

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.956, 532.5.032

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.326-343

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СОПРЯЖЁННОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

А. А. Азанов¹, Е. Н. Лемешкова²

¹Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, 660041, Россия

²Сибирское отделение Российской академии наук, г. Красноярск, 660036, Россия

Аннотация

Изучается совместная конвекция двух вязких теплопроводных жидкостей в трёхмерном слое с твёрдыми плоскими стенками. Предполагается, что поле скоростей подобно полю скоростей Хименца, а поле температур соответствует локальному нагреву (охлаждению) твёрдой нижней стенки. Эволюция этой системы описана уравнениями Обербека–Буссинеска в каждой жидкости. Возникающая нелинейная сопряжённая интегродифференциальная краевая задача является обратной, поскольку продольные градиенты давления должны находиться совместно с полем скоростей и температур. Для их нахождения поставлены интегральные условия переопределения, имеющие ясный физический смысл – замкнутость потока. Поставленная обратная начально-краевая задача описывает конвекцию в двухслойной системе, возникающую вблизи точки экстремума температуры на нижней твёрдой стенке. При малых числах Марангони задача аппроксимирована линейно (число Марангони играет роль числа Рейнольдса для уравнений Навье–Стокса). На основе полученных априорных оценок даны достаточные условия выхода нестационарного решения на стационарный режим с ростом времени.

Ключевые слова: модель Обербека–Буссинеска, тепловая конвекция, термокапиллярность, поверхность раздела, обратная задача, априорные оценки

Введение

Рассмотрим решение уравнений Обербека–Буссинеска вида

$$\mathbf{u} = ((f(z, t) + h(z, t))x, (f(z, t) - h(z, t))y, -2 \int_0^z f(\xi, t) d\xi), \quad \bar{p} = \bar{p}(x, y, z, t), \quad (1)$$
$$\theta = a(z, t)x^2 + b(z, t)y^2 + q(z, t),$$

где $\bar{p}$ – модифицированное давление.

Исходная идея искать точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных, по-видимому, впервые предложена в работе [1]. Было показано, что общая трёхмерная система уравнений вязкой магнитной гидродинамики редуцируется к замкнутой системе одномерных уравнений. Аналогичный результат для уравнений газовой динамики был получен в [2]. Более специальный случай представления поля скорости (1) для движения одной жидкости рассмотрен в [3, 4], причём давление

зависело лишь от вертикальной координаты и времени. Температура была распределена по квадратичному закону (1) только на свободных границах слоя $z = \pm Z(t)$ и вызывала термокапиллярный эффект. Численное решение последней задачи с учётом общего распределения температуры $\theta(z, y, z, t)$ в слое $-Z(t) < z < Z(t)$ получено в статье [5]. Обстоятельный обзор точных решений системы уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от x и y дан в [6]. В [7] решение (1) применено для описания медленной конвекции одной жидкости в слое со свободной границей. Влиянию межфазной поверхностной энергии на стационарную конвекцию в рамках решения (1) посвящена работа [8]. Нестационарная ползущая конвекция в случае изотермической поверхности раздела для решения (1) изучена в статьях [9], [10]. Нелинейная стационарная задача о конвекции двух жидких сред численно исследована в [11]. В работе [11] решение линейной задачи (при малых числах Марангони) найдено в аналитическом виде, а нелинейная задача решена тау-методом. Установлено, что найденное решение нелинейной задачи при уменьшении числа Марангони стремится к решению задачи о ползущем течении. Проведён анализ влияния безразмерных физических и геометрических параметров на структуру течений в слоях. Отметим, что аналогичные двумерные задачи (решение (1) можно назвать трехмерным аналогом известного решения Хименца) в различных постановках изучены в монографии [12].

Течения типа Хименца известны как течения вблизи застойной или критической точки (точка, в которой скорость обращается в нуль) и служат предметом исследований по многим направлениям. Это может быть связано с управлением движением жидкости в различных аппаратах и устройствах промышленности, технологическими процессами. Течения типа Хименца можно наблюдать как в макромасштабах (например, использование технологий гидроразрыва пласта в нефтедобывающей промышленности), так и в микромасштабах (например, жидкостные биочипы в медицине). Изучение характеристик подобных течений необходимо для оценки технологических параметров, а также для прогнозирования динамики и эволюции жидкого слоя. Точные решения определяющих уравнений – наиболее эффективный способ исследования процессов в жидкости, а также получения оценочных характеристик. В настоящее время представлены решения задач, описывающих течения типа Хименца в различной геометрии: осесимметричный [13] и трёхмерный [14] аналоги решения Хименца, в том числе для течений в цилиндрической геометрии [15]. Краткий обзор точных решений, близких к решению Хименца, дан в [16].

В настоящей работе квадратичная зависимость по x и y температур в (1) служит дополнительным предположением и хорошо согласуется с условиями на поверхности раздела. В статье получены априорные оценки решения рассматриваемой задачи в равномерной метрике и даны достаточные условия, при которых решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим с ростом времени. Полученные результаты могут быть использованы для оценки интенсивности конвекции в микроканалах и нанотрубках.

1. Постановка задачи

Подстановка решения (1) в систему уравнений Обербека–Буссинеска и дальнейший анализ на совместность приводят к выводу, что и модифицированное давление в слоях является квадратичной функцией координат x и y [9]. Далее это решение применено для описания двухслойной термокапиллярной конвекции в слое $-l_1 < z < l_2$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$. Границы слоя $z = l_1$, $z = l_2$ – твёрдые неподвижные стенки, а $z = 0$ – неподвижная поверхность раздела между

слоем $-l_1 < z < 0$ и слоем $0 < z < l_2$ жидкостей "1", "2". Эти теплопроводные вязкие жидкости имеют постоянные плотности ρ_j ($\rho_2 < \rho_1$), кинематические вязкости ν_j , температуропроводности χ_j и коэффициенты тепловых расширений β_j , $j = 1, 2$. На границе раздела $z = 0$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры: $\sigma(\theta_1) = \sigma_0 - \varkappa\theta_1(x, y, 0, t)$ с постоянными σ_0 и $\varkappa > 0$.

Замечание 1. Чтобы поверхность раздела была плоской, достаточно предположить малость числа Бонда $\text{Bo} = g(\rho_1 - \rho_2)l_1^2/\sigma_0$ и капиллярного числа $\text{Ca} = \mu_1\chi_1/\sigma_0l_1$ (см. [13]).

Неизвестными согласно (1) являются функции $f_j(z, t)$, $h_j(z, t)$, $a_j(z, t)$, $b_j(z, t)$, $q_j(z, t)$, причём $-l_1 \leq z \leq 0$ при $j = 1$ и $j = 2$ для $0 \leq z \leq l_2$. Пусть $a^* = \max_{t \geq 0} (|\alpha_1(t)|, |\alpha_2(t)|)$, $\theta^* = \max_{t \geq 0} |\alpha_3(t)|$ – характерная температура, так что a^*l_1 – характерный градиент температуры, $\tau = \chi_1 l_1^{-2} t$ – характерное тепловое время конвекции. Для первого слоя при $j = 1$ положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_1}, \quad -1 < \xi < 0, \quad f_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} \text{MF}_1(\xi, \tau), \quad h_1 = \frac{\chi_1}{l_1^2} \text{MH}_1(\xi, \tau), \\ a_1 &= a^* A_1(\xi, \tau), \quad b_1 = a^* B_1(\xi, \tau), \quad q_1 = \theta^* Q_1(\xi, \tau), \quad s_j = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} \text{MS}_j(\tau), \\ \text{M} &= \frac{\varkappa_1 a^* l_1^3}{\mu_1 \chi_1}, \quad \text{P}_1 = \frac{\nu_1}{\chi_1}, \quad L_1 = \frac{\rho_1 \beta_1 g l_1^2}{\varkappa_1}, \quad d = \frac{a^* l_1^2}{\theta^*}, \end{aligned}$$

а для второго слоя $j = 2$ положим

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{l_2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad f_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} \text{MF}_2(\xi, \tau), \quad h_2 = \frac{\chi_1}{l_1^2} \text{MH}_2(\xi, \tau), \\ a_2 &= a^* A_2(\xi, \tau), \quad b_2 = a^* B_2(\xi, \tau), \quad q_2 = \theta^* Q_2(\xi, \tau), \quad s_i = \frac{\chi_1^2}{l_1^4} \text{MS}_k(\tau), \quad i = 3, 4, \\ \text{P}_2 &= \frac{\nu_2}{\chi_2}, \quad L_2 = \frac{\rho_1 \beta_2 g l_1 l_2}{\varkappa_1}, \quad \chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}, \quad l = \frac{l_1}{l_2}, \quad \mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \end{aligned}$$

где M – число Марангони, P_1 и P_2 – числа Прандтля.

В безразмерных переменных температура на нижней стенке есть

$$\bar{\theta}(\bar{x}, \bar{y}, -1, \tau) = \frac{\theta(x, y, -l_1)}{\theta^*} = d\bar{\alpha}_1(\tau)\bar{x}^2 + d\bar{\alpha}_2(\tau)\bar{y}^2 + \bar{\alpha}_3(\tau), \quad (2)$$

где $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1/a^*$, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2/a^*$, $\bar{\alpha}_3 = \alpha_3/\theta^*$, $\alpha_k = \text{const}$, $k = 1, 2, 3$, $\bar{x} = x/l_1$, $\bar{y} = y/l_1$. Поэтому $A_1(-1) = d\bar{\alpha}_1 \equiv \alpha_1$, $B_1(-1) = d\bar{\alpha}_2 \equiv \alpha_2$, $Q_1(-1) = \bar{\alpha}_3 \equiv \alpha_3$. Очевидно, что температурное поле на нижней твёрдой стенке имеет экстремум в точке $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$: при $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ – максимум, а при $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ – минимум, то есть решение (1), (2) описывает конвекцию вблизи критической точки $x = 0$, $y = 0$.

Предположим, что $|\text{M}| \ll 1$, и будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} F_j &= F_j^{(0)} + \text{M}F_j^{(1)} + \dots, \quad H_j = H_j^{(0)} + \text{M}H_j^{(1)} + \dots, \\ A_j &= A_j^{(0)} + \text{M}A_j^{(1)} + \dots, \quad B_j = B_j^{(0)} + \text{M}B_j^{(1)} + \dots, \quad Q_j = Q_j^{(0)} + \text{M}Q_j^{(1)} + \dots, \\ S_i &= S_i^{(0)} + \text{M}S_i^{(1)} + \dots, \quad j = 1, 2, \quad i = \overline{1, 4}, \quad n = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Считая, что $L_j = O(1)$ при $M \rightarrow 0$, в нулевом приближении получим линейную обратную задачу (индекс "0" опущен)

$$\begin{aligned} F_{1\tau} &= P_1 F_{1\xi\xi} - P_1 L_1 \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) + B_1(\xi, \tau)) d\xi - S_1(\tau), \\ H_{1\tau} &= P_1 H_{1\xi\xi} - P_1 L_1 \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) - B_1(\xi, \tau)) d\xi - S_2(\tau), \\ A_{1\tau} &= A_{1\xi\xi}, \quad B_{1\tau} = B_{1\xi\xi}, \quad Q_{1\tau} = Q_{1\xi\xi} + 2d(A_1 + B_1), \quad -1 < \xi < 0, \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} F_{2\tau} &= \frac{P_2 l^2}{\chi} F_{2\xi\xi} - P_1 L_2 \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) + B_2(\xi, \tau)) d\xi - S_3(\tau), \\ H_{2\tau} &= \frac{P_2 l^2}{\chi} H_{2\xi\xi} - P_1 L_2 \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) - B_2(\xi, \tau)) d\xi - S_4(\tau), \\ A_{2\tau} &= \frac{l^2}{\chi} A_{2\xi\xi}, \quad B_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} B_{2\xi\xi}, \quad Q_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} Q_{2\xi\xi} + \frac{2d}{\chi} (A_2 + B_2), \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \quad (4)$$

На нижней твёрдой стенке $\xi = -1$ выполнены условия прилипания и задана температура

$$\begin{aligned} F_1(-1, \tau) &= H_1(-1, \tau) = 0, \\ A_1(-1, \tau) &= \alpha_1(\tau), \quad B_1(-1, \tau) = \alpha_2(\tau), \quad Q_1(-1, \tau) = \alpha_3(\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Верхняя твёрдая стенка $\xi = 1$ предполагается теплоизолированной, и на ней также выполнены условия прилипания

$$F_2(1, \tau) = H_2(1, \tau) = 0, \quad A_{2\xi}(1, \tau) = B_{2\xi}(1, \tau) = Q_{2\xi}(1, \tau) = 0. \quad (6)$$

На поверхности раздела $\xi = 0$ имеем условия

$$\begin{aligned} F_1(0, \tau) &= F_2(0, \tau), \quad H_1(0, \tau) = H_2(0, \tau), \quad A_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \\ B_1(0, \tau) &= B_2(0, \tau), \quad Q_1(0, \tau) = Q_2(0, \tau), \quad lA_{2\xi}(0, \tau) - kA_{1\xi}(0, \tau) = 0, \\ lB_{2\xi}(0, \tau) - kB_{1\xi}(0, \tau) &= 0, \quad lQ_{2\xi}(0, \tau) - kQ_{1\xi}(0, \tau) = 0, \\ lF_{2\xi}(0, \tau) - \mu F_{1\xi}(0, \tau) &= \mu(A_1(0, \tau) + B_1(0, \tau)), \\ lH_{2\xi}(0, \tau) - \mu H_{1\xi}(0, \tau) &= \mu(A_1(0, \tau) - B_1(0, \tau)). \end{aligned} \quad (7)$$

Условия (7) являются следствиями непрерывности скорости, температуры и потоков тепла на поверхности раздела, а также динамического условия для касательных напряжений. При выводе последних двух условий учтена линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры. Условие для нормальных напряжений эквивалентно тому, что поверхность раздела остаётся плоской (см. замечание 1). Кроме того, выполняются начальные условия

$$\begin{aligned} F_j(\xi, 0) &= F_{0j}(\xi), \quad H_j(\xi, 0) = H_{0j}(\xi), \\ A_j(\xi, 0) &= A_{0j}(\xi), \quad B_j(\xi, 0) = B_{0j}(\xi), \quad Q_j(\xi, 0) = Q_{0j}(\xi), \end{aligned} \quad (8)$$

где при $j = 1$ переменная $\xi \in (-1, 0)$, при $j = 2$ имеем $\xi \in (0, 1)$; и условия переопределения

$$\int_{-1}^0 F_1(\xi, \tau) d\xi = \int_{-1}^0 H_1(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \int_0^1 F_2(\xi, \tau) d\xi = \int_0^1 H_2(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \tau \in [0, \tau_0]. \quad (9)$$

Равенства (9), означающие замкнутость течения, позволяют определить неизвестные функции $S_i(\tau)$, $i = \overline{1, 4}$.

Функции $\alpha_1(\tau)$, $\alpha_2(\tau)$, $\alpha_3(\tau)$, $F_{0j}(\xi, \tau)$, $H_{0j}(\xi, \tau)$, $A_{0j}(\xi, \tau)$, $B_{0j}(\xi, \tau)$, $Q_{0j}(\xi, \tau)$ являются заданными в своих областях определения. Для гладкого решения они должны удовлетворять условиям согласования, например, $F_{01}(-1) = H_{01}(-1) = 0$, $F_{02}(1) = H_{02}(1) = 0$, $F_{01}(0) = F_{02}(0)$, $H_{01}(0) = H_{02}(0)$ и т.д.

В заключение этого пункта приведём формулы для модифицированных давлений в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= \frac{\rho_1 \nu_1 \chi_1}{l_1^2} \text{МП}_1(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \tau), \quad \bar{p}_2 = \frac{\rho_2 \nu_2 \chi_2}{l_2^2} \text{МП}_2(\bar{x}, \bar{y}, \xi, \tau), \\ \Pi_1 &= \left[2L_1 \int_0^\xi A_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 + S_2) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[2L_1 \int_0^\xi B_1 d\zeta + \frac{1}{P_1} (S_1 - S_2) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \\ &\quad - \frac{2F_1}{P_1} - \frac{2M}{P_1} \left(\int_0^\xi F_1 d\zeta \right)^2 + \frac{L_1}{d} \int_0^\xi Q_1 d\zeta + \Pi_{10}(\tau), \\ \Pi_2 &= \left[\frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\xi A_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 + S_4) \right] \frac{\bar{x}^2}{2} + \left[\frac{2\chi\nu L_2}{l^2} \int_0^\xi B_2 d\zeta + \frac{\chi^2}{l^2 P_2} (S_3 - \right. \\ &\quad \left. - S_4) \right] \frac{\bar{y}^2}{2} - \frac{2\chi F_2}{l^2} - \frac{2\chi^2 M}{l^4 P_2} \left(\int_0^\xi F_2 d\zeta \right)^2 + \frac{\chi\nu L_2}{dl^2} \int_0^\xi Q_2 d\zeta + \Pi_{20}(\tau), \end{aligned}$$

где $\Pi_{10}(\tau)$ и $\Pi_{20}(\tau)$ – произвольные функции времени.

2. Априорные оценки решения задачи (3)–(9)

Первым шагом будет получение априорных оценок для $A_j(\xi, \tau)$, $B_j(\xi, \tau)$ и их производных по τ в равномерной метрике. Проведём рассуждения для $A_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$, удовлетворяющих сопряжённой задаче

$$\begin{aligned} A_{1\tau} &= A_{1\xi\xi}, \quad -1 < \xi < 0, \quad A_{2\tau} = \frac{l^2}{\chi} A_{2\xi\xi}, \quad 0 < \xi < 1, \\ A_1(\xi, 0) &= A_{01}(\xi), \quad A_2(\xi, 0) = A_{02}(\xi), \\ A_1(0, \tau) &= A_2(0, \tau), \quad l A_{2\xi}(0, \tau) = k A_{1\xi}(0, \tau), \\ A_1(-1, \tau) &= \alpha_1(\tau), \quad A_{2\xi}(1, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В первом слое произведём замену

$$A_1(\xi, \tau) = \bar{A}_1(\xi, \tau) + \alpha_1(\tau)\xi^2, \quad -1 \leq \xi \leq 0. \quad (11)$$

Тогда новая функция $\bar{A}_1(\xi, \tau)$ будет удовлетворять неоднородному уравнению

$$\bar{A}_{1\tau} = \bar{A}_{1\xi\xi} - \alpha'_1(\tau)\xi^2 + 2\alpha_1(\tau) \equiv \bar{A}_{1\xi\xi} + N_1(\xi, \tau), \quad (12)$$

причем

$$\begin{aligned} \bar{A}_1(\xi, 0) &= A_{01}(\xi) - \alpha_1(0)\xi^2 \equiv \bar{A}_{01}(\xi), \\ \bar{A}_1(-1, \tau) &= 0, \quad \bar{A}_1(0, \tau) = A_2(0, \tau), \quad lA_{2\xi}(0, \tau) = k\bar{A}_{1\xi}(0, \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

Умножим второе уравнение (10) и (12) на $\frac{\chi}{l}A_2(\xi, \tau)$ и $k\bar{A}_1(\xi, \tau)$ соответственно и проинтегрируем по ξ в своих областях определения. Сложив полученные равенства и используя условия (13), $A_{2\xi}(1, \tau) = 0$, получим, что для решения $\bar{A}_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$ имеет место тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2(\xi, \tau) d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2(\xi, \tau) d\xi \right) + k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2(\xi, \tau) d\xi + \\ + l \int_0^1 A_{2\xi}^2(\xi, \tau) d\xi = k \int_{-1}^0 \bar{A}_1(\xi, \tau) N_1(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (14)$$

В силу трёх последних соотношений (13) имеет место неравенство [14]

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2 d\xi \geq \gamma_1 \left(k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2 d\xi \right), \\ \gamma_1 = [2 \max(1/k, 1/l)]^{-1} \min(1/k, l/\chi). \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь из тождества (14) выведем неравенство

$$\begin{aligned} k \int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_2^2 d\xi \leq \left(\left(k \int_{-1}^0 \bar{A}_{01}^2 d\xi + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_{02}^2 d\xi \right)^{1/2} + \right. \\ \left. + k \int_0^\tau e^{\gamma_1 \tau} \left(\int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \right)^{1/2} d\tau \right)^2 e^{-2\gamma_1 \tau} \equiv G_1(\tau) e^{-2\gamma_1 \tau}, \\ \gamma_1 = \min\left(\frac{1}{k}, \frac{l}{\chi}\right) [2 \max\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{l}\right)]^{-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

из которого следует ограниченность норм $\bar{A}_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$ в $L_2(-1, 0)$ и $L_2(0, 1)$ при всех $\tau \in [0, \tau_0]$.

Для функций $\bar{A}_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$ имеет место другое, отличное от (14) тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2(\xi, \tau) d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2(\xi, \tau) d\xi \right) + k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\tau}^2(\xi, \tau) d\xi + \\ + \frac{\chi}{l} \int_0^1 A_{2\tau}^2(\xi, \tau) d\xi = k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\tau}(\xi, \tau) N_1(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда следует оценка

$$k \int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{2\xi}^2 d\xi \leq k \int_{-1}^0 \bar{A}_{01}^2 d\xi + l \int_0^1 A_{02}^2 d\xi + k \int_0^\tau \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \equiv G_2(\tau), \quad (18)$$

т. е. нормы $\bar{A}_{1\xi}(\xi, \tau)$, $A_{2\xi}(\xi, \tau)$ ограничены в $L_2(-1, 0)$ и $L_2(0, 1)$ при всех $\tau \in [0, \tau_0]$.

В силу (16) и (17) имеем

$$\bar{A}_1^2(\xi, \tau) = 2 \int_{-1}^{\xi} \bar{A}_1 \bar{A}_{1\xi} d\xi \leq 2 \left(\int_{-1}^0 \bar{A}_1^2 \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^0 \bar{A}_{1\xi}^2 d\xi \right)^{1/2} \leq \frac{2}{k} \sqrt{G_1(\tau)G_2(\tau)} e^{-\gamma_1 \tau},$$

или

$$|\bar{A}_1(\xi, \tau)| \leq \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2} \quad (19)$$

равномерно для всех $\xi \in [-1, 0]$, $\tau \in [0, \tau_0]$.

Далее, используя третье равенство (13) и (19), получим

$$A_2^2(\xi, \tau) = \bar{A}_1^2(0, \tau) + 2 \int_0^{\xi} A_2 A_{2\xi} d\xi \leq 2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right) \sqrt{G_1(\tau)G_2(\tau)} e^{-\gamma_1 \tau},$$

значит,

$$|A_2(\xi, \tau)| \leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left(G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2} \quad (20)$$

при всех $\xi \in [-1, 0]$, $\tau \in [0, \tau_0]$.

Ниже нам понадобятся оценки $|A_{j\tau}(\xi, \tau)|$, $j = 1, 2$, аналогичные (19), (20). Они получаются путём дифференцирования задачи (10) по τ . Действительно, для $Z_j(\xi, \tau) = A_{j\tau}(\xi, \tau)$ имеем задачу (10) с начальными данными

$$\begin{aligned} Z_1(\xi, 0) &= A_{1\tau}(\xi, 0) = A_{01\xi\xi}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 0, \\ Z_2(\xi, 0) &= \frac{l^2}{\chi} A_{02\xi\xi}(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\bar{A}_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |A_{2\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left(G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \end{aligned} \quad (22)$$

где $G_3(\tau)$ совпадает с $G_1(\tau)$ после замены $\bar{A}_{01}(\xi)$ на $\bar{Z}_1(\xi, 0) = A_{01\xi\xi}(\xi) - \bar{\alpha}'(0)\xi^2 + 2\bar{\alpha}(0)$, $A_{02}(\xi)$ на $Z_1(\xi, 0)$ из (21), $N_1(\xi, \tau)$ на $N_{1\tau}(\xi, \tau)$; $G_4(\tau)$ совпадает с $G_2(\tau)$ с теми же заменами.

Замечание 2. Из (11), (19) и (22) следуют априорные оценки

$$\begin{aligned} |A_1(\xi, \tau)| &\leq |\bar{\alpha}_1(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_1(\tau)G_2(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |A_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq |\alpha_1'(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_3(\tau)G_4(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \quad (23)$$

Замечание 3. Из уравнений (10) для $A_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$ следуют априорные оценки $|A_{1\xi\xi}|$, $\xi \in [-1, 0]$; $|A_{2\xi\xi}|$, $\xi \in [0, 1]$ и всех $\tau \in [0, \tau_0]$, аналогичные оценкам (20) и (23).

Задача для неизвестных $B_1(\xi, \tau)$, $B_2(\xi, \tau)$ в точности совпадает с задачей (10) с заменой $\alpha_1(\tau)$ на $\alpha_2(\tau)$, $A_{01}(\xi)$ на $B_{01}(\xi)$, $A_{02}(\xi)$ на $B_{02}(\xi)$ и $N_1(\xi, \tau)$ из (12)

на $N_2(\xi, \tau) = -\alpha'_2(\tau)\xi^2 + 2\alpha_2(\tau)$. Поэтому имеют место априорные оценки (см. (23), (20), (22))

$$\begin{aligned} |B_1(\xi, \tau)| &\leq |\alpha_2(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_5(\tau) G_6(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |B_{1\tau}(\xi, \tau)| &\leq |\alpha'_2(\tau)| + \sqrt{\frac{2}{k}} \left(G_7(\tau) G_8(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0], \\ |B_2(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left(G_5(\tau) G_6(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \\ |B_{2\tau}(\xi, \tau)| &\leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\chi} \right)} \left(G_7(\tau) G_8(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_1 \tau/2}, \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned} \quad (24)$$

Структура функций $G_5(\tau)$, $G_6(\tau)$ аналогична структуре $G_1(\tau)$, $G_2(\tau)$, а $G_7(\tau)$, $G_8(\tau)$ аналогичны $G_3(\tau)$, $G_4(\tau)$.

Замечание 4. Априорные оценки сопряжённой задачи для $Q_1(\xi, \tau)$, $Q_2(\xi, \tau)$ также аналогичны оценкам (24), нужно только учесть неоднородность уравнений, считая в правых частях $A_j(\xi, \tau) + B_j(\xi, \tau)$, $j = 1, 2$, известными.

Приступим к получению априорных оценок решения обратной сопряжённой задачи для функций $F_j(\xi, \tau)$, $H_j(\xi, \tau)$, $S_i(\xi, \tau)$, $j = 1, 2$, $i = \overline{1, 4}$, считая $A_j(\xi, \tau)$, $B_j(\xi, \tau)$ известными. Рассуждения приведём для функций $F_1(\xi, \tau)$, $\xi \in [-1, 0]$, $F_2(\xi, \tau)$, $\xi \in [0, 1]$ и $S_1(\tau)$, $S_3(\tau)$. Для неизвестных $H_1(\xi, \tau)$, $H_2(\xi, \tau)$ и $S_2(\tau)$, $S_4(\tau)$ оценки получаются аналогичным образом.

Итак, обратная задача имеет вид

$$F_{1\tau} = P_1 F_{1\xi\xi} - S_1(\tau) - P_1 L_1 \Psi_1(\xi, \tau), \quad \xi \in [-1, 0], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad (25)$$

$$F_{2\tau} = \frac{P_2 l^2}{\chi} F_{2\xi\xi} - S_3(\tau) - P_1 L_2 \Psi_2(\xi, \tau), \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0],$$

$$\Psi_1(\xi, \tau) = \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) + B_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad (26)$$

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) + B_2(\xi, \tau)) d\xi,$$

$$F_1(-1, \tau) = 0, \quad F_2(1, \tau) = 0, \quad F_1(0, \tau) = F_2(0, \tau), \quad (27)$$

$$\mu F_{1\xi}(0, \tau) - l F_{2\xi} = -\mu \Psi_{1\xi}(0, \tau),$$

$$F_1(\xi, 0) = F_{01}, \quad \xi \in [-1, 0], \quad F_2(\xi, 0) = F_{02}(\xi), \quad \xi \in [0, 1], \quad (28)$$

$$\int_{-1}^0 F_1(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad \int_0^1 F_2(\xi, \tau) d\xi = 0. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что решение задачи (25)–(29) удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) + \mu \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi = \\ &= -\mu F_1(0, \tau) \Psi_{1\xi}(0, \tau) - \mu L_1 \int_{-1}^0 F_1 \Psi_1 d\xi - \frac{\nu L_2}{l} \int_0^1 F_2 \Psi_2 d\xi, \quad \nu = \nu_1/\nu_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Мы воспользовались тем, что $\int_{-1}^0 S_1(\tau) F_{1\tau} d\xi = 0$ и $\int_0^1 S_3(\tau) F_{2\tau} d\xi = 0$ (см. (29)).

Поскольку $|F_1(0, \tau)| = \left| \int_{-1}^0 F_{1\xi} d\xi \right| \leq \left(\int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi \right)^{1/2}$, правая часть (30) оценивается сверху так

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + \frac{\mu L_2 \varepsilon_1^2}{2} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 \varepsilon_2^2}{2l} \int_0^1 F_2^2 d\xi + \Psi_3(\tau), \\ & \Psi_3(\tau) = \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi}^2(0, \tau) + \frac{\mu L_1}{2\varepsilon_1^2} \int_{-1}^0 \Psi_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2}{2l_2 \varepsilon_2^2} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

Согласно [14] и граничным условиям (27)

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \geq \left(\frac{4}{\pi^2} \max\left(\frac{2}{\mu}, \frac{1}{l}\right) \right)^{-1} \left(\int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) \geq \\ & \geq \gamma_2 \left(\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \right) \equiv \gamma_2 I, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\gamma_2 = \min \left\{ \gamma_1; \left(\frac{4}{\pi^2} \max\left(\frac{2}{\mu}, \frac{1}{l}\right) \right)^{-1} \min\left(\frac{P_1}{2\mu}, \frac{P_2 l}{\chi}\right) \right\}. \quad (33)$$

Замечание 5. При учёте условий переопределения (29) постоянная γ_2 в (32), (33) может быть увеличена (см. [14]).

Выбрав в (31), например,

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma_2}{2L_1 P_1} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma_2 \chi}{\nu L_2 P_2} \right)^{1/2},$$

из (30)–(33) выведем неравенство $dI/d\tau + \gamma_2 I \leq 2\Psi_3(\tau)$, откуда

$$\begin{aligned} & I = \frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_1^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_2^2 d\xi \leq \\ & \leq \left(\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_{01}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_{02}^2 d\xi + \int_0^\tau e^{\gamma_2 \sigma} \Psi_3(\sigma) d\sigma \right) e^{-\gamma_2 \tau} \equiv G_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}. \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, нормы в пространствах $L_2(-1, 0)$ и $L_2(0, 1)$ функций $F_1(\xi, \tau)$, $F_2(\xi, \tau)$ ограничены при всех $\tau \in [0, \tau_0]$.

Для оценки интегралов $\int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi$, $\int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi$ удобно сделать замену

$$F_1(\xi, \tau) = \overline{F}_1(\xi, \tau) - \Psi_{1\xi}(0, \tau)(2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi). \quad (35)$$

Тогда первое уравнение (25) примет вид

$$\begin{aligned} & \overline{F}_{1\tau} = P_1 \overline{F}_{1\xi\xi} - S_1(\tau) - P_1 L_1 \overline{\Psi}_1(\xi, \tau), \\ & \overline{\Psi}_1(\xi, \tau) = -\Psi_1(\xi, \tau) + \frac{6\Psi_{1\xi}(0, \tau)}{L_1} (2\xi + 1) - \frac{\Psi_{1\xi\tau}(0, \tau)}{P_1 L_1} (2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi), \\ & \xi \in (-1, 0), \quad \tau \in [0, \tau_0], \end{aligned} \quad (36)$$

четвёртое условие (27) станет однородным; изменится также и начальное условие (28)

$$\bar{F}_1(\xi, 0) = F_{01}(\xi) + \Psi_{1\xi}(0, 0)(2\xi^3 + 3\xi^2 + \xi) \equiv \bar{F}_{01}(\xi). \quad (37)$$

Остальные равенства в (27)–(29) останутся без изменений.

Для решения $\bar{F}_1(\xi, \tau)$, $F_2(\xi, \tau)$ имеет место тождество (см. (17) для $\bar{A}_1(\xi, \tau)$, $A_2(\xi, \tau)$)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{P_1} \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \right) = \\ = -\mu L_1 \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau} \bar{\Psi}_1 d\xi - \frac{\nu L_2}{l} \int_0^1 F_{2\tau} \Psi_2 d\xi. \end{aligned} \quad (38)$$

Оно получается путём умножения уравнения (36) на $\mu \bar{F}_{1\tau}/P_1$, второго уравнения (25) на $\chi F_{2\tau}/(P_2 l)$, интегрирования по частям с учётом условий (27)–(29) и дальнейшего сложения результатов.

Правая часть тождества (38) допускает оценку сверху

$$\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{2P_2 l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi + \frac{\mu P_1 L_1}{2} \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{2\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi,$$

значит, из (38) следует неравенство при $\tau \in [0, \tau_0]$

$$\begin{aligned} \mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{1\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \leq \mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{01\xi}^2 d\xi + l \int_0^1 F_{02\xi}^2 d\xi + \\ + \int_0^\tau \left(\mu P_1 L_1 \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi \right) d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\bar{F}_{01}(\xi)$ определена равенством (37). Согласно (35)

$$F_{1\xi}^2 \leq 2(\bar{F}_{1\xi}^2 + \Psi_{1\xi}^2(0, \tau)(6\xi^2 + 6\xi + 1)) \leq 2(\bar{F}_1^2 + \frac{1}{4}\Psi_{1\xi}^2(0, \tau)),$$

поэтому из (39) получим неравенство

$$\begin{aligned} \mu \int_{-1}^0 F_{1\xi}^2 d\xi + 2l \int_0^1 F_{2\xi}^2 d\xi \leq 2\mu \int_{-1}^0 \bar{F}_{01\xi}^2 d\xi + 2l \int_0^1 F_{02\xi}^2 d\xi + \\ + \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi}^2(0, \tau) + 2 \int_0^\tau \left(\mu P_1 L_1 \int_{-1}^0 \bar{\Psi}_1^2 d\xi + \frac{\nu L_2 P_2}{\chi} \int_0^1 \Psi_2^2 d\xi \right) d\tau \equiv G_{10}(\tau), \end{aligned} \quad (40)$$

откуда и следует ограниченность в $L_2(-1, 0)$ производной $F_{1\xi}$ и в $L_2(0, 1) - F_{2\xi}$.

Из (34) и (40) следуют априорные оценки

$$\begin{aligned} |F_1(\xi, \tau)| \leq \sqrt{\frac{2}{\mu}} \left(2P_1 G_9(\tau) G_{10}(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad \xi \in [-1, 0], \\ |F_2(\xi, \tau)| \leq \sqrt{2} \left(\frac{P_2}{2\chi} G_9(\tau) G_{10}(\tau) \right)^{1/4} e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad \xi \in [0, 1], \end{aligned} \quad (41)$$

означающие ограниченность F_1 и F_2 в равномерных нормах $C([-1, 0] \times [0, \tau_0])$, $C([0, 1] \times [0, \tau_0])$.

Ниже нам понадобятся начальные значения $S_1(0)$, $S_3(0)$ через входные данные задачи. Проинтегрировав уравнения (25), получим представления

$$\begin{aligned} S_1(\tau) &= P_1(F_{1\xi}(0, \tau) - F_{1\xi}(-1, \tau)) - P_1 L_1 \int_{-1}^0 \Psi_1(\xi, \tau) d\xi, \\ S_3(\tau) &= \frac{P_2 l^2}{\chi} (F_{2\xi}(1, \tau) - F_{2\xi}(0, \tau)) - P_1 L_2 \int_0^1 \Psi_2(\xi, \tau) d\xi, \end{aligned} \quad (42)$$

откуда следует, что искомые величины равны

$$\begin{aligned} S_1(0) &= P_1(F_{01\xi}(0) - F_{01\xi}(-1)) - P_1 L_1 \int_{-1}^0 [A_{01}(\xi) + B_{01}(\xi)] d\xi, \\ S_3(0) &= \frac{P_2 l^2}{\chi} (F_{02\xi}(1) - F_{02\xi}(0)) - P_1 L_2 \int_0^1 [A_{02}(\xi) + B_{02}(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Формулы (42) содержат неизвестные следы производных $F_{1\xi}$, $F_{2\xi}$ на концах отрезков $[-1, 0]$ и $[0, 1]$ соответственно. Поэтому они не годятся для оценок $|S_1(\tau)|$, $|S_3(\tau)|$, $\tau \in [0, \tau_0]$. Приведём здесь другие представления, умножив первое уравнение (25) на $\xi^2 + \xi^3$, второе на $\xi^2 - \xi^3$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{S_1(\tau)}{12} &= - \int_{-1}^0 (\xi^3 + \xi^2) F_{1\tau} d\xi + 6P_1 \int_{-1}^0 \xi F_1 d\xi - P_1 L_1 \int_{-1}^0 (\xi^3 + \xi^2) \Psi_1 d\xi, \\ \frac{S_3(\tau)}{12} &= - \int_0^1 (\xi^3 - \xi^2) F_{2\tau} d\xi + \frac{6P_2 l^2}{\chi} \int_0^1 \xi F_2 d\xi - P_1 L_2 \int_0^1 (\xi^3 - \xi^2) \Psi_2 d\xi. \end{aligned} \quad (44)$$

Теперь ясно, что достаточно получить оценки $F_{1\tau}$ в $L_2(-1, 0)$, $F_{2\tau}$ в $L_2(0, 1)$. Для этого продифференцируем по τ уравнения (25), формулы (26), граничные условия (27), (29). При этом задача для новых функций $F_{j\tau}$, $j = 1, 2$, останется прежней за исключением начальных условий (28). Они примут вид

$$\begin{aligned} F_{1\tau}(\xi, 0) &= P_1 F_{01\xi\xi} - S_1(0) - P_1 L_1 \Psi_1(\xi, 0), \quad \xi \in [-1, 0], \\ F_{2\tau}(\xi, 0) &= \frac{P_2 l^2}{\chi} F_{02\xi\xi} - S_3(0) - P_1 L_2 \Psi_2(\xi, 0), \quad \xi \in [0, 1], \end{aligned} \quad (45)$$

где $S_1(0)$, $S_3(0)$ определены в (43), а $\Psi_1(\xi, 0)$, $\Psi_2(\xi, 0)$ – в (26).

Обратившись к неравенству (34), где нужно заменить F_1 на $F_{1\tau}$, а F_2 на $F_{2\tau}$, получим

$$\frac{\mu}{2P_1} \int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\chi}{P_2 l} \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi \leq \bar{G}_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}. \quad (46)$$

Функция $\bar{G}_9(\tau)$ совпадает с $G_9(\tau)$ из (34) с заменой $F_{01}(\xi)$ на $F_{1\tau}(\xi, 0)$, $F_{02}(\xi)$ на $F_{2\tau}(\xi, 0)$ из (45), а функцию $\Psi_3(\tau)$ из (31) заменит

$$\bar{\Psi}_3(\tau) = \frac{\mu}{2} \Psi_{1\xi\tau}^2(0, \tau) + \frac{\mu L_1}{2\varepsilon_1^2} \int_{-1}^0 \Psi_{1\tau}^2 d\xi + \frac{\nu L_2}{2l\varepsilon_2^2} \int_0^1 \Psi_{2\tau}^2 d\xi.$$

Значит,

$$\int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi \leq \frac{2P_1}{\mu} \overline{G}_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}, \quad \int_0^1 F_{2\tau}^2 d\xi \leq \frac{P_2 l}{\chi} \overline{G}_9(\tau) e^{-\gamma_2 \tau}. \quad (47)$$

Из (44), (47) и (41) следует ограниченность при $\tau \in [0, \tau_0]$ величин

$$\begin{aligned} \frac{|S_1(\tau)|}{12} &\leq 2 \left(\int_{-1}^0 F_{1\tau}^2 d\xi \right)^{1/2} + 6P_1 \int_{-1}^0 \xi |F_1| d\xi + 2P_1 L_1 \int_{-1}^0 |\Psi_1| d\xi, \\ \frac{|S_3(\tau)|}{12} &\leq 2 \left(\int_{-1}^1 F_{2\tau}^2 d\xi \right)^{1/2} + \frac{6P_2 l^2}{\chi} \int_0^1 |F_2| d\xi + 2P_1 L_2 \int_0^1 |\Psi_2| d\xi. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Замечание 6. Априорные оценки в сопряжённой задаче для $H_1(\xi, \tau)$, $H_2(\xi, \tau)$, $S_2(\tau)$, $S_4(\tau)$ аналогичны оценкам (41), (47) и (7.46) с заменой начальных условий $F_{01}(\xi)$, $F_{02}(\xi)$ на $H_{01}(\xi)$, $H_{02}(\xi)$, функций $\Psi_1(\xi, \tau)$, $\Psi_2(\xi, \tau)$ на

$$\begin{aligned} \Psi_3(\xi, \tau) &= \int_0^\xi (A_1(\xi, \tau) - B_1(\xi, \tau)) d\xi, \quad \xi \in [-1, 0], \\ \Psi_4(\xi, \tau) &= \int_0^\xi (A_2(\xi, \tau) - B_2(\xi, \tau)) d\xi, \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0]. \end{aligned}$$

3. Достаточные условия стремления решения задачи (3)–(9) при $\tau \rightarrow \infty$ к стационарному режиму

Предположим, что функции $\alpha_i(\tau)$, $\alpha'_i(\tau)$, $\alpha''_i(\tau)$ в (5) определены для всех $\tau \geq 0$, $\tau_0 = \infty$, $i = 1, 2, 3$. Укажем явную зависимость правых частей полученных априорных оценок от этих функций. Начнём с оценок (20), (23) и (24). В формулах для $G_1(\tau)$ в (16) и $G_2(\tau)$ в (18) потребуем сходимости интегралов

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \left(\int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \right) d\sigma, \quad \int_0^\infty \int_{-1}^0 N_1^2 d\xi d\sigma. \quad (48)$$

Из определения (12) функции $N_1(\xi, \tau)$

$$\int_{-1}^0 N_1^2 d\xi \leq 8(\alpha_1^2 + (\alpha'_1)^2),$$

поэтому (т. к. $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$) интегралы (48) будут сходиться, если сходятся интегралы

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha_1(\sigma) d\sigma, \quad \int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha'_1(\sigma) d\sigma. \quad (49)$$

Обратившись к оценке (22), видим, что для ограниченности функций $G_3(\tau)$, $G_4(\tau)$ при всех $\tau \geq 0$ надо дополнительно к (49) потребовать сходимости интеграла

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 \sigma} \alpha''_1(\sigma) d\sigma. \quad (50)$$

Значит, и в оценках $|B_j|$, $|Q_j|$, $j = 1, 2$, $\tau \in [0, \infty)$, необходима сходимость интегралов типа (49), (50) для функций $\alpha_i(\tau)$, $i = 2, 3$.

Замечание 7. Из сказанного выше следует, что $\alpha_i^{(k)}(\tau) = e^{-\gamma_1 \tau} a_i^k(\tau)$, $\int_0^\infty |a_i^k(\tau)| d\tau < \infty$, где $i = 1, 2, 3$, $k = 0, 1, 2$.

Что касается зависимости правых частей оценок для $|F_i|$, $|H_i|$, $|S_j|$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$, от $\alpha_i(\tau)$, входящих в $G_9(\tau)$, $G_{10}(\tau)$, ограниченность последних для всех $\tau \geq 0$ связана со сходимостью интеграла

$$\int_0^\infty e^{\gamma_2 \sigma} \Psi_3(\sigma) d\sigma. \quad (51)$$

Согласно (31), определению (26) функций Ψ_1 и Ψ_2 , оценкам (20), (23) и замечанию 7 имеем

$$\Psi_3(\tau) \leq T_0(\tau) e^{-\gamma_1 \tau}, \quad \int_0^\infty T_0(\sigma) d\sigma < \infty.$$

Обратившись к формуле (33) для γ_2 , видим, что интеграл (51) сходится, так как $\gamma_2 - \gamma_1 \leq 0$.

Таким образом, справедлива

Теорема. Пусть интегралы (49) и (50) сходятся, тогда решение задачи (3)–(9) стремится к нулевому при $\tau \rightarrow \infty$, причем справедливы оценки скорости сходимости

$$\begin{aligned} |A_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/2}, \quad |B_j(\xi, \tau)| \leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/2}, \quad |Q_j(\xi, \tau)| \leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/2}, \\ |F_j(\xi, \tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad |H_j(\xi, \tau)| \leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/4}, \\ |S_i(\tau)| &\leq T_1 e^{-\gamma_2 \tau/4}, \quad j = 1, 2 \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (52)$$

с некоторой положительной постоянной T_1 и $\tau \geq 0$.

Теорема показывает, что в этих условиях с ростом времени происходит торможение жидкостей за счёт трения о стенки.

Пусть $A_j^c(\xi)$, $B_j^c(\xi)$, $Q_j^c(\xi)$, $F_j^c(\xi)$, $H_j^c(\xi)$, S_i^c , $j = 1, 2$, $i = \overline{1, 4}$, – стационарное решение задачи (3)–(7), (9) [11] ($A_j^c(\xi) = \alpha_1$, $B_j^c(\xi) = \alpha_2$, функции $F_j^c(\xi)$, $H_j^c(\xi)$ – полиномы третьего порядка, а $Q_j^c(\xi)$ – второго порядка). Рассмотрим разности $\bar{A}_j(\xi, \tau) = A_j(\xi, \tau) - A_j^c(\xi)$, $\bar{B}_j(\xi, \tau) = B_j(\xi, \tau) - B_j^c(\xi)$, $\bar{Q}_j(\xi, \tau) = Q_j(\xi, \tau) - Q_j^c(\xi)$, $\bar{F}_j(\xi, \tau) = F_j(\xi, \tau) - F_j^c(\xi)$, $\bar{H}_j(\xi, \tau) = H_j(\xi, \tau) - H_j^c(\xi)$, $\bar{S}_i(\tau) = S_i(\tau) - S_i^c$. В силу линейности задачи (3)–(9) они являются решением этой же задачи с очевидным изменением начальных данных (8) и функций $\alpha_n(\tau)$ на $\alpha_n(\tau) - \alpha_n^c$, $n = 1, 2, 3$. Поэтому (см. замечание 7), если

$$\begin{aligned} |\alpha_n(\tau) - \alpha_n^c| &\leq a_n^0(\tau) e^{-\gamma_1 \tau}, \quad |\alpha_n'(\tau)| \leq a_n^1(\tau) e^{-\gamma_1 \tau}, \\ |\alpha_n''(\tau)| &\leq a_n^2(\tau) e^{-\gamma_1 \tau}, \quad \int_0^\infty |a_n^k(\tau)| d\tau < \infty, \end{aligned} \quad (53)$$

то указанные разности удовлетворяют оценкам (52) с другой постоянной T_1 . Итак, при условиях (53) нестационарное решение стремится к стационарному режиму при $\tau \rightarrow \infty$ по экспоненциальному закону, и указанный стационарный режим является устойчивым.

Заключение

Изучены качественные свойства решения обратной начально-краевой задачи, моделирующей медленную конвекцию в трёхмерном слое. В единой форме получены априорные оценки решения в равномерной метрике. На их основе указаны достаточные условия сходимости решения к стационарному режиму при больших временах. Полученные результаты представляют практический интерес, например, для оценки интенсивности конвекции в тонких микрослоях. Кроме того, они могут служить тестом при численном решении общей нелинейной задачи, поскольку интегральное условие переопределения имеет место и в этом случае.

Благодарности. Авторы выражают благодарность д. ф.-м. н., профессору В. К. Андрееву за помощь и ценные советы при работе над статьей.

Литература

1. *Lin C.* Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. 1957. V. 1. P. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
2. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механ. и техн. физ. 1989. № 2. С. 34–40.
3. *Pukhnachev V.V.* Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // Eur. J. Appl. Math. 2002. V. 13, No 2. P. 205–224. <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>.
4. *Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.* Mathematical Models of Convection. Berlin/Boston: De Gruyter, 2020. 417 p.
5. *Rezanova E.* Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries // EPJ Web Conf. 2017. V. 159. Art. 00047. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715900047>.
6. *Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теорет. основы хим. техн. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
7. *Азанов А.А., Андреев В.К.* Решение задачи о ползущем движении жидкости со свободной границей со специальным полем скоростей в трёхмерной полосе // Некотор. акт. пробл. совр. матем. и матем. обр. Герц. чтен. 2021. Матер. научн. конф. СПб.: Изд. РГПУ им. А.И. Герцена. ВВМ. 2021. С. 42–54.
8. *Andreev V.K., Lemeshkova E.N.* Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2022. V. 63, No 1. P. 82–88. <https://doi.org/10.1134/S0021894422010138>.
9. *Andreev V.K.* On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface // J. Sib. Fed. Univ. Math & Phys. 2020. V. 13, No 6. P. 661–669. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-661-669>.
10. *Андреев В.К.* Решение трёхмерных уравнений тепловой конвекции и его интерпретация // Некотор. акт. пробл. совр. матем. и матем. обр. Герц. чтен. 2020. Матер. научн. конф. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена. ВВМ. 2020. С. 4–8.
11. *Андреев В.К., Лемешкова Е.Н.* Тепловая конвекция двух несмешивающихся жидкостей в трехмерном канале с полем скоростей специального вида // ПММ. 2023. Т. 87, № 2. С. 200–210.
12. *Андреев В.К., Лемешкова Е.Н.* Линейные задачи конвективных движений с поверхностями раздела. Сиб. фед. ун-т, 2018. 204 с.

13. *Зейтулян Р.Х.* Проблема термокапиллярной неустойчивости Бенара-Марангони // УФН. 1998. Т. 168. С. 259–286.
14. *Андреев В.К.* О неравенстве типа Фридрихса для составных областей // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2009. Т. 2, №2. С. 146–157.
15. *Howann F.* Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel // Z. Angew. Math. Mech. 1936. Bd. 16, H. 3. S. 153–164.
<https://doi.org/10.1002/zamm.19360160304>.
16. *Davey A.* Boundary-layer flow at a saddle point of attachment // J. Fluid Mech. 1961. V. 10, No 4. P. 593–610. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000391>.
17. *Gorla R.S.R.* Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder // Dev. Mech. 1977. V. 9. P. 286–288.
18. *Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A.* Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity // Interfacial Phenom. Heat Transfer. 2019. V. 7, No 4. P. 345–364.
<https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>.

Поступила в редакцию 20.09.2023

Принята к публикации 15.11.2023

Азанов Андрей Андреевич, аспирант Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета

Сибирский федеральный университет

пр. Свободный, д. 79, г. Красноярск, 660041, Россия

E-mail: andreiazanov@mail.ru

Лемешкова Елена Николаевна, к.ф.-м.н., н.с. Института вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук

Сибирское отделение Российской академии наук

Академгородок, д. 50, стр. 44, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: elena_cher@icm.krasn.ru

ISSN 2541–7746 (Print)

ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)
2023, vol. 165, no. 4, pp. 326–343

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.4.326-343

Qualitative Properties of the Solution of
a Conjugate Problem of Thermal Convection

A.A. Azanov^{a*}, E.N. Lemeschkova^{b**}

^aSiberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia

^bInstitute of Computational Modelling, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia

E-mail: *andreiazanov@mail.ru, **elena_cher@icm.krasn.ru

Received September 20, 2023; Accepted November 15, 2023

Abstract

The joint convection of two viscous heat-conducting liquids in a three-dimensional layer bounded by flat solid walls was studied. The upper wall is thermally insulated, and the lower wall has a non-stationary temperature field. The liquids are immiscible and separated by a flat interface with complex conjugation conditions set on it. The evolution of this system in each liquid was described by the Oberbeck–Boussinesq equations. The solution of the problem was sought for velocities that are linear in two coordinates and temperature fields that are quadratic functions of the same coordinates. Thus, the problem was reduced to a system of 10 nonlinear integro-differential equations. Its conjugate and inverse nature is determined by the four functions of time. Integral redefinition conditions were set to find them. The physical meaning of the integral conditions is the closeness of the flow. The inverse initial-boundary value problem describes convection near the temperature extremum point on the lower solid wall in a two-layer system. For small Marangoni numbers, the problem was approximated linearly (the Marangoni number is analogous to the Reynolds number in the Navier–Stokes equations). Using the obtained a priori estimates, sufficient conditions were identified for the non-stationary solution to become a stationary one over time.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq model, thermal convection, thermocapillarity, interface, inverse problem, a priori estimates

Acknowledgments. We thank V.K. Andreev (Doctor of Physics and Mathematics, Professor) for his valuable advice and help in writing this manuscript.

References

1. Lin C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391–395. <https://doi.org/10.1007/BF00298016>.
2. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1989, vol. 30, pp. 197–203. <https://doi.org/10.1007/BF00852164>.
3. Pukhnachev V.V. Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces. *Eur. J. Appl. Math.*, 2002, vol. 13, no. 2, pp. 205–224. <https://doi.org/10.1017/S0956792501004776>.

4. Andreev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical Models of Convection*. Berlin, Boston, De Gruyter, 2020. 417 p.
5. Rezanova E. Numerical modelling of heat transfer in the layer of viscous incompressible liquid with free boundaries. *EPJ Web Conf.*, 2017, vol. 159, art. 00047. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715900047>.
6. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642–662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>.
7. Azanov A.A., Andreev V.K. A solution of the problem of creeping motion of a liquid with free boundary and velocity field of a special type in a three-dimensional band. *Nekotor. akt. probl. sovr. matem. i matem. obr. Gertz. chten. 2021. Mater. nauchn. konf.* [Some Key Problems of Modern Mathematics and Mathematics Education. Herzen Lectures, 2021: Proc. Sci. Conf.]. St. Petersburg, Izd. RGPU im. A.I. Gertsena, VVM, 2021, pp. 42–54. (In Russian)
8. Andreev V.K., Lemeschkova E.N. Two-layer steady creeping thermocapillary flow in a three-dimensional channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2022, vol. 63, no. 1, pp. 82–88. <https://doi.org/10.1134/S0021894422010138>.
9. Andreev V.K. On a creeping 3D convective motion of fluids with an isothermal interface. *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, 2020, vol. 13, no. 6, pp. 661–669. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-6-661-669>.
10. Andreev V.K. A solution of 3d equations of thermal convection and its interpretation. *Nekotor. akt. probl. sovr. matem. i matem. obr. Gertz. chten. 2020. Mater. nauchn. konf.* [Some Key Problems of Modern Mathematics and Mathematics Education. Herzen Lectures, 2020: Proc. Sci. Conf.]. St. Petersburg, RGPU im. A.I. Gertsena, VVM, 2020, pp. 4–8. (In Russian)
11. Andreev V.K., Lemeschkova E.N. Thermal convection of two immiscible liquids in a 3D channel with a velocity field of a special type. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2023, vol. 87, no. 2, pp. 200–210. (In Russian)
12. Andreev V.K., Lemeschkova E.N. *Lineinye zadachi konvektivnykh dvizhenii s poverkhnostyami razdela* [Linear Problems of Convective Motions with Interfaces]. Sib. Fed. Univ., 2018. 204 p. (In Russian)
13. Zeytounian R.Kh. The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem. *Phys.-Usp.*, 1998, vol. 41, no. 3, pp. 241–267. <https://doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>.
14. Andreev V.K. On inequalities of the Friedrichs type for combined domains. *Zh. Sib. Fed. Univ. Mat. Fiz.*, 2009, vol. 2, no. 2, pp. 146–157. (In Russian)
15. Howann F. Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um die Kugel. *Z. Angew. Math. Mech.*, 1936, Bd. 16, H. 3, S. 153–164. <https://doi.org/10.1002/zamm.19360160304>. (In German)
16. Davey A. Boundary-layer flow at a saddle point of attachment. *J. Fluid Mech.*, 1961, vol. 10, no. 4, pp. 593–610. <https://doi.org/10.1017/S0022112061000391>.
17. Gorla R.S.R. Unsteady laminar axisymmetric stagnation flow over a circular cylinder. *Dev. Mech.*, 1977, vol. 9, pp. 286–288.

18. Bekezhanova V.B., Andreev V.K., Shefer I.A. Influence of heat defect on the characteristics of a two-layer flow with the Hiemenz-type velocity. *Interfacial Phenom. Heat Transfer*, 2019, vol. 7, no. 4, pp. 345–364.
<https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.2020032777>.

⟨ **Для цитирования:** Азанов А.А., Лемешкова Е.Н. Качественные свойства решения одной сопряжённой задачи тепловой конвекции // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 4. С. 326–343.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.326-343>. ⟩

⟨ **For citation:** Azanov A.A., Lemeschkova E.N. Qualitative properties of the solution of a conjugate problem of thermal convection. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 4, pp. 326–343.
URL: <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2023.4.326-343>. (In Russian) ⟩