**ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ**
УДК 517.544
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530

# Об одном способе выделения класса задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме

**С.Н. Киясов**

*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия*

*Sergey.Kijasov@kpfu.ru*

**Аннотация**

Задача линейного сопряжения для двумерного кусочно-аналитического вектора сведена к эквивалентной задаче дробно-линейного сопряжения и установлена связь между решениями этих задач. Показано, что при известном частном решении задачи линейного сопряжения или соответствующей задачи дробно-линейного сопряжения каноническая система решений задачи линейного сопряжения может быть записана в замкнутой форме. Указаны соотношения между элементами гельдеровской матрицы-функции задачи линейного сопряжения, при выполнении которых задача дробно-линейного сопряжения имеет рациональное решение, что позволяет записать решение задачи линейного сопряжения в замкнутой форме.

**Ключевые слова:** матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация

**Для цитирования:** *Киясов С.Н.* Об одном способе выделения класса задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимых в замкнутой форме // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 519–530.
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530.

**ORIGINAL ARTICLE**
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530

# A method of defining a class of linear conjugation problems for two-dimensional vector with closed-form solutions

**S.N. Kiyasov**

*Kazan Federal University, Kazan, Russia*

*Sergey.Kijasov@kpfu.ru*

**Abstract**

The problem of linear conjugation for a two-dimensional piecewise analytic vector was reduced to an equivalent problem of fractional linear conjugation, and a connection between their solutions was established. It was shown that, once a particular solution of either problem is known, the canonical system of solutions of the linear conjugation problem can be written in closed form. The relations were specified between the elements of the Hölder matrix-function of the linear conjugation problem under which the fractional linear conjugation problem has a rational solution, thus enabling a closed solution of the linear conjugation problem.

**Keywords:** matrix-function, linear conjugation problem, factorization

**For citation:** Kiyasov S.N. A method of defining a class of linear conjugation problems for two-dimensional vector with closed-form solutions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 519–530.
https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.519-530. (In Russian)

## Введение

Пусть $\Gamma$ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области $D^+$ и $D^-$ $(0 \in D^+,\ \infty \in D^-)$,

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11}(t) & g_{12}(t) \\ g_{21}(t) & g_{22}(t) \end{pmatrix}, \ \ \Delta(t) = \det G(t) \neq 0, \ \ t \in \Gamma, \tag{1}$$

– матрица-функция второго порядка, $H$-непрерывная на $\Gamma$. Однородная задача линейного сопряжения для двумерного вектора состоит в отыскании кусочно-голоморфной вектор-функции $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z))$ с $H$-непрерывными на $\Gamma$ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t), \tag{2}$$

или в скалярной форме – условиями

$$\begin{aligned} w^{1+}(t) &= g_{11}(t)w^{1-}(t) + g_{12}(t)w^{2-}(t), \\ w^{2+}(t) &= g_{21}(t)w^{1-}(t) + g_{22}(t)w^{2-}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Качественная теория задачи (2) в классах гельдеровских функций (причем любой размерности) изложена в монографии [1], а сама задача находит приложения в различных разделах математики и механики, в частности, при изучении ортогональных систем полиномов и рациональных аппроксимаций матриц-функций, рассмотренных, например, в работах [2] и [3]. Однако имеется сравнительно немного примеров матриц-функций, для которых решение задачи (построение ее канонической матрицы ([1], с. 30–31) может быть записано в замкнутой форме. Одним из таких примеров служит решение задачи с треугольной матрицей-функцией второго порядка [4]. В работе [5] предложен конструктивный алгоритм решения задачи линейного сопряжения для мероморфных матриц-функций, в том числе для мероморфных матриц-функций второго порядка.

В работе автора [6] показано, что в случае произвольной размерности $n$ при наличии $n-1$ частного решения задачи линейного сопряжения (2) каноническая система решений задачи может быть построена в замкнутой форме. Суть этого метода состоит в следующем.

Пусть известно $n-1$ решений задачи без конечных полюсов. Тогда, если определитель матрицы-функции, получаемый из прямоугольной матрицы-функции, столбцами которой служат компоненты этих решений, вычеркиванием строки с номером $k$ $(1 \leq k \leq n)$, не обращается в нуль в $D^+ \cup \Gamma$, а определитель матрицы-функции, получаемый вычеркиванием строки с номером $s$ $(1 \leq s \leq n)$, не имеет нулей в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$, то каноническая система решений может быть построена в замкнутой форме. В частности, предложенный метод может найти применение при решении задачи линейного сопряжения с треугольной и мероморфной матрицами-функциями, а также с матрицами-функциями, для которых могут быть найдены частные решения задачи линейного сопряжения.

Отметим, что подобного рода результат, основанный на «операторном подходе» к исследованию задачи, получен в работе [7].

Для двумерной задачи линейного сопряжения соответствующее утверждение работы [6] можно сформулировать следующим образом.

Пусть известно частное решения $\mathbf{w}_1(z)$ задачи (3) без конечных полюсов, одна из компонент которого $w_1^{1+}(z)$ или $w_1^{2+}(z)$ не имеет нулей в $D^+ \cup \Gamma$, а одна из его компонент $w_1^{1-}(z)$ или $w_1^{2-}(z)$ не обращается в нуль в $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$. Тогда каноническая система решений задачи (3) строится в замкнутой форме.

Так, например, если $w_1^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно, то для первой вектор-функции канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z) = (v_1^1(z), v_1^2(z))$ получим на $\Gamma$ представления

$$\begin{gathered}
v_1^{1+} = -w_1^{1+} P\,[K_1] + c w_1^{1+}, \qquad v_1^{1-} = w_1^{1-} Q\,[K_1] + c w_1^{1-}, \\
K_1 = \frac{g_{12} p_1 \Delta^-}{w_1^{1+} w_1^{1-}}, \qquad v_1^{2\pm} = -\frac{p_1 \Delta^\pm - v_1^{1\pm} w_1^{2\pm}}{w_1^{1\pm}},
\end{gathered} \tag{4}$$

в которых $P = (I+S)/2$, $Q = (I-S)/2$ ($I$ – единичный, а $S$ – сингулярный операторы), $\Delta(t) = \det G(t) = \Delta^+(t)/\Delta^-(t)$, $t \in \Gamma$, $p_1(z)$ – неопределенный полином степени, не превосходящей $2l + \varkappa$. Здесь $l$ – порядок решения $\mathbf{w}_1(z)$ на бесконечности (положительный порядок означает порядок полюса), а $\varkappa$ – суммарный индекс матрицы-функции $G(t)$, $c$ – постоянная. Коэффициенты полинома $p_1(z)$ и постоянная $c$ подбираются так, чтобы $\mathbf{v}_1(z)$ имела порядок $-\varkappa_1$ на бесконечности, самый низкий из возможных.

Вторая вектор-функция канонической системы решений $\mathbf{v}_2(z)$ находится как отличная от $\mathbf{v}_1(z)$, умноженной на некоторый полином, и имеющая на бесконечности порядок $-\varkappa_2 = \varkappa_1 - \varkappa$ из аналогичных представлений, в которых $p_1(z)$ – неопределенный полином степени, не превосходящей $l+\varkappa_1$, а $c$ следует считать полиномом, степень которого должна быть такой, чтобы порядок слагаемого $cw_1^{1-}(z)$ на бесконечности был не выше $-\varkappa_2$.

В дальнейшем под решением задачи факторизации в замкнутой форме будем понимать запись решения задачи в интегралах типа Коши, как это принято в случае скалярной задачи Римана.

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение работы [8], поэтому приведем для удобства основные понятия и утверждения последней работы, которые будем использовать далее.

**Определение 1.** Пусть $\mathbf{w}(z) = (w^1(z), w^2(z))$ – кусочно-мероморфное решение задачи (3). Будем называть его решением с парой $(\lambda(t), \mu(t))$, если на $\Gamma$

$$w^{1+}(t)/w^{1-}(t) = \lambda(t), \quad w^{2+}(t)/w^{2-}(t) = \mu(t).$$

Всюду в дальнейшем, чтобы избежать рассмотрения тривиальных случаев, дополнительно предположим, что для этого решения $\lambda(t) \neq 0,\ \infty$ и $\mu(t) \neq 0,\ \infty$ на $\Gamma$. В этих предположениях отношения

$$\Phi^+(t) = w^{2+}(t)/w^{1+}(t), \quad \Phi^-(t) = w^{2-}(t)/w^{1-}(t), \tag{5}$$

как это следует из краевого условия (3), являются предельными значениями на $\Gamma$ кусочно-мероморфного решения $\Phi(z)$ задачи дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}(t)\Phi^+(t) - g_{22}(t)\Phi^-(t) + g_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = g_{21}(t). \tag{6}$$

**Определение 2.** Будем называть кусочно-мероморфное решение $\Phi(z)$ задачи (6) решением с парой $(\lambda, \mu)$, если на $\Gamma$

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \lambda(t), \quad g_{22}(t) + g_{21}(t)/\Phi^-(t) = \mu(t).$$

Очевидно, если $\mathbf{w}(z)$ – решение задачи (3) с парой $(\lambda, \mu)$, то отношения (5) определяют предельные значения на $\Gamma$ решения задачи (6) с той же парой $(\lambda, \mu)$.

Обратно, если $\Phi(z)$ – решение задачи (6) с парой $(\lambda, \mu)$, то, полагая на $\Gamma$

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \quad w^{2\pm}(t) = \Phi^\pm(t)w^{1\pm}(t), \tag{7}$$

получим решение задачи (3) с парой $(\lambda, \mu)$, что следует из (7) и равенства

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)\Phi^-(t) = \frac{\Phi^-(t)}{\Phi^+(t)}\left(g_{22}(t) + \frac{g_{21}(t)}{\Phi^-(t)}\right).$$

## 1. Постановка задачи

Целью работы является получение соотношения между элементами матрицы-функции задачи, при выполнении которых каноническая система решений может быть записана в замкнутой форме.

Ответим сначала на почти очевидный вопрос: «Когда задача дробно-линейного сопряжения (6) может иметь своим частным решением рациональную функцию ($\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z)$)?».

Сформулируем следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для того чтобы задача дробно-линейного сопряжения* (6) *имела своим частным решением рациональную функцию* $R(z)$, *необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одна из определенных на* $\Gamma$ *функций*

$$\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)\pm\sqrt{(g_{22}(t)-g_{11}(t))^2+4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)} \tag{8}$$

$$((g_{22}(t)-g_{11}(t))^2+4g_{12}(t)g_{21}(t)\neq 0,\quad t\in\Gamma)$$

*была равна* $R(t)$, *а при выполнении условия*

$$(g_{22}(t)-g_{11}(t))^2+4g_{12}(t)g_{21}(t)\equiv 0,\quad t\in\Gamma, \tag{9}$$

*имело место тождество*

$$\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)}{2g_{12}(t)}\equiv R(t),\quad t\in\Gamma. \tag{10}$$

*Если эти условия выполнены, то каноническая система решений задачи линейного сопряжения* (3) *может быть построена в замкнутой форме.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть задача дробно-линейного сопряжения (6) имеет своим частным решением рациональную функцию: $\Phi^+(z)=\Phi^-(z)=R(z)$. Тогда из краевого условия (6) получим

$$g_{12}(t)R^2(t)+(g_{22}(t)-g_{11}(t))R(t)-g_{21}(t)\equiv 0,\quad t\in\Gamma.$$

Таким образом, хотя бы одна из функций (8) или функция (10), при выполнении тождества (9), равна $R(t)$.

*Достаточность.* Докажем сначала вторую часть утверждения теоремы 1. Пусть выполнены тождества (9) и (10). Перепишем краевое условие (6) в виде

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)-\frac{2g_{12}(t)}{g_{22}(t)+g_{11}(t)}\left(\Phi^+(t)-\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)}{2g_{12}(t)}\right)\left(\Phi^-(t)-\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)}{2g_{12}(t)}\right),\quad t\in\Gamma,$$

который фактически аналогичен виду параболического дробно-линейного отображения комплексной плоскости с конечной и кратной неподвижной точкой ([9], с. 84). Справедливость этого представления проверяется непосредственно, если принять во внимание тождество (9). Поэтому, если отношение (10) является рациональной функцией, то $\Phi^+(z)=\Phi^-(z)=R(z)$ будет решением задачи (6).

Пусть теперь одна из функций (8) есть рациональная функция. Положим для определенности, что функция

$$\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)+\sqrt{(g_{22}(t)-g_{11}(t))^2+4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)}\equiv R(t),\quad t\in\Gamma.$$

Так как

$$\frac{g_{22}(t)-g_{11}(t)-\sqrt{(g_{22}(t)-g_{11}(t))^2+4g_{12}(t)g_{21}(t)}}{2g_{12}(t)}\equiv -\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)},$$

перепишем краевое условие (6) в виде

$$(\Phi^+(t)-R(t))\left(\Phi^-(t)+\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)}\right)=K(t)(\Phi^-(t)-R(t))\left(\Phi^+(t)+\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)}\right),$$

в котором

$$K(t) = -\frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R^2(t)}\left(\frac{g_{21}(t)}{g_{11}(t)} - R(t)\right) / \left(\frac{g_{21}(t)}{g_{11}(t)} + \frac{g_{21}(t)}{g_{12}(t)R(t)}\right)$$

– аналог гиперболического (эллиптического или локсодромического) дробно-линейного отображения комплексной плоскости с различными конечными неподвижными точками. Справедливость полученного представления также проверяется непосредственно, что и доказывает достаточность первого утверждения теоремы.

Покажем, что каноническая система решений задачи (3) может быть построена в замкнутой форме.

Предположим, что условия теоремы выполнены и определенная в (7) функция

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)R(t) \tag{11}$$

не обращается в нуль и бесконечность на $\Gamma$. Тогда, решив скалярную задачу Римана

$$g_{11}(t) + g_{12}(t)R(t) = w^{1+}(t)/w^{1-}(t), \quad t \in \Gamma,$$

в классе кусочно-голоморфных функций без нулей – каноническая функция задачи ([7], с. 107), получим частное решение задачи линейного сопряжения (3):

$$\mathbf{w}(z) = \left(w^1(z),\, R(z)w^1(z)\right).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $R(z) = p(z)$ – полином. Тогда решение

$$\mathbf{w_1}(z) = \left(w^1(z),\, p(z)w^1(z)\right)$$

не будет иметь конечных полюсов, а первые его компоненты $w_1^{1\pm}(z) = w^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно. Поэтому каноническая система решений может быть построена по формулам (4).

Пусть $R(z) = 1/q(z)$, где $q(z)$ – полином. Тогда, положив $\mathbf{w_1}(z) = q(z)\mathbf{w}(z)$, получим решение задачи (3), равное

$$\mathbf{w_1}(z) = \left(q(z)w^1(z),\, w^1(z)\right),$$

у которого вторые компоненты $w_1^{2\pm}(z) = w^{1\pm}(z)$ аналитичны в конечной части плоскости и не имеют нулей в $D^+ \cup \Gamma$ и $\Gamma \cup D^- \setminus \{\infty\}$ соответственно. Поэтому каноническая система решений также может быть построена по соответствующим формулам (4).

Пусть теперь $R(z) = p(z)/q(z)$, где $p(z)$, $q(z)$ – полиномы, не имеющие общих нулей. В этом случае, также положив $\mathbf{w_1}(z) = q(z)\mathbf{w}(z)$, запишем решение задачи (3) в виде

$$\mathbf{w_1}(z) = \left(q(z)w^1(z),\, p(z)w^1(z)\right),$$

компоненты которого могут обращаться в нуль как на контуре, так и в соответствующих областях комплексной плоскости. Однако в силу условий, наложенных на функцию (11), отношение $g_{12}(t)/q(t)$ остается на $\Gamma$ ограниченным. В этом случае в алгоритм построения канонической системы решений задачи (3) следует внести некоторые изменения. А именно, первую вектор-функцию канонической системы решений следует искать в виде

$$v_1^{1+} = -w^{1+}P\left[K_2\right] + cw^{1+}, \qquad v_1^{1-} = w^{1-}Q\left[K_2\right] + cw^{1-},$$
$$K_2 = \frac{g_{12}p_1\Delta^-}{qw^{1+}w^{1-}}, \qquad v_1^{2\pm} = -\frac{p_1\Delta^{\pm} - pv_1^{1\pm}w^{1\pm}}{qw^{1\pm}},$$

где $c(z)$ – некоторый полином, для которого порядок на бесконечности слагаемого $c(z)w^{1-}(z)$ не должен превосходить порядка решения $\mathbf{w_1}(z)$ в рассмотренном случае. Так, если индекс Коши функции (11) равен $\tilde{\varkappa}$ ($w^{1-}(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$), то степень этого полинома не должна превосходить $-\tilde{\varkappa}+\max(l_1,l_2)$, где $l_1$ и $l_2$ – степени полиномов $p(z)$ и $q(z)$ соответственно. Коэффициенты неопределенных полиномов $p_1(z)$ и $c(z)$ должны быть подобраны, как указано в формуле (4), а также «гасить» нули знаменателей в выражениях для $v_1^{2\pm}(z)$. Вторая вектор-функция канонической системы решений представима аналогичными формулами с учетом пояснений к формуле (4).

В случае, когда функция $g_{11}(t)+g_{12}(t)R(t)$ может иметь нули и особенности на контуре, алгоритм построения канонической системы решений также может быть реализован с привлечением теории краевой задачи Римана в исключительных случаях ([7], с. 130). Теорема доказана. □

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу-функцию

$$G(t)=\begin{pmatrix} g(t) & -\omega(t)/2 \\ \omega(t)/2 & g(t)+\omega(t) \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $g(t)$ и $\omega(t)$ – такие $H$-непрерывные на $\Gamma$ функции, что определитель

$$\Delta(t)=\left(g(t)+\frac{\omega(t)}{2}\right)^2\neq 0,\quad t\in\Gamma.$$

Для этой матрицы-функции выполнены тождества (9) и (10) теоремы 1 с $R(t)\equiv -1$. Поэтому функции $\Phi^+(z)=\Phi^-(z)=-1$ определят частное решение задачи дробно-линейного сопряжения

$$g(t)\Phi^+(t)-(g(t)+\omega(t))\Phi^-(t)-\frac{\omega(t)}{2}\Phi^+(t)\Phi^-(t)=\frac{\omega(t)}{2}.$$

Будем считать, что для функции (11), которая в нашем случае имеет вид

$$g(t)+\frac{\omega(t)}{2} \tag{13}$$

и не обращается в нуль на $\Gamma$, индекс Коши равен $\tilde{\varkappa}$. Обозначив через $w^{\pm}(z)$ каноническую функцию однородной скалярной задачи Римана с коэффициентом (13), получим, что $w^+(z)$ не имеет нулей в $D^+\cup\Gamma$, а $w^-(z)$ не обращается в нуль в $\Gamma\cup D^-\setminus\{\infty\}$ и имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$. Частное решение задачи линейного сопряжения с матрицей-функцией (12), согласно (7), дается формулой

$$\mathbf{w_1}(z)=\left(w^1(z),\,-w^1(z)\right).$$

Первую вектор-функцию канонической системы решений $\mathbf{v}_1(z)=(v_1^1(z),v_1^2(z))$ задачи запишем по формулам (4), в которой положим $p_1(z)\equiv 1,\ c=0$:

$$v_1^{1+}=\frac{w^{1+}}{2}P\left[K_3\right],\qquad v_1^{1-}=-\frac{w^{1-}}{2}Q\left[K_3\right],\qquad K_3=\frac{\omega\Delta^-}{w^{1+}w^{1-}},$$
$$v_1^{2+}=-\frac{\Delta^+}{w^{1+}}-\frac{w^{1+}}{2}P\left[K_3\right],\qquad v_1^{2-}=-\frac{\Delta^-}{w^{1-}}+\frac{w^{1-}}{2}Q\left[K_3\right].$$

Так как $\Delta^-(z)$ имеет на бесконечности порядок $-2\tilde{\varkappa}$, то вектор-функция $\mathbf{v}_1(z)$ имеет на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$, и частный индекс $\varkappa_1$ матрицы-функции (12) равен $\tilde{\varkappa}$. За вторую вектор-функцию $\mathbf{v}_2(z)$ канонической системы решений возьмем ранее полученное решение $\mathbf{w_1}(z)$, также имеющее на бесконечности порядок $-\tilde{\varkappa}$, значит, $\varkappa_2 = \varkappa_1 = \tilde{\varkappa}$.

Проверка того, что матрица, столбцами которой служат компоненты вектор-функций $\mathbf{v}_1(z)$ и $\mathbf{v}_2(z)$, будет канонической матрицей рассмотренной задачи линейного сопряжения, проверяется непосредственно.

Выясним теперь, когда задача дробно-линейного сопряжения (6) может иметь своим частным решением рациональные функции

$$\Phi^+(z) = R(z), \quad \Phi^-(z) = R_1(z). \tag{14}$$

Пусть $R_1(z) = r(z)R(z)$, где $r(z)$ – некоторая рациональная функция. Тогда задача дробно-линейного сопряжения

$$g_{11}(t)\Psi^+(t) - r(t)g_{22}(t)\Psi^-(t) + r(t)g_{12}(t)\Psi^+(t)\Psi^-(t) = g_{21}(t) \tag{15}$$

имеет своим частным решением

$$\Psi^+(z) = \Psi^-(z) = R(z). \tag{16}$$

Поэтому условия существования рационального решения (14) задачи (6) сводятся к условию существования у задачи (15) решения (16). Таким образом, необходимые и достаточные условия существования у задачи (6) решения (14) можно сформулировать в виде условий теоремы 1, в которых элементы $g_{12}(t)$ и $g_{22}(t)$ матрицы-функции $G(t)$ нужно заменить на $r(t)g_{12}(t)$ и $r(t)g_{22}(t)$ соответственно, где $r(z)$ – некоторая рациональная функция.

## 2. Обобщение полученного результата

Остановимся на случае матриц-функций, для которых условия теоремы 1 не выполняются. Рассмотрим матрицу-функцию $G_1(t) = F^+(t)G(t)F^-(t)$, $t \in \Gamma$, где

$$F^+ = \begin{pmatrix} f^+(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F^- = \begin{pmatrix} f^-(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а $f^\pm(t)$ – предельные значения функций, аналитических в соответствующих областях конечной плоскости.

Для матрицы-функции $G_1(t)$ с элементами

$$\tilde{g}_{11}(t) = f^+(t)f^-(t)g_{11}(t), \quad \tilde{g}_{22}(t) = g_{22}(t), \quad \tilde{g}_{12}(t) = f^+(t)g_{12}(t), \quad \tilde{g}_{21}(t) = f^-(t)g_{21}(t)$$

тождество (9) принимает вид

$$g_{11}^2(t)(f^+(t)f^-(t))^2 - 2(g_{11}(t)g_{22}(t) - 2g_{12}(t)g_{21}(t))f^+(t)f^-(t) + g_{22}^2(t) \equiv 0,$$

откуда

$$f^+(t)f^-(t) = \frac{\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}{g_{11}^2(t)}. \tag{17}$$

Рассмотрим задачу дробно-линейного сопряжения

$$\tilde{g}_{11}(t)\Phi^+(t) - \tilde{g}_{22}(t)\Phi^-(t) + \tilde{g}_{12}(t)\Phi^+(t)\Phi^-(t) = \tilde{g}_{21}(t).$$

В силу теоремы 1 (выполнение тождеств (9) и (10)), условием существования у этой задачи решения $\Phi^+(z) = \Phi^-(z) = R(z)$ служит условие

$$\frac{g_{22}(t) - f^+(t)f^-(t)g_{11}(t)}{2f^+(t)g_{12}(t)} = R(t), \quad t \in \Gamma. \tag{18}$$

Перепишем условие (18) в виде краевого условия скалярной задачи Римана для функций $1/f^+(z)$ и $f^-(z)$:

$$\frac{1}{f^+(t)} = \frac{g_{11}(t)}{g_{22}(t)} f^-(t) + 2\frac{R(t)g_{12}(t)}{g_{22}(t)}, \quad t \in \Gamma.$$

Потребуем, чтобы элементы $g_{ij}(t)$, $i,j = 1,2$, матрицы-функции (1) не имели нулей на $\Gamma$ так, что представления $g_{11}(t) = g_{11}^+(t)g_{11}^-(t)$ и $g_{22}(t) = g_{22}^+(t)g_{22}^-(t)$ есть факторизации на $\Gamma$ этих скалярных функций. Тогда кусочно-мероморфное решение задачи (18) (его предельные значения на контуре) запишем по формулам

$$\begin{gathered} f^+(t) = \frac{g_{22}^+(t)}{2g_{11}^+(t)\left(P\left[K_4(t)\right] + r(t)\right)}, \qquad f^-(t) = \frac{2g_{22}^-(t)\left(-Q\left[K_4(t)\right] + r(t)\right)}{g_{11}^-(t)}, \\ K_4(t) = \frac{R(t)g_{12}(t)}{g_{11}^+(t)g_{22}^-(t)}, \end{gathered} \tag{19}$$

в которых $r(t)$ – рациональная функция. Если положить $r(t) \equiv c$, где $c$ – постоянная, подобранная так, чтобы аналитические продолжения выражений, стоящих в круглых скобках (19), не имели нулей на $\Gamma$ и в соответствующих областях, получим кусочно-голоморфное решение без конечных нулей. Этого всегда можно добиться в силу ограниченности операторов $P$ и $Q$.

Подставив функции (19) в (17), придем к необходимости выполнения на $\Gamma$ хотя бы одного из тождеств

$$\begin{gathered} g_{11}(t)g_{22}(t)\left(Q\left[K(t)\right] - r(t)\right) + \\ + \left(P\left[K(t)\right] + r(t)\right)\left(\Delta(t) - g_{12}(t)g_{21}(t) \pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}\right) \equiv 0 \end{gathered}$$

или тождеств

$$\begin{gathered} \frac{g_{12}(t)(\Delta(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}{g_{11}^+(t)g_{22}^-(t)} R(t) + \\ + \left(-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}\right) S\left[K(t)\right] \equiv \\ \equiv -2r(t)\left(-g_{12}(t)g_{21}(t) \pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}\right), \quad t \in \Gamma. \end{gathered} \tag{20}$$

На тождества (20) можно смотреть как на сингулярные интегральные уравнения вида

$$a(t)\varphi(t) + b(t)S[k(t)\varphi(t)] = 2r(t)b(t) \tag{21}$$

с коэффициентами, $H$-непрерывными на $\Gamma$, $r(t)$ – рациональная функция (в нашем случае $-r(t)$), хотя бы одно из которых имеет своим решением рациональную функцию $R(t)$.

Получим сначала условия, при выполнении которых решение этого уравнения будет функцией, мероморфно продолжимой в область $D^+$ или в область $D^-$. Введя на $\Gamma$ новые неизвестные функции $\varphi^+(t) = P[k(t)\varphi(t)] - r(t)$ и $\varphi^-(t) = Q[k(t)\varphi(t)] + r(t)$, мероморфно продолжимые в соответствующие области, придем к скалярной задаче линейного сопряжения

$$\varphi^+(t) = -\frac{a(t) - k(t)b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}\varphi^-(t), \quad t \in \Gamma. \tag{22}$$

На основе решения этой задачи в классе кусочно-мероморфных функций решение уравнения (21) определим по любой из формул

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^+(t) + \varphi^-(t)}{k(t)} = \frac{2b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}\varphi^-(t) = -\frac{2b(t)}{a(t) - k(t)b(t)}\varphi^+(t), \quad t \in \Gamma. \tag{23}$$

Значит, для мероморфной продолжимости решения уравнения в области $D^+$ или $D^-$ необходимо и достаточно такой продолжимости для отношения

$$\frac{b(t)}{a(t) - k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \tag{24}$$

или

$$\frac{b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \tag{25}$$

соответственно.

Вернемся теперь к поставленному вопросу. Легко видеть, что решение $\varphi(z)$ задачи линейного сопряжения (22) будет иметь рациональную компоненту $\varphi^+(z)$ или $\varphi^-(z)$, если коэффициент этой задачи

$$G(t) = -\frac{a(t) - k(t)b(t)}{a(t) + k(t)b(t)}, \quad t \in \Gamma, \tag{26}$$

будет функцией, мероморфно продолжимой в области $D^-$ или $D^+$ соответственно. Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Решение уравнения* (21) $(a(t),\ b(t),\ k(t) \in H(\Gamma),\ a(t) \pm k(t)b(t) \neq 0)$ *будет рациональной функцией, если выполнено одно из следующих условий*:

*A. функция* (26) *мероморфно продолжима в область* $D^+$, *а отношение* (25) *– рациональная функция*;

*B. функция* (26) *мероморфно продолжима в область* $D^-$, *а отношение* (24) *– рациональная функция.*

Применив эту лемму к уравнению (20), в котором $r(t) \equiv -c$ – постоянная, подобранная так, как указано выше, рациональное решение этого уравнения получим по соответствующим формулам (23), а функции (19) в этом случае будут кусочно-голоморфными в конечной части плоскости. Тогда, согласно утверждению теоремы 1, каноническая система решений матрицы-функции $G_1(t)$, значит, и матрицы-функции $G(t)$ может быть найдена в замкнутой форме.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть для $H$-непрерывной на простом гладком замкнутом контуре $\Gamma$ матрицы-функции* (1) *элементы $g_{11}(t)$ и $g_{22}(t)$ не обращаются в нуль, а одна из функций*

$$\frac{g_{11}(t)g_{22}(t)}{\Delta(t)-g_{12}(t)g_{21}(t)\pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}$$

*ограничена на* $\Gamma$.

*Тогда, если соответствующая функция мероморфно продолжима в область $D^+$ и для нее отношение*

$$\frac{g_{11}^{+}(t)g_{22}^{-}(t)(-g_{12}(t)g_{21}(t)\pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}{g_{12}(t)(\Delta(t)-g_{12}(t)g_{21}(t)\pm 2i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)})}$$

*– рациональная функция, либо эта функция мероморфно продолжима в область $D^-$, а отношение*

$$\frac{-g_{12}(t)g_{21}(t)\pm i\sqrt{g_{12}(t)g_{21}(t)\Delta(t)}}{g_{12}(t)g_{11}^{-}(t)g_{22}^{+}(t)}$$

*– рациональная функция, то каноническая система решений задачи линейного сопряжения* (3) *может быть построена в замкнутой форме.*

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Conflicts of Interest.** The author declares no conflicts of interest.

## Литература

1. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 380 с.

2. *Deift P.* Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach. Ser.: Courant Lecture Notes. V. 3. Am. Math. Soc., Courant Inst. Math. Sci., 2000. 261 p.

3. *Aptekarev A.I., Van Assche W.* Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight // J. Approximation Theory. 2004. V. 129, No 2. P. 129–166. https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.06.001.

4. *Чеботарев Г.Н.* Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // УМН. 1956. Т. 11, № 3. С. 199–202.

5. *Адуков В.М.* Факторизация Винера−Хопфа мероморфных матриц-функций // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, № 1. С. 54–74.

6. *Киясов С.Н.* Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 369–377.

7. *Câmara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M.* One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols // Linear Algebra Appl. 2014. V. 459. P. 58–82. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.038.

8. *Киясов С.Н.* Некоторые классы задач линейного сопряжения для двумерного вектора, разрешимые в замкнутой форме // Изв. вузов. Матем. 2013. № 1. С. 3–20.

9. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1969. 240 с.

## References

1. Vekua N.P. *Sistemy singulyarnykh integral'nykh uravnenii* [Systems of Singular Integral Equations]. Moscow, Nauka, 1970. 380 p. (In Russian)

2. Deift P. *Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann–Hilbert Approach.* Ser.: Courant Lecture Notes. Vol. 3. Am. Math. Soc., Courant Inst. Math. Sci., 2000. 261 p.

3. Aptekarev A.I., Van Assche W. Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight. *J. Approximation Theory*, 2004, vol. 129, no. 2, pp. 129–166. https://doi.org/10.1016/j.jat.2004.06.001.

4. Chebotarev G.N. Partial indices for the Riemann boundary-problem with a triangular matrix of second order. *Usp. Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 3, pp. 199–202. (In Russian)

5. Adukov V.M. Wiener–Hopf factorization of meromorphic matrix functions. *Algebra Anal.*, 1992, vol. 4, no. 1, pp. 54–74. (In Russian)

6. Kiyasov S.N. Contribution to the general linear conjugation problem for a piecewise analytic vector. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 288–294. https://doi.org/10.1134/S003744661802012X.

7. Câmara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M. One sided invertibility of matrices over commutative rings, corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols. *Linear Algebra Its Appl.*, 2014, vol. 459, pp. 58–82. https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.06.038.

8. Kiyasov S.N. Certain classes of problems on linear conjugation for a two-dimensional vector admitting explicit solutions. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 1, pp. 1–16. https://doi.org/10.3103/S1066369X13010015.

9. Bitsadze A.V. *Osnovy teorii analiticheskikh funktsii kompleksnogo peremennogo* [Fundamentals of the Theory of Analytical Functions of Complex Variable]. Moscow, Nauka, 1969. 240 p. (In Russian)

## Информация об авторах

**Сергей Николаевич Киясов**, доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Теории функций и приближений» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: *Sergey.Kijasov@kpfu.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8352-3207

## Author Information

**Sergey N. Kiyasov**, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Theory of Functions and Approximations, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

E-mail: *Sergey.Kijasov@kpfu.ru*

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8352-3207

Поступила в редакцию 14.04.2025
Принята к публикации 5.07.2025

Received April 14, 2025
Accepted July 5, 2025