

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 517.958; 535.4

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>

Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТЕ-волны на дифракционной решетке с двухслойными штрихами на периоде

Ю.Г. Смирнов, В.Ю. Мартынова ✉

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия✉ lynxbax@mail.ru

Аннотация

Целью работы является исследование дифракции электромагнитной ТЕ-волны на многослойных дифракционных решетках с несколькими двухслойными штрихами на периоде. Рассматриваемые оптические структуры применяются для спектрального объединения лучей. Задача дифракции решена методом, основанным на модифицированном методе разделения переменных. В рамках такого подхода необходимо решить две одномерные краевые задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке с кусочно-постоянными коэффициентами. Каждая из краевых задач на собственные значения сводится к вычислению определителя второго порядка. Предложенный метод применен к решению задачи дифракции электромагнитной ТЕ-волны на многослойных дифракционных решетках с несколькими различными конфигурациями, а также к расчету дифракционной эффективности таких оптических структур. Представлены численные результаты. Для моделирования дифракционных решеток выбраны материалы, используемые при создании тонкопленочных покрытий. Предложенный метод может быть использован для моделирования более сложных дифракционных решеток с многослойным отражающим покрытием.

Ключевые слова: дифракционная решетка, модифицированный метод разделения переменных, электромагнитная ТЕ-волна, дифракционная эффективность

Для цитирования: Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю. Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТЕ-волны на дифракционной решетке с двухслойными штрихами на периоде // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 531–546. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>

A modified method of variable separation for the problem of TE wave diffraction on a diffraction grating with two-layer lines in the period

Yu.G. Smirnov, V.Yu. Martynova ✉

Penza State University, Penza, Russia✉ lynxbax@mail.ru

Abstract

The diffraction of an electromagnetic TE wave on multilayer diffraction gratings with several two-layer lines in the period was investigated. Such optical structures are employed in spectral beam combining. The diffraction problem was solved by a modified method of variable separation, which requires the solution of two one-dimensional boundary value problems for eigenvalues of second-order differential equations on a segment with piecewise constant coefficients. Each of the boundary value problems for eigenvalues reduces to the calculation of a second-order determinant. The proposed method was applied to solve the problem of the electromagnetic TE wave diffraction on multilayer diffraction gratings with several different configurations, as well as to determine their diffraction efficiency. The numerical results were presented. For modeling the diffraction gratings, materials that are commonly used in thin-film coatings were selected. The method can be further developed to model more complex diffraction gratings with multilayer reflective coatings.

Keywords: diffraction grating, modified method of variable separation, electromagnetic TE wave, diffraction efficiency

For citation: Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu. A modified method of variable separation for the problem of TE wave diffraction on a diffraction grating with two-layer lines in the period. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 531–546. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.531-546>. (In Russian)

Введение

Многослойные дифракционные решетки находят важное применение в спектральном объединении лазерного излучения, где множество некогерентных лучей с различными длинами волн комбинируются в единый пучок [1–3]. Такая технология представляет собой компактный и эффективный метод получения высокомоощного излучения, поскольку суммарная мощность объединенного пучка равна сумме мощностей исходных лучей. Это обеспечивает возможность прямого контроля и наращивания выходной мощности.

Современные технологии изготовления многослойных дифракционных решеток достигли значительного прогресса [4], что теоретически позволяет формировать решетки

с несколькими штрихами в пределах одного периода. Однако практическое применение пока ограничено элементами с одинарным штрихом на период. Такие решетки демонстрируют высокую дифракционную эффективность, но имеют относительно узкую спектральную полосу шириной около 40–50 нм [5]. Увеличить рабочий диапазон рассматриваемых оптических структур удалось с использованием решеток с двухслойными штрихами на периоде [6, 7]. Приведенные результаты доказывают, что увеличение числа параметров решетки, по которым можно проводить оптимизацию, позволяет добиться значительного усовершенствования характеристик рассматриваемых оптических структур.

В настоящей работе описан численный метод решения задачи дифракции ТЕ-волны на многослойной дифракционной решетке с несколькими двухслойными штрихами на периоде. Предложенный метод основан на модифицированном методе разделения переменных [8, 9], который успешно применялся для исследования дифракционных решеток с несколькими цельными, но различными по ширине штрихами [10, 11]. Таким образом, разработанный метод позволяет анализировать более сложные оптические структуры с увеличенным числом параметров решетки, допускающих оптимизацию, что в будущем поможет конструировать дифракционные решетки с высокой дифракционной эффективностью в нужном порядке дифракции на широкой спектральной полосе [12].

1. Постановка задачи

Применение метода электронно-лучевого испарения, голографической литографии и ионно-лучевого травления позволяет из многослойного нанопокрывтия получить комбинацию дифракционной решетки с многослойным штрихом на периоде и слоистого отражающего покрытия [6, 7]. Геометрия описанной оптической структуры с двухслойными штрихами на периоде представлена на рис. 1. Будем использовать следующие обозначения: $T > 0$ – период дифракционной решетки, $h_1 > 0$ – высота гребня решетки, $h_2 > 0$ – высота нижнего слоя гребня решетки, $n(x, y)$ – показатель преломления, определяемый по формуле

$$n(x, y) = \begin{cases} n_{2,m}, & a_{2m-1} < x \leq a_{2m} \quad (m = \overline{1, N/2}), \quad h_2 < y \leq h_1; \\ n_{1,m}, & a_{2m-1} < x \leq a_{2m} \quad (m = \overline{1, N/2}), \quad 0 < y \leq h_2; \\ n_{0,j}, & d_j < y \leq d_{j-1} \quad (j = \overline{1, J}); \\ n_s, & y < d_J; \\ n_{0,0}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $n_{0,0} = n_0$ – индекс преломления свободного пространства, $N > 0$ – четное целое, $N/2$ – количество штрихов на периоде, $J \geq 0$ – количество слоев в отражающем покрытии, a_m , $m = \overline{0, N-1}$, – значения узлов в периоде решетки. Справедливо, что $a_0 = 0$, $a_N = T$. Величина шага в решетке $a_{m+1} - a_m$, $m = \overline{0, N-1}$, непостоянна, то есть рассматриваются неравномерные дифракционные решетки. Толщины слоев $d_j - d_{j+1}$, $j = \overline{0, J}$, также отличаются между собой, а $d_0 = 0$.

Считаем, что свободное от рассеивателя пространство характеризуется постоянными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$.

На решетку под углом φ падает электромагнитная ТЕ-волна. Угол падения волны зависит от ее длины и направления необходимого дифракционного порядка так, чтобы

выполнялось условие для спектрального объединения лазерного излучения [1–3]. Падающее электрическое поле определяется продольной составляющей

$$u_0 = \exp\{-ik_0 n_0 (x \sin \varphi - (y - h_1) \cos \varphi)\},$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновое число свободного пространства, а λ – длина волны.

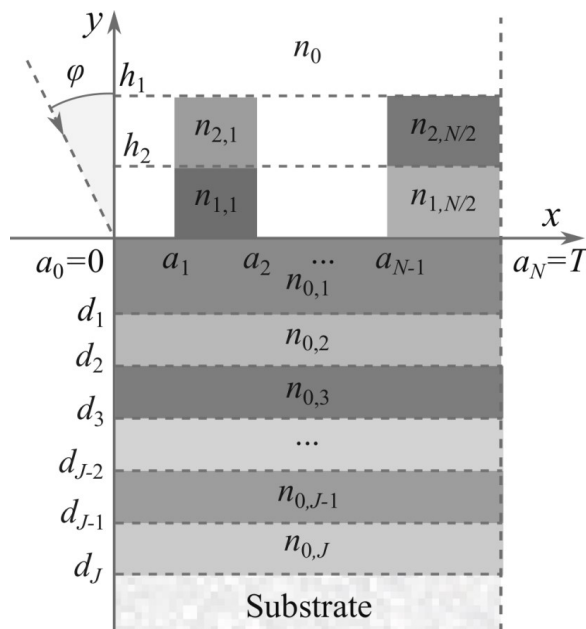


Рис. 1. Геометрия изучаемой оптической структуры

Fig. 1. Geometry of the studied optical structure

Требуется найти продольную составляющую полного электрического поля $u(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_0^2 n^2(x, y)) u(x, y) = 0,$$

условию квазипериодичности Флоке [13]

$$u(x, y) = Au(x + T, y),$$

где $A = \exp\{ik_0 n_0 T \sin \varphi\}$, условию непрерывности на поверхности решетки, за исключением краев заземления и на границах раздела между слоями, условию излучения на бесконечности [14] и условию конечности энергии в каждой ограниченной пространственной области. Также необходимо определить значения дифракционной эффективности основных порядков дифракции [15, 16]. Заметим, что для постоянной, входящей в условие квазипериодичности Флоке, справедливо $|A| = 1$.

Согласно методу плоских волн [15] представление функции $u(x, y)$ имеет вид

$$u^{(0)}(x, y) = u_0(x, y) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} r_l z_l(x) e^{-ik_{0,y}l(y-h_1)}, \quad y > h_1; \quad (1)$$

$$u^{(j)}(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(p_l^{(j)} e^{ik_{j,y}(y-d_j)} + q_l^{(j)} e^{-ik_{j,y}(y-d_j)} \right), \quad d_j < y < d_{j-1}, \quad j = \overline{1, J}, \quad (2)$$

где

$$k_{j,yl} = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 n_{0,j}^2 - k_{xl}^2}, & k_0 n_{0,j} > |k_{xl}|, \\ -i\sqrt{k_{xl}^2 - k_0^2 n_{0,j}^2}, & k_0 n_{0,j} < |k_{xl}|, \end{cases} \quad j = \overline{0, J+1},$$

$z_l(x) = e^{-ik_{xl}x}$, $j = \overline{1, J}$, $p_l^{(J+1)} \equiv t_l$, $q_l^{(J+1)} \equiv 0$, $d_0 = 0$, $k_{xl} = k_0 n_0 \sin \varphi - 2\pi l/T$. Коэффициенты r_l и t_l – неизвестные амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l -х мод.

Для удобства введем следующие обозначения

$$P_l^{(j)} = \exp\{ik_{j,yl}(d_{j-1} - d_j)\}, \quad Q_l^{(j)} = \exp\{-ik_{j,yl}(d_{j-1} - d_j)\}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

которые понадобятся нам далее. В работе [10] показано, что $p_l^{(j)}$ и $q_l^{(j)}$ выражаются через амплитудный коэффициент прохождения t_l , $j = \overline{1, J}$. Таким образом, $p_l^{(1)} = \tilde{p}_l^{(1)} t_l$, $q_l^{(1)} = \tilde{q}_l^{(1)} t_l$, где

$$\begin{aligned} \tilde{p}_l^{(j)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} + \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \\ \tilde{q}_l^{(j)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} + \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} - \frac{k_{j+1,yl}}{k_{j,yl}} \left(\tilde{p}_l^{(j+1)} P_l^{(j+1)} - \tilde{q}_l^{(j+1)} Q_l^{(j+1)} \right) \right), \end{aligned}$$

$$j = \overline{1, J}, \quad \tilde{p}_l^{(J+1)} \equiv 1, \quad \tilde{q}_l^{(J+1)} \equiv 0.$$

Дифракционная эффективность в l -м порядке дифракции определяется выражением [15, 16]

$$DE_l = |r_l|^2 \Re \left(\frac{k_{0,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right) + |t_l|^2 \Re \left(\frac{k_{J+1,yl}}{k_0 n_0 \cos \varphi} \right). \quad (3)$$

2. Модифицированный метод разделения переменных для решения задачи

Искомая функция в области $V_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, y > h_1\}$ представима в виде (1), а в областях $V_{j+2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, d_{j-1} < y < d_j\}$, $j = \overline{1, J}$, – в виде (2). Необходимо найти представление функции $u(x, y)$ в областях

$$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, h_2 < y < h_1\} \quad \text{и} \quad V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq T, 0 < y < h_2\}.$$

Выделим подобласти $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= \bigcup_{m=0}^{N-1} \bar{\Pi}_{1,m}, \quad \Pi_{1,m} = (a_m, a_{m+1}) \times (h_2, h_1), \quad m = \overline{0, N-1}, \\ \bar{V}_2 &= \bigcup_{m=0}^{N-1} \bar{\Pi}_{2,m}, \quad \Pi_{2,m} = (a_m, a_{m+1}) \times (0, h_2), \quad m = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Значения волнового числа в прямоугольниках $\Pi_{j,m}$ равны $\kappa_{j,2m} = k_0 n_0$, $\kappa_{j,2m+1} = k_0 n_{j,m+1}$, $m = \overline{0, N/2-1}$, $j = 1, 2$. Решение задачи в прямоугольниках $\bar{\Pi}_{j,m}$ будем искать в виде рядов [8]

$$u(x, y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{j,l}(x) Y_{j,l}(y), \quad (4)$$

учитывая, что $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца в каждом прямоугольнике $\Pi_{j,m}$, $j = 1, 2$, условиям сопряжения при $x = a_m$, $m = \overline{1, N-1}$, и условию квазипериодичности.

Применив метод разделения переменных, получим функции $Y_{j,l}$ в виде

$$\begin{aligned} Y_{1,l}(y) &= b_{1,1,l} e^{i(y-h_2)\sqrt{\lambda_{1,l}}} + b_{1,2,l} e^{-i(y-h_1)\sqrt{\lambda_{1,l}}}, \\ Y_{2,l}(y) &= b_{2,1,l} e^{iy\sqrt{\lambda_{2,l}}} + b_{2,2,l} e^{-i(y-h_2)\sqrt{\lambda_{2,l}}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $X_{j,l}(x)$, $j = 1, 2$, являются решениями следующих задач

$$\begin{aligned} \frac{X_{j,l}''}{X_{j,l}} + \kappa^2(x) &= \lambda_{j,l}, \quad \kappa^2(x) = \kappa_{j,m}^2, \quad x \in (a_m, a_{m+1}), \quad m = \overline{0, N-1}; \\ X_{j,l}(0) &= AX_{j,l}(T), \quad X_{j,l}'(0) = AX_{j,l}'(T); \quad [X_{j,l}] = [X_{j,l}'] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение (4)–(6) называется точным решением задачи дифракции, полученным модифицированным методом разделения переменных.

Решив задачи (6), получим представление для функций $X_{j,l}(x)$ в виде

$$X_{j,l}(x) = c_{j,m,l} f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) + d_{j,m,l} f_{c,jm}(\lambda_{j,l}), \quad x \in (a_m, a_{m+1}), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} f_{s,jm}(\lambda) &= \sin(\gamma_{j,m}(\lambda)(a_{m+1} - a_m)), \quad f_{c,jm}(\lambda) = \cos(\gamma_{j,m}(\lambda)(a_{m+1} - a_m)), \\ \gamma_{j,m}(\lambda) &= \sqrt{\kappa_{j,m}^2 - \lambda}, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, N-1}. \end{aligned}$$

Из условий сопряжения во внутренних узлах a_m , $m = \overline{1, N-1}$, получим систему из $2N - 2$ уравнений

$$\begin{aligned} d_{j,m+1,l} &= c_{j,m,l} f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) + d_{j,m,l} f_{c,jm}(\lambda_{j,l}), \\ c_{j,m+1,l} &= \frac{\gamma_{j,m}(\lambda_{j,l})}{\gamma_{j,m+1}(\lambda_{j,l})} (c_{j,m,l} f_{c,jm}(\lambda_{j,l}) - d_{j,m,l} f_{s,jm}(\lambda_{j,l})), \end{aligned} \quad (8)$$

где $j = 1, 2$, $m = \overline{0, N-2}$. Из условий квазипериодичности получим еще два уравнения

$$\begin{aligned} d_{j,0,l} &= Ac_{j,N-1,l} f_{s,jN-1}(\lambda_{j,l}) + Ad_{j,N-1,l} f_{c,jN-1}(\lambda_{j,l}), \\ c_{j,0,l} &= \frac{A\gamma_{j,N-1}(\lambda_{j,l})}{\gamma_{j,0}(\lambda_{j,l})} (c_{j,N-1,l} f_{c,jN-1}(\lambda_{j,l}) - d_{j,N-1,l} f_{s,jN-1}(\lambda_{j,l})). \end{aligned} \quad (9)$$

В результате имеем две однородные системы $2N$ уравнений относительно $c_{j,m,l}$, $d_{j,m,l}$, $j = 1, 2$, $m = \overline{0, N-1}$. Ненулевые решения таких систем существуют, только если определители их матриц равны нулю. Таким образом, задачи нахождения собственных значений $\lambda_{j,l}$ можно свести к вычислению определителей второго порядка.

Записав уравнения (8), (9) в матричной форме, получим

$$\begin{aligned} (c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top &= S_{j,m,l} (c_{j,m,l}, d_{j,m,l})^\top, \quad j = 1, 2, \quad m = \overline{0, N-2}, \\ (c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top &= Q_{j,l} (c_{j,N-1,l}, d_{j,N-1,l})^\top, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Приведем исходные системы к виду систем из двух уравнений с неизвестными $c_{j,0}$, $d_{j,0}$:

$$(c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top = Q_{j,l} S_{j,N-2,l} S_{j,N-3,l} \dots S_{j,0,l} (c_{j,m+1,l}, d_{j,m+1,l})^\top, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Из формул (10) найдем требуемые уравнения

$$\det(I - Q_{j,l} S_{j,N-2,l} S_{j,N-3,l} \dots S_{j,0,l}) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

В качестве $(c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top$ можно взять любое нетривиальное решение системы (10) при $\lambda = \lambda_{j,l}$, $j = 1, 2$.

Определив собственные значения $\lambda_{j,l}$ и собственные функции задач (6), получим из (4) представление решения $u(x, y)$ в конечных областях V_j с неизвестными коэффициентами $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$.

Заметим, что за счет выбора функций в (1), (2) и выполнения условий в (6), условия квазипериодичности автоматически выполняются.

Далее, коэффициенты r_l, t_l , $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$, найдем из условий сопряжения при $y = h_1$, $y = h_2$, $y = 0$:

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y_{1,l}(h_1) = u_0(x, h_1) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) r_l, \quad (12)$$

$$\sum_{l=0}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y'_{1,l}(h_1) = u'_0(x, h_1) - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k_{0,yl} z_l(x) r_l, \quad (13)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y_{1,l}(h_2) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y_{2,l}(h_2), \quad (14)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{1,l}(x) Y'_{1,l}(h_2) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y'_{2,l}(h_2), \quad (15)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y_{2,l}(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) t_l, \quad (16)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_{2,l}(x) Y'_{2,l}(0) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} i k_{1,yl} z_l(x) \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) t_l, \quad (17)$$

где в $u'_0(x, h_1)$ производная берется по y в точке h_1 .

Заметим, что выражения справа в формулах (12), (13), (16), (17) – это ряды Фурье функции на отрезке $[0, T]$. Умножив (12), (13), (16), (17) на соответствующие экспоненты и проинтегрировав полученные выражения и уравнения (14), (15) от 0 до T , построим четыре уравнения относительно $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} -i k_{0,yl} \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{1,p}(x) Y_{1,p}(h_1) - u_0(x, h_1) \right) dx = \\ = \int_0^T e^{ik_{kl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{1,p}(x) Y'_{1,p}(h_1) - u'_0(x, h_1) \right) dx, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_{1,p}(x)Y_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (19)$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} (X_{1,p}(x)Y'_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} ik_{1,yl} \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{2,p}(x)Y_{2,p}(0) \right) dx = \\ = \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} X_{2,p}(x)Y'_{2,p}(0) \right) dx \end{aligned} \quad (21)$$

для всех целых l .

3. Численный метод решения задачи

Численное решение задачи дифракции, описанной в разделе 1, можно разделить на несколько этапов.

Прежде всего необходимо найти конечное нечетное количество собственных значений $\lambda = \lambda_{j,l}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, как решение уравнения (11), для каждого $j = 1, 2$, $M > 0$ – четное целое число. На этом этапе можно использовать любой из известных численных методов, позволяющих находить приближенное решение λ уравнения вида

$$F(\lambda) = 0.$$

Для данной задачи достаточно эффективным является метод перемены знака, поскольку он позволяет определять сразу несколько решений на заданном отрезке [17]. Следует заметить, что количество найденных собственных значений влияет на точность дальнейших вычислений. Тогда приближенное решение задачи дифракции в прямоугольниках $\bar{\Pi}_{j,m}$ представимо в виде

$$u(x, y) = \sum_{l=-M/2}^{M/2} X_{j,l}(x)Y_{j,l}(y),$$

где $j = 1, 2$.

Далее выберем вектора $(c_{j,0,l}, d_{j,0,l})^\top$ как любое нетривиальное решение систем (11) для найденных собственных значений $\lambda = \lambda_{j,l}$, $j = 1, 2$, $l = \overline{-M/2, M/2}$. По ним вычислим все остальные коэффициенты $c_{j,m,l}$, $d_{j,m,l}$, $j = 1, 2$, $m = \overline{1, N-1}$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, которые используем при определении функций $X_{j,l}(x)$ в областях V_j , $j = 1, 2$, по формулам (7).

На следующем этапе рассчитаем $4M + 4$ неизвестных коэффициентов $b_{j,1,l}$, $b_{j,2,l}$, $j = 1, 2$, $l = \overline{-M/2, M/2}$, которые используем при определении функций $Y_{j,l}(y)$ в областях V_j , $j = 1, 2$, по формулам (5). Из уравнений (18)–(21) следует система $4M + 4$ уравнений:

$$\begin{aligned}
& -ik_{0,yl} \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p}(x) Y_{1,p}(h_1) - u_0(x, h_1) \right) dx = \\
& = \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p}(x) Y'_{1,p}(h_1) - u'_0(x, h_1) \right) dx, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} (X_{1,p}(x) Y_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x) Y_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^T \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} (X_{1,p}(x) Y'_{1,p}(h_2) - X_{2,p}(x) Y'_{2,p}(h_2)) \right) dx = 0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& ik_{1,yl} \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} - \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p}(x) Y_{2,p}(0) \right) dx = \\
& = \left(\tilde{p}_l^{(1)} P_l^{(1)} + \tilde{q}_l^{(1)} Q_l^{(1)} \right) \int_0^T e^{ik_{xl}x} \left(\sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p}(x) Y'_{2,p}(0) \right) dx, \quad (25)
\end{aligned}$$

где $l = \overline{-M/2, M/2}$. Интегралы в системе (22)–(25) вычислены аналитически.

Далее амплитудные коэффициенты отражения и прохождения l -х мод можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
r_l &= T^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p,l} Y_{1,p}(h_1), \quad l = \overline{-M/2, \dots, -1, 1, \dots, M/2}, \\
r_0 &= T^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{1,p,0} Y_{1,p}(h_1) - 1, \\
t_l &= T^{-1} (\tilde{p}_l + \tilde{q}_l)^{-1} \sum_{p=-M/2}^{M/2} X_{2,p,l} Y_{2,p}(0), \quad l = \overline{-M/2, M/2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
X_{j,p,l} &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z_l(a_m)}{\gamma_{j,m}^2(\lambda_{j,l}) - k_{xl}^2} [c_{j,m,l} \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) - id_{j,m,l} k_{xl} + \\
& + c_{j,m,l} z_l(a_{m+1} - a_m) (ik_{xl} f_{s,jm}(\lambda_{j,l}) - \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) f_{c,jm}(\lambda_{j,l})) + \\
& + d_{j,m,l} z_l(a_{m+1} - a_m) (ik_{xl} f_{c,jm}(\lambda_{j,l}) + \gamma_{j,m}(\lambda_{j,l}) f_{s,jm}(\lambda_{j,l}))].
\end{aligned}$$

На данном этапе найдены все коэффициенты для расчета искомой функции $u(x, y)$ в любой точке пространства.

На заключительном этапе можно определить значения дифракционной эффективности необходимых порядков дифракции по формуле (3).

4. Результаты расчетов

С использованием разработанного метода найдена дифракционная эффективность в -1 -м дифракционном порядке в диапазоне длин волн от 1000 нм до 1100 нм для трех конфигураций многослойной дифракционной решетки с одним штрихом на периоде. Результаты расчетов представлены на рис. 2–4. Для расчетов были использованы параметры, аналогичные тем, что приведены в работе [5]. Период $T = 1040$ нм, $N = 2$, $a_1 = 0.44T$, $J = 22$, $d_0 - d_1 = 295$ нм, $d_{2j-1} - d_{2j} = 88.35$ нм ($j = \overline{1, 11}$), $d_{2j} - d_{2j+1} = 248.6$ нм ($j = \overline{1, 10}$).

Угол падения рассчитан по следующей формуле [6]

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{\lambda}{2T} \right).$$

Таким образом, φ в рассматриваемом диапазоне длин волн от 1000 нм до 1100 нм изменяется примерно от 28.7° до 31.2° . Отражающее покрытие для всех рассмотренных конфигураций многослойной дифракционной решетки совпадает. Оно состоит из чередующихся слоев диоксида кремния (SiO_2) и оксида тантала (Ta_2O_5) так, что $n_{0,2j-1} = 1.44$, $n_{0,2j} = 2.15$, $j = \overline{1, 11}$. Кроме того, многослойная дифракционная решетка во всех трех случаях, представленных на рис. 2–4, помещена на подложку из оптического стекла с показателем преломления $n_s = 1.517$.

На рис. 2 представлен случай двухслойного штриха на периоде решетки. При этом высота гребня решетки $h_1 = 700$ нм, высота нижнего слоя штриха решетки $h_2 = 380$ нм. Верхний слой штриха дифракционной решетки состоит из оксида гафния (HfO_2) с показателем преломления $n_{2,1} = 1.9$, нижний слой штриха состоит из диоксида кремния (SiO_2) с показателем преломления $n_{1,1} = 1.44$. Важно заметить, что на рис. 2, а) дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции превышает 95 % на диапазоне длин волн от 1000 нм до 1090 нм, а минимальное значение дифракционной эффективности при длине волны 1100 нм приближенно равно 89.5 %. На рис. 2, б) представлено уточнение решения в окрестности точки локального минимума при длине волны 1020 нм. Результаты расчетов показывают, что такое падение дифракционной эффективности не связано с вычислительным методом, а имеет физическую причину и объясняется дифракцией электромагнитной волны в этом диапазоне длин волн.

На рис. 3 представлен случай, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из оксида гафния (HfO_2). Для численного моделирования такой конфигурации решетки применим численный метод, описанный в работе [10]. Высота гребня решетки при этом составляет 700 нм, что соответствует предыдущему случаю, в котором и для верхнего, и для нижнего слоев штриха на периоде выбран один и тот же материал. Структура отражающего многослойного покрытия и подложки описаны выше. При такой конфигурации дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции значительно падает в первой половине выбранного диапазона. Следует подчеркнуть, что при длинах волн от 1000 нм до 1030 нм она опускается ниже 20 %.

На рис. 4 представлен случай, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из диоксида кремния (SiO_2). Высота гребня снова 700 нм, а отражающее покрытие соответствует предыдущим случаям. На рис. 4 дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции нигде не превышает 90 %, но не опускается ниже 40 % на всем диапазоне.

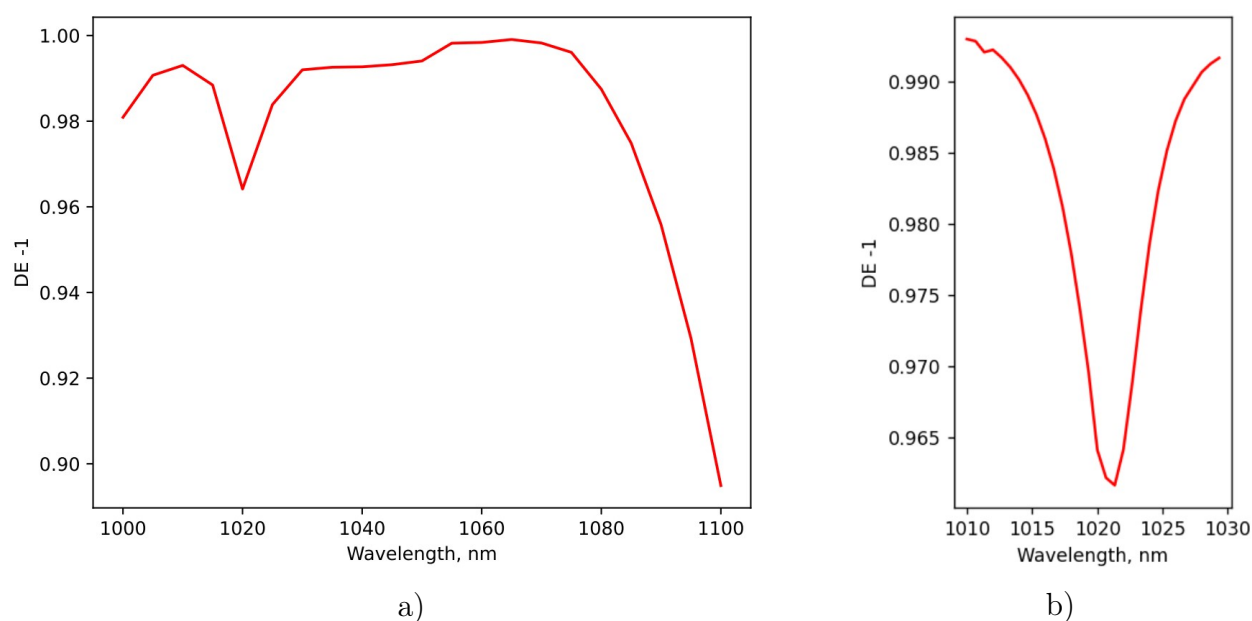


Рис. 2. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае двухслойного штриха на периоде решетки

Fig. 2. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case of a two-layer line in the grating period

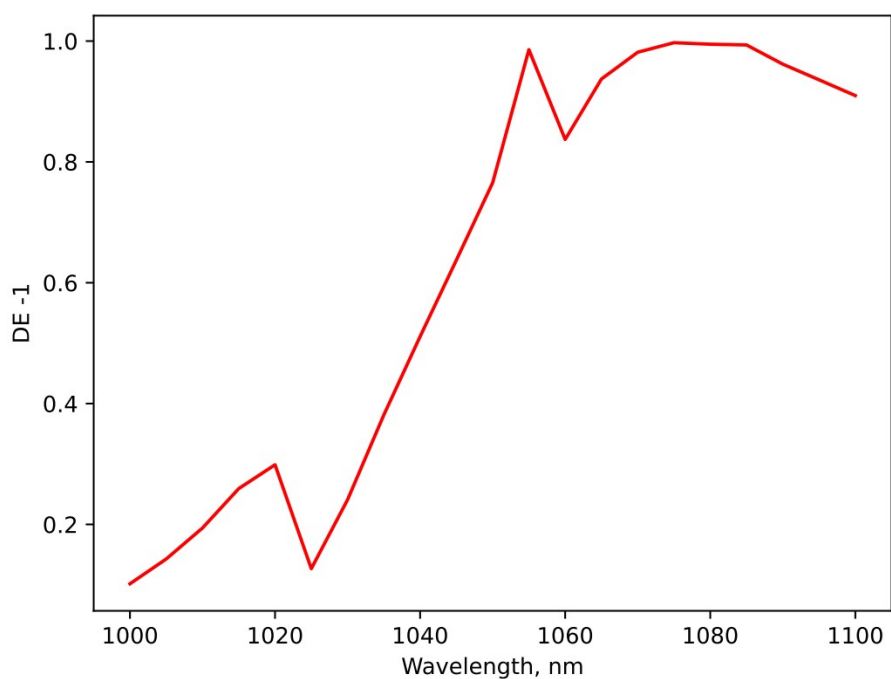


Рис. 3. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из оксида гафния (HfO_2)

Fig. 3. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case when a line in the grating period consists entirely of hafnium oxide (HfO_2)

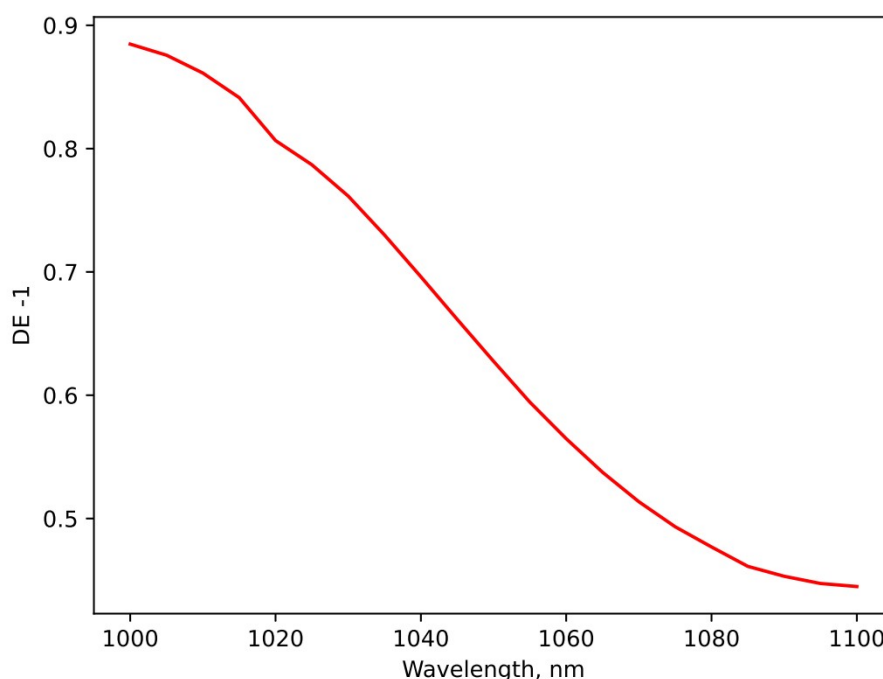


Рис. 4. Дифракционная эффективность в -1 -м порядке дифракции в случае, когда штрих на периоде решетки полностью состоит из диоксида кремния (SiO_2)

Fig. 4. Diffraction efficiency in the -1 diffraction order for the case when a line in the grating period consists entirely of silicon dioxide (SiO_2)

Численные результаты показывают, что использование двухслойного штриха на периоде многослойной дифракционной решетки позволяет повысить дифракционную эффективность в нужном порядке.

Заключение

Описано применение модифицированного метода разделения переменных для расчета полного электрического поля и дифракционной эффективности многослойной решетки с несколькими двухслойными штрихами на периоде в случае падения на нее ТЕ-волны. Численно показано преимущество дифракционных решеток с двухслойными штрихами на периоде. Предложенный метод позволяет моделировать дифракционные решетки с несколькими различными по ширине и составу штрихами на периоде. Разработанный подход допускает дальнейшее обобщение для структур, в которых каждый штрих решетки представляет собой многослойную систему, содержащую более двух материалов с различными оптическими характеристиками. Дальнейшая оптимизация рассматриваемой оптической структуры по дополнительным параметрам может повысить дифракционную эффективность решетки в нужном порядке дифракции, а также расширить рабочий диапазон длин волн. Кроме того, возможность моделирования дифракционных решеток с более сложной конфигурацией позволяет добиться повышения дифракционной эффективности в нужном порядке дифракции за счет применения оптимизации с использованием метода игольчатых вариаций [12, 18].

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Wirth C., Schmidt O., Tsybin I., Schreiber T., Eberhardt R., Limpert J., Tünnermann A., Ludewigt K., Gowin M., ten Have E., Jung M.* High average power spectral beam combining of four fiber amplifiers to 8.2 kW // *Opt. Lett.* 2011. V. 36, No 16. P. 3118–3120. <https://doi.org/10.1364/OL.36.003118>.
2. *Zheng Y., Yang Y., Wang J., Hu M., Liu G., Zhao X., Chen X., Liu K., Zhao C., He B., Zhou J.* 10.8 kW spectral beam combination of eight all-fiber superfluorescent sources and their dispersion compensation // *Opt. Express.* 2016. V. 24, No 11. P. 12063–12071. <https://doi.org/10.1364/OE.24.012063>.
3. *Петухов А.А.* Синтез высокоэффективных многослойных диэлектрических дифракционных решеток для спектрального сложения лазерных пучков // *Вычисл. методы и программир.* 2021. Т. 22, № 3. С. 201–210. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r312>.
4. *Smith D.J., McCullough M., Xu B., Smith S.D., Schattenburg M.L., Jitsuno T., Mikami T.* Large area pulse compression gratings fabricated onto fused silica substrates using scanning beam interference lithography // *Proc. 3rd Int. Conf. on Ultrahigh Intensity Lasers: Development, Science, and Emerging Applications (ICUIL'08).* Shanghai-Tongli, 2008. URL: <https://www.plymouthgrating.com/wp-content/uploads/2018/06/Large-Area-Pulse-Compression-Gratings-Fabricated-onto-Fused-Silica-ICUIL-2008.pdf>.
5. *Rumpel M., Moeller M., Moormann C., Graf T., Ahmed M.A.* Broadband pulse compression gratings with measured 99.7% diffraction efficiency // *Opt. Lett.* 2014. V. 39, No 2. P. 323–326. <https://doi.org/10.1364/OL.39.000323>.
6. *Liu Q., Jin Y., Wu J., Guo P.* Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating // *Proc. SPIE.* V. 10255, Pt. 1. Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016. Lv Y., Le J., Chen H., Wang J., Shao J. (Eds.). SPIE, 2017. Art. 1025514. <https://doi.org/10.1117/12.2266500>.
7. *Pan J., Li Ch., Chen X., Wu T., Xu G., Sun Sh.* Design of polarization-independent multilayer dielectric grating with broadband // *Proc. SPIE.* V. 12556. AOPC 2022: Optoelectronics and Nanophotonics. Cheng B., Guo J., Qian S. (Eds.). SPIE, 2023. Art. 125561M. <https://doi.org/10.1117/12.2651638>.
8. *Смирнов Ю.Г., Мартынова В.Ю., Москалева М.А., Цунак А.А.* Анализ дифракционной эффективности дифракционных решеток модифицированным методом разделения переменных // *Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки.* 2021. № 4. С. 57–70. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-4-5>.
9. *Смирнов Ю.Г.* Модифицированный метод разделения переменных в задаче дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной решетке // *Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки.* 2023. № 1. С. 3–14. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-1-1>.
10. *Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A.V.* Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43, No 5. P. 1277–1284. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080303>.

11. Мартынова В.Ю., Смирнов Ю.Г., Тихонравов А.В. Численный метод оптимизации дифракционной эффективности тонкослойных покрытий с дифракционными решетками // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 3. С. 400–408. <https://doi.org/10.31857/S0374064123030111>.
12. Мартынова В.Ю., Смирнов Ю.Г., Тихонравов А.В. Оптимизация параметров многослойных дифракционных решеток с использованием игольчатых вариаций // Изв. вузов. Поволжск. рег. Физ.-матем. науки. 2022. № 4. С. 56–68. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2022-4-6>.
13. Шестопалов В.П., Сиренко Ю.К. Динамическая теория решеток. Киев: Наук. думка, 1989. 216 с.
14. Шестопалов В.П., Кириленко А.А., Масалов С.А., Сиренко Ю.К. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки. Киев: Наук. думка, 1986. 231 с.
15. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12, No 5. P. 1068–1077. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.001068>.
16. Popov E. Gratings: Theory and Numeric Applications. 2nd revisited ed. Inst. Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. 578 p.
17. Гусарова Е.В., Мартынова В.Ю., Медведев М.Ю. Расчет дифракционной эффективности в задаче проектирования многоуровневых дифракционных решеток // Вычисл. методы и программир. 2024. Т. 25, вып. 3. С. 336–346. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r326>.
18. Тихонравов А.В. О методе синтеза оптических покрытий, использующем необходимые условия оптимальности // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. 1982. № 6. С. 91–93.

References

1. Wirth C., Schmidt O., Tsybin I., Schreiber T., Eberhardt R., Limpert J., Tünnermann A., Ludewigt K., Gowin M., ten Have E., Jung M. High average power spectral beam combining of four fiber amplifiers to 8.2 kW. *Opt. Lett.*, 2011, vol. 36, no. 16, pp. 3118–3120. <https://doi.org/10.1364/OL.36.003118>.
2. Zheng Y., Yang Y., Wang J., Hu M., Liu G., Zhao X., Chen X., Liu K., Zhao C., He B., Zhou J. 10.8 kW spectral beam combination of eight all-fiber superfluorescent sources and their dispersion compensation. *Opt. Express*, 2016, vol. 24, no. 11, pp. 12063–12071. <https://doi.org/10.1364/OE.24.012063>.
3. Petukhov A.A. Synthesis of highly efficient multilayer dielectric diffraction gratings for spectral combining of laser beams. *Numer. Methods Program.*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 201–210. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v22r312>. (In Russian)
4. Smith D.J., McCullough M., Xu B., Smith S.D., Schattenburg M.L., Jitsuno T., Mikami T. Large area pulse compression gratings fabricated onto fused silica substrates using scanning beam interference lithography. *Proc. 3rd Int. Conf. on Ultrahigh Intensity Lasers: Development, Science, and Emerging Applications (ICUIL'08)*. Shanghai-Tongli, 2008. URL: <https://www.plymouthgrating.com/wp-content/uploads/2018/06/Large-Area-Pulse-Compression-Gratings-Fabricated-Onto-Fused-Silica-ICUIL-2008.pdf>.
5. Rumpel M., Moeller M., Moormann C., Graf T., Ahmed M.A. Broadband pulse compression gratings with measured 99.7 % diffraction efficiency. *Opt. Lett.*, 2014, vol. 39, no. 2, pp. 323–326. <https://doi.org/10.1364/OL.39.000323>.

6. Liu Q., Jin Y., Wu J., Guo P. Fabrication of the polarization independent spectral beam combining grating. *Proc. SPIE*. Vol. 10255, Pt. 1. Selected Papers of the Chinese Society for Optical Engineering Conferences held October and November 2016. Lv Y., Le J., Chen H., Wang J., Shao J. (Eds.). SPIE, 2017, art. 1025514. <https://doi.org/10.1117/12.2266500>.
7. Pan J., Li Ch., Chen X., Wu T., Xu G., Sun Sh. Design of polarization-independent multilayer dielectric grating with broadband. *Proc. SPIE*. Vol. 12556. AOPC 2022: Optoelectronics and Nanophotonics. Cheng B., Guo J., Qian S. (Eds.). SPIE, 2023, art. 125561M. <https://doi.org/10.1117/12.2651638>.
8. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Moskaleva M.A., Tsupak A.A. Study of diffraction efficiency of diffraction gratings by the modified method of variables separation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2021, no. 4, pp. 57–70. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-4-5>. (In Russian)
9. Smirnov Yu.G. A modified method for separating variables in the diffraction problem of TM-polarized wave on diffraction grating. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2023, no. 1, pp. 3–14. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2023-1-1>. (In Russian)
10. Smirnov Yu.G., Martynova V.Yu., Wei Z., Cheng X., Tikhonravov A.V. Computationally efficient algorithm for designing multilayer dielectric gratings. *Lobachevskii J. Math.*, 2022, vol. 43, no. 5, pp. 1277–1284. <https://doi.org/10.1134/S1995080222080303>.
11. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G., Tikhonravov A.V. A numerical method for the optimization of the diffraction efficiency of thin-layer coatings with diffraction gratings. *Differ. Equations*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 404–413. <https://doi.org/10.1134/S0012266123030114>.
12. Martynova V.Yu., Smirnov Yu.G., Tikhonravov A.V. Optimization of parameters of multilayer diffraction gratings using needle variations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Povolzh. Reg. Fiz.-Mat. Nauki (Univ. Proc. Volga Reg. Phys. Math. Sci.)*, 2022, no. 4, pp. 56–68. <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2022-4-6>. (In Russian)
13. Shestopalov V.P., Sirenko Yu.K. *Dinamicheskaya teoriya reshetok* [Dynamic Theory of Gratings]. Kyiv, Naukova Dumka, 1989. 216 p. (In Russian)
14. Shestopalov V.P., Kirilenko A.A., Masalov S.A., Sirenko Yu.K. *Rezonansnoe rasseyanie voln.* [Resonant Wave Scattering]. Vol. 1: Diffraction gratings. Kyiv, Naukova Dumka, 1986. 231 p. (In Russian)
15. Moharam M.G., Grann E.B., Pommet D.A., Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 1995, vol. 12, no. 5, pp. 1068–1077. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.12.001068>.
16. Popov E. *Gratings: Theory and Numeric Applications*. 2nd revisited ed. Inst. Fresnel, AMU, CNRS, ECM, 2014. 578 p.
17. Gusarova E.V., Martynova V.Yu. Medvedik M.Yu. Calculation of diffraction efficiency in the problem of designing multilevel diffraction gratings. *Numer. Methods Program.*, 2024, vol. 25, no. 3, pp. 336–346. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r326>. (In Russian)
18. Tikhonravov A.V. A method of synthesis of optical coverings which uses the necessary optimality conditions. *Moscow Univ. Phys. Bull.*, 1982, vol. 37, no. 6, pp. 108–110.

Информация об авторах

Юрий Геннадьевич Смирнов, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: *smirnovyug@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

Валерия Юрьевна Мартынова, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет

E-mail: *lynxbax@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9098-8600>

Author Information

Yury G. Smirnov, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Head of Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University

E-mail: *smirnovyug@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9040-628X>

Valeria Yu. Martynova, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematics and Supercomputer Modeling, Penza State University

E-mail: *lynxbax@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9098-8600>

Поступила в редакцию 16.06.2025

Принята к публикации 5.07.2025

Received June 16, 2025

Accepted July 5, 2025