

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.958

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>

Об эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов

Е.Е. Шабардин ✉, Е.М. Карчевский

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

✉ eg.shabardin@gmail.com

Аннотация

Статья посвящена обоснованию метода граничных интегральных уравнений Мюллера, предназначенного для решения задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов. Доказана теорема о спектральной эквивалентности исходной дифференциальной задачи и задачи для системы граничных интегральных уравнений Мюллера на физическом листе римановой поверхности, на которой разыскиваются собственные значения – постоянные распространения собственных волн. Для доказательства этого факта изучены области локализации спектров исходной задачи и так называемой «вывернутой наизнанку» задачи, порождающей фиктивные собственные значения. Получено достаточное условие эквивалентности: задачи эквивалентны, если вывернутая наизнанку задача имеет только тривиальное решение. Как следствие, показано, что метод граничных интегральных уравнений Мюллера позволяет находить только истинные собственные значения на физическом листе поверхности Римана. Это подтверждено результатами вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: слабонаправляющий диэлектрический волновод, собственные волны, граничные интегральные уравнения Мюллера

Для цитирования: Шабардин Е.Е., Карчевский Е.М. Об эквивалентности дифференциальной и интегральной формулировок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 566–587. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>

On the equivalence of differential and integral formulations of the problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides

E.E. Shabardin ✉, E.M. Karchevskii

Kazan Federal University, Kazan, Russia

✉ eg.shabardin@gmail.com

Abstract

The use of the method of Muller boundary integral equations for solving the problem of eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides was justified. A theorem was proved about the spectral equivalence between the original differential problem and the problem for the system of Muller boundary integral equations on the physical sheet of the Riemann surface, where the eigenvalues, the propagation constants of the eigenwaves, are sought. With this aim, the localization regions of the spectra of the original problem and a so-called “turned inside out” problem generating spurious eigenvalues were analyzed. A sufficient condition of equivalence was obtained: the problems are equivalent if the problem turned inside out has only a trivial solution. Consequently, as confirmed by the results of the numerical experiments, only true eigenvalues on the physical sheet of the Riemann surface can be found by using the method of Muller boundary integral equations.

Keywords: weakly guided dielectric waveguide, eigenwaves, Muller boundary integral equations

For citation: Shabardin E.E., Karchevskii E.M. On the equivalence of differential and integral formulations of the problem for eigenwaves of weakly guiding dielectric waveguides. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 566–587. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.566-587>. (In Russian)

Введение

Задачи на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости, возникающие при математическом моделировании слабонаправляющих оптических волокон, являются фундаментальными в теории диэлектрических волноводов [1]. Для моделирования таких оптических устройств было разработано множество численных методов, включая метод конечных разностей во временной области [2–4], метод декомпозиции [5–8] и метод конечных элементов [9–11]. Однако ни один из этих методов не является универсальным; каждый из них эффективен только для определенного класса задач и требует значительных вычислительных ресурсов. Методы граничных интегральных уравнений [12], такие

как метод уравнений Мюллера [13], представляют собой альтернативу, снижая размерность задач и обеспечивая высокую точность. Тем не менее они также требуют тщательной настройки и значительных ресурсов для волноводов сложных конфигураций. Развитие методов интегральных уравнений открывает возможности для более точного и эффективного моделирования современных оптических устройств [14–17].

Метод граничных интегральных уравнений Мюллера использовался при исследовании микродисковых лазеров, например, в таких работах, как [18–21], и, относительно недавно, в [22–27]. Эти двумерные лазеры весьма перспективны для применения в фотонике и нанооптике благодаря своим компактным размерам, низким порогам излучения [28] и стабилизации скорости затухания мод на высоких волновых числах [27]. Численное моделирование таких микролазеров основано на решении задач на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости [29]. Сведение трехмерных уравнений Максвелла к двумерным задачам возможно благодаря тому, что толщина резонатора значительно меньше длины волны, что позволяет считать, что электромагнитное поле остается постоянным вдоль оси, ортогональной плоскости резонатора [29].

В так называемой «лазерной задаче на собственные значения» (Lasing Eigenvalues Problem, LEP), систематически применяемой, начиная с [30], для теоретического исследования спектральных свойств двумерных микродисковых лазеров [19–26] и плазмонных нанолазеров [31–33], волновые числа электромагнитного излучения являются вещественными собственными значениями. Точнее, безразмерные волновые числа κ являются первыми компонентами двухкомпонентных собственных значений. Важно отметить, что в LEP рассматриваются только активные материалы с комплексными показателями преломления. Отрицательная мнимая часть показателя преломления γ называется коэффициентом усиления, а пороговые значения усиления являются вторыми компонентами двухкомпонентных собственных значений (κ, γ) .

Для численного решения LEP исходная задача на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости сводится к нелинейной задаче на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера [19–26]. Эта система обладает фиктивными собственными значениями, которые соответствуют так называемой «вывернутой наизнанку» задаче [34]. В работе [35] было доказано, что не существует полной спектральной эквивалентности между исходной LEP и задачей на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера. С одной стороны, все собственные значения исходной LEP являются собственными значениями системы интегральных уравнений. Однако обратное утверждение не верно. А именно, собственными значениями исходной задачи являются только те собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера, которые не являются собственными значениями вывернутой наизнанку задачи.

Для частного случая круглого резонатора в [35] было доказано, что множество всех собственных значений системы граничных интегральных уравнений Мюллера можно разделить на два подмножества: подмножество истинных собственных значений исходной LEP и подмножество фиктивных собственных значений вывернутой наизнанку LEP. Численные примеры также показали, что подмножества истинных и фиктивных собственных значений хорошо разделяются на плоскости (κ, γ) , что облегчает их идентификацию. В результате система граничных интегральных уравнений Мюллера может быть эффективно использована для расчета собственных значений LEP.

Кроме того, фиктивные собственные значения были исследованы для задачи трансмиссии [36] и внешней задачи Неймана [37] для уравнения Гельмгольца на плоскости. В этих задачах в качестве собственных значений рассматривались комплексные волновые числа. Чтобы избежать вычисления фиктивных собственных значений, в работах [36, 37] были предложены различные модификации интегральных уравнений, в том числе граничных интегральных уравнений Мюллера.

В недавней работе [38] метод граничных интегральных уравнений Мюллера был применен для расчета собственных волн слабонаправляющих оптических волокон. Следуя [1], исходная трехмерная задача для системы уравнений Максвелла была сведена к задаче на собственные значения для уравнения Гельмгольца на плоскости. Здесь волновое число является заданным вещественным параметром, а комплексные собственные значения – это постоянные распространения собственных волн, разыскиваемые на соответствующей римановой поверхности. Однако вопрос о том, имеет ли система Мюллера фиктивные собственные значения для данной задачи, не рассматривался.

В работе [14] был предложен метод, альтернативный методу граничных интегральных уравнений Мюллера. Исходная задача о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов была сведена к операторному уравнению с помощью метода потенциалов простого слоя. Однако доказать теорему о полной спектральной эквивалентности для данного метода не удалось. Установлено, что исходная задача эквивалентна задаче в интегральной постановке на физическом листе римановой поверхности, лишь за исключением множества, на котором поперечное волновое число оболочки волновода принимает вещественные значения.

Основная идея настоящей работы заключается в доказательстве эквивалентности спектральной задачи для системы граничных интегральных уравнений Мюллера исходной задаче о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов в дифференциальной постановке. Прежде всего, мы формулируем исходную задачу (раздел 1). В этом разделе мы доказываем теорему 1, показывающую, что ее собственные значения могут лежать только в строго определенном интервале главного листа поверхности Римана. В разделе 2 мы формулируем вывернутую наизнанку задачу. Здесь мы доказываем теорему 2, показывающую, что собственные значения этой задачи не могут лежать на указанном листе. В разделе 3 построена система граничных интегральных уравнений Мюллера. В разделе 4 мы доказываем теорему 3, утверждающую, что в общем случае на всей римановой поверхности спектральная задача для системы граничных интегральных уравнений Мюллера не эквивалентна исходной задаче. Установлено, что эквивалентность достигается, если вывернутая наизнанку задача имеет только тривиальное решение. В этом же разделе приведена теорема 4, доказывающая полную спектральную эквивалентность дифференциальной и интегральной постановок задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов на физическом листе римановой поверхности. Из этой теоремы следует, что, решая задачу на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера на физическом листе поверхности Римана, мы будем получать только истинные собственные значения. В разделе 5 описаны вычислительные эксперименты, подтверждающие полученные теоретические результаты.

1. Исходная задача на собственные значения

Следуя [1], сформулируем задачу о собственных волнах цилиндрического диэлектрического волновода с произвольным контуром поперечного сечения и постоянным показателем преломления, близким к показателю преломления окружающей среды. Геометрия задачи представлена на рис. 1. Пусть область поперечного сечения волновода Ω_i ограничена дважды непрерывно дифференцируемым контуром Γ . Показатель преломления n является кусочно-постоянной функцией, а именно, в области Ω_i он равен константе n_i , а в области $\Omega_e = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_i$ – константе n_e , причем $0 < n_e < n_i$. Будем считать, что постоянная распространения β является неизвестным комплексным параметром. Символом ω обозначим заданную положительную частоту электромагнитных колебаний. Задача заключается в нахождении таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца,

$$\Delta u + \chi_i^2 u = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (1)$$

$$\Delta u + \chi_e^2 u = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (2)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$u^+ = u^-, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (3)$$

Здесь $\chi_i = \sqrt{k^2 n_i^2 - \beta^2}$ и $\chi_e = \sqrt{k^2 n_e^2 - \beta^2}$ – поперечные волновые числа областей Ω_i и Ω_e соответственно, $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} > 0$ – волновое число в свободном пространстве. Через $u^+(u^-)$ обозначены предельные значения функции u снаружи (изнутри) контура Γ . Символ $\partial u / \partial \nu$ обозначает производную по внешней нормали к контуру Γ .

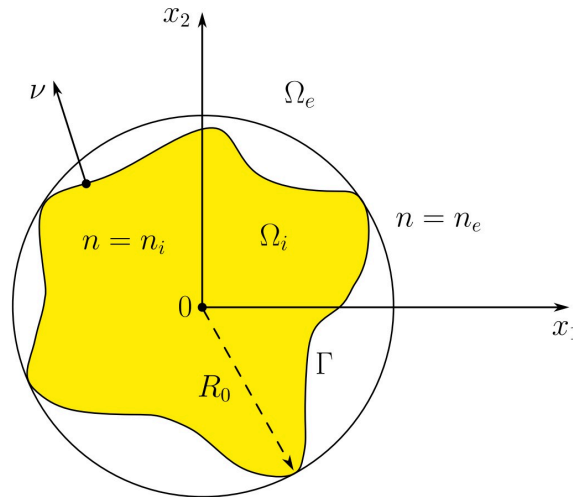


Рис. 1. Геометрия исходной задачи на собственные значения

Fig. 1. Geometry of the original eigenvalue problem

Будем предполагать, что функция u удовлетворяет на бесконечности парциальным условиям излучения, т. е. при $|x| \geq R_0$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда, допускающего почленное дифференцирование [14]:

$$u(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l H_l^{(1)}(\chi_e r) \exp(il\varphi), \quad (4)$$

где $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, а $H_l^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода порядка l .

Следуя [12, с. 68], мы предполагаем, что нормальные производные изнутри и снаружи границы Γ в (3) являются правильными в том смысле, что пределы

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} (\nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x))), \quad x \in \Gamma, \quad (5)$$

сходятся равномерно по $x \in \Gamma$.

Будем искать нетривиальные решения u задачи (1)–(4) в классе функций, непрерывных в $\overline{\Omega_i}$ и $\overline{\Omega_e}$, а также дважды непрерывно дифференцируемых в Ω_i и Ω_e . Множество таких функций обозначим символом U .

Будем предполагать, что постоянные распространения β принадлежат множеству Λ – пересечению римановых поверхностей Λ_i и Λ_e функций $\ln \chi_i(\beta)$ и $\ln \chi_e(\beta)$:

$$\Lambda = \Lambda_i \cap \Lambda_e.$$

Пусть символ

$$\Lambda_0^{(1)} = \Lambda_{i0}^{(1)} \cap \Lambda_{e0}^{(1)}$$

обозначает пересечение главных листов этих поверхностей, определяемых следующими условиями:

$$-\pi/2 < \arg \chi_i(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im} \chi_i(\beta) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{i0}^{(1)}, \quad (6)$$

$$-\pi/2 < \arg \chi_e(\beta) < 3\pi/2, \quad \text{Im} \chi_e(\beta) \geq 0, \quad \beta \in \Lambda_{e0}^{(1)}. \quad (7)$$

Обозначим вещественную ось листа $\Lambda_0^{(1)}$ символом $\mathbb{R}_0^{(1)}$, а мнимую ось – символом $\mathbb{I}_0^{(1)}$. Пусть множество G является объединением двух интервалов вещественной оси $\mathbb{R}_0^{(1)}$, а именно, $G = \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : kn_e < |\beta| < kn_i\}$. Введем множества $B = \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| > kn_i\}$, $C_0^{(1)} = \Lambda_0^{(1)} \setminus \{\mathbb{I}_0^{(1)} \cup \mathbb{R}_0^{(1)}\}$ и $D = \{\beta \in \mathbb{I}_0^{(1)}\} \cup \{\beta \in \mathbb{R}_0^{(1)} : |\beta| < kn_e\}$ (см. рис. 2).

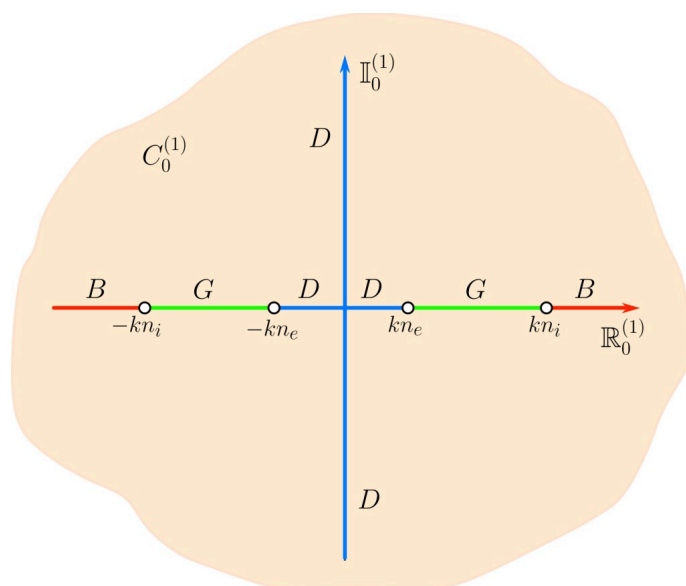


Рис. 2. Изображение листа $\Lambda_0^{(1)}$

Fig. 2. Image of the sheet $\Lambda_0^{(1)}$

Ненулевую функцию $u \in U$ будем называть собственной функцией задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (1)–(4).

Теорема 1. *На листе $\Lambda_0^{(1)}$ собственные значения β задачи (1)–(4) могут лежать лишь в области G .*

Доказательство данной теоремы приведено в ([14], теорема 1).

2. Вывернутая наизнанку задача на собственные значения

Следуя [34], сформулируем вывернутую наизнанку задачу, соответствующую исходной задаче (1)–(4) (см. рис. 3). Области Ω_i и Ω_e остаются теми же, что и в задаче (1)–(4), но показатель преломления в области Ω_i равен константе n_e , а в области Ω_e – константе n_i , причем, как и ранее, $0 < n_e < n_i$. Символом Γ обозначен тот же самый дважды непрерывно дифференцируемый контур. Постоянная распространения β является неизвестным комплексным параметром, а ω – заданная положительная частота электромагнитных колебаний. Задача заключается в нахождении таких значений параметра β , при которых существуют нетривиальные решения уравнений Гельмгольца

$$\Delta v + \chi_e^2 v = 0, \quad x \in \Omega_i, \quad (8)$$

$$\Delta v + \chi_i^2 v = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (9)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$v^+ = v^-, \quad \frac{\partial v^+}{\partial \nu} = \frac{\partial v^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma, \quad (10)$$

и парциальным условиям излучения на бесконечности

$$v(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l H_l^{(1)}(\chi_i r) \exp(il\varphi). \quad (11)$$

Здесь мы используем те же обозначения и понимаем нормальные производные в (10) так же, как в предыдущем разделе.

Ненулевую функцию $v \in U$ будем называть собственной функцией вывернутой наизнанку задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, если выполнены условия (8)–(11).

Теорема 2. *Собственные значения β задачи (8)–(11) не могут лежать на листе $\Lambda_0^{(1)}$.*

Доказательство. Лист $\Lambda_0^{(1)}$ является объединением четырех множеств (см. рис. 2), а именно, $\Lambda_0^{(1)} = C_0^{(1)} \cup D \cup G \cup B$. Докажем, что ни одно из множеств $C_0^{(1)}$, D , B и G не содержит собственных значений задачи (8)–(11).

Предположим, что v является собственной функцией задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in D \cup G$. Тогда получим, что χ_i и χ_e – вещественные положительные числа при $\beta \in D$. Если $\beta \in G$, то параметр χ_i является вещественным,

а χ_e становится чисто мнимым с положительной мнимой частью. Применим вторую формулу Грина (см., например, [12, с. 79]) в областях Ω_i и $\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}$, где $R \geq R_0$, к функциям v и $\bar{v}$ (здесь $\bar{v}$ означает функцию, комплексно-сопряженную с v). Получим равенства

$$\int_{\Omega_i} (v \Delta \bar{v} - \bar{v} \Delta v) dx = \int_{\Gamma} \left(v^- \frac{\partial \bar{v}^-}{\partial \nu} - \bar{v}^- \frac{\partial v^-}{\partial \nu} \right) dl,$$

$$\int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}} (v \Delta \bar{v} - \bar{v} \Delta v) dx = - \int_{\Gamma} \left(v^+ \frac{\partial \bar{v}^+}{\partial \nu} - \bar{v}^+ \frac{\partial v^+}{\partial \nu} \right) dl + \int_{\Gamma_R} \left(v \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dl.$$

При $\beta \in D \cup G$ левые части двух последних равенств обращаются в нуль. Сложим их почленно и воспользуемся условиями сопряжения (10). В результате получим

$$\int_{\Gamma_R} \left(v \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} \right) dl = 0, \quad R \geq R_0. \quad (12)$$

Подставим разложение (11) в равенство (12):

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(H_l^{(1)}(\chi_i R) H_l^{(2)'}(\chi_i R) - H_l^{(1)'}(\chi_i R) H_l^{(2)}(\chi_i R) \right) |c_l|^2 = 0.$$

Выражение, стоящее в скобках, является определителем Вронского (см., например, [39, с. 182]) и не зависит от значения переменной l :

$$H_l^{(1)}(\chi_i R) H_l^{(2)'}(\chi_i R) - H_l^{(1)'}(\chi_i R) H_l^{(2)}(\chi_i R) = \frac{4}{i\pi \chi_i R}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

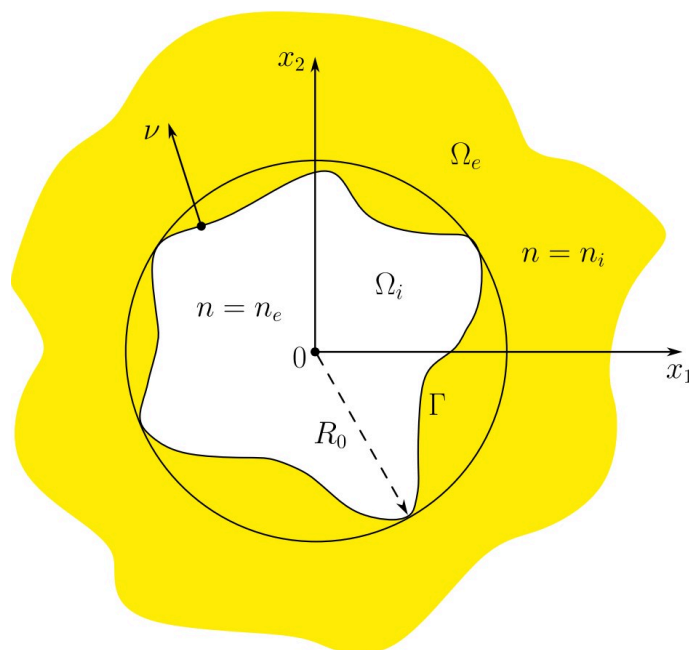


Рис. 3. Геометрия вывернутой наизнанку задачи на собственные значения

Fig. 3. Geometry of the eigenvalue problem turned inside out

Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$ все коэффициенты c_l в разложении (11) обращаются в нуль. Таким образом, $v = 0$ при $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_{R_0}$. Функция v удовлетворяет в области Ω_e уравнению Гельмгольца (9) с постоянным коэффициентом и, значит, аналитическая по x в Ω_e . Поэтому $v = 0$ при $x \in \Omega_e$, а также $v^+ = 0$ и $\partial v^+ / \partial \nu = 0$ на контуре Γ . Применим в области Ω_i третью формулу Грина (см., например, [12, с. 80]). Из этого представления функции v и условий сопряжения (10) следует, что $v = 0$ в Ω_i . Итак, мы доказали, что при $\beta \in D \cup G$ функция v тождественно равна нулю на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (8)–(11). Следовательно, области D и G свободны от собственных значений данной задачи.

Предположим теперь, что v является собственной функцией задачи (8)–(11), соответствующей собственному значению $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$. Если $\beta \in C_0^{(1)}$, то согласно условиям (6), (7) параметры χ_i и χ_e будут комплексными числами с положительными мнимыми частями. Если $\beta \in B$, то согласно тем же условиям χ_i и χ_e будут чисто мнимыми числами с положительными мнимыми частями. Применим первую формулу Грина (см., например, [12, с. 79]) в областях Ω_i и $\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}$, где $R \geq R_0$, к функциям v и $\bar{v}$. Сложим полученные равенства почленно, учитывая условия сопряжения (10):

$$\int_{\Omega_i} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_i} \bar{v} \Delta v dx + \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}} \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega_R \setminus \overline{\Omega_i}} \bar{v} \Delta v dx = \int_{\Gamma_R} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial r} dl.$$

Устремим R к бесконечности. При этом заметим, что согласно асимптотике (см., например, [39, с. 364])

$$H_l^{(1)}(\chi_i r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \chi_i r}} \exp \left[i \left(\chi_i r - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left[1 + O \left(\frac{1}{\chi_i r} \right) \right], \quad r \rightarrow \infty,$$

все подынтегральные выражения, зависящие от r , экспоненциально убывают при любом $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$. В результате получим

$$\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_e} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega_i} (\beta^2 - k^2 n_e^2) |v|^2 dx + \int_{\Omega_e} (\beta^2 - k^2 n_i^2) |v|^2 dx = 0. \quad (13)$$

При $\beta \in B$ равенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда $v = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Возьмем от левой и правой частей равенства (13) мнимую часть:

$$\operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\Omega_i} |v|^2 dx + \operatorname{Im}(\beta^2) \int_{\Omega_e} |v|^2 dx = 2 \operatorname{Re}(\beta) \operatorname{Im}(\beta) \left(\int_{\Omega_i} |v|^2 dx + \int_{\Omega_e} |v|^2 dx \right) = 0.$$

Заметим, что ни мнимая, ни вещественная части числа $\beta \in C_0^{(1)}$ не обращаются в нуль. Следовательно, при $\beta \in C_0^{(1)}$ равенство (13) выполняется тогда и только тогда, когда $v = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, мы доказали, что при любом $\beta \in C_0^{(1)} \cup B$ функция v тождественно равна нулю на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, что противоречит предположению о том, что она является собственной функцией задачи (8)–(11). Следовательно, области B и $C_0^{(1)}$ также свободны от собственных значений данной задачи. $\square$

3. Система граничных интегральных уравнений Мюллера

Если u является собственной функцией задачи (1)–(4), соответствующей собственному значению $\beta \in \Lambda$, то справедливы следующие интегральные представления (см. [12], с. 80, теорема 3.1; с. 81, теорема 3.3):

$$\int_{\Gamma} \left(u^-(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(y) \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega_i; \\ 0, & x \in \Omega_e, \end{cases} \quad (14)$$

$$\int_{\Gamma} \left(u^+(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^+}{\partial \nu}(y) \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega_i; \\ u(x), & x \in \Omega_e. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь символами

$$\Phi_m(\beta; x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\chi_m |x - y|), \quad m = i, e,$$

обозначены фундаментальные решения уравнений Гельмгольца (1), (2). Используя условия сопряжения (3), определим функции

$$\varphi = u^+ = u^-, \quad \psi = \frac{\partial u^+}{\partial \nu} = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma. \quad (16)$$

Перейдя к пределу при $x \rightarrow \Gamma$ в (14) и используя свойства потенциалов двойного слоя (см. [12], с. 59, теорема 2.13) и непрерывность потенциалов простого слоя (см. [12], с. 58, теорему 2.12), получим

$$u^-(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} u^-(y) dl(y) + \int_{\Gamma} \Phi_i(\beta; x, y) \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(y) dl(y) + \frac{1}{2} u^-(x), \quad x \in \Gamma.$$

Аналогично из (15) следует, что

$$u^+(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} u^+(y) dl(y) - \int_{\Gamma} \Phi_e(\beta; x, y) \frac{\partial u^+}{\partial \nu}(y) dl(y) + \frac{1}{2} u^+(x), \quad x \in \Gamma.$$

Вместо подстановки этих выражений в условия сопряжения (3), следуя [13], сложим их почленно. Учитывая равенства (16), получим уравнение

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma} (\Phi_e(\beta; x, y) - \Phi_i(\beta; x, y)) \psi(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (17)$$

Возьмем производные по нормали ν от равенств (14), (15) и перейдем к пределу при $x \rightarrow \Gamma$, используя хорошо известные свойства потенциалов (см. [12], с. 64, теорема 2.19; с. 65, теорема 2.21). Сложив данные равенства почленно и применив соотношения (16), получим уравнение

$$\begin{aligned} \psi(x) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} \right) \varphi(y) dl(y) + \\ + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} \right) \psi(y) dl(y) = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (18)$$

Система (17), (18) называется системой граничных интегральных уравнений Мюллера. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} K^{(1,1)} &= \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)}, \quad K^{(1,2)} = \Phi_e(\beta; x, y) - \Phi_i(\beta; x, y), \quad x, y \in \Gamma, \\ K^{(2,1)} &= \frac{\partial^2 \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)} - \frac{\partial^2 \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x) \partial \nu(y)}, \quad K^{(2,2)} = \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(x)}, \quad x, y \in \Gamma. \end{aligned}$$

Следуя [40], можно показать, что для любого $\beta \in \Lambda$ ядра $K^{(1,1)}$ и $K^{(2,2)}$ непрерывны, а ядра $K^{(1,2)}$ и $K^{(2,1)}$ слабо сингулярны. Следовательно, интегральный оператор, соответствующий левым частям равенств (17) и (18), является фредгольмовым оператором с нулевым индексом в пространстве $[C(\Gamma)]^2$, где $C(\Gamma)$ – банахово пространство функций, непрерывных на Γ [40].

Назовем $\beta \in \Lambda$ собственным значением системы граничных интегральных уравнений Мюллера, если при данном β система (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$. Вектор-функцию (φ, ψ) будем называть собственным вектором системы граничных интегральных уравнений Мюллера, отвечающим собственному значению β .

4. Эквивалентность

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения:*

- А. Если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению $\beta \in \Lambda$, то функции φ и ψ , определенные в (16), принадлежат банахову пространству $C(\Gamma)$ и являются нетривиальным решением системы (17), (18) с тем же значением параметра β .
- В. Пусть для данного значения $\beta \in \Lambda$ система граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$, а задача, вывернутая наизнанку, (8)–(11), имеет только тривиальное решение. Тогда функция u , определенная как

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (19)$$

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_e, \quad (20)$$

является собственной функцией задачи (1)–(4), отвечающей β .

Доказательство. Проведем доказательство этой теоремы, следуя работе [41]. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть u – собственная функция задачи (1)–(4). Тогда u^+ и u^- принадлежат пространству $C(\Gamma)$. Функции $\partial u^+/\partial \nu$ и $\partial u^-/\partial \nu$, определенные в (5), также принадлежат пространству $C(\Gamma)$ как равномерные пределы непрерывных функций. Тогда $\varphi, \psi \in C(\Gamma)$. Вектор (φ, ψ) , определенный в (16), является решением (17), (18) по построению этой системы уравнений. Предположим, что $\varphi = \psi = 0$, тогда из (16) получим, что $u^+ = u^- = 0$ и $\partial u^+/\partial \nu = \partial u^-/\partial \nu = 0$. Подставив полученные равенства в интегральные представления (14), (15), получим, что $u = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^2$, что противоречит предположению о том, что u – собственная функция исходной задачи (1)–(4).

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть вектор $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$ является собственным вектором системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18), соответствующим собственному значению $\beta \in \Lambda$. Определим функцию v :

$$v(x) = - \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_e(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_e(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_i, \quad (21)$$

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left(\varphi(y) \frac{\partial \Phi_i(\beta; x, y)}{\partial \nu(y)} - \psi(y) \Phi_i(\beta; x, y) \right) dl(y), \quad x \in \Omega_e. \quad (22)$$

Докажем, что функция v удовлетворяет всем условиям задачи, вывернутой наизнанку, (8)–(11).

Функция v дважды непрерывно дифференцируема в областях Ω_i , Ω_e и удовлетворяет уравнениям (8), (9) как линейная комбинация потенциалов простого и двойного слоев с непрерывными плотностями (см., например, [12]). Эта линейная комбинация также будет непрерывна в $\overline{\Omega_i}$ и $\overline{\Omega_e}$. Применив теорему сложения Графа (см., например, [39, с. 184]), получим, что функция $\Phi_i(\beta; x, y)$ при любых $\beta \in \Lambda$ и $y \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет разложению (11). Тогда из (22) следует, что v удовлетворяет парциальным условиям излучения (11). Граничные условия (10) также выполняются, что легко проверить непосредственными вычислениями. Таким образом, функция v удовлетворяет всем условиям задачи, вывернутой наизнанку, (8)–(11).

Определим функцию u по формулам (19), (20). Вычислим предельные значения функций u , v и их нормальных производных. Получим

$$\begin{aligned} u^+ + v^- &= \varphi, & u^- - v^+ &= \varphi, & x &\in \Gamma, \\ \frac{\partial u^+}{\partial \nu} + \frac{\partial v^-}{\partial \nu} &= \psi, & \frac{\partial u^-}{\partial \nu} - \frac{\partial v^+}{\partial \nu} &= \psi, & x &\in \Gamma. \end{aligned}$$

Согласно предположению теоремы $v(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$. Поэтому из предыдущих четырех равенств следует равенство вида (16) для построенной сейчас функции u , а это значит, что граничные условия (3) выполняются. Рассуждая, как выше для функции v , получим, что и для u выполняются все остальные условия задачи (1)–(4). Таким образом, функция u , определенная в (19), (20), является собственной функцией исходной задачи (1)–(4). Действительно, если предположить, что $u = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$, то из полученных равенств вида (16) следует, что $\varphi = \psi = 0$ на Γ . Это противоречит предположению теоремы о том, что вектор (φ, ψ) является нетривиальным решением системы граничных интегральных уравнений Мюллера. $\square$

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

- А. Если $u \in U$ – собственная функция задачи (1)–(4), отвечающая собственному значению $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$, то функции φ и ψ , определенные в (16), принадлежат банахову пространству $C(\Gamma)$ и являются нетривиальным решением системы (17), (18) с тем же значением параметра β .
- В. Пусть для заданного значения $\beta \in \Lambda_0^{(1)}$ система граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) имеет нетривиальное решение $(\varphi, \psi) \in [C(\Gamma)]^2$. Тогда функция u , определенная в (19) и (20), является собственной функцией исходной задачи (1)–(4), отвечающей β .

Доказательство. Первый пункт теоремы непосредственно следует из первого пункта теоремы 3. Второй пункт вытекает из второго пункта теоремы 3 и теоремы 2 о локализации спектра вывернутой наизнанку задачи. $\square$

5. Вычислительные эксперименты

Проведем вычислительные эксперименты, демонстрирующие справедливость теоремы 4 об эквивалентности. Рассмотрим волновод с круговым поперечным сечением радиуса a . Показатель преломления во внутренней области Ω_i зададим как $n_i = 1.5440$, а во внешней области Ω_e – как $n_e = 1.4874$, что типично для волоконной оптики. Ограничимся поиском β на физическом листе $\Lambda_0^{(1)}$. При этом значения параметров k и β будем считать обезразмеренными умножением на a .

Решив задачу (1)–(4) методом разделения переменных, получим семейство характеристических уравнений

$$\det(A_m(\beta)) = 0, \quad A_m(\beta) = \begin{pmatrix} J_m(\chi_i a) & H_m^{(1)}(\chi_e a) \\ \chi_i J'_m(\chi_i a) & \chi_e H_m^{(1)'}(\chi_e a) \end{pmatrix}, \quad m = -N, \dots, N. \quad (23)$$

Каждое из уравнений (23) имеет бесконечное число корней β . Обозначим через β_{mn} n -й корень уравнения (23) с номером m . Решения уравнений (23) будем называть точными собственными значениями задачи (1)–(4).

Рассуждая аналогично [38], используя метод Галеркина с тригонометрическим базисом, сведем задачу на собственные значения для системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18) к матричной задаче. Она имеет нетривиальные решения, если выполняется условие

$$\det(C(\beta)) = 0. \quad (24)$$

Здесь $C(\beta)$ – матрица системы Галеркина, она имеет блочно-диагональную структуру, а каждый ее диагональный блок имеет вид

$$C_m(\beta) = \begin{pmatrix} c_m^{(1,1)}(\beta) & c_m^{(2,1)}(\beta) \\ c_m^{(1,2)}(\beta) & c_m^{(2,2)}(\beta) \end{pmatrix}, \quad m = -N, \dots, N.$$

Элементы этих блоков вычисляются по следующим формулам:

$$c_m^{(1,1)}(\beta) = \frac{2}{a} + \frac{i\pi}{2} \chi_i J_m(\chi_i a) H_m^{(1)'}(\chi_i a) - \frac{i\pi}{2} \chi_e J_m'(\chi_e a) H_m^{(1)}(\chi_e a),$$

$$c_m^{(1,2)}(\beta) = \frac{i\pi}{2} J_m(\chi_e a) H_m^{(1)}(\chi_e a) - \frac{i\pi}{2} J_m(\chi_i a) H_m^{(1)}(\chi_i a),$$

$$c_m^{(2,1)}(\beta) = \frac{i\pi}{2} \chi_i^2 J_m'(\chi_i a) H_m^{(1)'}(\chi_i a) - \frac{i\pi}{2} \chi_e^2 J_m'(\chi_e a) H_m^{(1)'}(\chi_e a),$$

$$c_m^{(2,2)}(\beta) = \frac{2}{a} + \frac{i\pi}{2} \chi_e J_m(\chi_e a) H_m^{(1)'}(\chi_e a) - \frac{i\pi}{2} \chi_i J_m'(\chi_i a) H_m^{(1)}(\chi_i a).$$

Решения уравнения (24) можно назвать приближенными собственными значениями задачи (1)–(4), полученными методом Галеркина.

Найдем точные и приближенные значения постоянной распространения β для $m = 0, 1, 2, 3, 4$ и $n = 1$. На рис. 4 сплошными линиями показаны решения уравнений (24), а точками – уравнения (23). Полное совпадение результатов двух подходов на множестве $\Lambda_0^{(1)}$ служит численным подтверждением эквивалентности между исходной краевой задачей (1)–(4) и соответствующей спектральной задачей для системы граничных интегральных уравнений Мюллера (17), (18). Фиктивные собственные значения для данной системы на $\Lambda_0^{(1)}$ найдены не были.

На рис. 4 обозначены две точки: синим цветом выделена точка с параметрами $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2} = 1.46$, $\beta = 15.33$, а красным цветом – точка с параметрами $p = 0.84$, $\beta = 23.19$. Для указанных значений построены графики соответствующих собственных функций, представленные на рис. 5.

Заключение

Основным результатом работы является теоретическое обоснование метода граничных интегральных уравнений Мюллера для решения задачи о собственных волнах слабонаправляющих диэлектрических волноводов. Установлена спектральная эквивалентность исходной дифференциальной задачи и задачи для системы уравнений Мюллера на физическом листе римановой поверхности, где разыскиваются собственные значения – постоянные распространения собственных волн. Установлено, что истинные собственные значения, соответствующие исходной задаче, могут находиться лишь в определенном ограниченном множестве на вещественной оси физического листа поверхности Римана, тогда как фиктивные собственные значения, соответствующие вывернутой наизнанку задаче, на этом листе отсутствуют. Вычислительные эксперименты подтвердили теоретические выводы, продемонстрировав отсутствие фиктивных собственных значений на физическом листе римановой поверхности. Вычисления проводились с помощью метода Галеркина. Исследование эквивалентности дифференциальной и интегральной постановок задачи является основой и для доказательства сходимости примененного метода. Обоснованию сходимости метода Галеркина будет посвящена специальная работа.

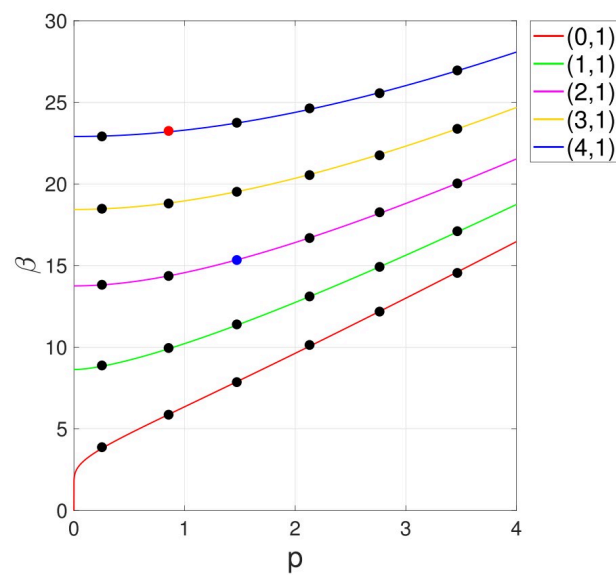


Рис. 4. Зависимость параметра β от параметра $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2}$. Сплошными линиями указаны приближенные собственные значения, а точками – точные

Fig. 4. Dependence of the parameter β on the parameter $p = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_e^2}$. Solid lines show approximate eigenvalues, while dots indicate exact eigenvalues

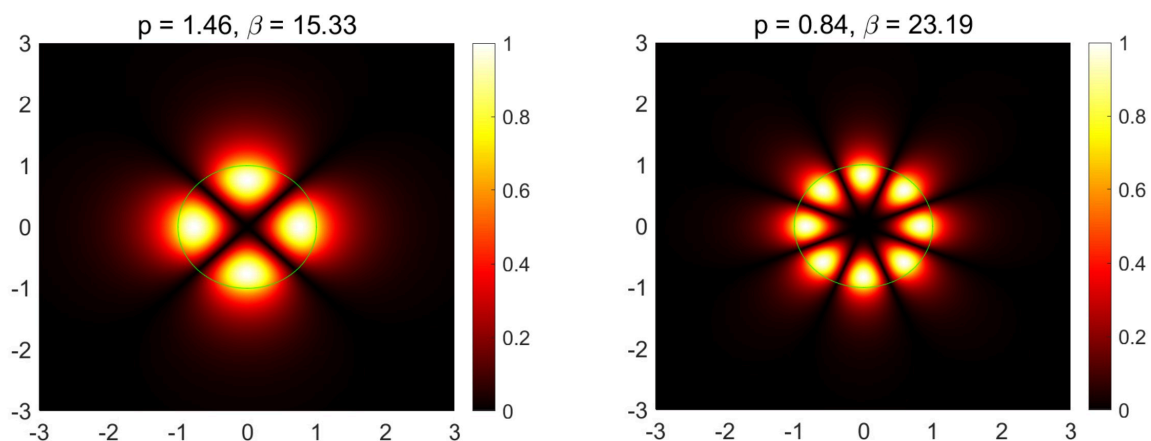


Рис. 5. Графики собственных функций для $\beta = 15.33$ и $\beta = 23.19$

Fig. 5. Eigenfunction graphs for $\beta = 15.33$ and $\beta = 23.19$

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Snyder A.W., Love J.D.* Optical Waveguide Theory. New York, NY: Springer, 1983. viii, 738 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2813-1>.
2. *Kunz K.S., Luebbers R.J.* The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993. 464 p. <https://doi.org/10.1201/9780203736708>.

3. *Taflove A., Hagness S.C.* Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston, MA, London: Artech House, 2005. 1038 p.
4. *Elsherbeni A.Z., Demir V.* The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations. Ser.: The ACES Series on Computational Electromagnetics and Engineering. SciTech Publ., 2015. 560 p. <https://doi.org/10.1049/SBEW514E>.
5. *Obayya S.* Computational Photonics. Chichester, Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010. xv, 306 p. <https://doi.org/10.1002/9780470667064>.
6. *Shao Y., Peng Z., Lim K.H., Lee J.-F.* Non-conformal domain decomposition methods for time-harmonic Maxwell equations // Proc. R. Soc. A. 2012. V. 468, No 2145. P. 2433–2460. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0028>.
7. *Koczka G., Bauernfeind T., Preis K., Bíró O.* An iterative domain decomposition method for solving wave propagation problems // Electromagnetics. 2014. V. 34, Nos 3–4. P. 210–221. <https://doi.org/10.1080/02726343.2014.877751>.
8. *Beilina L., Lindström E.* An adaptive finite element/finite difference domain decomposition method for applications in microwave imaging // Electronics. 2022. V. 11, No 9. Art. 1359. <https://doi.org/10.3390/electronics11091359>.
9. *Wartak M.S.* Computational Photonics: An Introduction with MATLAB. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. xiv, 452 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511794247>.
10. *Lavrinenko A.V., Lægsgaard J., Gregersen N., Schmidt F., Søndergaard T.* Numerical Methods in Photonics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015. 364 p. <https://doi.org/10.1201/b17408>.
11. *Dautov R.Z., Karchevskii E.M.* Numerical modeling of optical fibers using the finite element method and an exact non-reflecting boundary condition // Comput. Methods Appl. Math. 2018. V. 18, No 4. P. 581–601. <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0049>.
12. *Colton D., Kress R.* Integral Equation Methods in Scattering Theory. Ser.: Classics in Applied Mathematics. V. 72. Philadelphia, PA: SIAM, 2013. 287 p.
13. *Müller C.* Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. V. 155. Berlin, Heidelberg: Springer, 1969. viii, 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11773-6>.
14. *Karchevskii E.M.* Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides // Comput. Math. Math. Phys. 1999. V. 39, No 9. P. 1493–1498.
15. *Karchevskii E.M.* The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides // Differ. Equations. 2000. V. 36, No 7. P. 1109–1111. <https://doi.org/10.1007/BF02754515>.
16. *Frolov A., Kartchevskiy E.* Integral equation methods in optical waveguide theory // Beilina L., Shestopalov Y.V. (Eds.) Inverse Problems and Large-Scale Computations. Ser.: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. V. 52. Cham: Springer, 2013. P. 119–133. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00660-4_9.
17. *Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M.* Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides // Proc. Int. Conf. Days on Diffraction 2013. St. Petersburg: IEEE, 2013. P. 131–135. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2013.6712817>.

18. *Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I.* Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2004. V. 21, No 3. P. 393–402.
<http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.21.000393>.
19. *Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P.* Trends in microdisk laser research and linear optical modelling // *Opt. Quantum Electron.* 2007. V. 39, No 15. P. 1253–1272.
<http://dx.doi.org/10.1007/s11082-008-9203-z>.
20. *Smotrova E.I., Byelobrov V.O., Benson T.M., Čtyroký J., Sauleau R., Nosich A.I.* Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions // *IEEE J. Quantum Electron.* 2011. V. 47, No 1. P. 20–30.
<http://dx.doi.org/10.1109/JQE.2010.2055836>.
21. *Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I.* Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2013. V. 30, No 6. P. 1732–1742. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.30.001732>.
22. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Spectra, thresholds, and modal fields of a circular microcavity laser transforming into a square // *Proc. 2015 17th Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON)*. Budapest: IEEE, 2015. P. 1–4.
<http://dx.doi.org/10.1109/ICTON.2015.7193654>.
23. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions // *Proc. 2016 Days on Diffraction (DD)*. St. Petersburg: IEEE, 2016. P. 390–395.
<http://dx.doi.org/10.1109/DD.2016.7756880>.
24. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes // *Axioms*. 2019. V. 8, No 3. Art. 101. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms8030101>.
25. *Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method // *Opt. Commun.* 2020. V. 476. Art. 126311.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126311>.
26. *Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities // *SIAM J. Appl. Math.* 2020. V. 80, No 4. P. 1977–1998.
<http://dx.doi.org/10.1137/19M1261882>.
27. *Yi C.-H., Dietz B., Han J.-H., Ryu J.-W.* Decay rates of optical modes unveiling the island structures in mixed phase space // *Phys. Rev. A*. 2025. V. 111, No 3. Art. 033509.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.033509>.
28. *Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z.* Nanolasers based on 2D materials // *Laser Photonics Rev.* 2020. V. 14, No 12. Art. 2000271. <http://dx.doi.org/10.1002/lpor.202000271>.
29. *Smotrova E.I., Nosich A.I., Benson T.M., Sewell P.* Cold-cavity thresholds of microdisks with uniform and nonuniform gain: Quasi-3-D modeling with accurate 2-D analysis // *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* 2005. V. 11, No 5. P. 1135–1142.
<http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2005.853848>.

30. *Smotrova E.I., Nosich A.I.* Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity // *Opt. Quantum Electron.* 2004. V. 36, No 1. P. 213–221. <http://dx.doi.org/10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c>.
31. *Herasymova D.O., Dukhopelnykov S.V., Natarov D.M., Zinenko T.L., Lucido M., Nosich A.I.* Threshold conditions for transversal modes of tunable plasmonic nanolasers shaped as single and twin graphene-covered circular quantum wires // *Nanotechnology.* 2022. V. 33, No 49. Art. 495001. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6528/ac8e0c>.
32. *Kaliberda M.E., Pogarsky S.A., Kostenko O.V., Nosych O.I., Zinenko T.L.* Circular quantum wire symmetrically loaded with a graphene strip as the plasmonic micro/nano laser: Threshold conditions analysis // *Opt. Express.* 2024. V. 32, No 7. P. 12213–12227. <https://doi.org/10.1364/OE.514643>.
33. *Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Zinenko T.L., Nosych O.I.* Microsize graphene strip grating on gain substrate laser: Comparison of the H- and E-polarized mode threshold conditions // *Opt. Express.* 2025. V. 33, No 6. P. 14266–14287. <https://doi.org/10.1364/OE.554771>.
34. *Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M.* Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem // *Lobachevskii J. Math.* 2020. V. 41, No 7. P. 1377–1384. <https://doi.org/10.1134/s1995080220070343>.
35. *Ketov I.V., Karchevskii E.M.* Characteristic equations for true and fictitious eigenvalues of Muller boundary integral equations // *Lobachevskii J. Math.* 2023. V. 44, No 9. P. 4016–4027. <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080223090147>.
36. *Misawa R., Nino K., Nishimura N.* Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems // *SIAM J. Appl. Math.* 2017. V. 77, No 2. P. 770–788. <https://doi.org/10.1137/16m1087436>.
37. *Steinbach O., Unger G.* Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems // *Math. Methods Appl. Sci.* 2016. V. 40, No 5. P. 1516–1530. <https://doi.org/10.1002/mma.4075>.
38. *Shabardin E.E., Spiridonov A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M.* Numerical modeling of photonic crystal fibers using Muller boundary integral equations // *Lobachevskii J. Math.* 2024. V. 45, No 10. P. 4787–4797. <https://doi.org/10.1134/S1995080224605861>.
39. *Abramowitz M., Stegun I.A.* (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* National Bureau of Standards. Ser.: Applied Mathematics Series. V. 55. Washington, DC: US Gov. Print. Office, 1972. xiv, 1046 p.
40. *Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I.* Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39, No 8. P. 1148–1157. <https://doi.org/10.1134/s1995080218080127>.
41. *Кетов И.В., Октябрьская А.О., Спиридонов А.О., Карчевский Е.М.* Истинные и фиктивные собственные значения системы граничных интегральных уравнений Мюллера // *Програм. продукты и сист.* 2022. Т. 35, № 3. С. 316–328. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.139.316-328>.

References

1. Snyder A.W., Love J.D. *Optical Waveguide Theory*. New York, NY, Springer, 1983. viii, 738 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-2813-1>.
2. Kunz K.S., Luebbers R.J. *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1993. 464 p. <https://doi.org/10.1201/9780203736708>.
3. Taflov A., Hagness S.C. *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Boston, MA, London, Artech House, 2005. 1038 p.
4. Elsherbeni A.Z., Demir V. *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations*. Ser.: The ACES Series on Computational Electromagnetics and Engineering. SciTech Publ., 2015. 560 p. <https://doi.org/10.1049/SBEW514E>.
5. Obayya S. *Computational Photonics*. Chichester, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2010. xv, 306 p. <https://doi.org/10.1002/9780470667064>.
6. Shao Y., Peng Z., Lim K.H., Lee J.-F. Non-conformal domain decomposition methods for time-harmonic Maxwell equations. *Proc. R. Soc. A*, 2012, vol. 468, no. 2145, pp. 2433–2460. <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0028>.
7. Koczka G., Bauernfeind T., Preis K., Bíró O. An iterative domain decomposition method for solving wave propagation problems. *Electromagnetics*, 2014, vol. 34, nos. 3–4, pp. 210–221. <https://doi.org/10.1080/02726343.2014.877751>.
8. Beilina L., Lindström E. An adaptive finite element/finite difference domain decomposition method for applications in microwave imaging. *Electronics*, 2022, vol. 11, no. 9, art. 1359. <https://doi.org/10.3390/electronics11091359>.
9. Wartak M.S. *Computational Photonics: An Introduction with MATLAB*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013. xiv, 452 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511794247>.
10. Lavrinenko A.V., Lægsgaard J., Gregersen N., Schmidt F., Søndergaard T. *Numerical Methods in Photonics*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2015. 364 p. <https://doi.org/10.1201/b17408>.
11. Dautov R.Z., Karchevskii E.M. Numerical modeling of optical fibers using the finite element method and an exact non-reflecting boundary condition. *Comput. Methods Appl. Math.*, 2018, vol. 18, no. 4, pp. 581–601. <https://doi.org/10.1515/cmam-2017-0049>.
12. Colton D., Kress R. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Ser.: Classics in Applied Mathematics. Vol. 72. Philadelphia, PA, SIAM, 2013. 287 p.
13. Müller C. *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Ser.: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Vol. 155. Berlin, Heidelberg, Springer, 1969. viii, 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11773-6>.
14. Karchevskii E.M. Analysis of the eigenmode spectra of dielectric waveguides. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1999, vol. 39, no. 9, pp. 1493–1498.
15. Karchevskii E.M. The fundamental wave problem for cylindrical dielectric waveguides. *Differ. Equations*, 2000, vol. 36, no. 7, pp. 1109–1111. <https://doi.org/10.1007/BF02754515>.

16. Frolov A., Kartchevskiy E. Integral equation methods in optical waveguide theory. In: Beilina L., Shestopalov Y.V. (Eds.) *Inverse Problems and Large-Scale Computations*. Ser.: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 52. Cham, Springer, 2013, pp. 119–133. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00660-4_9.
17. Spiridonov A.O., Karchevskiy E.M. Projection methods for computation of spectral characteristics of weakly guiding optical waveguides. *Proc. Int. Conf. Days on Diffraction 2013*. St. Petersburg, IEEE, 2013, pp. 131–135. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2013.6712817>.
18. Boriskina S.V., Sewell P., Benson T.M., Nosich A.I. Accurate simulation of two-dimensional optical microcavities with uniquely solvable boundary integral equations and trigonometric Galerkin discretization. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2004, vol. 21, no. 3, pp. 393–402. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAA.21.000393>.
19. Nosich A.I., Smotrova E.I., Boriskina S.V., Benson T.M., Sewell P. Trends in microdisk laser research and linear optical modelling. *Opt. Quantum Electron.*, 2007, vol. 39, no. 15, pp. 1253–1272. <http://dx.doi.org/10.1007/s11082-008-9203-z>.
20. Smotrova E.I., Byelobrov V.O., Benson T.M., Čtyroký J., Sauleau R., Nosich A.I. Optical theorem helps understand thresholds of lasing in microcavities with active regions. *IEEE J. Quantum Electron.*, 2011, vol. 47, no. 1, pp. 20–30. <http://dx.doi.org/10.1109/JQE.2010.2055836>.
21. Smotrova E.I., Tsvirkun V., Gozhyk I., Lafargue C., Ulysse C., Lebental M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a kite-shaped microcavity laser. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2013, vol. 30, no. 6, pp. 1732–1742. <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.30.001732>.
22. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Spectra, thresholds, and modal fields of a circular microcavity laser transforming into a square. *Proc. 2015 17th Int. Conf. on Transparent Optical Networks (ICTON)*. Budapest, IEEE, 2015, pp. 1–4. <http://dx.doi.org/10.1109/ICTON.2015.7193654>.
23. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Mathematical and numerical analysis of the spectral characteristics of dielectric microcavities with active regions. *Proc. 2016 Days on Diffraction (DD)*. St. Petersburg, IEEE, 2016, pp. 390–395. <http://dx.doi.org/10.1109/DD.2016.7756880>.
24. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical modeling of on-threshold modes of 2-D microcavity lasers with piercing holes. *Axioms*, 2019, vol. 8, no. 3, art. 101. <http://dx.doi.org/10.3390/axioms8030101>.
25. Oktyabrskaya A.O., Repina A.I., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Numerical modeling of on-threshold modes of eccentric-ring microcavity lasers using the Muller integral equations and the trigonometric Galerkin method. *Opt. Commun.*, 2020, vol. 476, art. 126311. <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2020.126311>.
26. Spiridonov A.O., Oktyabrskaya A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Mathematical and numerical analysis of the generalized complex-frequency eigenvalue problem for two-dimensional optical microcavities. *SIAM J. Appl. Math.*, 2020, vol. 80, no. 4, pp. 1977–1998. <http://dx.doi.org/10.1137/19M1261882>.
27. Yi C.-H., Dietz B., Han J.-H., Ryu J.-W. Decay rates of optical modes unveiling the island structures in mixed phase space. *Phys. Rev. A*, 2025, vol. 111, no. 3, art. 033509. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.111.033509>.

28. Du W., Li C., Sun J., Xu H., Yu P., Ren A., Wu J., Wang Z. Nanolasers based on 2D materials. *Laser Photonics Rev.*, 2020, vol. 14, no. 12, art. 2000271. <http://dx.doi.org/10.1002/lpor.202000271>.
29. Smotrova E.I., Nosich A.I., Benson T.M., Sewell P. Cold-cavity thresholds of microdisks with uniform and nonuniform gain: Quasi-3-D modeling with accurate 2-D analysis. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, 2005, vol. 11, no. 5, pp. 1135–1142. <http://dx.doi.org/10.1109/JSTQE.2005.853848>.
30. Smotrova E.I., Nosich A.I. Mathematical study of the two-dimensional lasing problem for the whispering-gallery modes in a circular dielectric microcavity. *Opt. Quantum Electron.*, 2004, vol. 36, no. 1, pp. 213–221. <http://dx.doi.org/10.1023/B:OQEL.0000015641.19947.9c>.
31. Herasymova D.O., Dukhopelnykov S.V., Natarov D.M., Zinenko T.L., Lucido M., Nosich A.I. Threshold conditions for transversal modes of tunable plasmonic nanolasers shaped as single and twin graphene-covered circular quantum wires. *Nanotechnology*, 2022, vol. 33, no. 49, art. 495001. <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6528/ac8e0c>.
32. Kaliberda M.E., Pogarsky S.A., Kostenko O.V., Nosych O.I., Zinenko T.L. Circular quantum wire symmetrically loaded with a graphene strip as the plasmonic micro/nano laser: Threshold conditions analysis. *Opt. Express*, 2024, vol. 32, no. 7, pp. 12213–12227. <https://doi.org/10.1364/OE.514643>.
33. Yevtushenko F.O., Dukhopelnykov S.V., Zinenko T.L., Nosych O.I. Microsize graphene strip grating on gain substrate laser: Comparison of the H- and E-polarized mode threshold conditions. *Opt. Express*, 2025, vol. 33, no. 6, pp. 14266–14287. <https://doi.org/10.1364/OE.554771>.
34. Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. Muller boundary integral equations for solving generalized complex-frequency eigenvalue problem. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1377–1384. <https://doi.org/10.1134/s1995080220070343>.
35. Ketov I.V., Karchevskii E.M. Characteristic equations for true and fictitious eigenvalues of Muller boundary integral equations. *Lobachevskii J. Math.*, 2023, vol. 44, no. 9, pp. 4016–4027. <http://dx.doi.org/10.1134/S1995080223090147>.
36. Misawa R., Niino K., Nishimura N. Boundary integral equations for calculating complex eigenvalues of transmission problems. *SIAM J. Appl. Math.*, 2017, vol. 77, no. 2, pp. 770–788. <https://doi.org/10.1137/16m1087436>.
37. Steinbach O., Unger G. Combined boundary integral equations for acoustic scattering-resonance problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, vol. 40, no. 5, pp. 1516–1530. <https://doi.org/10.1002/mma.4075>.
38. Shabardin E.E., Spiridonov A.O., Repina A.I., Karchevskii E.M. Numerical modeling of photonic crystal fibers using Muller boundary integral equations. *Lobachevskii J. Math.*, 2024, vol. 45, no. 10, pp. 4787–4797. <https://doi.org/10.1134/S1995080224605861>.
39. Abramowitz M., Stegun I.A. (Eds.) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards. Ser.: Applied Mathematics Series. Vol. 55. Washington, DC, US Gov. Print. Office, 1972. xiv, 1046 p.
40. Spiridonov A.O., Karchevskii E.M., Nosich A.I. Rigorous formulation of the lasing eigenvalue problem as a spectral problem for a Fredholm operator function. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 8, pp. 1148–1157. <https://doi.org/10.1134/s1995080218080127>.

41. Ketov I.V., Oktyabrskaya A.O., Spiridonov A.O., Karchevskii E.M. True and fictitious eigenvalues of the set of Muller boundary integral equations. *Software Syst.*, 2022, vol. 35, no. 3, pp. 316–328. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.139.316-328>. (In Russian)

Информация об авторах

Егор Евгеньевич Шабардин, студент, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: eg.shabardin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2894-4785>

Евгений Михайлович Карчевский, доктор физико-математических наук, профессор, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ekarchev70@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6931-425X>

Author Information

Egor E. Shabardin, Student, Kazan Federal University

E-mail: eg.shabardin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-2894-4785>

Evgenii M. Karchevskii, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Kazan Federal University

E-mail: ekarchev70@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6931-425X>

Поступила в редакцию 4.06.2025

Принята к публикации 20.08.2025

Received June 4, 2025

Accepted August 20, 2025