

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.172.1: 519.217.8

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>

Реализация генератора дискретной случайной величины на основе d -арного дерева

В.М. Захаров, С.В. Шалагин ✉

*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева – КАИ, г. Казань, Россия*

✉ sshalagin@mail.ru

Аннотация

Предложен метод расчета закона распределения дискретной случайной величины (ДСВ) при использовании d -арного дерева. Количество n листьев дерева определяется по количеству элементов закона ДСВ, а количество остальных его вершин отражает генераторы ДСВ с законом, включающим d элементов (далее – d -ГДСВ). Варьирование закона распределения ДСВ через обнуление одного из его элементов сводится к пересчету законов d -ГДСВ, количество которых растет логарифмически в зависимости от значения n .

Ключевые слова: дискретная случайная величина, модель, дерево, метод пересчета закона распределения, обнуление элемента

Для цитирования: Захаров В.М., Шалагин С.В. Реализация генератора дискретной случайной величины на основе d -арного дерева // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 507–518. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>

Implementing a random variable generator based on a d -ary tree

V.M. Zakharov, S.V. Shalagin ✉

*Kazan National Research Technical University
named after A.N. Tupolev – KAI, Kazan, Russia*✉ sshalagin@mail.ru

Abstract

A method was proposed for calculating the probability distribution of a discrete random variable (DRV) using a d -ary tree. The tree has n leaves, which is equivalent to the number of elements in the DRV probability distribution, and the remaining vertices represent the DRV generators with the probability distribution including d elements (d -DRV). Variation in the DRV probability distribution by zeroing one of its elements reduces to the recalculation of the d -DRV probability distributions, the number of which increases logarithmically with respect to the value of n .

Keywords: discrete random variable, model, tree, method of probability distribution recalculation, zeroing of element

For citation: Zakharov V.M., Shalagin S.V. Implementing a random variable generator based on a d -ary tree. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 507–518. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.507-518>. (In Russian)

Введение

Методы, алгоритмы, аппаратно-программные средства для реализации генераторов дискретной случайной величины (ГДСВ) представлены в большом числе публикаций, в том числе в ряде монографий [1–20], содержащих обзоры результатов по задаче синтеза ГДСВ и отражающих решения широкого круга задач на основе разнообразных вероятностных моделей статистического моделирования и теории вероятностных автоматов, в частности, на основе урновых моделей случайного выбора без возвращения [21], вероятностных автоматов с переменной структурой [22], эйлеровых стохастических матриц [23], вероятностной модели решения задачи коммивояжера [24–26] и др. (см. также [18, 19, 27]). Особенностью отмеченных моделей является необходимость изменять закон вероятностного распределения дискретной случайной величины (ДСВ) в применяемой модели ГДСВ после получения очередного значения случайной величины, т. е. производить пересчет закона с сохранением стохастичности. Для решения этой задачи получил развитие подход (применяемый и в моделях, отмеченных выше), основанный на алгоритме [5, 22] поэлементного последовательного изменения закона ДСВ. При применении названного метода

пересчет закона ДСВ в режиме реального времени с большим количеством элементов n является достаточно трудоемкой задачей [28]. В связи с этим актуальной задачей является уменьшение временной сложности алгоритма пересчета закона ДСВ.

Цель работы – представить модель ГДСВ и метод пересчета закона распределения ДСВ на основе предлагаемой модели, позволяющие уменьшить время пересчета закона с применением возможности распараллеливания процесса пересчета.

1. Постановка задачи

Закон распределения ДСВ задан в виде

$$(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_n, p_n), \quad (1)$$

где ДСВ (далее обозначаемая как X) принимает значение x_i с вероятностью p_i , $i = \overline{1, n}$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $|X| = n$.

Пусть в применяемой модели ГДСВ после получения очередного значения случайной величины x_z в (1) происходит обнуление вероятности p_z , $z \in [1, n]$, и длина l последовательности значений ДСВ, формируемых на выходе модели, может быть задана в пределах $1 \leq l \leq n$.

В соответствии с [28] введем следующие определения для d -арного дерева T , упорядоченного слева направо.

Определение 1. Для дерева T , имеющего n листьев, существует множество NL узлов, не являющихся листьями, мощности $|NL| = a = \lceil \frac{(n-1)}{(d-1)} \rceil$.

Определение 2. Для каждого узла $v_k \in NL$, $k = \overline{1, a}$, дерева T существует ровно d смежных потомков, которые обозначим w_j , $j = \overline{1, d}$.

Каждому из листьев l_i дерева T поставим в однозначное соответствие элементы x_i и p_i закона (1) для X , $i = \overline{1, n}$. Каждому из узлов $v_k \in NL$, $k = \overline{1, a}$, поставим в соответствие генератор ДСВ на d элементов каждый (d -ГДСВ), $d < n$, с заданным законом распределения. Тогда предложенную модель ГДСВ можно рассматривать как систему параллельно функционирующих d -ГДСВ, $d < n$. Определим порядок задания законов для каждого из d -ГДСВ в соответствии с (1).

Обозначим через $M_k^{(j)}$ множество листьев, которые являются потомками узлов v_k и w_j . При этом узел v_k является смежным узлом-предком для w_j . Множество листьев, являющихся потомками узла v_k , обозначим M_k . При этом мощность этого множества $|M_k| = \sum_{j=1}^d |M_k^{(j)}|$. Согласно определению дерева T множества $M_k^{(j)}$ являются непересекающимися для заданных значений $k = \overline{1, a}$ и $j = \overline{1, d}$.

Замечание 1. Корневой узел (корень) дерева T обозначим v_1 ; согласно определению 1 $|M_1| = n$.

Введем следующие определения.

Определение 3. Величина $s_k = \sum_{i: l_i \in M_k} p_i$ есть сумма вероятностей, соответствующих листьям, являющимся потомками узла v_k дерева T ; для корня дерева T значение $s_0 = 1$.

Определение 4. Величина $s_k^{(j)} = \sum_{i: l_i \in M_k^{(j)}} p_i$ есть сумма вероятностей, соответствующих листьям, являющимся потомками узлов v_k и w_j дерева T .

С использованием представленных определений может быть доказана

Теорема. Для d -ГДСВ закон распределения $\{p_{kj}\}$, $\sum_{i=1}^d p_{ki} = 1$, которому соответствует узел v_k дерева T , определен по формуле

$$p_{kj} = s_k^{(j)} / s_k. \quad (2)$$

Пусть для закона (1) распределения величины X обнуляется вероятность p_z генерирования произвольного элемента x_z . Этому элементу соответствует лист l_z дерева T . От листа l_z к корню T ведет единственный путь через множество узлов, которое обозначим B_z , $|B_z| = h$. Величина h есть длина пути от корня дерева T к листу l_z , определенному на основании вычисления значений d -ГДСВ в соответствии с (2), $\lceil \log_d n \rceil - 1 \leq h \leq \lceil \log_d n \rceil$. На основе определений 3 и 4 из теоремы вытекает следующее

Следствие. Для d -ГДСВ закон распределения $\{p'_{kj}\}$, $\sum_{i=1}^d p'_{ki} = 1$, которому соответствуют узел v_k и смежный узел-потомок w_t дерева T , $v_k, w_t \in B_z$, варьируется при обнулении значения p_z в соответствии с (2):

$$p'_{kt} = \frac{(s_k^{(t)} - p_z)}{(s_k - p_z)}; \quad \text{и если } j \neq t, \text{ то } p'_{kj} = \frac{s_k^{(j)}}{(s_k - p_z)}. \quad (3)$$

Замечание 2. Если после обнуления вероятности генерирования элемента x_z закона (1) для узла v_k величина $s_k - p_z = 0$, то d -ГДСВ, соответствующий узлу v_k , больше не требуется для вычисления закона распределения величины X с обнуленным элементом p_z , так как вероятность генерирования каждого из значений X , соответствующих листьям-потомкам узла v_k , будет равна нулю.

Определим закон ДСВ вида (1), (x_i, q_i) , $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, $l = 1$, после обнуления значения p_z , т. е. обновленный закон ДСВ при заданном $l = 1$. Обозначим через B_i , $|B_i| = h$, множество узлов, через которое ведет единственный путь от листа l_i к корню T . Тогда

$$q_i = \prod p'_{kt}, \quad (4)$$

где p'_{kt} определена согласно (3), w_t – смежный узел-потомок v_k , $w_t, v_k \in B_i$, $i = \overline{1, n}$.

Замечание 3. Формула (4) применима к элементам закона (1) для $q_i \neq 0$; обнуление элементов q_i , $i = \overline{1, n}$, допустимо проводить при условии, что в обновленном законе ДСВ вида (1) $Q(q_i \neq 0) \geq 3$.

Рассмотрим метод варьирования закона X вида (1) при обнулении вероятности генерирования одного из его элементов (далее – Метод).

2. Описание этапов Метода

Метод варьирования закона X вида (1) при обнулении вероятности генерирования заданного элемента x_z , который обоснован теоремой и следствием из нее, включает шесть этапов (см. ниже). Этапы 1–3 носят подготовительный характер: определяются дерево T и множества NL , $|NL| = a$ d -ГДСВ, задается величина $l = 1$. На этапах 4–6 выполняется варьирование закона для подмножества d -ГДСВ B_z , $|B_z| = h$, в соответствии с обнуляемой вероятностью p_z появления значения x_z .

Этап 1. На основе (1) задаем дерево T с множеством узлов-листьев M_1 , $|M_1| = n$, и множеством узлов NL , $a = |NL| = \lceil \frac{(n-1)}{d-1} \rceil$, не являющихся листьями.

Этап 2. Для каждого из узлов v_k , $v_k \in NL$, задаем множества M_k , а для v_k – d его смежных потомков (СмП) w_j ; далее задаем множества $M_k^{(j)}$ как непересекающиеся подмножества M_k , $k = \overline{1, a}$, $j = \overline{1, d}$.

Этап 3. Для каждого из узлов $v_k \in NL$ задаем закон распределения d -ГДСВ – $\{p_{kj}\}$, $\sum_{j=1}^d p_{kj} = 1$, – в соответствии с (2).

Этап 4. Определяем элемент x_z , вероятность p_z появления которого обнуляется, и соответствующий ему лист l_z .

Этап 5. Определяем элементы множества B_z .

Этап 6. Для каждого из узлов v_k , $k = \overline{1, a}$, и $w_t \in B_z$, задаем новый закон распределения d -ГДСВ – $\{p'_{kj}\}$, $\sum_{j=1}^d p'_{kj} = 1$, $j = \overline{1, d}$, – в соответствии с (3).

Отметим, что после выполнения этапа 3 генерирование X в соответствии с законом (1) сводится к генерированию a значений d -ГДСВ в соответствии с (2), h из которых определяют, какое именно значение X будет сгенерировано.

Пример. Пусть задан закон распределения величины X в виде $(x_1, \frac{3}{48})$, $(x_2, \frac{2}{48})$, $(x_3, \frac{7}{48})$, $(x_4, \frac{2}{48})$, $(x_5, \frac{8}{48})$, $(x_6, \frac{5}{48})$, $(x_7, \frac{9}{48})$, $(x_8, \frac{1}{48})$, $(x_9, \frac{4}{48})$, $(x_{10}, \frac{3}{48})$, $(x_{11}, \frac{2}{48})$, $(x_{12}, \frac{2}{48})$, т. е. $n = 12$. Примем $d = 3$. Выполним этапы 1–3 предложенного Метода.

Этап 1. Определим дерево T , для которого $|M_1| = 12$ и $a = |NL| = 3$.

Этап 2. Определим множества листьев, являющихся потомками для каждого из узлов NL . Для корневого узла v_1 дерева T потомками являются все листья из множества $M_1 = \{x_1 \dots x_{12}\}$; потомками для СмП узла v_1 , т. е. для узлов v_2 и v_3 , являются листья из соответствующих множеств $M_1^{(2)} = \{x_1 \dots x_9\}$ и $M_1^{(3)} = \{x_{10} x_{11} x_{12}\}$. При этом $M_1^{(4)} = \{\emptyset\}$ – пустое множество. Потомками v_2 являются листья из множества $M_2 = \{x_1 \dots x_9\}$, а потомками для СмП узла v_2 , т. е. для узлов v_5 , v_6 и v_7 , – листья из соответствующих множеств $M_2^{(5)} = \{x_1 x_2 x_3\}$, $M_2^{(6)} = \{x_4 x_5 x_6\}$ и $M_2^{(7)} = \{x_7 x_8 x_9\}$. СмП узла v_3 являются листья из множества $M_3 = \{x_{10} x_{11} x_{12}\}$. СмП узлов v_5 , v_6 и v_7 являются листья из множеств $M_5 = \{x_1 x_2 x_3\}$, $M_6 = \{x_4 x_5 x_6\}$ и $M_7 = \{x_7 x_8 x_9\}$ соответственно.

Этап 3. Для корневого узла v_1 дерева T имеем

$$s_1 = 1, \quad s_1^{(2)} = \sum_{i: l_i \in M_1^{(2)}} p_i = \frac{41}{48}, \quad s_1^{(3)} = \sum_{i: l_i \in M_1^{(3)}} p_i = \frac{7}{48}, \quad s_1^{(4)} = 0,$$

т. е. закон для 3-ГДСВ определен в соответствии с (2) как $\left\{\frac{41}{48} \frac{7}{48} 0\right\}$; для узла v_2 получим

$$s_2 = \frac{41}{48}, \quad s_2^{(5)} = \frac{12}{48}, \quad s_2^{(6)} = \frac{15}{48}, \quad s_2^{(7)} = \frac{14}{48},$$

закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{12}{48} \frac{15}{48} \frac{14}{48}\right\}$; для узла v_3 имеем $s_3 = \frac{7}{48}$, его СмП являются листьями, закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{3}{7} \frac{2}{7} \frac{2}{7}\right\}$; узел v_4 пустой; для узла v_5 имеем $s_5 = \frac{12}{41}$, его СмП являются листьями, закон для 3-ГДСВ в соответствии с (2) определим как $\left\{\frac{3}{12} \frac{2}{12} \frac{7}{12}\right\}$; для узла v_6 найдем $s_6 = \frac{15}{41}$, его СмП являются листьями, закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{2}{15} \frac{8}{15} \frac{5}{15}\right\}$; для узла v_7 найдем $s_6 = \frac{14}{41}$, его СмП являются листьями, закон для 3-ГДСВ определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{9}{14} \frac{1}{14} \frac{4}{14}\right\}$.

Этап 4. Пусть требуется обнулить вероятность $p_3 = \frac{7}{48}$ появления элемента x_3 , т. е. $z = 3$; ему соответствует лист l_3 T .

Этап 5. Множеству B_z принадлежат узлы v_1 , v_2 и v_5 .

Этап 6. Согласно (3) новый закон распределения для 3-ГДСВ, соответствующего v_1 , имеет вид $\left\{\frac{34}{41} \frac{7}{41} 0\right\}$, т. к. новые значения

$$s_1 = 1 - p_3 = \frac{41}{48}, \quad s_1^{(2)} = \sum_{i: l_i \in M_1^{(2)}} p_i = \frac{34}{41}, \quad s_1^{(3)} = \sum_{i: l_i \in M_1^{(3)}} p_i = \frac{7}{41};$$

новый закон для 3-ГДСВ, соответствующего v_2 для новых значений $s_2 = \frac{41}{48} - p_3 = \frac{34}{48}$, $s_2^{(5)} = \frac{5}{34}$, $s_2^{(6)} = \frac{15}{34}$, $s_2^{(7)} = \frac{14}{34}$, определен в соответствии с (2) как $\left\{\frac{5}{34} \frac{15}{34} \frac{14}{34}\right\}$; новый закон для 3-ГДСВ, соответствующего v_5 для новых значений $s_5 = \frac{12}{48} - p_3 = \frac{5}{48}$, определим в соответствии с (2) как $\left\{\frac{3}{5} \frac{2}{5} 0\right\}$.

Определим обновленный закон для ДСВ вида (1). По определению $q_3 = 0$. Согласно (4) вычислим значения

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{3}{41}, & q_2 &= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{2}{41}, & q_4 &= \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{2}{41}, \\ q_5 &= \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{8}{41}, & q_6 &= \frac{5}{15} \cdot \frac{15}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{5}{41}, & q_7 &= \frac{9}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{9}{41}, \\ q_8 &= \frac{1}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{1}{41}, & q_9 &= \frac{4}{14} \cdot \frac{14}{34} \cdot \frac{34}{41} = \frac{4}{41}, & q_{10} &= \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}, \\ q_{11} &= \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}, & q_{12} &= \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{41} = \frac{2}{41}. \end{aligned}$$

3. Анализ сложности Метода

Оценим сложность генерирования ДСВ вида (1) после выполнения этапов 1–3 предложенного Метода. Альтернативный способ реализации генератора ДСВ, имеющего n различных значений, состоит в выполнении $(n - 1)$ операций сравнения. Они реализуются

при использовании C компараторов, $1 \leq C \leq (n-1)$, за время $t_A = \left\lceil \frac{(n-1)}{C} \right\rceil$, тогда как обнуление вероятности p_z появления величины x_z потребует пересчета $(n-2)$ значений вероятностей p_i , $i = \overline{1, z-1, z+1, n}$, в векторе вида (1). Эта величина имеет порядок $O(n)$.

Для предложенного Метода после выполнения этапов 1–3 требуется реализовать операции сравнения либо последовательно, либо параллельно. В первом случае для h d -ГДСВ, соответствующих пути через узлы дерева T от корня до листа, последовательно выполним по $(d-1)$ операций сравнения h раз, всего $h(d-1)$ операций. Во втором случае параллельно реализуем $(d-1)$ операций сравнения a раз, $a = \left\lceil \frac{(n-1)}{d-1} \right\rceil$. Это требует примерно $(n-1)$ операций сравнения, как и в альтернативном способе, при использовании C компараторов, $1 \leq C \leq (n-1)$, за время, равное

$$t_1 = \left\lceil (d-1) \frac{\left\lceil \frac{n-1}{d-1} \right\rceil}{C} \right\rceil.$$

На этапах 3–6 требуется пересчет законов распределения для h d -ГДСВ, т. е. для $(d-2)$ значений вероятностей h раз, $\left\lceil \log_d n \right\rceil - 1 \leq h \leq \left\lceil \log_d n \right\rceil$. Путь из корня дерева T в лист l_z при обнулении величины p_z известен, поэтому пересчет $(d-2)h$ значений реализуем параллельно. Данная величина имеет порядок $O(\log_d n)$.

В результате получим, что времена генерирования ДСВ X предложенным (t_1) и альтернативным (t_A) методами практически не отличаются.

Пересчет закона распределения ДСВ X при обнулении одного из его элементов при использовании этапов 4–6 предложенного Метода сводится к пересчету значений элементов h d -ГДСВ, количество которых имеет порядок $O(\log_d n)$, если не требуется отображать обновленный закон ДСВ (1) в явном виде, в то время как альтернативный метод требует пересчета порядка $O(n)$ элементов.

Заключение

Решена задача снижения сложности пересчета закона ДСВ, имеющей n значений. Суть метода в том, что генератор ДСВ представим системой из $a = \left\lceil \frac{(n-1)}{d-1} \right\rceil$ d -ГДСВ. При обнулении вероятности появления одного из заданных значений ДСВ, x_z , требуется выполнить пересчет законов для h , $\left\lceil \log_d n \right\rceil - 1 \leq h \leq \left\lceil \log_d n \right\rceil$, d -ГДСВ. Как на этапах представления ДСВ в виде d -арного дерева, так и на этапах пересчета закона ДСВ процесс получения законов для d -ГДСВ может быть выполнен параллельно. Это открывает возможности для распределенной реализации этапов Метода на многопроцессорных вычислительных системах.

Наличие большого количества всевозможных значений n ДСВ при фиксированном значении d позволяет уменьшить порядок количества пересчитываемых элементов с $O(n)$ до $O(\log_d n)$ при условии, что не требуется отображать обновленный закон ДСВ в явном виде.

Предложенные модель и метод применимы при решении задач, требующих пересчета закона распределения ДСВ без его отображения в явном виде в режиме реального времени, таких как генерирование сложных цепей Маркова [27], решение задачи коммивояжера [24] и т. п.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Закревский А.Д.* Реализация случайных событий с заданной вероятностью // Тр. СФТИ. 1965. Вып. 47. С. 56–59.
2. *Бухараев Р.Г.* Автоматное преобразование вероятностных последовательностей // Вероятн. методы и киберн. 1966. Вып. 1. С. 24–33.
3. *Ченцов В.М.* Об одном методе синтеза автономного стохастического автомата // Кибернетика. 1968. № 3. С. 32–35.
4. *Бухараев Р.Г.* Вероятностные автоматы. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1970. 188 с.
5. *Поспелов Д.А.* Вероятностные автоматы. М.: Энергия, 1970. 88 с.
6. *Поляк Ю.Г.* Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971. 400 с.
7. *Гладкий В.С.* Вероятностные вычислительные модели. М.: Наука, 1973. 300 с.
8. *Walker A.I.* An efficient method for generating discrete random variables with general distributions // ACM Trans. Math. Software. 1977. V. 3, No 3. P. 253–256.
<https://doi.org/10.1145/355744.355749>.
9. *Федоров Р.Ф., Яковлев В.В., Добрис Г.В.* Стохастические преобразователи информации. Л.: Машиностроение, 1978. 304 с.
10. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А., Меньков А.В.* Вычислительная техника для статистического моделирования. М.: Сов. радио, 1978. 312 с.
11. *Бухараев Р.Г.* Основы теории вероятностных автоматов. М.: Наука, 1985. 287 с.
12. *Походзей Б.Б.* Сложность табличных методов моделирования конечных дискретных распределений // Изв. вузов. Матем. 1985. № 7. С. 45–50.
13. *Левин Б.Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
14. Вероятностные автоматы и их приложения (Докл. симпоз., 6–8 июня 1983 г. / Сост. В.М. Захаров). Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 212 с.
15. *Четвериков В.Н., Баканович Э.А.* Стохастические вычислительные устройства систем моделирования. М.: Машиностроение, 1989. 272 с.
16. *Дородницын А.А. и др.* Словарь по кибернетике. Под ред. В.С. Михалевича. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Гл. ред. Укр. сов. энцикл., 1989. 751 с.
17. *Захаров В.М., Шалагин С.В.* О развитии аппаратных средств статистического моделирования // Тр. SORUCOM – 2014. III Международн. науч.-практ. конф. «Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и в странах бывшего СССР: история и перспективы». Казань, 13–17 окт. 2014 г. С. 103–108. URL: <https://computer-museum.ru/articles/materialy-mezhdunarodnoy-konferentsii-sorucum-2014/490/>.
18. *Шалагин С.В.* Реализация цифровых устройств в архитектуре ПЛИС/FPGA при использовании распределенных вычислений в полях Галуа: монография. Казань: Изд-во КНИТУ – КАИ, 2016. 228 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/149577>.

19. Захаров В.М., Шалагин С.В., Эминов Б.Ф. Автоматные марковские модели над конечным полем: монография. Казань: Спец. фонд упр. целев. капитал. для развит. КНИТУ – КАИ, 2022. 328 с. URL: <https://e.lanbook.com/book/366542>.
20. Захаров В.М., Шалагин С.В., Гумиров А.И. Генератор дискретной случайной величины с заданным законом распределения в архитектуре ПЛИС/FPGA // Вестн. ДГУ. Сер. 1: Естеств. науки. 2023. Т. 38, № 3. С. 28–33. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33>.
21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1967. 499 с.
22. Воронцова И.П. Алгоритмы изменения переходных вероятностей стохастических автоматов // Пробл. передачи информ. 1965. Т. 1, вып. 3. С. 122–126. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/ppi756>.
23. Zacharov V.M., Kuznetsov S.E. Complexity of the problem of approximation of stochastic matrix by rational elements // Budach L., Bukharajev R.G., Lupanov O.B. (Eds.) Fundamentals of Computation Theory: International Conference FCT'87 Kazan, USSR, June 22–26, 1987. Proceedings. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. V. 278. Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. P. 483–487. https://doi.org/10.1007/3-540-18740-5_106.
24. Шалагин С.В. Решение задачи коммивояжера методом статистических испытаний при использовании сложных цепей Маркова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2024. Т. 166, кн. 4. С. 639–650. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650>.
25. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автомат. и телемех. 1989. № 11. С. 3–26. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/at6463>.
26. Quang T.L., Aibin M. Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms. Baeldung. 2024. URL: <https://www.baeldung.com/cs/tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms>.
27. Альпин Ю.А., Захаров В.М. Теоретико-автоматный метод описания и моделирования случайных процессов // Вероятн. методы и киберн. 1983. Вып. 19. С. 10–16. URL: <https://eudml.org/doc/69222>.
28. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. Пер. с англ. А.О. Слисенко; под ред. Ю.В. Матиясевича. М.: Мир, 1979. 536 с.

References

1. Zakrevskii A.D. Implementation of random events with a given probability. *Tr. SFTI*, 1965, vol. 47, pp. 56–59. (In Russian)
2. Bukharaev R.G. Automaton conversion of probability sequences. *Veroyatn. Metody Kibern.*, 1966, vol. 1, pp. 24–33. (In Russian)
3. Chentsov V.M. A method of synthesizing an autonomous stochastic automaton. *Cybernetics*, 1968, vol. 4, no. 3, pp. 27–30. <https://doi.org/10.1007/BF01073919>.
4. Bukharaev R.G. *Veroyatnostnye avtomaty* [Probabilistic Automata]. Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1970. 188 p. (In Russian)
5. Pospelov D.A. *Veroyatnostnye avtomaty* [Probabilistic Automata]. Moscow, Energiya, 1970. 88 p. (In Russian)

6. Pollyak Yu.G. *Veroyatnostnoe modelirovanie na elektronnykh vychislitelnykh mashinakh* [Probabilistic Modeling on Electronic Computers]. Moscow, Sov. Radio, 1971. 400 p. (In Russian)
7. Gladkii V.S. *Veroyatnostnye vychislitelnye modeli* [Probabilistic Computational Models]. Moscow, Nauka, 1973. 300 p. (In Russian)
8. Walker A.I. An efficient method for generating discrete random variables with general distributions. *ACM Trans. Math. Software*, 1977, vol. 3, no. 3, pp. 253–256.
<https://doi.org/10.1145/355744.355749>.
9. Fedorov R.F., Yakovlev V.V., Dobris G.V. *Stokhasticheskie preobrazovateli informatsii* [Stochastic Information Converters]. Leningrad, Mashinostroenie, 1978. 304 p. (In Russian)
10. Chetverikov V.N., Bakanovich E.A., Menkov A.V. *Vychislitel'naya tekhnika dlya statisticheskogo modelirovaniya* [Computer Technology for Statistical Modeling]. Moscow, Sov. Radio, 1978. 312 p. (In Russian)
11. Bukharaev R.G. *Osnovy teorii veroyatnostnykh avtomatov* [Fundamentals of the Theory of Probabilistic Automata]. Moscow, Nauka, 1985. 287 p. (In Russian)
12. Pokhodzej B.B. Complexity of tabular methods for modeling finite discrete distributions. *Sov. Math.*, 1985, vol. 29, no. 7, pp. 64–72.
13. Levin B.R., Schwartz W. *Veroyatnostnye modeli i metody v sistemakh svyazi i upravleniya* [Probabilistic Models and Methods in Communication and Control Systems]. Moscow, Radio Svyaz', 1985. 312 p. (In Russian)
14. *Veroyatnostnye avtomaty i ikh prilozheniya (Dokl. simpoz., 6–8 iyunya 1983 g.)* [Probabilistic Automata and Their Applications (Proc. Symp., June 6–8, 1983)]. Zakharov V.M. (Ed.). Kazan, Izd. Kazan. Univ., 1986. 212 p. (In Russian)
15. Chetverikov V.N., Bakanovich E.A. *Stokhasticheskie vychislitel'nye ustroystva sistem modelirovaniya* [Stochastic Computing Devices of Simulation Systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1989. 272 p. (In Russian)
16. Dorodnitsyn A.A. et al. *Slovar' po kibernetike* [Dictionary of Cybernetics]. Mikhalevich V.S. (Ed.). Kyiv, Gl. Red. Ukr. Sov. Entsikl., 1989. 751 p. (In Russian)
17. Zakharov V.M., Shalagin S.V. On the development of statistical modeling hardware. *Tr. SORUCOM–2014. III Mezhdunarodn. nauch.-prakt. konf. "Razvitie vychislitel'noi tekhniki i ee programmogo obespecheniya v Rossi i v stranakh byvshego SSSR: istoriya i perspektivy". Kazan', 13–17 okt. 2014 g.* [SORUCOM–2014. Proc. 3rd Int. Sci.-Pract. Conf. "The History of Computers and Informatics in the Soviet Union and Russian Federation: History and Prospects". Kazan, October 13–17, 2014]. Kazan, 2014, pp. 103–108. URL: <https://computer-museum.ru/articles/materialy-mezhdunarodnoy-konferentsii-sorucum-2014/490/>. (In Russian)
18. Shalagin S.V. *Realizatsiya tsifrovyykh ustroystv v arkhitekture PLIS/FPGA pri ispol'zovanii raspredelennykh vychislenii v polyakh Galua: monografiya* [Implementing Digital Devices in FPGA Architecture When Using Distributed Computing in Galois Fields: A Monograph]. Kazan, Izd. KNITU – KAI, 2016. 228 p. URL: <https://e.lanbook.com/book/149577>. (In Russian)

19. Zakharov V.M., Shalagin S.V., Eminov B.F. *Avtomatnye markovskie modeli nad konechnym polem: monografiya* [Automata Markov Models over a Finite Field: A Monograph]. Kazan, Spets. Fond Upr. Tselevym Kapitalom Razvit. KNITU – KAI, 2022. 328 p.
URL: <https://e.lanbook.com/book/366542>. (In Russian)
20. Zakharov V.M., Shalagin S.V., Gumirov A.I. Discrete random variable generator with the given distribution law in FPGA-architecture. *Vestn. DGU. Ser. 1: Estestv. Nauki*, 2023, vol. 38, no. 3, pp. 28–33. <https://doi.org/10.21779/2542-0321-2023-38-3-28-33>. (In Russian)
21. Feller W. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostei i ee prilozheniya* [An Introduction to Probability Theory and Its Applications]. Vol. 1. Moscow, Mir, 1967. 499 p. (In Russian)
22. Vorontsova I.P. Algorithms for changing stochastic automata transition probabilities. *Probl. Inf. Transm.*, 1965, vol. 1, no. 3, pp. 97–101. (In Russian)
23. Zacharov V.M., Kuznetsov S.E. Complexity of the problem of approximation of stochastic matrix by rational elements. In: Budach L., Bukharajev R.G., Lupanov O.B. (Eds.) *Fundamentals of Computation Theory: International Conference FCT'87 Kazan, USSR, June 22–26, 1987. Proceedings*. Ser.: Lecture Notes in Computer Science. Vol. 278. Berlin, Heidelberg, Springer, 1987, pp. 483–487. https://doi.org/10.1007/3-540-18740-5_106.
24. Shalagin S.V. Solving the traveling salesman problem by statistical testing using complex Markov chains. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2024, vol. 166, no. 4, pp. 639–650. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.4.639-650>. (In Russian)
25. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms. *Autom. Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
26. Quang T.L., Aibin M. Traveling Salesman Problem: Exact solutions vs. heuristic vs. approximation algorithms. Baeldung. 2024.
URL: <https://www.baeldung.com/cs/tsp-exact-solutions-vs-heuristic-vs-approximation-algorithms>.
27. Al'pin Yu.A., Zakharov V.M. A theoretical automata method for describing and modeling random processes. *Veroyatn. Metody Kibernet.*, 1983, vol. 19, pp. 10–16. URL: <http://eudml.org/doc/69222>. (In Russian)
28. Aho A., Hopcroft J., Ullman J. *Postroenie i analiz vychislitel'nykh algoritmov* [The Design and Analysis of Computer Algorithms]. Slisenko A.O. (Trans.), Matiyasevich Yu.V. (Ed.). Moscow, Mir, 1979. 536 p. (In Russian)

Информация об авторах

Вячеслав Михайлович Захаров, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры компьютерных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: gilvv@mail.ru

Сергей Викторович Шалагин, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры компьютерных систем, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

E-mail: sshalagin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2591-2749>

Author Information

Vyacheslav M. Zakharov, Dr. Sci. (Engineering), Full Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: *gilvv@mail.ru*

Sergei V. Shalagin, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Department of Computer Systems, Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI

E-mail: *sshalagin@mail.ru*

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2591-2749>

Поступила в редакцию 24.02.2025

Принята к публикации 24.07.2025

Received February 24, 2025

Accepted July 24, 2025