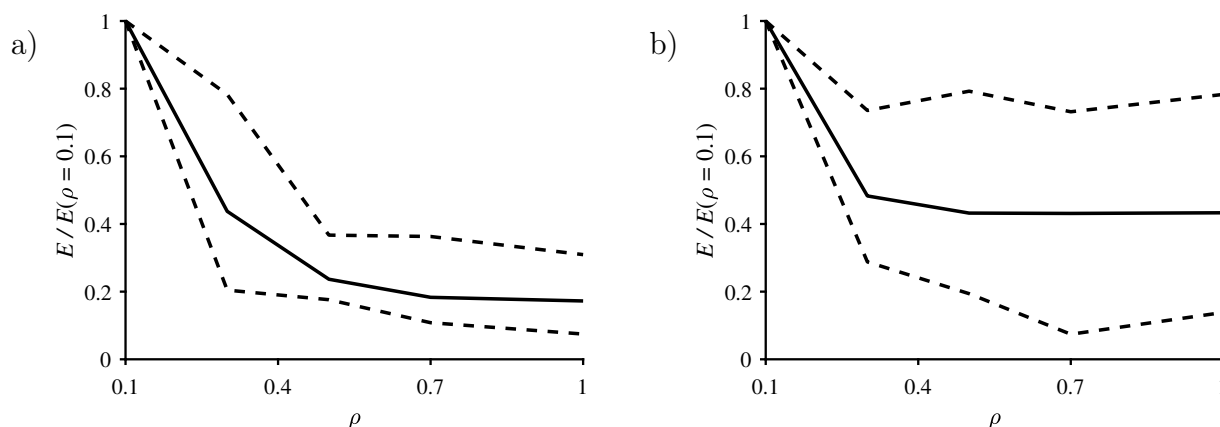


Рис. 9. Влияние шага латеральной неоднородности пласта на среднюю, минимальную и максимальную по параметру d относительную погрешность при одном (а) и трех (б) пропластках в каждой пачке пласта

Fig. 9. Effect of lateral heterogeneity spacing on the mean, minimum, and maximum relative error with respect to parameter d for one (a) and three (b) permeable layers per reservoir zone

Заключение

Исследован способ вычисления эффективного радиуса скважины, несовершенной по степени вскрытия пласта, основанный на построении численного решения задачи пониженной размерности в малой призабойной области скважины. Понижение размерности задачи осуществлено переходом к двумерной постановке, симметричной относительно оси скважины, в предположении о сохранении высоты пласта и его преимущественно слоистой неоднородности вблизи скважины. Дана постановка соответствующей задачи фильтрации и реализован алгоритм ее численного решения. Показано, что данный подход снижает погрешность в определении расходов и взаимодействия скважин по сравнению с применением известных формул расчета эффективного радиуса, не учитывающих неоднородность пласта, на один-два порядка в случае слоисто-неоднородного пласта. В резервуарах с геологически характерной структурой неоднородности погрешность также составляет 1–5 % и снижается с ростом корреляционного шага поля неоднородности проницаемости. Достижимый высокий уровень точности позволяет достоверно воспроизводить структуру линий и трубок тока между скважинами в усредненной по высоте модели пласта, соответствующей усреднению трехмерной модели. Данная характеристика алгоритма является необходимой при расчете параметров взаимодействия скважин, а также при оснащении высокопроизводительной модели фильтрации в трубках тока расходными характеристиками.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Monteiro L., Baptista-Pereira C., Azevedo L.* Sensitivity analysis of injection parameters in steam assisted gravity drainage under geological uncertainty // J. Pet. Sci. Eng. 2022. V. 208, Pt. E. Art. 109732. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109732>.
2. *Chen H., Sen D.* A flow feature clustering-assisted uncertainty analysis workflow for optimal well rates in waterflood projects // SPE J. 2022. V. 27, No 4. P. 2453–2469. <https://doi.org/10.2118/209608-pa>.
3. *Afanasyev A., Sytchenko I., Andreeva A., Grechko S., Dymochkina M., Pavlov V., Maksakov K., Tsvetkova Yu., Vedeneva E., Chernova A., Penigin A.* Uncertainty quantification for the CO₂ storage efficiency in heterogeneous saline aquifers: The impact of variability in the lithology distribution // Int. J. Greenhouse Gas Control. 2025. V. 144. Art. 104384. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2025.104384>.
4. *Fatemi S.A., Jansen J.D., Rossen W.R.* Discerning in-situ performance of an EOR agent in the midst of geological uncertainty I: Layer cake reservoir model // J. Pet. Sci. Eng. 2017. V. 158. P. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.08.021>.
5. *Chengtai G., Hedong S.* Material balance equation of multilayer gas reservoir // Well Test Analysis for Multilayered Reservoirs with Formation Crossflow. Ch. 10. Gulf Prof. Publ., 2017. P. 247–269. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812853-4.00010-7>.
6. *Tarek A.* Oil recovery mechanisms and the material balance equation // Reservoir Engineering Handbook. Ch. 11. Gulf Prof. Publ., 2010. P. 733–809. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50019-5>.

7. *HuiNong Z.* Interference test and pulse test // *Dynamic Well Testing in Petroleum Exploration and Development*. Ch. 6. Elsevier, 2013. P. 411–495.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397161-6.00006-1>.
8. *Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C.S., Lake L.W.* The use of capacitance–resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization // *J. Pet. Sci. Eng.* 2009. V. 69, Nos 3–4. P. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>.
9. *Alghamdi A., Hiba M., Aly M., Awotunde A.* Critical review of capacitance-resistance models // *Proc. SPE Russ. Petroleum Technology Conf.* 2021. Art. SPE-206555-MS.
<https://doi.org/10.2118/206555-MS>.
10. *Husein N., Drobot A., Vasechkin D., Urvantsev S., Bydzan A., Bolshakov V.* Using hybrid digital models to analyse well interference and optimise field development management // *Proc. SPE Annu. Caspian Technical Conf. Nur-Sultan*, 2022. Art. SPE-212120-MS.
<https://doi.org/10.2118/212120-MS>.
11. *Choubineh A., Chen J., Coenen F., Ma F., Wood D.A.* Machine learning to improve natural gas reservoir simulations // *Wood D.A., Cai A. (Eds.) Sustainable Natural Gas Reservoir and Production Engineering*. Ch. 3. Ser.: The Fundamentals and Sustainable Advances in Natural Gas Science and Engineering. V. 1. Gulf Prof. Publ., 2021. P. 55–82.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824495-1.00011-5>.
12. *Bascialla G., Rat C., Sheth S., Dias D., Mohammad R.H.* Physics-informed machine learning application to complex compositional model in a giant field // *Proc. Int. Petroleum Technology Conf. Dhahran*, 2024. Art. IPTC-23730-MS. <https://doi.org/10.2523/IPTC-23730-MS>.
13. *McLean K., Zarrouk S.J.* Pressure transient analysis of geothermal wells: A framework for numerical modelling // *Renewable Energy*. 2017. V. 101. P. 737–746.
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.09.031>.
14. *Zarrouk S.J., McLean K.* Numerical pressure-transient analysis modelling framework // *Geothermal Well Test Analysis: Fundamentals, Applications and Advanced Techniques*. Ch. 8. Acad. Press, 2019. P. 193–215. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814946-1.00008-6>.
15. *Чарный И.А.* Подземная гидрогазодинамика. М.: ГНТИНГТЛ, 1963. 397 с.
16. *Пыхачев Г.Б., Исаев Р.Г.* Подземная гидравлика. М.: Недра, 1973. 360 с.
17. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.
18. *Дойч К.В.* Геоestatистическое моделирование коллекторов. М.-Ижевск: ИКИ, 2011. 400 с.
19. *Байков В.А., Бакиров Н.К., Яковлев А.А.* Математическая геология. Т. I. Введение в геостатистику. М.-Ижевск: ИКИ, 2012. 228 с.
20. *Котенев Ю.А., Султанов Ш.Х., Чибисов А.В., Чиликин В.М.* Комплексная оценка геологической неоднородности пластовых систем при решении задачи регулирования процесса выработки запасов нефти // *Нанотехнол. в строит.: научн. Интернет-журн.* 2024. Т. 16, № 5. С. 473–484. <https://doi.org/10.15828/2075-8545-2024-16-5-473-484>.
21. *Поташев К.А., Мазо А.Б.* Численное моделирование локального воздействия на нефтяной пласт с применением фиксированных трубок тока для типичных схем заводнения // *Георесурсы*. 2020. Т. 22, № 4. С. 70–78. <https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>.

22. *Potashev K.A., Mazo A.B.* Mathematical modeling of oil reservoir waterflooding using fixed streamtube at various values of viscosity ratio // *Lobachevskii J. Math.* 2021. V. 42, No 8. P. 2023–2029. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080254>.
23. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Баушин В.В., Булыгин Д.В.* Расчет полимерного заводнения нефтяного пласта по модели фильтрации с фиксированной трубкой тока // *Георесурсы.* 2017. Т 19, № 1. С. 15–20. <https://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>.
24. *Салимьянова Д.Р., Поташев К.А., Баушин В.В.* Целесообразность удаленного размещения от нагнетательной скважины водоизолирующего состава в высокопроницаемом слое // *Георесурсы.* 2025. Т. 27, № 1. С. 261–266. <https://doi.org/10.18599/grs.2025.1.27>.
25. *Lie K.-A.* An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST). Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2019. 678 p.
26. Effective well radius.
URL: https://drive.google.com/drive/folders/1zrJgsOWwgCT_oGrULpc4XvvbQo-6fP6k (дата обращения: 28.10.2025).
27. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
28. *Mazo A.B., Potashev K.A.* Absolute permeability upscaling for superelement modeling of petroleum reservoir // *Math. Models Comput. Simul.* 2018. V. 10, No 1. P. 26–35. <https://doi.org/10.1134/S207004821801009X>.
29. *Durlofsky L.* Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation // *Proc. 8th Int. Forum on Reservoir Simulation.* V. 2024. Iles Borromees, 2005. P. 1–59.
30. *Поташев К.А., Ахунов Р.Р.* Оценка неоднородности притока пластового флюида к контуру поперечного сечения вертикальной скважины // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2020. № 162, кн. 2. С. 180–192. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.180-192>.
31. *Рочу П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
32. *Peaceman D.W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation // *Soc. Pet. Eng. J.* 1978. V. 18, No 3. Art. SPE-6893-PA. <https://doi.org/10.2118/6893-PA>.
33. *Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B.* Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube // *Conf. Ser.: J. Phys.* 2019. V. 1158, No 4. Art. 042024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>.
34. *Поташев К.А., Ахунов Р.Р., Мазо А.Б.* Вычисление перетоков флюида между скважинами в фильтрационной модели разработки нефтяного пласта с помощью линий тока // *Георесурсы.* 2022. Т. 24, № 1. С. 27–35. <https://doi.org/10.18599/grs.2022.1.3>.
35. *Oliver D.S.* Moving averages for Gaussian simulation in two and three dimensions // *Math. Geol.* 1995. V. 27, No 8. P. 939–960. <https://doi.org/10.1007/BF02091660>.

References

1. Monteiro L., Baptista-Pereira C., Azevedo L. Sensitivity analysis of injection parameters in steam assisted gravity drainage under geological uncertainty. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2022, pt. E, vol. 208, art. 109732. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2021.109732>.
2. Chen H., Sen D. A flow feature clustering-assisted uncertainty analysis workflow for optimal well rates in waterflood projects. *SPE J.*, 2022, vol. 27, no. 4, pp. 2453–2469. <https://doi.org/10.2118/209608-pa>.
3. Afanasyev A., Sypchenko I., Andreeva A., Grechko S., Dymochkina M., Pavlov V., Maksakov K., Tsvetkova Yu., Vedeneeva E., Chernova A., Penigin A. Uncertainty quantification for the CO₂ storage efficiency in heterogeneous saline aquifers: The impact of variability in the lithology distribution. *Int. J. Greenhouse Gas Control*, 2025, vol. 144, art. 104384. <https://doi.org/10.1016/j.ijggc.2025.104384>.
4. Fatemi S.A., Jansen J.D., Rossen W.R. Discerning in-situ performance of an EOR agent in the midst of geological uncertainty I: Layer cake reservoir model. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2017, vol. 158, pp. 56–65. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.08.021>.
5. Chengtai G., Hedong S. Material balance equation of multilayer gas reservoir. In: *Well Test Analysis for Multilayered Reservoirs with Formation Crossflow*. Ch. 10. Gulf Prof. Publ., 2017, pp. 247–269. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-812853-4.00010-7>.
6. Tarek A. Oil recovery mechanisms and the material balance equation. In: *Reservoir Engineering Handbook*. Ch. 11. Gulf Prof. Publ., 2010, pp. 733–809. <https://doi.org/10.1016/B978-1-85617-803-7.50019-5>.
7. HuiNong Z. Interference test and pulse test. In: *Dynamic Well Testing in Petroleum Exploration and Development*. Ch. 6. Elsevier, 2013, pp. 411–495. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-397161-6.00006-1>.
8. Sayarpour M., Zuluaga E., Kabir C.S., Lake L.W. The use of capacitance–resistance models for rapid estimation of waterflood performance and optimization. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2009, vol. 69, nos. 3–4, pp. 227–238. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.09.006>.
9. Alghamdi A., Hiba M., Aly M., Awotunde. A. Critical review of capacitance-resistance models. *Proc. SPE Russ. Petroleum Technology Conf.*, 2021, art. SPE-206555-MS. <https://doi.org/10.2118/206555-MS>.
10. usein N., Drobot A., Vasechkin D., Urvantsev S., Bydzan A., Bolshakov V. Using hybrid digital models to analyse well interference and optimise field development management. *Proc. SPE Annu. Caspian Technical Conf.* Nur-Sultan, 2022, art. SPE-212120-MS. <https://doi.org/10.2118/212120-MS>.
11. Choubineh A., Chen J., Coenen F., Ma F., Wood D.A. Machine learning to improve natural gas reservoir simulations. In: Wood D.A., Cai A. (Eds.) *Sustainable Natural Gas Reservoir and Production Engineering*. Ch. 3. Ser.: The Fundamentals and Sustainable Advances in Natural Gas Science and Engineering. Vol. 1. Gulf Prof. Publ., 2021, pp. 55–82. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-824495-1.00011-5>.
12. Bascialla G., Rat C., Sheth S., Dias D., Mohammad R.H. Physics-informed machine learning application to complex compositional model in a giant field. *Proc. Int. Petroleum Technology Conf.* Dhahran, 2024, art. IPTC-23730-MS. <https://doi.org/10.2523/IPTC-23730-MS>.

13. McLean K., Zarrouk S.J. Pressure transient analysis of geothermal wells: A framework for numerical modelling. *Renewable Energy*, 2017, vol. 101, pp. 737–746.
<https://doi.org/10.1016/j.renene.2016.09.031>.
14. Zarrouk S.J., McLean K. Numerical pressure-transient analysis modelling framework. *Geothermal Well Test Analysis: Fundamentals, Applications and Advanced Techniques*. Ch. 8. Acad. Press, 2019, pp. 193–215. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-814946-1.00008-6>.
15. Charnyi I.A. *Podzemnaya gidrogazodinamika* [Underground Fluid Dynamics]. Moscow, GNTINGTL, 1963. 397 p. (In Russian)
16. Pykhachev G.B., Isaev R.G. *Podzemnaya gidravlika* [Underground Hydraulics]. Moscow, Nedra, 1973. 360 p. (In Russian)
17. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. *Podzemnaya gidromekhanika* [Underground Hydromechanics]. Moscow, Nedra, 1993. 416 p. (In Russian)
18. Deutsch C.V. *Geostaticheskoe modelirovanie kollektorov* [Geostatistical Reservoir Modeling]. Moscow, Izhevsk, IKI, 2011. 400 p. (In Russian)
19. Baikov V.A., Bakirov N.K., Yakovlev A.A. *Matematicheskaya geologiya* [Mathematical Geology]. Vol. 1: Introduction to geostatistics. Moscow, Izhevsk, IKI, 2012. 228 p. (In Russian)
20. Kotenev Yu.A., Sultanov Sh.Kh., Chibisov A.V., Chilikin V.M. Comprehensive assessment of the geological heterogeneity of reservoir systems in the process of regulating the development of oil fields. *Nanotechnol. Constr.*, 2024, vol. 16, no. 5, pp. 473–484.
<https://doi.org/10.15828/2075-8545-2024-16-5-473-484>.
21. Potashev K.A., Mazo A.B. Numerical modeling of local effects on the petroleum reservoir using fixed streamtubes for typical waterflooding schemes. *Georesources*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 70–78.
<https://doi.org/10.18599/grs.2020.4.70-78>. (In Russian)
22. Potashev K.A., Mazo A.B. Mathematical modeling of oil reservoir waterflooding using fixed streamtube at various values of ciscosity ratio. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 2023–2029. <https://doi.org/10.1134/S1995080221080254>.
23. Mazo A.B., Potashev K.A., Baushin V.V., Bulygin D.V. Numerical simulation of oil reservoir polymer flooding by the model of fixed stream tube. *Georesources*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 15–20.
<http://doi.org/10.18599/grs.19.1.3>. (In Russian)
24. Salimyanova D.R., Potashev K.A., Baushin V.V. The expediency of remote location from an injection well of water shut-off material in a high-permeability sublayer. *Georesources*, 2025, vol. 27, no. 1, pp. 261–266. <https://doi.org/10.18599/grs.2025.1.27>. (In Russian)
25. Lie K.-A. *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave: User Guide for the MATLAB Reservoir Simulation Toolbox (MRST)*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2019. 678 p.
26. Effective well radius.
URL: https://drive.google.com/drive/folders/1zrJgsOWwgCT_oGrULpc4XvvbQo-6fP6k.
27. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks]. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)

28. Mazo A.B., Potashev K.A. Absolute permeability upscaling for superelement modeling of petroleum reservoir. *Math. Models Comput. Simul.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 26–35. <https://doi.org/10.1134/S207004821801009X>.
29. Durlofsky L. Upscaling and gridding of fine scale geological models for flow simulation. *Proc. 8th Int. Forum on Reservoir Simulation*. Vol. 2024. Iles Borromees, 2005, pp. 1–59.
30. Potashev K.A., Akhunov R.R. Estimation of the heterogeneity of the reservoir fluid inflow to the cross-sectional contour of a vertical well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 180–192. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.180-192>. (In Russian)
31. Roache P. *Vychislitel'naya gidrodinamika* [Computational Fluid Dynamics]. Moscow, Mir, 1980. 616 p. (In Russian)
32. Peaceman D.W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1978, vol. 18, no. 3, art. SPE-6893-PA. <https://doi.org/10.2118/6893-PA>.
33. Spirina E.A., Potashev K.A., Mazo A.B. Evaluation of the reliability of the averaging over the reservoir thickness for the model with a fixed streamtube. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1158, no. 4, art. 042024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1158/4/042024>.
34. Potashev K.A., Akhunov R.R., Mazo A.B. Calculation of the flow rate between wells in the flow model of an oil reservoir using streamlines. *Georesources*, 2022, vol. 24, no. 1, pp. 27–35. <https://doi.org/10.18599/grs.2022.1.3>. (In Russian)
35. Oliver D.S. Moving averages for Gaussian simulation in two and three dimensions. *Math. Geol.*, 1995, vol. 27, no. 8, pp. 939–960. <https://doi.org/10.1007/BF02091660>.

Информация об авторах

Илья Валерьевич Еремин, магистрант, младший научный сотрудник, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ieremin726@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7559-2912>

Дилара Радиковна Салимьянова, аспирант, ассистент, Казанский (Приволжский) федеральный университет; младший научный сотрудник, Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»

E-mail: Dilara.Salimyanova@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4381-9073>

Константин Андреевич Поташев, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: kpotashev@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7107-2974>

Author Information

Ilya V. Eremin, Master's Student, Junior Researcher, Kazan Federal University

E-mail: *ieremin726@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-7559-2912>

Dilara R. Salimyanova, Postgraduate Student, Assistant, Kazan Federal University; Junior Researcher, National Research Centre "Kurchatov Institute"

E-mail: *Dilara.Salimyanova@gmail.com*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4381-9073>

Konstantin A. Potashev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of Department of Aerohydromechanics, Kazan Federal University

E-mail: *kpotashev@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7107-2974>

Поступила в редакцию 28.10.2025

Принята к публикации 8.11.2025

Received October 28, 2025

Accepted November 8, 2025