ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ
УДК 517.983: 517.986
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654

Алгебраические и порядковые свойства оператора блочного проектирования на алгебре измеримых операторов

М.Ф. Дарвиш Талеб[1], **М.А. Муратов**[2] ✉

[1] *Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*

[2] *Крымский федеральный университет, г. Симферополь, Россия*

✉ *mamuratov@gmail.com*

Аннотация

Пусть τ – точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Исследован оператор блочного проектирования $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ $(n \geq 2)$ в *-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ всех τ-измеримых операторов. Показано, что $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ для каждой операторно монотонной функции f на $\mathbb{R}^+$ и $A \in S(\mathcal{M},\tau)^+$. Для операторно выпуклой функции f на $\mathbb{R}^+$ имеем $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ для $A \in S(\mathcal{M},\tau)^+$. Изучены условия, при которых $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ принадлежит классам $S_0(\mathcal{M},\tau)$ τ-компактных операторов, $F(\mathcal{M},\tau)$ элементарных операторов, $L_p(\mathcal{M},\tau)$ τ-интегрируемых с p-й степенью операторов или самой алгебре $\mathcal{M}$. Если $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ является левым (правым) обратным для оператора A, то $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ также является левым (соответственно, правым) обратным для оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, след, измеримый оператор, оператор блочного проектирования

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1) и в рамках реализации Программы развития Регионального научно-образовательного математического центра «Азово-Черноморский математический центр» (соглашение № 075-02-2025-1543 от 27 февраля 2025 г.).

Для цитирования: *Дарвиш Талеб М.Ф., Муратов М.А.* Алгебраические и порядковые свойства оператора блочного проектирования на алгебре измеримых операторов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 4. С. 641–654. https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654.

ORIGINAL ARTICLE
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654

Algebraic and order properties of a block projection operator on the algebra of measurable operators

M.F. Darwish Taleb[1], **M.A. Muratov**[2] ✉

[1] *Kazan Federal University, Kazan, Russia*

[2] *V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

✉ *mamuratov@gmail.com*

Abstract

Let τ be a faithful normal semifinite trace on a von Neumann algebra $\mathcal{M}$. The block projection operator $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ $(n \geq 2)$ on the *-algebra $S(\mathcal{M},\tau)$ of all τ-measurable operators is investigated. It is shown that $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ for any operator monotone function f on $\mathbb{R}^+$ and $A \in S(\mathcal{M},\tau)^+$. For an operator convex function f on $\mathbb{R}^+$, we have $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$ for $A \in S(\mathcal{M},\tau)^+$. Conditions are established under which $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ belongs to the class $S_0(\mathcal{M},\tau)$ of τ-compact operators, to the class $F(\mathcal{M},\tau)$ of elementary operators, to the classes $L_p(\mathcal{M},\tau)$ of operators τ-integrable with p-th power, or to the $\mathcal{M}$ algebra itself. If $A, B \in S(\mathcal{M},\tau)$ and $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ is a left (right) inverse for the operator A, then $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ is also a left (respectively, right) inverse for the operator $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

Keywords: Hilbert space, von Neumann algebra, trace, measurable operator, block projection operator

Acknowledgments. This study was supported by the Development Program of the Research and Educational Mathematical Center of the Volga Region Federal District (agreement no. 075-02-2025-1725/1) and by the Development Program of the Regional Research and Educational Mathematical Center "Azov-Black Sea Mathematical Center" (agreement no. 075-02-2025-1543 dated February 27, 2025).

For citation: Darwish Taleb M.F., Muratov M.A. Algebraic and order properties of a block projection operator on the algebra of measurable operators. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 4, pp. 641–654.
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.4.641-654. (In Russian)

Введение

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов $(P = P^2 = P^*)$ в $\mathcal{M}$ и τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Для фиксированного набора $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ определим оператор блочного проектирования $\widetilde{\mathcal{P}}_n : S(\mathcal{M},\tau) \to S(\mathcal{M},\tau)$ формулой $\widetilde{\mathcal{P}}_n(X) = \sum_{k=1}^{n} P_k X P_k$

$(X \in S(\mathcal{M}, \tau))$. В [1] с использованием одного нетривиального неравенства из [2] показано, что оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ является положительным линейным сжатием в $\mathcal{M}$ и в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Этот факт был применен для описания крайних точек выпуклых вполне симметричных подмножеств в банаховом пространстве $L_1(\mathcal{M}, \tau) + \mathcal{M}$. В [3] доказано, что оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ определяет линейное положительное сжатие для всех нормированных идеальных пространств $\mathcal{X} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$, обладающих свойствами (A) и (B). Определения свойств (A) и (B) см. в [4, гл. 4, §3]. В [5] установлены неравенства равномерной субмажоризации для оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ на симметричных пространствах на $(\mathcal{M}, \tau)$. В квазинормируемом случае для пространств $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ с $0 < p \le 1$ были доказаны обратные неравенства.

При $P_1 + \cdots + P_n = I$ в [6] показано, что $X \le n\widetilde{\mathcal{P}}_n(X)$ для каждого оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$; если оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$, то $\widetilde{\mathcal{P}}_n(X)$ обратим в $S(\mathcal{M}, \tau)$; уточнен и усилен один пример из [5]. Напомним, что при $\mathcal{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\tau = \mathrm{tr}$ оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ был исследован в [7, гл. II, §5; гл. III, теорема 4.2; §7, п. 6°; теорема 8.7] и в случае, когда $\dim \mathscr{H} < +\infty$, в [8].

В данной статье исследуются алгебраические и порядковые свойства оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре $\mathcal{M}$. Наши результаты развивают и дополняют предыдущие работы других авторов в этой области.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{M}$ – алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ – решетка проекторов $(P = P^2 = P^*)$ в $\mathcal{M}$, I – единица в $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, $\mathcal{M}^+$ – конус положительных элементов из $\mathcal{M}$. Отображение $\psi : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ называется следом, если $\psi(X+Y) = \psi(X) + \psi(Y)$ и $\psi(\lambda X) = \lambda\psi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$ и $\lambda \ge 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\psi(Z^*Z) = \psi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След ψ называется *точным*, если $\psi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \ne 0$; *полуконечным*, если $\psi(X) = \sup\{\psi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+,\ Y \le X,\ \psi(Y) < +\infty\}$ для любого $X \in \mathcal{M}^+$; *нормальным*, если из соотношения $X_i \nearrow X$ $(X_i, X \in \mathcal{M}^+)$ следует, что $\psi(X) = \sup_i \psi(X_i)$ (см. [9, гл. V, §2], [10, гл. 1, §1.15]).

Оператор в $\mathscr{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ – точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathcal{M}$ и имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $D(X)$, называется τ-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathscr{H} \subset D(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [11, гл. IX], [10, гл. 2, §2.3]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^h$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\le$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ – полярное разложение оператора X, то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим функцию сингулярных значений оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\left\{\|XP\| :\ P \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P^\perp) \le t\right\}, \quad t > 0.$$

Тогда $\mu(t;X)=\mu(t;|X|)=\mu(t;X^*)$ и $\mu(t;|X|^p)=\mu(t;X)^p$ для всех $X\in S(\mathcal{M},\tau)$ и $0<p,t<+\infty$. Пусть m – линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p-пространство Лебега ($0<p<+\infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M},\tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M},\tau)=\left\{X\in S(\mathcal{M},\tau):\ \mu(\cdot;X)\in L_p(\mathbb{R}^+,m)\right\}$$

с F-нормой (нормой для $1\le p<+\infty$) $\|X\|_p=\|\mu(\cdot;X)\|_p$, $X\in L_p(\mathcal{M},\tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на все пространство $L_1(\mathcal{M},\tau)$ обозначаем той же буквой τ. В *-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ вводится топология t_τ сходимости по мере ([11, гл. IX, §2], [10, гл. 2, §2.5]), фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon,\delta}=\left\{X\in S(\mathcal{M},\tau):\ \|XQ\|\le\varepsilon,\ \tau(Q^{\perp})\le\delta\ \text{ для некоторого }\ Q\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}\right\},\quad \varepsilon>0,\ \delta>0.$$

Множество $S_0(\mathcal{M},\tau)=\left\{X\in S(\mathcal{M},\tau):\ \lim\limits_{t\to+\infty}\mu(t;X)=0\right\}$ является замкнутым в топологии t_τ идеалом в $S(\mathcal{M},\tau)$. Если $\tau(I)<+\infty$, то $S_0(\mathcal{M},\tau)=S(\mathcal{M},\tau)$ и t_τ является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в $S(\mathcal{M},\tau)$ (см. [12]). Множество элементарных операторов $F(\mathcal{M},\tau)=\big\{X\in\mathcal{M}:\ \mu(t;X)=0$ для некоторого $t>0\big\}$ является идеалом в $\mathcal{M}$.

Если $\mathcal{M}=\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\tau=\mathrm{tr}$ – канонический след, то $S(\mathcal{M},\tau)$, $S_0(\mathcal{M},\tau)$ и $F(\mathcal{M},\tau)$ совпадают с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, с идеалом $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов в $\mathscr{H}$ и с идеалом $F(\mathscr{H})$ конечномерных операторов в $\mathscr{H}$ соответственно. Топология t_τ совпадает с задаваемой C^*-нормой $\|\cdot\|$ равномерной топологией на $\mathcal{M}$. Имеем

$$\mu(t;X)=\sum_{n=1}^{\infty}s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t),\quad t>0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность s-чисел компактного оператора X; χ_A – индикатор множества $A\subset\mathbb{R}$ [7, гл. II]. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M},\tau)$ есть идеал Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0<p<+\infty$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т.е. коммутативна), то $\mathcal{M}\simeq L^\infty(\Omega,\Sigma,\nu)$ и $\tau(f)=\int_\Omega f\,d\nu$, где (Ω,Σ,ν) – локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t;f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$.

Пусть $P_1,\ldots,P_n\in\mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. Определим оператор блочного проектирования $\widetilde{\mathcal{P}}_n: S(\mathcal{M},\tau)\to S(\mathcal{M},\tau)$ формулой: $\widetilde{\mathcal{P}}_n(X)=\sum_{k=1}^n P_kXP_k$, $X\in S(\mathcal{M},\tau)$. Оператор $A\in S(\mathcal{M},\tau)$ называется τ-существенно обратимым справа, если существует $B\in S(\mathcal{M},\tau)$ такой, что оператор $I-AB$ является τ-компактным; τ-существенно обратимым слева, если существует $B\in S(\mathcal{M},\tau)$ такой, что оператор $I-BA$ является τ-компактным [13; 14]. Обозначим через $F(\mathbb{R}^+)$ множество всех непрерывных функций $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, для которых $f(0)=0$.

2. Основные результаты

Лемма 1. *Если* $f \in F(\mathbb{R}^+)$, *то для любого оператора* $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ *выполняется равенство*:

$$f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) = \sum_{k=1}^{n} f(P_k A P_k).$$

Доказательство. *Шаг 1.* Для функций вида $f(\lambda) = \lambda^m$ $(m \in \mathbb{N})$ равенство очевидно. Для произвольного $A \in \mathcal{M}^+$ утверждение следует из теоремы Вейерштрасса о равномерной полиномиальной аппроксимации непрерывных функций на отрезке.

Шаг 2. Для любого оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ существует последовательность операторов $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+$, сходящаяся к A в топологии t_τ сходимости по мере τ при $i \to +\infty$. Далее применяем результат О.Е. Тихонова о t_τ-непрерывности операторных функций [15]. □

Теорема 1. *Пусть* $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $n \geq 2$ *и* $f \in F(\mathbb{R}^+)$.

(i) *Если* f *является операторно монотонной на* $\mathbb{R}^+$, *то* $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \geq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$.

(ii) *Если* f *является операторно выпуклой на* $\mathbb{R}^+$, *то* $f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)) \leq \widetilde{\mathcal{P}}_n(f(A))$.

Доказательство. (i). Для операторно монотонной функции $f \in F(\mathbb{R}^+)$ согласно неравенству Хансена [16] выполняются соотношения $f(P_k A P_k) \geq P_k f(A) P_k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Затем применяем лемму 1.

(ii). Для операторно выпуклой функции $f \in F(\mathbb{R}^+)$ по неравенству Хансена–Педерсена [17] имеем $f(P_k A P_k) \leq P_k f(A) P_k$ при всех $k = 1, \ldots, n$. Далее снова используем лемму 1. □

Лемма 2. *Пусть* $f \in F(\mathbb{R}^+)$. *Тогда для любого оператора* $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ *и любой изометрии* $U \in \mathcal{M}$ $(U^*U = I)$ *выполняется равенство* $f(UAU^*) = Uf(A)U^*$.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 1. □

Теорема 2. *Пусть* $P_1 + \cdots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+, n \geq 2$ *и* $f \in F(\mathbb{R}^+)$ *– возрастающая функция.*

(i) *Если* f *выпукла, то* $\tau(f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A))) \leq \tau(f(A))$.

(ii) *Если* f *вогнута, то* $\tau(f(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A))) \geq \tau(f(A))$.

Доказательство. Утверждение следует из представления (см. [3, лемма 2])

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} S_k A S_k^* \tag{1}$$

и приведенного в лемме 2 равенства. □

Теорема 3. *Пусть* $P_1 + \cdots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ *и* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$. *Тогда*

(i) $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)A$;

(ii) $P_kAP_k \in \mathcal{M}^{\mathrm{pr}}$ *для всех* $k = 1, \ldots, n$;

(iii) *оператор* A *представим в виде суммы* n *проекторов из* $\mathcal{M}$.

Доказательство. (i). Из [6, лемма 1] следует неравенство $n^{-1}A \leq \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$. Применяем известный результат, который утверждает, что

«если $0 \leq \lambda A \leq P$ для некоторого $\lambda > 0$ и P – проектор, то A коммутирует с P»
(см. [18, гл. 2, п. 2.17]), и получаем соотношение перестановочности $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)A$.

(ii). Поскольку $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)^2$, имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} P_kAP_k = \sum_{k=1}^{n} P_kAP_kAP_k.$$

Умножая обе части этого равенства слева и справа на проектор P_j, получаем соотношение $P_jAP_j = (P_jAP_j)^2$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, каждый P_jAP_j является идемпотентом и тем самым проектором, поскольку $P_jAP_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

(iii). Для каждого j определим частичную изометрию $V_j := \sqrt{A}P_j$. Тогда верны следующие утверждения:

1) сопряженный оператор $V_j^* = P_j\sqrt{A}$ также является частичной изометрией;
2) оператор $V_jV_j^* = \sqrt{A}P_j\sqrt{A}$ есть проектор (см. [19, задача 127]);
3) справедливо разложение

$$A = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{A}P_j\sqrt{A},$$

что представляет оператор A как сумму n проекторов из алгебры $\mathcal{M}$. □

Теорема 4. *Пусть* $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $0 < p < +\infty$ *и* $n \geq 2$. *Тогда*

(i) *если* $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$;

(ii) *если* $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$;

(iii) *если* $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$;

(iv) *если* $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in \mathcal{M}$;

(v) *если* $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_{2p}(\mathcal{M}, \tau)$.

Доказательство. (i). Пусть $A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = \sum_k A^*P_kAP_k = 0$. Умножая все части этого равенства слева на проектор P_k, получаем $P_kA^*P_kAP_k = |P_kAP_k|^2 = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$, откуда $P_kAP_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$.

(ii). Из соотношения $P_kA^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = P_kA^*P_kAP_k = |P_kAP_k|^2 \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, определения идеала $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ и свойства функции сингулярных значений [20] $\mu(t; |X|^2) = \mu(t; X)^2$ следует, что $P_kAP_k \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

(iii). Так как множество $F(\mathcal{M},\tau)$ замкнуто относительно извлечения корня из своих неотрицательных операторов, из $P_kA^*P_kAP_k \in F(\mathcal{M},\tau)$ следует $|P_kAP_k| \in F(\mathcal{M},\tau)$. Поэтому $P_kAP_k \in F(\mathcal{M},\tau)$ для всех $k=1,\dots,n$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)=\sum_{k=1}^n P_kAP_k \in F(\mathcal{M},\tau)$.

(iv). Из $P_kA^*P_kAP_k \in \mathcal{M}$ следует $|P_kAP_k|^2 \in \mathcal{M}$. Следовательно,

$$\mu(t;|P_kAP_k|^2)=\mu(t;|P_kAP_k|)^2=\mu(t;P_kAP_k)^2<+\infty$$

для всех $t>0$ и $k=1,\dots,n$. Таким образом, $P_kAP_k \in \mathcal{M}$ для всех $k=1,\dots,n$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\in\mathcal{M}$.

(v). Имеем

$$P_kAP_k|^2=P_kA^*P_kAP_k=P_k\cdot A^*\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\cdot P_k \in L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$$

для всех $k=1,\dots,n$. Поэтому $|P_kAP_k|\in L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$ для всех $k=1,\dots,n$. Следовательно, $P_kAP_k \in L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$ для всех $k=1,\dots,n$, и в силу линейности пространства $L_{2p}(\mathcal{M},\tau)$ получаем

$$\sum_{k=1}^n P_kAP_k=\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\in L_{2p}(\mathcal{M},\tau). \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть* $A,B\in S(\mathcal{M},\tau)$ *и* $0<p<+\infty$. *Тогда*

(i) *если* $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)A$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$;

(ii) *имеем* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B))=\widetilde{\mathcal{P}}_n(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B)=\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$. *В частности, если* $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=0$ *или* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B=0$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=0$;

(iii) *если* $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in S_0(\mathcal{M},\tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in S_0(\mathcal{M},\tau)$;

(iv) *если* $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in L_p(\mathcal{M},\tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in L_p(\mathcal{M},\tau)$;

(v) *если* $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in F(\mathcal{M},\tau)$, *то* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\in F(\mathcal{M},\tau)$.

Доказательство. (i). Имеем

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=\left(\sum_{i=1}^n P_iAP_i\right)\left(\sum_{j=1}^n P_jBP_j\right)=\sum_{i,j=1}^n P_iAP_iP_jBP_j=\sum_{i=1}^n P_iAP_iBP_i.$$

Аналогично

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)=\sum_{i=1}^n P_iBP_iAP_i.$$

Умножая обе части равенства $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)A$ слева и справа на проектор P_i, получаем

$$P_iAP_iBP_i=P_iBP_iAP_i,\quad i=1,\dots,n.$$

Следовательно, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)=\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$.

(ii). Имеем

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^{n} P_k \left(A \sum_{i=1}^{n} P_i B P_i \right) P_k = \sum_{k=1}^{n} P_k A P_k B P_k.$$

Сравнивая с равенством $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = \sum_{k=1}^{n} P_k A P_k B P_k$, заключаем, что $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$. Если $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = 0$, то

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(0) = 0 = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B).$$

Аналогично для $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B = 0$.

(iii)–(v). Из пункта (ii) следуют соотношения

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^{n} P_k A P_k B P_k \in S_0(\mathcal{M}, \tau). \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть* $A \in \mathcal{M}$, $B \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ (*или* $B \in \mathcal{M}$, $A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$). *Тогда*
(i) *имеем* $\tau(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B)$;
(i) *если* $P_1 + \cdots + P_n = I$, *то* $\tau(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B))$.

Доказательство. (i). Имеем $\tau(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau\big(\sum_{k=1}^{n} AP_kBP_k\big) = \sum_{k=1}^{n} \tau\big(AP_kBP_k\big)$. Так как $\tau(XY) = \tau(YX)$ для всех $X \in \mathcal{M}$ и $Y \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ (см. [11, гл. IX, теорема 2.13] и [21, теорема 17]), то $\tau(AP_kBP_k) = \tau(P_kAP_kB)$ и

$$\tau(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \sum_{k=1}^{n} \tau(P_kAP_kB) = \tau\left(\sum_{k=1}^{n} P_kAP_kB\right) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B).$$

(ii). Пусть $P_1 + \cdots + P_n = I$. Тогда из представления (1) следует, что $\tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(X)) = \tau(X)$ для любого оператора $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Подставляя в последнее равенство $X = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B$, получаем

$$\tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B)).$$

В силу п. (ii) теоремы 5 имеем $\widetilde{\mathcal{P}}_n(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$. Таким образом,

$$\tau(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \tau(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)). \qquad \square$$

Следствие 2. *Пусть* $P_1 + \cdots + P_n = I$, $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$, *и предположим, что* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ *является правым обратным для оператора* A (*соответственно,* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ *– левым обратным для оператора* B). *Тогда* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ *будет правым обратным для оператора* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (*соответственно,* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ *– левым обратным для оператора* $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$).

Доказательство. Если $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = I$, то в силу п. (ii) теоремы 5 имеем

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B).$$

Поскольку $\widetilde{\mathcal{P}}_n(I) = I$, получаем $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = I$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ – правый обратный для $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$. Аналогично, если $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B = I$, то

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) = I,$$

следовательно, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ является левым обратным для $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$. □

Следствие 3. *Пусть $P_1 + \cdots + P_n = I$, $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$, и предположим, что $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ является τ-существенным правым обратным для оператора A (соответственно, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ-существенным левым обратным для оператора B). Тогда $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ будет τ-существенным правым обратным для оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (соответственно, $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ-существенным левым обратным для оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$).*

Доказательство. A. Случай τ-существенного правого обратного. По условию оператор $I - A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Применяя п. (ii) теоремы 5, получаем

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(I - A\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)) = I - \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$

Следовательно, оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ – τ-существенный правый обратный для $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$, так как оператор $I - \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$ τ-компактен.

B. Случай τ-существенного левого обратного. Аналогичным образом, если $I - \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то

$$\widetilde{\mathcal{P}}_n(I - \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)B) = I - \widetilde{\mathcal{P}}_n(A)\widetilde{\mathcal{P}}_n(B) \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$

Следовательно, оператор $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ – τ-существенный левый обратный для $\widetilde{\mathcal{P}}_n(B)$. □

Теорема 6. *Пусть $P_1 + \cdots + P_n = I$, $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$, $n \geq 2$ и $0 < p, q < +\infty$. Тогда*

(i) *если $\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно, $L_p(\mathcal{M}, \tau); \mathcal{M}$), то $A \in F(\mathcal{M}, \tau)$ (соответственно, $L_p(\mathcal{M}, \tau); \mathcal{M}$);*

(ii) *если $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) = 0$, то $A = 0$;*

(iii) *если $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$;*

(iv) *если $A \in \mathcal{M}^+$ и $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in F(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in F(\mathcal{M}, \tau)$;*

(v) *если $A \in L_p(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_q(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in L_{\frac{3pq}{p+q}}(\mathcal{M}, \tau)$;*

(vi) *если $A \in \mathcal{M}^+$ и $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A) \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$, то $A \in L_{3p}(\mathcal{M}, \tau)$.*

Доказательство. (i). Следует из неравенства $A \leq n\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)$ (см. [6, лемма 2]).

(ii). Имеем

$$A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)A = \sum_{k=1}^{n} AP_kAP_kA = 0.$$

Так как $AP_kAP_kA \geq 0$, то $AP_kAP_kA = \left|\sqrt{A}P_kA\right|^2 = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $\sqrt{A}P_kA = 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$ и

$$A^{3/2} = \sqrt{A} \cdot I \cdot A = \sqrt{A} \cdot \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot A = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{A}P_kA = 0.$$

Получили $0 = \mu(t; A^{3/2}) = \mu(t; A)^{3/2}$ для всех $t > 0$. Значит, $\mu(t; A) = 0$ для всех $t > 0$ и $A = 0$.

(iii). Аналогично (ii), но с заменой «0» на соотношение «$\in S_0(\mathcal{M}, \tau)$» и с учетом равенства

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \mu(t; A^{3/2}) = \lim_{t\to+\infty} \mu(t; A)^{3/2} = \lim_{t\to+\infty} \mu(t; A).$$

(iv). Следует из (i) и свойств следа τ.

(v). Используем то, что $A\widetilde{\mathcal{P}}_n(A)A \in L_r(\mathcal{M}, \tau)$, где $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ [22]. Из соотношения $\left|\sqrt{A}P_kA\right|^2 \in L_r(\mathcal{M}, \tau)$ следует $\sqrt{A}P_kA \in L_{2r}(\mathcal{M}, \tau)$. Поскольку $L_{2r}(\mathcal{M}, \tau)$ является линейным пространством, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{A}P_kA = \sqrt{A} \cdot \sum_{k=1}^{n} P_k \cdot A = \sqrt{A} \cdot I \cdot A = A^{3/2} \in L_{2r}(\mathcal{M}, \tau).$$

Отсюда в силу определения пространства $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ получаем $A \in L_{3r}(\mathcal{M}, \tau)$, где $3r = \dfrac{3pq}{p+q}$.

(vi). Частный случай п. (v) при $q \to +\infty$. $\square$

Заключение

В этой работе получены новые алгебраические и порядковые свойства оператора $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ в *-алгебре $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Возможно, часть наших результатов переносится и на изученные в [23] алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к произвольным алгебрам фон Неймана.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators // Integr. Equations Oper. Theory. 1992. V. 15, No 2. P. 186–226. https://doi.org/10.1007/BF01204237.

2. *Kaftal V., Weiss G.* Compact derivations relative to semifinite von Neumann algebras // J. Funct. Anal. 1985. V. 62, No 2. P. 202–220. https://doi.org/10.1016/0022-1236(85)90003-5.

3. *Бикчентаев А.М.* Оператор блочного проектирования в нормированных идеальных пространствах измеримых операторов // Изв. вузов. Матем. 2012. № 2. С. 86–91.

4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. 4-е изд., испр. СПб.: Невский Диалект, 2004. 816 с.

5. *Bikchentaev A., Sukochev F.* Inequalities for the block projection operators// J. Funct. Anal. 2021. V. 280, No 7. Art. 108851. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108851.

6. *Бикчентаев А.М.* Оператор блочного проектирования в алгебре измеримых операторов // Изв. вузов. Матем. 2023. № 10. С. 77–82. https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-10-77-82.

7. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

8. *Бикчентаев А.М.* Неравенства для определителей и характеризация следа // Сиб. матем. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 314–321. https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.206.

9. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras I. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. V. 124. Berlin, Heidelberg: Springer, 2002. xix, 415 p.

10. *Dodds P.G., de Pagter B., Sukochev F.A.* Noncommutative Integration and Operator Theory. Ser.: Progress in Mathematics. V. 349. Cham: Birkhäuser, 2023. xi, 577 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49654-7.

11. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras II. Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. V. 125. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. xxii, 518 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4.

12. *Бикчентаев А.М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Матем. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349. https://doi.org/10.4213/mzm36.

13. *Bikchentaev A.M.* On τ-essential invertibility of τ-measurable operators // Int. J. Theor. Phys. 2019. V. 60, No 2. P. 567–575. https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w.

14. *Бикчентаев А.М.* Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. матем. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282. https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.203.

15. *Тихонов О.Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана// Изв. вузов. Матем. 1987. № 1. С. 77–79.

16. *Hansen F.* An operator inequality // Math. Ann. 1980. V. 246, No 3. P. 249–250. https://doi.org/10.1007/BF01371046.

17. *Hansen F., Pedersen G.K.* Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem // Math. Ann. 1982. V. 258, No 3. P. 229–241. https://doi.org/10.1007/BF01450679.

18. *Strătilă S.V., Zsidó L.* Lectures on von Neumann Algebras. Cambridge IISc Ser. Cambridge Univ. Press, 2019. xii, 427 p. https://doi.org/10.1017/9781108654975.

19. *Halmos P.R.* A Hilbert Space Problem Book. Ser.: Graduate Texts in Mathematics. V. 19. New York, NY: Springer, 1982. xvii, 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6.

20. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pac. J. Math. 1986. V. 123, No 2. P. 269–300. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1986.123.269.

21. *Brown L.G., Kosaki H.* Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras // J. Oper. Theory. 1990. V. 23, No 1. P. 3–19.

22. *Kosaki H.* On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^*-algebra // J. Funct. Anal. 1984. V. 59, No 1. P. 123–131. https://doi.org/10.1016/0022-1236(84)90055-7.

23. *Муратов М.А., Чилин В.И.* Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // СМФН. 2016. Т. 61. С. 115–163.

References

1. Chilin V.I., Krygin A.V., Sukochev F.A. Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators. *Integr. Equations Oper. Theory*, 1992, vol. 15, no. 2, pp. 186–226. https://doi.org/10.1007/BF01204237.

2. Kaftal V., Weiss G. Compact derivations relative to semifinite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.*, 1985, vol. 62, no. 2, pp. 202–220. https://doi.org/10.1016/0022-1236(85)90003-5.

3. Bikchentaev A.M. Block projection operator in normed solid spaces of measurable operators. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 2, pp. 75–79. https://doi.org/10.3103/S1066369X12020107.

4. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis]. St. Petersburg, Nevskii Dialekt, 2004. 816 p. (In Russian)

5. Bikchentaev A., Sukochev F. Inequalities for the block projection operators. *J. Funct. Anal.*, 2021, vol. 280, no. 7, art. 108851. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108851.

6. Bikchentaev A.M. A block projection operator in the algebra of measurable operators. *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 10, pp. 70–74. https://doi.org/10.3103/S1066369X23100031.

7. Gohberg I.C., Krein M.G. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space]. Moscow, Nauka, 1965. 448 p. (In Russian)

8. Bikchentaev A.M. Inequalities for determinants and characterization of the trace. *Sib. Math. J.*, 2020, vol. 61, no. 2, pp. 248–254. https://doi.org/10.1134/S0037446620020068.

9. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras I.* Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 124. Berlin, Heidelberg, Springer, 2002. xix, 415 p.

10. Dodds P.G., de Pagter B., Sukochev F.A. *Noncommutative Integration and Operator Theory.* Ser.: Progress in Mathematics. Vol. 349. Cham, Birkhäuser, 2023. xi, 577 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-49654-7.

11. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras II.* Ser.: Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Vol. 125. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003. xxii, 518 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10451-4.

12. Bikchentaev A.M. Minimality of convergence in measure topologies on finite von Neumann algebras. *Math. Notes*, 2004, vol. 75, no. 3, pp. 315–321. https://doi.org/10.1023/B:MATN.0000023310.15215.c6.

13. Bikchentaev A.M. On τ-essential invertibility of τ-measurable operators. *Int. J. Theor. Phys.*, 2019, vol. 60, no. 2, pp. 567–575. https://doi.org/10.1007/s10773-019-04111-w.

14. Bikchentaev A.M. Essentially invertible measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra and commutators. *Sib. Math. J.*, 2022, vol. 63, no. 2, pp. 224–232. https://doi.org/10.1134/S0037446622020033.

15. Tikhonov O.E. Continuity of operator functions in topologies connected with a trace on a von Neumann algebra. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 1, pp. 110–114.

16. Hansen F. An operator inequality. *Math. Ann.*, 1980, vol. 246, no. 3, pp. 249–250. https://doi.org/10.1007/BF01371046.

17. Hansen F., Pedersen G.K. Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem. *Math. Ann.*, 1982, vol. 258, no. 3, pp. 229–241. https://doi.org/10.1007/BF01450679.

18. Strătilă S.V., Zsidó L. *Lectures on von Neumann Algebras.* Cambridge IISc Ser. Cambridge Univ. Press, 2019. xii, 427 p. https://doi.org/10.1017/9781108654975.

19. Halmos P.R. *A Hilbert Space Problem Book.* Ser.: Graduate Texts in Mathematics. Vol. 19. New York, NY, Springer, 1982. xvii, 373 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9330-6.

20. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators. *Pac. J. Math.*, 1986, vol. 123, no. 2, pp. 269–300. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1986.123.269.

21. Brown L.G., Kosaki H. Jensen's inequality in semi-finite von Neumann algebras. *J. Oper. Theory*, 1990, vol. 23, no. 1, pp. 3–19.

22. Kosaki H. On the continuity of the map $\varphi \mapsto |\varphi|$ from the predual of a W^*-algebra. *J. Funct. Anal.* 1984, vol. 59, no. 1, pp. 123–131. https://doi.org/10.1016/0022-1236(84)90055-7.

23. Muratov M.A., Chilin V.I. Topological algebras of measurable and locally measurable operators. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 239, no. 5, pp. 654–705. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04320-y.

Информация об авторах

Мохаммад Фирас Дарвиш Талеб, аспирант, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *m.firas.darwish.d@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-3554-7123

Мустафа Абдурешитович Муратов, доктор физико-математических наук, профессор, Крымский федеральный университет

E-mail: *mamuratov@gmail.com*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9993-2275

Author Information

Mohammed Firas Darwish Taleb, Postgraduate Student, Kazan Federal University

E-mail: *m.firas.darwish.d@mail.ru*

ORCID: https://orcid.org/0009-0005-3554-7123

Mustafa A. Muratov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, V.I. Vernadsky Crimean Federal University

E-mail: *mamuratov@gmail.com*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9993-2275

Поступила в редакцию 8.10.2025
Принята к публикации 20.10.2025

Received October 8, 2025
Accepted October 20, 2025