

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.946

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>

О спектре оператора Шрёдингера системы трех частиц на решетке

А.М. Халхужаев¹✉, Х.Г. Хайитова², И.А. Хужамиеров³¹Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова, г. Самарканд, Узбекистан²Бухарский государственный университет, г. Бухара, Узбекистан³Узбекско-Финляндский педагогический институт, г. Самарканд, Узбекистан✉ ahmad_x@mail.ru

Аннотация

Рассмотрен трехчастичный дискретный оператор Шрёдингера $H_{\mu,\gamma}(K) \equiv H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, ассоциированный с системой трех частиц (две – фермионы с массой 1 и одна – другая частица с массой $m = 1/\gamma$), взаимодействующих с помощью парных отталкивающих контактных потенциалов $\mu > 0$ на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$. Найдены такие критические значения $\gamma_s(K)$ и $\gamma_{as}(K)$ отношений масс, что оператор $H_{\mu,\gamma}(K)$ при $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$ не имеет собственных значений, при $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$ имеет единственное значение, а при $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$ – три собственных значения, лежащих правее существенного спектра при достаточно больших $\mu > 0$.

Ключевые слова: решетка, гамильтониан, оператор Шрёдингера, контактный потенциал, фермион, собственное значение, квазиимпульс, инвариантное подпространство

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ж.И. Абдуллаеву за ценные обсуждения и полезные предложения.

Для цитирования: Халхужаев А.М., Хайитова Х.Г., Хужамиеров И.А. О спектре оператора Шрёдингера системы трех частиц на решетке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 547–565. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>

On the spectrum of the Schrödinger operator for a three-particle system on a lattice

A.M. Khalkhuzhaev¹ ✉, Kh.G. Khayitova², I.A. Khujamiyrov³

¹Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan

²Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

³Uzbek-Finnish Pedagogical Institute, Samarkand, Uzbekistan

✉ ahmad_x@mail.ru

Abstract

A three-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu,\gamma}(K) \equiv H_{\mu,\gamma}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, which is associated with a system of three particles (two fermions of mass 1 and one other particle of mass $m = 1/\gamma$), interacting via pairwise repulsive contact potentials $\mu > 0$ on a three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$, was analyzed. Critical values of mass ratios $\gamma_s(K)$ and $\gamma_{as}(K)$ were determined such that the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has no eigenvalues if $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$, the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has a single eigenvalue if $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$, and the operator $H_{\mu,\gamma}(K)$ has three eigenvalues lying to the right of the essential spectrum for sufficiently large $\mu > 0$ if $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$.

Keywords: lattice, Hamiltonian, Schrödinger operator, contact potential, fermion, eigenvalue, quasi-momentum, invariant subspace

Acknowledgments. J.I. Abdullaev is gratefully acknowledged for valuable discussions and helpful suggestions.

For citation: Khalkhuzhaev A.M., Khayitova Kh.G., Khujamiyrov I.A. On the spectrum of the Schrödinger operator for a three-particle system on a lattice. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 547–565.

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.547-565>. (In Russian)

Введение

В работе изучены спектральные свойства семейства операторов

$$H_{\mu,\gamma}(K) := H_{0,\gamma}(K) + \mu(V_1 + V_2), \quad \mu, \gamma > 0, \quad (1)$$

определенных в гильбертовом пространстве $L^{2,as}([\mathbb{T}^3]^2)$ квадратично-интегрируемых и антисимметричных функций относительно перестановки переменных, где $\mathbb{T}^3$ – трехмерный тор (зона Бриллюэна) с единичной мерой $\int_{\mathbb{T}^3} d\mathbf{p} = 1$. Невозмущенный оператор $H_{0,\gamma}(K)$ в (1) есть оператор умножения на функцию

$$E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{K} - \mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad \mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3,$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \xi(\mathbf{p}), \quad \xi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3, \quad (2)$$

а возмущения V_i определены как

$$(V_1 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (V_2 f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\mathbf{s}.$$

Оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ появляется как слойный оператор в разложении фон Неймана в прямой интеграл трехчастичного гамильтониана, связанного с квантовой системой, состоящей из двух одинаковых фермионов с массой 1 и другой частицы с массой $m = 1/\gamma$, движущихся по трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ и взаимодействующих через парные контактные потенциалы (см., например, [1]).

Напомним, что Ефимов [2] впервые обнаружил эффект, впоследствии названный в его честь. Он заметил, что если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Дополнительную информацию об эффекте Ефимова можно найти в [3–5]. Кроме того, помимо эффекта Ефимова, некоторые достаточные условия существования собственных значений были получены, например, в [6, 7] для непрерывных операторов Шрёдингера и в [8, 9] для дискретного случая с использованием вариационных методов. Более того, вариационную технику можно применять не напрямую к оператору $H_{\mu, \gamma}(K)$, а к (компактному самосопряженному) оператору типа Фаддеева $F(K, z)$, полученному при исследовании уравнения собственных значений для $H_{\mu, \gamma}(K)$ ниже существенного спектра; известный эффект Ефимова также доказан с помощью $F(K, z)$ [4, 5, 10]. Вариационный метод хорошо работает и при малых размерностях $d = 1, 2$ (см., например, [9]), поскольку норма $F(K, z)$ взрывается вблизи нижнего края существенного спектра. Однако при высоких размерностях $d \geq 3$ оператор $F(K, z)$ ограничен до краев существенного спектра, поэтому вариационные методы не вполне эффективны. Более того, согласно дискретной версии HVZ-теоремы (см., например, [8]) существенный спектр не является полупрямой, а представляет собой объединение отрезков. Таким образом, собственные значения могут возникать и в промежутке между этими сегментами. Это создает серьезные технические трудности при исследовании явления *порога константы связи* [11] – появления собственных значений из существенного спектра.

Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu, \gamma}(K))$ оператора $H_{\mu, \gamma}(K)$, определенного по формуле (1), задается спектром $H_{0, \gamma}(K) + \mu V_1$ и состоит из объединения двух (возможно, взаимно пересекающихся) отрезков

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu, \gamma}(K)) = [E_{\min, \gamma}(K), E_{\max, \gamma}(K)] \cup [\tau_{\min, \gamma}(\mu, K), \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)],$$

где $\tau_{\min, \gamma}(\mu, K)$ и $\tau_{\max, \gamma}(\mu, K)$ являются соответственно «наименьшей» и «наибольшей» связанными энергиями системы одного фермиона и третьей частицы (см. раздел 1 ниже). Можно показать, что $\tau_{\max}(\mu) \rightarrow +\infty$, когда $\mu \rightarrow +\infty$. Другими словами, «двухчастичная ветвь» существенного спектра $H_{\mu, \gamma}(K)$ сдвигается к $+\infty$, когда μ становится большим, и естественно ожидать, что она охватывает некоторую часть дискретного

спектра, которая растет медленнее. Поэтому для изучения собственных значений правее существенного спектра мы анализируем поведение компактного оператора типа Фаддеева $F_{\mu,\gamma}(K, z) := F(K, z)$, определенного ниже в (15), более тщательно проверяя условия, дающие собственные значения больше 1.

С помощью унитарного оператора $(Uf)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = f(-\mathbf{p}, -\mathbf{q})$ можно показать унитарную эквивалентность операторов $H_{\mu,\gamma}(K)$ и $H_{\mu,\gamma}(-K)$ для любого $K \in \mathbb{T}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что $K \in [0, \pi]$.

Основная цель настоящей статьи – найти достаточные условия и изучить некоторые количественные свойства дискретного спектра, при которых существуют собственные значения оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ в случае, когда полный квазиимпульс $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3) \in \mathbb{T}^3$ пробегает по диагонали первой зоны Бриллюэна, т. е. когда $K_1 = K_2 = K_3 = K \in \mathbb{T}$. Поскольку каждый V_i является положительным оператором, $H_{0,\gamma}(K) + \mu(V_1 + V_2)$ не может иметь дискретного спектра левее существенного спектра, значит, дискретные собственные значения появляются либо в промежутках между отрезками существенного спектра, либо правее существенного спектра.

Введем интегральный оператор $\mathbf{B}(K)$, $K \in \mathbb{T}$, ранга шесть, действующий в $L^2(\mathbb{T}^3)$, с ядром

$$\mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\left(C(p_i)C(q_i) - \sin p_i \sin q_i \right) \cos K + \left(C(q_i) \sin p_i + C(p_i) \sin q_i \right) \sin K}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})} \sqrt{\varepsilon(\mathbf{q})}}, \quad (3)$$

где

$$C(p_i) = \cos p_i - W_1/W. \quad (4)$$

Интегралы Ватсона W и типа Ватсона W_1 соответственно равны

$$W = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} \approx 0,50623, \quad W_1 = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_1 ds}{\varepsilon(\mathbf{s})} \approx 0,17239.$$

Положительные собственные значения оператора $B(K)$ имеют вид (см. леммы 12–14)

$$\lambda_s^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right],$$

$$\lambda_{as}^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right],$$

где

$$\lambda_s^+(0) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_1 + \cos q_2 + \cos q_3 - 3\frac{W_1}{W})^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})} \approx 0.34013, \quad (5)$$

$$\lambda_s^+(\pi) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_1 + \sin q_2 + \sin q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\sin q_2 - \sin q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} d\mathbf{q} = \lambda_{as}^+(\pi) \approx 0.21016, \quad (6)$$

$$\lambda_{as}^+(0) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos q_2 - \cos q_3)^2 d\mathbf{q}}{\varepsilon(\mathbf{q})} = \frac{1}{6} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(2 \cos q_1 - \cos q_2 - \cos q_3)^2}{\varepsilon(\mathbf{q})} d\mathbf{q} \approx 0.18551. \quad (7)$$

Пусть

$$\gamma_s(K) = \frac{1}{\lambda_s^+(K)} \quad \text{и} \quad \gamma_{as}(K) = \frac{1}{\lambda_{as}^+(K)}.$$

Отметим, что $\gamma_s(\pi) = \gamma_{as}(\pi)$, а при $K \neq \pi$ выполняется неравенство $\gamma_s(K) < \gamma_{as}(K)$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$, $K \neq \pi$.

- (а) Для каждого $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$ существует такое $\mu_0(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_0(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ не имеет собственных значений, лежащих правее существенного спектра;
- (б) для каждого $\gamma \in (\gamma_s(K), \gamma_{as}(K))$ существует такое $\mu_1(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_1(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ имеет единственное собственное значение, лежащее правее существенного спектра;
- (с) для каждого $\gamma \in (\gamma_{as}(K), +\infty)$ существует такое $\mu_3(\gamma, K) > 0$, что для любого $\mu > \mu_3(\gamma, K)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ имеет ровно три собственных значения с учетом кратности, лежащих правее существенного спектра.

Замечание 1. Если $K = \pi$, то $\gamma_s(\pi) = \gamma_{as}(\pi)$, и при $\mu > \mu_3(\gamma, \pi)$ оператор $H_{\mu, \gamma}(\pi)$ имеет единственное трехкратное собственное значение, лежащее правее существенного спектра (см. [1]).

Уместны некоторые комментарии к основным результатам.

- С физической точки зрения наши результаты применимы в теории сильно взаимодействующих ультрахолодных атомов (см., например, [12] и ссылки в ней; также [13], где обсуждаются вопросы существования одномерных слабосвязанных триммеров с сильными локальными взаимодействиями).
- Применив теорию возмущений, можно показать, что полученные результаты относительно числа собственных значений сохраняются при малой окрестности $\mathbf{K} = (K, K, K)$.
- Теорема 1 обобщает результаты работ [14] и [1], где было найдено число собственных значений оператора $H_{\mu, \gamma}(K)$ при $\mathbf{K} = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$ и $\mathbf{K} = \boldsymbol{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$ соответственно, и разъяснено изменение критических значений отношений масс, а также собственных функций, когда полный квазиимпульс $\mathbf{K}$ пробегает от начала координат до (π, π, π) по диагонали.

1. О спектре двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке

Для изучения спектра оператора (1) сначала изучим спектр оператора, соответствующего системе двух частиц (фермион и другая частица) на $\mathbb{Z}^3$.

Двухчастичный дискретный оператор Шрёдингера $h_{\mu, \gamma}(\mathbf{k})$ действует в $L^2(\mathbb{T}^3)$ по формуле

$$h_{\mu, \gamma}(\mathbf{k}) = h_{0, \gamma}(\mathbf{k}) + \mu v,$$

где

$$(h_{0, \gamma}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \gamma}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}), \quad \mathcal{E}_{\mathbf{k}, \gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad (8)$$

функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ определена по формуле (2),

$$(vf)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Приведем некоторые известные факты, которые относятся к спектру оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ (см. [1]).

Существенный спектр $\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}))$ оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$, совпадает со спектром $\sigma(h_{0,\gamma}(\mathbf{k}))$ невозмущенного оператора $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$, т. е. $\sigma_{ess}(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) = [\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k})]$, где $\mathcal{E}_{\min,\gamma}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})$, $\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})$.

Пусть $z \in (\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}), +\infty)$ и $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ – детерминант Фредгольма оператора $I - \mu v r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$, где $r_{0,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ – резольвента оператора $h_{0,\gamma}(\mathbf{k})$, v – интегральный оператор с ядром $v(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = 1$. Функция $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ имеет вид

$$\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 1 - \mu \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{q}}{z - \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})}. \quad (9)$$

Лемма 1. Число $z \in (\mathcal{E}_{\max,\gamma}(\mathbf{k}), +\infty)$ является собственным значением оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z) = 0$.

Пусть

$$\mu_0(\gamma) = (1 + \gamma) \frac{1}{W}.$$

Лемма 2. а) При $\mu > \mu_0(\gamma)$ оператор $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ имеет единственное простое собственное значение $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$, лежащее правее существенного спектра;

б) собственное значение $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = z_{\mu,\gamma}(k_1, k_2, k_3)$ – симметричная функция относительно перестановки переменных k_i, k_j , четна по $k_i \in [-\pi, \pi]$ и монотонно убывает по $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 3. Для каждого $\gamma > 0$ и $\mu > 3(1 + \gamma)$ имеют место оценки

$$\mu + 3(1 + \gamma) < z_{\mu,\gamma}(\boldsymbol{\pi}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) \leq z_{\mu,\gamma}(\mathbf{0}) < \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{9(1 + \gamma)^2}{\mu}. \quad (10)$$

Лемма 4. Для каждого $\gamma > 0$ имеет место асимптотика

$$z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^3 (1 + 2\gamma \cos k_i + \gamma^2) + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right) \quad (11)$$

при $\mu \rightarrow \infty$ равномерно по $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$.

Доказательство. Из неравенства (10) можно установить, что

$$z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) = \mu + 3(1 + \gamma) + \frac{c_0(\gamma, k)}{\mu} + O\left(\frac{1}{\mu^3}\right), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Отсюда, учитывая равенства (2) и (8) для достаточно больших $\mu > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}) - \mathcal{E}_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{q})} &= \frac{1}{\mu + \xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu} + O(1/\mu^2)} = \\ &= \frac{1}{\mu \left[1 + \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} + \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right]} = \\ &= \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{(\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}))^2}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя равенства

$$\int_{\mathbb{T}^3} [\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^{2n-1} d\mathbf{q} = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{\mathbb{T}^3} [\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})]^2 d\mathbf{q} = \frac{1}{2}(3 + 2\gamma \xi(\mathbf{k}) + 3\gamma^2),$$

из соотношений $\Delta_\mu(\mathbf{k}, z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})) \equiv 0$ и (13) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{\mu} - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{(\xi(\mathbf{q}) + \gamma \xi(\mathbf{k} - \mathbf{q}))^2}{\mu^2} + O(1/\mu^3) \right] d\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{\mu} \left[1 - \frac{c_0(\gamma, \mathbf{k})}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\gamma^2 + \gamma \xi(\mathbf{k}) \right) + O(1/\mu^4) \right]. \end{aligned}$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов убедимся, что

$$c_0(\gamma, k) = \frac{3}{2}(1 + \gamma)^2 + \gamma \varepsilon(\mathbf{k}).$$

Отсюда и из (12) следует искомое равенство (11). $\square$

2. Существенный спектр трехчастичного оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ и принцип Бирмана – Швингера

Для каждого $\mathbf{K} = (K, K, K) \in \mathbb{T}^3$ обозначим

$$\begin{aligned} E_{\min,\gamma}(K) &= \min_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad E_{\max,\gamma}(K) = \max_{\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ \tau_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}) &= z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\tau_{\min,\gamma}(\mu, K) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\}, \quad \tau_{\max,\gamma}(\mu, K) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} \{z_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p})\},$$

где $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$ – собственное значение оператора $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{p})$. Существенный спектр $\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K))$ оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$, определенного по формуле (1), состоит из объединения двух отрезков

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = [E_{\min,\gamma}(K), E_{\max,\gamma}(K)] \cup [\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)].$$

Доказательство аналогичного утверждения приведено в работе [15].

Отрезки $[\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)]$ и $[E_{\min,\gamma}(K), E_{\max,\gamma}(K)]$ называют «двухчастичной ветвью» и «трехчастичной ветвью» существенного спектра $H_{\mu,\gamma}(K)$ соответственно.

Нас интересует дискретный спектр оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ при достаточно больших $\mu > 0$ и фиксированном $\gamma > 0$. Из утверждения и структуры существенного спектра следует (см. [1]), что двухчастичная ветвь $[\tau_{\min,\gamma}(\mu, K), \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)]$ существенного спектра сдвигается к $+\infty$ с порядком μ при $\mu \rightarrow +\infty$. Поэтому в дальнейшем предположим, что $z \geq \sup \sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}(K)) = \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)$.

Отметим, что оператор $H_{\mu,\gamma}(K)$ не имеет собственных значений ниже $E_{\min,\gamma}(K)$ (см. [1], теорема 5).

Теперь найдем эквивалентное уравнение для собственных функций трехчастичного оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$, $K \in \mathbb{T}$. Для каждого $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ зададим самосопряженный оператор $F_{\mu,\gamma}(K, z)$ по формуле

$$(F_{\mu,\gamma}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}, z)}} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(\mathbf{q}) d\mathbf{q}}{(z - E_{K,\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})) \sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}, \quad (15)$$

который определен в подпространстве

$$D(F_{\mu,\gamma}(K, z)) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{T}^3) : \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\psi(\mathbf{q}) d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{q}, z)}} = 0 \right\},$$

где

$$\Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}, z) := \Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}, z - \varepsilon(\mathbf{p})), \quad (16)$$

функция $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, z)$ находится по формуле (9).

Лемма 5. Число $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ является собственным значением оператора $H_{\mu,\gamma}(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 является собственным значением оператора $F_{\mu,\gamma}(K, z)$.

Доказательство леммы 5 имеется в работе [1], поэтому мы его не приводим.

Лемма 6. Для любого $\gamma > 0$ существует такое $\mu > 3(1 + \gamma)$, что для любых $\mu > \mu_\gamma$ функция $\mathbf{p} \rightarrow \Lambda_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p})$ имеет единственную максимальную точку

$$\mathbf{p}_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = (p_{\mu,\gamma}^{\max}(K), p_{\mu,\gamma}^{\max}(K), p_{\mu,\gamma}^{\max}(K)).$$

При этом имеет место

$$p_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = \pi - \frac{\gamma \sin K}{\mu} + O(\mu^{-3}), \quad \mu \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\mu > 3(1 + \gamma)$ и $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) > 0$ – единственный нуль функции $\Delta_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}, \cdot)$. Используя равенство (11), представим функцию $\tau_{\mu,\gamma}(K, p)$, определенную по формуле (14), в виде суммы

$$\tau_{\mu,\gamma}(K, \mathbf{p}) = \tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \mathbf{p}) + \tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p}),$$

где

$$\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^3 \tau_{\mu,\gamma}(K, p_i), \quad (17)$$

$$\tau_{\mu,\gamma}(K, x) = \frac{\mu}{3} + (2 + \gamma) + \frac{1}{2\mu}(1 + \gamma^2) - \cos x + \frac{\gamma}{\mu} \cos(K - x), \quad x \in (-\pi, \pi],$$

а функция $\tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})$ и все частные производные удовлетворяют неравенству

$$|\tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})| \leq \frac{C}{\mu^3}, \quad \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \tau_{\mu,\gamma}^{(r)}(K, \mathbf{p})}{\partial p_1^{\alpha_1} \partial p_2^{\alpha_2} \partial p_3^{\alpha_3}} \right| \leq \frac{C}{\mu^3}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+,$$

равномерно по $K \in \mathbb{T}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3$, при достаточно больших $\mu > 0$.

Из равенства (17) следует, что задача об экстремумах функции $\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \cdot)$ сводится к задаче нахождения экстремумов функции $\tau_{\mu,\gamma}^{(p)}(K, \cdot)$ одной переменной на $\mathbb{T}$.

Таким образом, если x – критическая точка функции $\tau_{\mu,\gamma}(K, x)$, то

$$\frac{d}{dx}\tau_{\mu,\gamma}(K, x) = \sin x - \frac{\gamma}{\mu} \sin(x - K) = 0$$

либо

$$\left(1 - \frac{\gamma}{\mu} \cos K\right) \sin x + \frac{\gamma}{\mu} \sin K \cos x = 0.$$

Отсюда получим

$$\sin(x + \theta) = 0, \quad (18)$$

где $\theta = \theta(K)$ определяется из равенств

$$\cos \theta = \frac{1 - \frac{\gamma}{\mu} \cos K}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}, \quad \sin \theta = \frac{\frac{\gamma}{\mu} \sin K}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}.$$

Решение уравнения (18) в $(-\pi, \pi]$ имеет вид

$$x_1 = -\arcsin \frac{\gamma \sin K}{\mu \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}$$

или

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{\gamma \sin K}{\mu \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \frac{2\gamma}{\mu} \cos K}}.$$

Кроме того, верны неравенства

$$\frac{d^2\tau_{\mu,\gamma}(K, x_1)}{dx^2} > 0, \quad \frac{d^2\tau_{\mu,\gamma}(K, x_2)}{dx^2} < 0.$$

Теперь, используя разложения в ряд Тейлора $(1+u)^{-1/2}$ и $\arcsin u$ в окрестности $u = 0$, найдем следующую асимптотику для x_2 :

$$x_2 = p_{\mu,\gamma}^{\max}(K) = \pi - \frac{\gamma \sin K}{\mu} + O(\mu^{-2}), \quad \mu \rightarrow +\infty.$$

□

Замечание 2. Предельный оператор

$$\lim_{z \rightarrow \tau_{\max,\gamma}(\mu, K)} F_{\mu,\gamma}(K, z) = F_{\mu,\gamma}(K, \tau_{\max,\gamma}(\mu, K))$$

является компактным самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{T}^3)$.

Доказательство этого свойства непосредственно вытекает из утверждения леммы 6.

Обозначим через $n[\lambda, A]$ число собственных значений самосопряженного оператора A , которые больше $\lambda > 0$. Верно следующее утверждение, называемое принципом Бирмана–Швингера [16].

Лемма 7. Пусть $\mu > \mu_0(\gamma)$. Тогда для каждого $z \in (\tau_{\max,\gamma}(\mu, K), +\infty)$ имеет место равенство

$$n[z, H_{\mu,\gamma}(K)] = n[1, F_{\mu,\gamma}(K, z)].$$

3. О дискретном спектре оператора $F(K, z) := F_{\mu, \gamma}(K, z)$

Используя равенство $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$ ($x \neq -1$) и учитывая обозначение (2), получим

$$\frac{1}{z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{1}{a(\gamma, z)} \left(1 - \frac{\zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{a(\gamma, z)} + \frac{\zeta^2(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})}{a(\gamma, z)(z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))} \right), \quad (19)$$

где

$$a(\gamma, z) = z - 6 - 3\gamma \text{ и } \zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \xi(\mathbf{p}) + \xi(\mathbf{q}) + \gamma\xi(\mathbf{K} - (\mathbf{p} + \mathbf{q})).$$

Используя равенство (19), представим оператор $F(K, z)$ в виде суммы

$$F(K, z) = F^{(p)}(K, z) + R_F(K, z) \quad (20)$$

Конечномерный оператор

$$(F^{(p)}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu}{a^2(\gamma, z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\zeta(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) - a(\gamma, z))\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}$$

назовем «главной частью» оператора $F(K, z)$, а оператор

$$(R_F(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = -\frac{\mu}{a^2(\gamma, z)} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\zeta^2(\gamma; K, \mathbf{p}, \mathbf{q})\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{(z - E_{K, \gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}}$$

– «остаточной частью» оператора $F(K, z)$. Докажем, что $\|F^{(r)}(K, z)\| \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ (см. лемму 15).

Пусть $\Phi := \Phi(K, z)$ – одномерное подпространство, натянутое на функцию

$$\varphi_K(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{c(K, z)}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}},$$

где $c(K, z)$ – нормирующий множитель, т. е.

$$\frac{1}{c(K, z)} = \int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{p}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}. \quad (21)$$

Обозначим через $\mathbb{Q}$ оператор проектирования на подпространство

$$D(F(K, z)) = L^2(\mathbb{T}^3) \ominus \Phi.$$

Пусть $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z) = \mathbb{Q}F^{(p)}(K, z)\mathbb{Q}$ – сужение оператора $F^{(p)}(K, z)$ на подпространство $D(F(K, z))$, где

$$(\mathbb{Q}\varphi)(\mathbf{p}) = \varphi(\mathbf{p}) - (\varphi, \varphi_K)\varphi_K(\mathbf{p}), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

После элементарных вычислений получим

$$(F_{\mathbb{Q}}(K, z)\psi)(\mathbf{p}) = \frac{\mu\gamma}{a^2(\gamma, z)\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{T}^3} F(K, z, p_i, q_i) \frac{\psi(\mathbf{q})d\mathbf{q}}{\sqrt{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}},$$

$$F(K, z; p_i, q_i) = \left[\left(C(K, z; p_i)C(K, z; q_i) - S(K, z; p_i)S(K, z; q_i) \right) \cos K + \right. \\ \left. + \left(C(K, z; q_i)S(K, z; p_i) + C(K, z; p_i)S(K, z; q_i) \right) \sin K \right], \\ C(K, z; p_i) = \cos p_i - c(K, z) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos q_i d\mathbf{q}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}, \quad (22)$$

$$S(K, z; p_i) = \sin p_i - c(K, z) \int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin q_i d\mathbf{q}}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{q}, z)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Лемма 8. При всех $\mu > 6(1+\gamma)$ и $z \in (\tau_{\max, \gamma}(\mu, K), +\infty)$ имеют место соотношения

$$\frac{(z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - 6 - 6\gamma)(z - 12 - 6\gamma)}{\mu(z - z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))} \leq \frac{1}{\Lambda_{\mu, \gamma}(K, \mathbf{p}, z)} \leq \frac{z \cdot z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p})}{\mu(z - z_{\mu, \gamma}(\mathbf{K} - \mathbf{p}) - \varepsilon(\mathbf{p}))},$$

где $z_{\mu, \gamma}(\mathbf{p})$ – собственное значение двухчастичного оператора $h_{\mu, \gamma}(\mathbf{p})$.

Кроме того, верна асимптотика

$$\frac{1}{\Lambda_{\mu, \gamma}(\mathbf{p}, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K))} = \frac{\mu}{\varepsilon(\mathbf{p})} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right), \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5.4 работы [14]. $\square$

Лемма 9. Верны следующие асимптотики при $\mu \rightarrow \infty$:

$$C(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K); p_i) = \cos p_i - \frac{W_1}{W} + O\left(\frac{1}{\mu}\right), \quad S(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K); p_i) = \sin p_i + O\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Доказательство. Из равенства $\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin p_i d\mathbf{p}}{\varepsilon(\mathbf{p})} = 0$ и соотношений (21)–(24) непосредственно вытекают искомые равенства. $\square$

Лемма 10. Пусть $\gamma > 0$. При $\mu \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K), \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \gamma \mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \right)$$

равномерно по $K \in \mathbb{T}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3$, где через $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ обозначено ядро интегрального оператора $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z)$, а функция $\mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ определена по формуле (3).

Доказательство. По формуле (10) для любого $K \in \mathbb{T}$ имеет место

$$a(\gamma, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)) = \mu - 3 + O\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad (25)$$

при $\mu \rightarrow \infty$. Для удобства обозначим

$$B(K, p_i, q_i) = \left(C(p_i)C(q_i) - \sin p_i \sin q_i \right) \cos K + \left(C(q_i) \sin p_i + C(p_i) \sin q_i \right) \sin K.$$

Из леммы 8, равенств (16) и (25) при $\mu \rightarrow +\infty$ получим

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K), p, q) &= \\ &= \frac{\mu^2 \gamma}{\left(\mu - 3 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\left(B(K, p_i, q_i) + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})} \sqrt{\varepsilon(\mathbf{q})}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) = \\ &= \gamma \mathbf{B}(K, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right). \end{aligned}$$

□

Обозначим через $L^{2,s}(\mathbb{T}^3) \subset L^2(\mathbb{T}^3)$ подпространство симметричных функций относительно перестановки любых двух переменных, т. е.

$$L^{2,s}(\mathbb{T}^3) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{T}^3) : g(p_1, p_2, p_3) = g(p_2, p_1, p_3) = g(p_3, p_2, p_1) = g(p_1, p_3, p_2) \right\},$$

а через $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$ – подпространство антисимметричных функций относительно замены второго и третьего аргументов, т. е.

$$L^{2,as}(\mathbb{T}^3) = \left\{ g \in L^2(\mathbb{T}^3) : g(p_1, p_2, p_3) = -g(p_1, p_3, p_2) \right\}.$$

Обозначим через $L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$ ортогональное дополнение пространства $L^{2,s}(\mathbb{T}^3) \oplus L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$.

Лемма 11. Подпространства $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$, $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$ и $L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$ инвариантны относительно операторов $\mathbf{B}(K)$, $F^{(p)}(K, z)$ и $F(K, z)$.

Доказательство. Доказательство леммы тривиально. □

Обозначим через P^s оператор проектирования $L^2(\mathbb{T}^3)$ на $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$, т. е.

$$\begin{aligned} (P^s g)(\mathbf{p}) &= \frac{1}{6} \left[g(p_1, p_2, p_3) + g(p_2, p_1, p_3) + g(p_3, p_1, p_2) + \right. \\ &\quad \left. + g(p_1, p_3, p_2) + g(p_2, p_3, p_1) + g(p_3, p_2, p_1) \right]. \end{aligned}$$

Сужение $B^s(K) = P^s \mathbf{B}(K) P^s$ оператора $\mathbf{B}(K)$ на подпространство $L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$ является оператором ранга два и действует по формуле

$$\begin{aligned} (B^s(K)\psi)(\mathbf{p}) &= \int_{\mathbb{T}^3} \left[\left(\lambda_s^+(0) C(\mathbf{p}) C(\mathbf{q}) - \lambda_s^+(\pi) S(\mathbf{p}) S(\mathbf{q}) \right) \cos K + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_s^+(0) \lambda_s^+(\pi)} \left(S(\mathbf{p}) C(\mathbf{q}) + C(\mathbf{p}) S(\mathbf{q}) \right) \sin K \right] \psi(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \end{aligned}$$

где нормированные функции $\mathbf{C}$ и $\mathbf{S}$ ортогональны и определены по формулам

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(0)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}} \sum_{i=1}^3 C(p_i), \quad \mathbf{S}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(\pi)}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}} \sum_{i=1}^3 \sin p_i,$$

а $C(p_i)$ – по формуле (4).

Лемма 12. Оператор $\mathbf{B}^s(K)$ имеет два ненулевых собственных значения

$$\lambda_s^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right] > 0, \quad (26)$$

$$\lambda_s^-(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi)) \cos K - \sqrt{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \right] < 0, \quad (27)$$

где $\lambda_s^+(\pi)$ и $\lambda_s^+(0)$ определены по формулам (5) и (6).

Доказательство. Пусть уравнение

$$(\mathbf{B}^s(K)g)(\mathbf{p}) = \lambda\psi(\mathbf{p}) \quad (28)$$

имеет ненулевое решение $\psi \in L^{2,s}(\mathbb{T}^3)$. Введем обозначения

$$\alpha_1 = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{C}(\mathbf{q})g(\mathbf{q})d\mathbf{q}, \quad (29)$$

$$\alpha_2 = \int_{\mathbb{T}^3} \mathbf{S}(\mathbf{q})g(\mathbf{q})d\mathbf{q}. \quad (30)$$

Используя их, перепишем уравнение (28) в виде

$$g(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda} \left[(\lambda_s^+(0)\mathbf{C}(\mathbf{p}) \cos K + \sqrt{\lambda_s^+(\pi)\lambda_s^+(0)}\mathbf{S}(\mathbf{p}) \sin K)\alpha_1 + \right. \\ \left. + (\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) \sin K - \lambda_s^+(\pi)\mathbf{S}(\mathbf{p}) \cos K)\alpha_2 \right]. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (29) и (30) и учитывая обозначения (5)–(7), получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_s^+(0) \cos K) \alpha_1 - (\sqrt{\lambda_s^+(\pi)\lambda_s^+(0)} \sin K) \alpha_2 = 0, \\ -(\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K) \alpha_1 + (\lambda + \lambda_s^+(\pi) \cos K) \alpha_2 = 0. \end{cases} \quad (32)$$

Решая квадратное уравнение относительно λ , найдем его решения, которые имеют вид (26) и (27). $\square$

Найдем вид собственной функции, соответствующей положительному собственному значению $\lambda_s^+(K)$. Из первого уравнения системы (32) получим

$$\alpha_2 = \frac{(\lambda_s^+(K) - \lambda_s^+(0) \cos K) \alpha_1}{\sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K}, \quad K \neq 0, \pi.$$

Полагая $\alpha_1 = \sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(\pi)} \sin K$, имеем

$$\alpha_2 = \lambda_s^+(K) - \lambda_s^+(0) \cos K.$$

Используя эти равенства, из (29) найдем явный вид элемента из пространства собственных функций:

$$g_K^s(\mathbf{p}) = \sqrt{\lambda_s^+(0)\lambda_s^+(K)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) \sin K + (\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_s^+(\pi)}\mathbf{S}(\mathbf{p}), \quad K \neq 0.$$

Отсюда следует, что нормированная собственная функция имеет вид

$$\psi_K^s(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_s^+(0)}\lambda_s^+(K)\sin K}{a_s(K)}\mathbf{C}(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K)\cos K)\sqrt{\lambda_s^+(\pi)}}{a_s(K)}\mathbf{S}(\mathbf{p}),$$

где

$$a_s(K) = \sqrt{\lambda_s^+(0)(\lambda_s^+(K)\sin K)^2 + \lambda_s^+(\pi)(\lambda_s^+(0) - \lambda_s^+(K)\cos K)^2}.$$

В случае $K = \pi$ собственная функция выражается как

$$\psi_\pi^s(\mathbf{p}) = \mathbf{S}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(\pi)}} \frac{\sin p_1 + \sin p_2 + \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

При $K = 0$ собственную функцию определим как предел

$$\lim_{K \rightarrow 0} \psi_K^s(\mathbf{p}) = \psi_0^s(\mathbf{p}) = \mathbf{C}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{3\lambda_s^+(0)}} \frac{\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3 - 3\frac{W_1}{W}}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Пусть P_{23}^{as} – оператор проектирования $L_2(\mathbb{T}^3)$ на подпространство $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$:

$$(P_{23}^{as}\psi)(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[\psi(p_1, p_2, p_3) - \psi(p_1, p_3, p_2) \right].$$

Обозначим через $\mathbf{B}^{as}(K) = P_{23}^{as}\mathbf{B}(K)P_{23}^{as}$ сужение оператора $\mathbf{B}(K)$ на подпространство $L^{2,as}(\mathbb{T}^3)$. Проведя нужные вычисления, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^{as}(K)\psi)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} & \left[(\lambda_{as}^+(0)\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{q}) - \lambda_{as}^+(\pi)\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{q})) \cos K + \right. \\ & \left. \sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)}(\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{q}) + \mathbf{C}_{2,3}^{as}(\mathbf{p})\mathbf{S}_{2,3}^{as}(\mathbf{q})) \sin K \right] \psi(\mathbf{q})d(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

где нормированные функции $\mathbf{C}_{23}^{as}$ и $\mathbf{S}_{23}^{as}$ ортогональны и определены формулами

$$\mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(0)}} \frac{\cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}, \quad \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{\sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Лемма 13. Оператор $\mathbf{B}^{as}(K)$ имеет два ненулевых собственных значения

$$\lambda_{as}^+(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K + \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right] > 0,$$

$$\lambda_{as}^-(K) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi)) \cos K - \sqrt{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(\pi))^2 \cos^2 K + 4\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} \right] < 0,$$

где $\lambda_{as}^+(\pi)$ и $\lambda_{as}^+(0)$ определены формулами (5) и (7).

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 12. $\square$

Нормированная собственная функция, соответствующая положительному собственному значению $\lambda_{as}^+(K)$, имеет вид

$$\psi_K^{as}(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(K)} \sin K}{a_{as}(K)} \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_{as}^+(\pi)}}{a_{as}(K)} \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}), \quad K \neq 0,$$

где $a_{as}(K)$ – нормирующий множитель, т. е.

$$a_{as}(K) = \sqrt{\lambda_{as}^+(0)(\lambda_{as}^+(K) \sin K)^2 + \lambda_{as}^+(\pi)(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K)^2}.$$

В случае $K = \pi$ собственная функция выражается как

$$\psi_\pi^{as}(\mathbf{p}) = \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{\sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

При $K = 0$ собственную функцию определим как предел

$$\lim_{K \rightarrow 0} \psi_K^{as}(\mathbf{p}) = \psi_0^{as}(\mathbf{p}) = \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{as}^+(0)}} \frac{\cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Полагая $P^\perp = I - P_{123}^s - P_{23}^{as}$, из равенства $\mathbf{B}^\perp(K) = P^\perp \mathbf{B}(K) P^\perp$ определим сужение $\mathbf{B}(K)$ на $L^{2,\perp}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^\perp(K)\psi)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{T}^3} & \left[(\lambda_{as}^+(0) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{q}) - \lambda_{as}^+(\pi) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{q})) \cos K + \right. \\ & \left. + \sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(\pi)} (\mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{q}) + \mathbf{C}_{2,3}^s(\mathbf{p}) \mathbf{S}_{2,3}^s(\mathbf{q})) \sin K \right] \psi(\mathbf{q}) d(\mathbf{q}), \end{aligned}$$

где нормированные функции $\mathbf{C}_{23}^s$ и $\mathbf{S}_{23}^s$ ортогональны и определяются по формулам

$$\mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_{as}^+(0)}} \frac{2 \cos p_1 - \cos p_2 - \cos p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}, \quad \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{6\lambda_{as}^+(\pi)}} \frac{2 \sin p_1 - \sin p_2 - \sin p_3}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{p})}}.$$

Лемма 14. Операторы $\mathbf{B}^{as}(K)$ и $\mathbf{B}^\perp(K)$ унитарно эквивалентны.

Доказательство. Унитарность операторов осуществляется с помощью унитарного оператора $U : L^{2,as}(\mathbb{T}^3) \rightarrow L^{2,\perp}(\mathbb{T}^3)$, и

$$U \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{23}^{as}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{S}_{23}^{as}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) \\ \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}) \end{pmatrix}. \quad \square$$

Замечание 3. Собственные значения операторов $\mathbf{B}^{as}(K)$ и $\mathbf{B}^\perp(K)$ совпадают. Собственная функция оператора $\mathbf{B}^\perp(K)$, соответствующая собственному значению $\lambda_\perp^+(K) = \lambda_{as}^+(K)$, имеет вид

$$\psi_K^\perp(\mathbf{p}) = (U \psi_K^{as})(\mathbf{p}) = \frac{\sqrt{\lambda_{as}^+(0)\lambda_{as}^+(K)} \sin K}{a_{as}(K)} \mathbf{C}_{23}^s(\mathbf{p}) + \frac{(\lambda_{as}^+(0) - \lambda_{as}^+(K) \cos K) \sqrt{\lambda_{as}^+(\pi)}}{a_{as}(K)} \mathbf{S}_{23}^s(\mathbf{p}).$$

Лемма 15. Пусть $\gamma > 0$. Тогда существует такое $\mu_\gamma > 0$, что для любого $\mu > \mu_\gamma$ верна оценка

$$\|R_F(z)\| \leq \frac{C}{\mu},$$

которая выполняется равномерно по $z \geq \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)$, $K \in \mathbb{T}$, где C – положительная константа, зависящая только от γ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.5 из работы [14].

Доказательство теоремы 1. (а) Пусть $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$. Из равенства (20) и утверждения леммы 15 следует, что существует такое $\mu_0(\gamma, K) > 0$, что для всех $\mu > \mu_0(\gamma, K)$ операторы $F(K, z)$ и $F^{(p)}(K, z)$ имеют одинаковое число собственных значений, больших 1:

$$n[1, F(K, z)] = n[1, F^{(p)}(K, z)].$$

Число собственных значений оператора $F^{(p)}(K, z)$, больших 1, равно числу собственных значений оператора $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, z) = \mathbb{Q}F^{(p)}(K, z)\mathbb{Q}$, больших 1.

По лемме 10 числа собственных значений, больших 1, операторов $F_{\mathbb{Q}}^{(p)}(K, \tau_{\max, \gamma}(\mu, K))$ и $\gamma \mathbf{B}(K)$ совпадают при $\mu > \mu_0(\gamma, K)$. Из утверждений лемм 12–14 можно заключить, что оператор $\gamma \mathbf{B}(K)$ имеет три положительных собственных значения с учетом кратности: $\gamma \lambda_s^+(K), \gamma \lambda_{as}^+(K) = \gamma \lambda_{\perp}^+(K)$. Так как $\gamma \in (0, \gamma_s(K))$, то выполнены неравенства

$$\gamma \lambda_s^+(K) < 1, \quad \gamma \lambda_{as}^+(K) < 1,$$

и по лемме 7 оператор $H_{\mu, \gamma}(K)$ не имеет собственных значений $z > \tau_{\max, \gamma}(\mu, K)$ при $\mu > \mu_0(\gamma, K)$.

Аналогично могут быть доказаны утверждения (b) и (c).

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Хужамиеров И.А. Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке // Изв. вузов. Матем. 2023. № 2. С. 3–25. <https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-2-3-25>.
2. Efimov V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system // Phys. Lett. B. 1970. V. 33, No 8. P. 563–564. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(70\)90349-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(70)90349-7).
3. Ovchinnikov Yu.N., Sigal I.M. Number of bound states of three-particle systems and Efimov's effect // Ann. Phys. 1989. V. 123, No 2. P. 274–295. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90339-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90339-7).
4. Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Commun. Math. Phys. 1993. V. 156, No 1. P. 101–126. <https://doi.org/10.1007/BF02096734>.
5. Tamura H. Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect // Yajima K. (Ed.) Spectral and Scattering Theory and Applications: Conf. on Spectral and Scattering Theory, Celebrating ShigeToshi Kuroda June 30–July 3, 1992. Ser.: Advanced Studies in Pure Mathematics. V. 23. Tokyo: Tokyo Inst. Technol., 1994. P. 311–322. <https://doi.org/10.2969/aspm/02310311>.

6. *Chadan K., Martin A.* A sufficient condition for the existence of bound states in a potential without spherical symmetry // J. Phys. Lett. 1980. V. 41, No 9. P. 205–206.
<https://doi.org/10.1051/jphyslet:01980004109020500>.
7. *Liu Y., Yu Y.-C., Chen S.* Three-body bound states of two bosons and one impurity in one dimension // Phys. Rev. A. 2021. V. 104, No 3. Art. 033303.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.033303>.
8. *Kholmatov Sh.Yu., Muminov Z.I.* Existence of bound states of N -body problem in an optical lattice // J. Phys. A: Math. Theor. 2018. V. 51, No 26. Art. 265202.
<https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac534>.
9. *Lakaev S.N., Dell'Antonio G.F., Khalkhuzhaev A.M.* Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice // J. Phys. A: Math. Theor. 2016. V. 49, No 14. Art. 145204.
<https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/14/145204>.
10. *Lakaev S.N.* On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles // Funct. Anal. Its Appl. 1993. V. 27, No 3. P. 166–175. <https://doi.org/10.1007/BF01087534>.
11. *Klaus M., Simon B.* Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case // Ann. Phys. 1980. V. 130, No 2. P. 251–281.
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(80\)90338-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3).
12. *Valiente M., Zinner N.T.* Strongly Interacting Quantum Systems. V. 1: Few-body physics. Ser.: IOP Series in Quantum Technology. Bristol: IOP Publ., 2023. 218 p.
<https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3087-9>.
13. *Valiente M., Petrosyan D., Saenz A.* Three-body bound states in a lattice // Phys. Rev. A. 2010. V. 81, No 1. Art. 011601(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.011601>.
14. *Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A.* On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the $2 + 1$ fermionic trimer on the lattice // Nanosyst.: Phys., Chem., Math. 2023. V. 14, No 5. P. 518–529. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-5-518-529>.
15. *Халхужаев А.М.* Существенный спектр трехчастичного дискретного оператора, соответствующего системе трех фермионов на решетке // Изв. вузов. Матем. 2017. № 9. С. 76–88.
16. *Dell'Antonio G.F., Muminov Z.I., Shermatova V.M.* On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices // J. Phys. A: Math. Theor. 2011. V. 44, No 31. Art. 315302. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/31/315302>.

References

1. Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A. Existence condition for the eigenvalue of a three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Russ. Math.*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 1–22. <https://doi.org/10.3103/S1066369X23020019>.
2. Efimov V. Energy levels arising from resonant two-body forces in a three-body system. *Phys. Lett. B*, 1970, vol. 33, no. 8, pp. 563–564. [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(70\)90349-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(70)90349-7).
3. Ovchinnikov Yu.N., Sigal I.M. Number of bound states of three-particle systems and Efimov's effect. *Ann. Phys.*, 1989, vol. 123, no. 2, pp. 274–295.
[https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90339-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90339-7).

4. Sobolev A.V. The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics. *Commun. Math. Phys.*, 1993, vol. 156, no. 1, pp. 101–126. <https://doi.org/10.1007/BF02096734>.
5. Tamura H. Asymptotics for the number of negative eigenvalues of three-body Schrödinger operators with Efimov effect. In: Yajima K. (Ed.) *Spectral and Scattering Theory and Applications: Conf. on Spectral and Scattering Theory, Celebrating ShigeToshi Kuroda June 30–July 3, 1992*. Ser.: Advanced Studies in Pure Mathematics. Vol. 23. Tokyo, Tokyo Inst. Technol., 1994, pp. 311–322. <https://doi.org/10.2969/aspm/02310311>.
6. Chadan K., Martin A. A sufficient condition for the existence of bound states in a potential without spherical symmetry. *J. Phys. Lett.*, 1980, vol. 41, no. 9, pp. 205–206. <https://doi.org/10.1051/jphyslet:01980004109020500>.
7. Liu Y., Yu Y.-C., Chen S. Three-body bound states of two bosons and one impurity in one dimension. *Phys. Rev. A*, 2021, vol. 104, no. 3, art. 033303. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.033303>.
8. Kholmatov Sh.Yu., Muminov Z.I. Existence of bound states of N -body problem in an optical lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2018, vol. 51, no. 26, art. 265202. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aac534>.
9. Lakaev S.N., Dell’Antonio G.F., Khalkhuzhaev A.M. Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2016, vol. 49, no. 14, art. 145204. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/49/14/145204>.
10. Lakaev S.N. On Efimov’s effect in a system of three identical quantum particles. *Funct. Anal. Its Appl.*, 1993, vol. 27, no. 3, pp. 166–175. <https://doi.org/10.1007/BF01087534>.
11. Klaus M., Simon B. Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. *Ann. Phys.*, 1980, vol. 130, no. 2, pp. 251–281. [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(80\)90338-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90338-3).
12. Valiente M., Zinner N.T. *Strongly Interacting Quantum Systems*. Vol. 1: Few-body physics. Ser.: IOP Series in Quantum Technology. Bristol, IOP Publ., 2023. 218 p. <https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3087-9>.
13. Valiente M., Petrosyan D., Saenz A. Three-body bound states in a lattice. *Phys. Rev. A*, 2010, vol. 81, no. 1, art. 011601(R). <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.011601>.
14. Khalkhuzhaev A.M., Khujamiyrov I.A. On the discrete spectrum of the Schrödinger operator using the $2 + 1$ fermionic trimer on the lattice. *Nanosyst.: Phys., Chem., Math.*, 2023, vol. 14, no. 5, pp. 518–529. <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2023-14-5-518-529>.
15. Khalkhuzhaev A.M. The essential spectrum of a three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice. *Russ. Math.*, 2017, vol. 61, no. 9, pp. 67–78. <https://doi.org/10.3103/S1066369X17090080>.
16. Dell’Antonio G.F., Muminov Z.I., Shermatova Y.M. On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2011, vol. 44, no. 31, art. 315302. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/44/31/315302>.

Информация об авторах

Ахмад Мияссарович Халхужаев, доктор физико-математических наук, профессор математического факультета, Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова

E-mail: *ahmad_x@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-0569-6780>

Хилола Гафуровна Хайитова, ассистент, Бухарский государственный университет

E-mail: *xilola_xayitova@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4613-6179>

Ислом Абдумаликович Хужамиеров, ассистент, Узбекско-Финский педагогический институт

E-mail: *islom.xujamiyurov@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5439-8729>

Author Information

Ahmad M. Khalkhuzhaev, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Faculty of Mathematics, Samarkand State University named after Sharof Rashidov

E-mail: *ahmad_x@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-0569-6780>

Khilola G. Khayitova, Teaching Assistant, Bukhara State University

E-mail: *xilola_xayitova@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4613-6179>

Islom A. Khujamiyurov, Teaching Assistant, Uzbek-Finnish Pedagogical Institute

E-mail: *islom.xujamiyurov@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5439-8729>

Поступила в редакцию 17.07.2025

Принята к публикации 2.09.2025

Received July 17, 2025

Accepted September 2, 2025