

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.529.6: 534.14

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>

Взаимодействие пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки

А.И. Давлетшин ✉, А.А. Аганин

Институт механики и машиностроения ФИЦ «Казанский научный центр РАН», г. Казань, Россия✉ anas.davletshin@gmail.com

Аннотация

Исследованы динамика регулярного и стохастических кластеров, состоящих из шестнадцати воздушных пузырьков, в воде около плоской жесткой стенки и силовое воздействие на эту стенку в комнатных условиях. Изначально в регулярном кластере центры одинаковых сферических пузырьков расположены в узлах плоской квадратной сетки, параллельной стенке. Стохастические кластеры образуются из регулярного внесением случайных начальных отклонений в положения пузырьков либо в их размеры. Давление воды изменяется по гармоническому закону. Использована дискретная модель совместной динамики пузырьков, в которой наряду с радиальными пульсациями пузырьков допускаются их перемещения и деформации, но не допускается их разрушение. Поэтому исследования проводятся лишь до тех пор, пока какой-либо пузырек кластера не разрушится. Изучены динамика пузырьков и их воздействие на стенку в зависимости от амплитуды колебаний давления воды, удаленности пузырьков от стенки, расстояния между пузырьками, диапазона случайной неоднородности начальных размеров пузырьков и случайной нерегулярности их начальных положений. Показано, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется несинхронной динамикой пузырьков. По мере уменьшения амплитуды колебаний окружающего давления, увеличения удаленности пузырьков от стенки и расстояния между пузырьками максимум давления на стенке монотонно понижается.

Ключевые слова: динамика пузырьков, взаимодействие пузырьков, динамика пузырьковых кластеров, динамика пузырьков около твердого тела, воздействие пузырьков на тело, кавитация

Благодарности. Работа выполнена за счет гранта Академии наук Республики Татарстан, предоставленного молодым кандидатам наук (постдокторантам) с целью защиты докторской диссертации, выполнения научно-исследовательских работ, а также выполнения трудовых функций в научных и образовательных организациях Республики Татарстан в рамках Государственной программы Республики Татарстан «Научно-технологическое развитие Республики Татарстан» (соглашение № 61/2024-ПД).

Для цитирования: Давлетшин А.И., Аганин А.А. Взаимодействие пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2025. Т. 167, кн. 3. С. 437–454. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>.

ORIGINAL ARTICLE

<https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>

Interaction of air bubbles in liquid near a flat rigid wall

A.I. Davletshin ✉, A.A. Aganin

*Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, Russia*✉ anas.davletshin@gmail.com

Abstract

The dynamics of regular and stochastic clusters consisting of 16 air bubbles in water near a flat rigid wall under room conditions, as well as with the action they exert on it, was investigated. In the regular cluster, the centers of the equal spherical bubbles were initially located at the nodes of a flat quadratic mesh parallel to the wall. The stochastic clusters were produced from the regular one by the random change in the position or size of the bubbles. The water pressure varied harmonically. The study used a discrete model of the joint bubble dynamics, in which the bubbles are allowed to undergo radial oscillations, translation, and deformations, but not destruction, and proceeded until the destruction began. The dynamics of the bubbles and their action on the wall were analyzed with respect to the amplitude of water pressure oscillations, the distance between the bubbles and the wall, the spacing of the bubbles, the random non-uniformity of the initial size of the bubbles, and the random non-regularity of the initial positions of the bubbles. The pressure on the wall was found to be largely determined by the asynchronous dynamics of the bubbles. Its maximum value was reduced monotonically with a decrease in the amplitude of water pressure oscillations and an increase in the distance between the bubbles and the wall and the spacing of the bubbles.

Keywords: dynamics of bubbles, interaction of bubbles, dynamics of bubble clusters, dynamics of bubbles near rigid body, action of bubbles on body, cavitation

Acknowledgments. This study was supported by the grant from the Tatarstan Academy of Sciences for young Candidate of Sciences degree holders (postdoctoral students) aimed to support them in writing doctoral dissertations, performing research work, and fulfilling professional responsibilities within scientific and educational organizations of the Republic of Tatarstan as part of the State Program of the Republic of Tatarstan “Scientific and technological development of the Republic of Tatarstan” (agreement no. 61/2024-PD).

For citation: Davletshin A.I., Aganin A.A. Interaction of air bubbles in liquid near a flat rigid wall. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2025, vol. 167, no. 3, pp. 437–454. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2025.3.437-454>. (In Russian)

Введение

К настоящему времени большинство исследований динамики пузырьков около твердых тел и силового воздействия на них посвящено одиночным пузырькам. В частности,

в случае одиночных пузырьков изучалось влияние таких факторов, как начальная форма коллапсирующего пузырька [1, 2], форма пузырька в ходе коллапса [3], расстояние до поверхности тела [4, 5], присутствие других пузырьков [6, 7], наличие акустического воздействия на пузырек [8, 9], искривленность поверхности тела в виде выпуклого сферического сектора [10, 11], неровности поверхности тела в виде локальной выпуклости или вогнутости [12, 13].

Анализ литературы показывает, что исследование динамики кластеров около твердых тел преимущественно проводится с применением прямого численного моделирования (DNS). В частности, в работе [14] для метода DNS представлены результаты расчета однократного коллапса крайне большого (пятнадцать тысяч) числа пузырьков вблизи плоской стенки и воздействия на нее. В работе [15] исследована динамика роста и коллапса кластера, состоящего из относительно небольшого (пятьдесят) числа пузырьков.

В работе [16] изучен коллапс около твердой стенки кластера из двадцати семи кавитационных пузырьков, равномерно распределенных в кубической области. Межфазная граница построена методом объемов VOF (Volume Of Fluid). Следует отметить, что в методе VOF предполагается, что контактирующие среды остаются несмешанными, а граница их раздела является непрерывной. Жидкость считалась сжимаемой, а плотность и давление в пузырьках – постоянными. Варьировались расстояние между пузырьками и удаленность от стенки. Основное внимание было уделено определению импульсного давления на стенке и деформации пузырьков.

В работе [17] представлены результаты исследования коллапса кластера, состоящего из ста пятидесяти сферических паровых пузырьков, с особым вниманием на ударные нагрузки стенки, потенциально вызывающие эрозию. Давление жидкости 10 МПа. Учитывалась сжимаемость жидкости, применялся консервативный конечно-объемный метод. Исследуемые кластеры различались начальным объемным содержанием пара, расстоянием до стенки и начальным радиусом пузырьков.

Работа [18] посвящена численному исследованию коллапса изначально сферических одиночных пузырьков и кластера, состоящего из восьми пузырьков. Пузырьки заполнены паром. Основное внимание направлено на превращение различных форм энергии. Парожидкостные границы определены методом VOF.

В работе [19] изучен процесс коллапса кластера паровых пузырьков в окрестности стенки. Для описания поверхностей пузырьков также применялся метод VOF. Учитывалось влияние вязкости и сжимаемости жидкости, а также поверхностного натяжения. Рассмотрены колоноподобные кластеры и кубический кластер, состоящий из шестидесяти четырех пузырьков.

Наряду с DNS иногда применяют модели механики сплошной среды (МСС), метод граничных элементов (МГЭ) и дискретные модели (particle-модели). Так, в работе [20] приведены результаты численного исследования динамики сферического кластера пузырьков около стенки при акустическом возбуждении с применением эйлерово-лагранжевой модели двухфазной сплошной среды. Изначально кластер имеет сферическую форму. Изучено влияние амплитуды и частоты возбуждения, размеров кластера и его пузырьков, газосодержания кластера, начальной удаленности кластера от стенки.

В работе [6] экспериментально и численно с помощью МГЭ изучена динамика двух кавитационных пузырьков возле плоской твердой границы. Пузырьки образуются лазерными импульсами в осесимметричной конфигурации, когда центры пузырьков расположены

на нормали к этой границе. Варьируется расстояние между пузырьками и их удаленность от стенки.

В работе [7] с применением МГЭ изучена динамика двух пузырьков, образующихся в результате расщепления паровой полости, возникающей в жидком диэлектрике между электродом и образцом при электроискровой обработке образца. Проанализированы изменение давления в пузырьках, их деформации и перемещения, изменение их объема в зависимости от места образования полости между поверхностями электрода и образца, которые считаются плоскими.

В работе [21] предложен один из вариантов дискретных (particle) моделей, в котором пузырьки считаются сферическими, учтены их пространственное перемещение и временная задержка в их взаимодействии. Приведены примеры применения этой модели для описания динамики одиночных пузырьков и пузырьковых кластеров в неограниченном объеме жидкости, в окрестности свободной поверхности жидкости и около твердой стенки.

В работе [22] с применением particle-модели работы [21] изучена динамика одиночных пузырьков и пузырьковых кластеров в разнообразных конфигурациях, включая наличие жестких стенок. Рассмотрены комплексные жесткие границы, в том числе параллельные стенки и стенки, находящиеся под углом друг к другу. Для оценки правильности результатов численного моделирования проведены соответствующие эксперименты с пузырьками, образованными искровым разрядом.

В настоящей работе изучены динамика шестнадцати воздушных пузырьков в воде около плоской жесткой стенки и силовое воздействие на эту стенку в комнатных условиях при гармоническом изменении давления воды. Пузырьки образуют либо регулярные, либо стохастические кластеры. В регулярном кластере пузырьки изначально одинаковые, сферические, их центры расположены в узлах квадратной сетки, плоскость которой параллельна стенке. Стохастические кластеры образуются из регулярного внесением случайных возмущений либо в начальное положение пузырьков, либо в их начальные размеры. Использована недавно предложенная авторами дискретная модель совместной динамики пузырьков [23]. Наряду с рядом преимуществ по сравнению с другими моделями (возможность перемещений и деформаций пузырьков, четкое выделение их поверхности, учет сжимаемости жидкости, высокая вычислительная эффективность и т. д.), данная модель, как и многие другие, не допускает разрушения пузырьков. Поэтому исследования проводятся лишь до тех пор, пока какой-либо пузырек кластера не разрушится. Эффективность применения указанной модели к изучению рассматриваемой задачи продемонстрирована в работе [24].

1. Постановка задачи

Изучим совместную динамику газовых пузырьков в жидкости около плоской твердой стенки (рис. 1) и их силовое воздействие на эту стенку. Газом в пузырьках является воздух, окруженный жидкостью – водой. Давление воды на большом удалении от пузырьков изменяется по гармоническому закону

$$p_{\infty} = p_0 - p_a \sin \omega t, \quad (1)$$

где p_0 – статическое давление, p_a и ω – амплитуда и частота колебаний, t – время.

При таком возбуждении пузырьки радиально пульсируют, перемещаются по жидкости, их поверхности деформируются. Такое поведение пузырьков может иметь место, например, при акустическом воздействии.

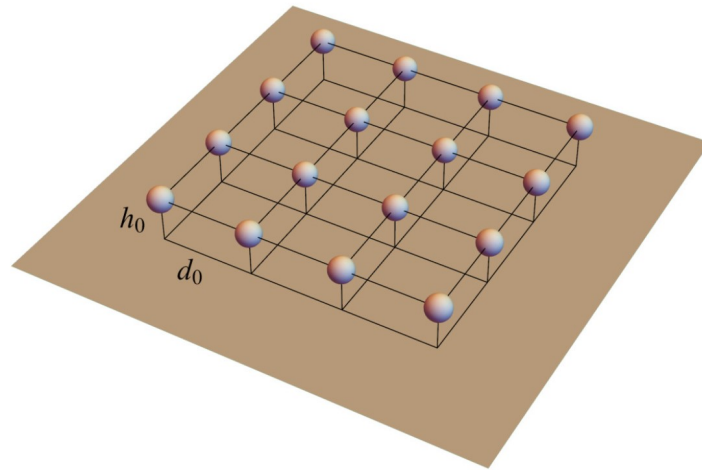


Рис. 1. Регулярный плоский кластер газовых пузырьков около плоской жесткой стенки

Fig. 1. Regular plane cluster of gas bubbles near a flat rigid wall

Рассмотрим регулярный и стохастические кластеры, состоящие из $K^* = 16$ пузырьков. В регулярном кластере центры пузырьков расположены в узлах равномерной квадратной сетки с размером ячеек (расстоянием между центрами ближайших пузырьков) d_0 . Считаем, что стенка ориентирована горизонтально, а плоскость центров пузырьков (плоскость кластера) расположена над ней параллельно ее поверхности. Расстояние между центрами пузырьков (плоскостью кластера) и стенкой равно h_0 . В начальный момент времени $t = 0$ жидкость и пузырьки покоятся (находятся в динамическом равновесии), все пузырьки являются сферическими с одинаковым радиусом R_0 .

Стохастические кластеры характеризуются случайным распределением либо начальных размеров, либо положений пузырьков. Кластеры со случайным распределением начальных размеров пузырьков образуются из регулярного кластера путем случайного отклонения начальных радиусов пузырьков согласно выражению $R_{k0}^{st} = R_0(1 + \delta_k^{st})$, где $k = 1, 2, \dots, K^*$, R_{k0}^{st} – начальный радиус k -го пузырька в стохастическом кластере, δ_k^{st} – параметр, определяющий случайное отклонение. Значение δ_k^{st} выбирается из интервала $[-\delta_R, \delta_R]$, δ_R – некоторое положительное число.

Кластеры со случайным распределением положений пузырьков получаются из регулярного кластера путем случайного отклонения начальных положений центров пузырьков согласно выражению $\mathbf{r}_{k0}^{st} = \mathbf{r}_{k0} + R_0 \delta_k^{st}$, где $\mathbf{r}_{k0} = x_{k0}\mathbf{i} + y_{k0}\mathbf{j} + z_{k0}\mathbf{k}$, $\delta_k^{st} = \delta_{xk}^{st}\mathbf{i} + \delta_{yk}^{st}\mathbf{j} + \delta_{zk}^{st}\mathbf{k}$; x_{k0} , y_{k0} , z_{k0} – начальные координаты k -го пузырька в регулярном кластере, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы декартовой системы координат. Значения параметров δ_{xk}^{st} , δ_{yk}^{st} , δ_{zk}^{st} , определяющих случайное отклонение положения пузырьков, берутся из интервала $[-\delta_r, \delta_r]$, где δ_r – некоторое положительное число.

Изучим влияние амплитуды возбуждения p_a , удаленности пузырьков от стенки h_0 , расстояния между пузырьками d_0 и случайных отклонений в начальных радиусах пузырьков δ_R и в их начальном положении δ_r . Исследования выполним в комнатных условиях при статическом давлении $p_0 = 1$ бар, плотности жидкости $\rho_L = 998$ кг/м³, скорости звука в жидкости $c_L = 1500$ м/с, динамической вязкости жидкости $\mu_L = 10^{-3}$ кг/(м·с), начальных радиусах пузырьков в регулярном кластере $R_0 = 3$ мкм, частоте колебаний давления жидкости $\omega/2\pi = 20$ кГц, начальном давлении в пузырьках $p_{b0} = p_0 + 2\sigma/R_0$,

где σ – поверхностное натяжение ($\sigma = 0.0725$ Н/м). В силу ограниченности используемой модели исследования проводим лишь до момента разрушения каких-либо пузырьков кластера (критерий разрушения приведен ниже).

2. Математическая модель

Для описания коллективной динамики пузырьков вблизи плоской жесткой стенки (рис. 1) используем разработанную недавно математическую модель взаимодействующих газовых пузырьков в неограниченном объеме жидкости [23]. При этом задача коллективной динамики K^* пузырьков вблизи плоской жесткой стенки рассматривается как задача взаимодействия $K = 2K^*$ пузырьков, K^* из которых являются исследуемыми пузырьками, а остальные K^* – их зеркальными отображениями относительно стенки [24], так что на поверхности плоской жесткой стенки выполняется условие непротекания.

В используемой модели совместной динамики пузырьков [23] газ в пузырьках предполагаем идеальным совершенным, с равномерным распределением давления, изменяющимся по адиабатическому закону, жидкость – слабосжимаемой, а пузырьки – слабонесферическими. Учитываем поверхностное натяжение и влияние вязкости жидкости.

Уравнение поверхности k -го пузырька ($k = 1, 2, \dots, K$) имеет вид

$$F(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) = r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N a_{nk}(t) Y_n(\theta_k, \varphi_k) = 0,$$

где r_k, θ_k, φ_k – сферические координаты с началом в центре k -го пузырька, $R_k(t)$ – его радиус, $a_{nk}(t) = (a_{nk}^{-n}, a_{nk}^{-n+1}, \dots, a_{nk}^0, \dots, a_{nk}^n)$ – вектор-строка из $2n+1$ элементов, $Y_n(\theta_k, \varphi_k) = (Y_{nk}^{-n}, Y_{nk}^{-n+1}, \dots, Y_{nk}^0, \dots, Y_{nk}^n)^T$ – вектор-столбец из $2n+1$ элементов, $Y_{nk}^m = Y_n^m(\theta_k, \varphi_k) = P_n^{|m|}(\cos \theta_k) e^{im\varphi_k}$ – сферическая функция (гармоника) с номером n и порядком m , $P_n^{|m|}(\cos \theta_k)$ – соответствующий многочлен Лежандра степени n и порядка $|m|$, i – мнимая единица, $a_{nk}^m = a_{nk}^m(t)$ – амплитуда отклонения поверхности пузырька от сферической поверхности $r_k = R_k(t)$ в виде сферических функций Y_{nk}^m , N – максимальное число сферических гармоник, представляющих поверхность пузырька.

Отклонения поверхности пузырьков от сферической считаем не слишком большими, так что для всех $n = 2, 3, \dots, N$ и $k = 1, \dots, K$ выполнены следующие соотношения:

$$|\varepsilon_{nk}| \sim \delta^{n+1}, \quad |\dot{\varepsilon}_{nk}| \sim \delta^{n+1} |\dot{R}_k|/R_k, \quad |\ddot{\varepsilon}_{nk}| \sim \delta^{n+1} |\ddot{R}_k|/R_k,$$

где δ – малый параметр, который определяется ниже, точки сверху означают дифференцирование по времени,

$$\varepsilon_{nk} = \begin{cases} \varepsilon_{nk \max}, & \varepsilon_{nk \max} + \varepsilon_{nk \min} \geq 0; \\ \varepsilon_{nk \min}, & \varepsilon_{nk \max} + \varepsilon_{nk \min} < 0, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{nk \max} = \max_{\theta_k, \varphi_k} e_{nk} Y_n(\theta_k, \varphi_k), \quad \varepsilon_{nk \min} = \min_{\theta_k, \varphi_k} e_{nk} Y_n(\theta_k, \varphi_k),$$

$e_{nk} = a_{nk}/R_k$ – вектор-строка относительных амплитуд отклонения поверхности k -го пузырька от сферической в виде гармоник Y_{nk}^m ; $\varepsilon_{nk \max}$, $\varepsilon_{nk \min}$ – соответственно максимальное положительное и минимальное отрицательное относительные отклонения от сферической поверхности в виде Y_{nk} ; $e_{nk} Y_{nk}$ – значение относительного отклонения поверхности пузырька от сферической в виде Y_{nk} в точке θ_k, φ_k . Отметим, что $e_{nk} Y_{nk} > 0$ соответствует выпуклости поверхности пузырька наружу, а $e_{nk} Y_{nk} < 0$ – вогнутости внутрь.

Пузырьки считаем расположенными не очень близко друг к другу, так что слагаемые порядка δ^7 и выше не учитываем, т.е. $\delta^7 \ll 1$. Здесь $\delta = \max_{k,j} [(R_k + R_j)/d_{kj}]$ – максимальное по всем парам взаимодействующих пузырьков отношение суммы их радиусов R_k и R_j к расстоянию между их центрами $d_{kj} = |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|$ ($k, j = 1, 2, \dots, K$; $k \neq j$), $\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$; x_k , y_k и z_k – координаты центра k -го пузырька в неподвижной декартовой системе. Скорости и ускорения смещения центров пузырьков также предполагаем малыми:

$$|\dot{\mathbf{r}}_k| \sim \delta^2 |\dot{R}_k|, \quad |\ddot{\mathbf{r}}_k| \sim \delta^2 |\ddot{R}_k|.$$

Совместная динамика пузырьков может быть описана следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков R_k , радиус-векторов их центров $\mathbf{r}_k$ и амплитуд отклонения их формы от сферической a_{nk} [23]:

$$\begin{aligned} R_k \ddot{R}_k + \frac{3}{2} \dot{R}_k^2 - \frac{3}{4} \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k \circ \mathbf{Y}_{110} - \frac{p_{b,k} - p_\infty}{\rho_L} + \frac{2\sigma}{\rho_L R_k} + \Delta_{0k}^{(6)} + \Delta_{0k}^\mu + \Delta_k^c = \\ = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{\dot{b}_{0j}}{d_{kj}} - \frac{b_{0j} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2} - \left((R_j^3 \dot{\mathbf{r}}_j)' - \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_j^3 b_{0s})' C_{01js}}{d_{js}^2} \right) \frac{C_{10kj}}{2d_{kj}^2} - \right. \\ \left. - \left(\dot{\mathbf{r}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{b_{0s} C_{01ks}}{2d_{ks}^2} \right) \frac{9b_{0j} C_{01kj} \circ \mathbf{Y}_{110}}{2d_{kj}^2} + \Delta_{0kj}^{(6)} \right], \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{\mathbf{r}}_k + 3 \dot{R}_k \dot{\mathbf{r}}_k - \left(\frac{6 \dot{R}_k \dot{\mathbf{r}}_k a_{2k}}{R_k} + \frac{9}{2} \dot{\mathbf{r}}_k \dot{a}_{2k} + \frac{7}{2} \ddot{\mathbf{r}}_k a_{2k} \right) \circ \mathbf{Y}_{211} + \Delta_{1k}^\mu = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{3 (R_k b_{0j})' C_{01kj}}{d_{kj}^2} + \right. \\ \left. + \frac{3 R_k b_{0j} \dot{C}_{01kj}}{d_{kj}^2} - \frac{6 R_k b_{0j} C_{01kj} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3} - \left((R_k R_j^3 \dot{\mathbf{r}}_j)' - \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_k R_j^3 b_{0s})' C_{01js}}{d_{js}^2} \right) \frac{3 C_{11kj}}{2d_{kj}^3} - \right. \\ \left. - \left(\dot{\mathbf{r}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{C_{01ks}}{b_{0s}^{-1} d_{ks}^2} \right) \frac{15 C_{02kj} \circ \mathbf{Y}_{211}}{R_k^{-1} b_{0j}^{-1} d_{kj}^3} - \frac{(R_k b_{0j})' a_{2k} + 3 (R_k a_{2k})' b_{0j}}{2 R_k d_{kj}^2} 3 C_{01kj} \circ \mathbf{Y}_{211} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{a}_{nk} + 3 \dot{R}_k \dot{a}_{nk} - (n-1) \ddot{R}_k a_{nk} + 2 \delta_{3n} \left(\frac{4 \dot{R}_k \dot{\mathbf{r}}_k a_{2k}}{R_k} + 5 \dot{\mathbf{r}}_k \dot{a}_{2k} + \ddot{\mathbf{r}}_k a_{2k} \right) \circ \mathbf{Y}_{123} + \\ + \delta_{2n} \frac{27}{8} \dot{\mathbf{r}}_k \dot{\mathbf{r}}_k \circ \mathbf{Y}_{112} + \frac{\sigma (n^2 - 1) a_{nk}}{(n+2)^{-1} \rho_L R_k^2} + (\delta_{2n} + \delta_{4n}) \Delta_{nk}^{(6)} + \Delta_{nk}^\mu = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{(R_k^n b_{0j})' C_{0nkj}}{(2n+1)^{-1} d_{kj}^{n+1}} + \right. \\ \left. + \frac{3 (\delta_{2n} + \delta_{3n}) (n^2 - 1) R_k^{n-2} b_{0j}}{2n(2n-1)^{-1} d_{kj}^n} \left(\dot{\mathbf{r}}_k - \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{b_{0s} C_{01ks}}{(\delta_{2n} + 1) d_{ks}^2} \right) C_{0n-1kj} \circ \mathbf{Y}_{1n-1n} + \right. \\ \left. + 2 \delta_{3n} \frac{4 \dot{R}_k b_{0j} a_{2k} + 3 R_k \dot{b}_{0j} a_{2k} + 5 R_k b_{0j} \dot{a}_{2k}}{R_k d_{kj}^2} C_{01kj} \circ \mathbf{Y}_{123} + (\delta_{2n} + \delta_{4n}) \Delta_{nkj}^{(6)} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $n = 2, 3, \dots, N$, δ_{nm} – символ Кронекера, штрихи (как и точки сверху) означают дифференцирование по времени, $p_{b,k} = (p_0 + 2\sigma/R_{k0})(R_{k0}/R_k)^{3\kappa}(1 + \Delta_{b,k}^{(6)})$ – дав-

ление в k -ом пузырьке, κ – показатель адиабаты ($\kappa = 1.4$), $b_{0k} = -R_k^2 \dot{R}_k$, $p_k = 0.5(x_k + iy_k, 2z_k, x_k - iy_k)$ – вектор-строка положения центра k -го пузырька, $C_{nmkj} = C_{nm}(\theta_{kj}, \varphi_{kj})$ – матрица размерности $(2n+1) \times (2m+1)$ с элементами $C_{nmkj}^{n'm'}$ ($n' = -n, -n+1, \dots, n$, $m' = -m, -m+1, \dots, m$), которые определяются следующим образом:

$$C_{nmkj}^{n'm'} = \frac{(-1)^{n+\frac{|n'|+|m'|-|n'-m'|}{2}} (n+m-|n'-m'|)!}{(n-|n'|)!(m+|m'|)!} Y_{n+m}^{n'-m'}(\theta_{kj}, \varphi_{kj}),$$

$\theta_{kj}, \varphi_{kj}$ – угловые координаты центра j -го пузырька в локальной системе координат k -го, Y_{nml} – массив $(2n+1) \times (2m+1) \times (2l+1)$ чисел $Y_{nml}^{n'm'-l'}$ ($n' = -n, -n+1, \dots, n$, $m' = -m, -m+1, \dots, m$, $l' = -l, -l+1, \dots, l$), которые выражаются в виде

$$Y_{nml}^{n'm'l'} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|l'|)!}{(l+|l'|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_n^{n'}(\theta, \varphi) Y_m^{m'}(\theta, \varphi) Y_l^{l'}(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

Оператор $\circ$, применяемый к вектору-строке $c_n = (c_n^{-n}, c_n^{-n+1}, \dots, c_n^n)$ и матрице чисел Y_{nml} , определяется как $c_n \circ Y_{nml} = M_{nml}$, где M_{nml} – матрица размерности $(2m+1) \times (2l+1)$, состоящая из элементов $\sum_{n'=-n}^n c_n^{n'} Y_{nml}^{n'm'-l'}$ ($m' = -m, -m+1, \dots, m$, $l' = -l, -l+1, \dots, l$).

При этом приоритет оператора $\circ$ в векторно-матричных выражениях предполагаем наивысшим [23].

Слагаемые Δ_{0k}^μ , Δ_{1k}^μ , Δ_{nk}^μ и Δ_k^c в уравнениях (2)–(4) описывают эффект влияния вязкости и сжимаемости жидкости, а $\Delta_{b,k}^{(6)}$, $\Delta_{0k}^{(6)}$, $\Delta_{0kj}^{(6)}$, $\Delta_{nk}^{(6)}$ и $\Delta_{nkj}^{(6)}$ являются слагаемыми шестого порядка по малому параметру δ . Все они определяются так же, как в работе [23].

Силовое воздействие пузырьков на стенку характеризуется давлением жидкости на ее поверхности, которое рассчитываем по выражениям, приведенным в [24]. При этом используем значения R_k , p_k , a_{nk} , а также их первые и вторые производные по времени.

3. Особенности динамики пузырьков и их воздействия на стенку

Учитывая структуру рассматриваемого регулярного кластера и его положение относительно стенки (рис. 1), в нем можно выделить три группы пузырьков, динамика которых является подобной относительно центра воздействия кластера на стенку. Первая группа состоит из четырех пузырьков, наиболее близких к центру кластера. Третью группу формируют четыре пузырька, наиболее удаленные от центра кластера. Восемь оставшихся пузырьков образуют вторую группу. В последующем пузырьки первой группы называем центральными, второй – боковыми, а третьей – угловыми. Для анализа пространственных перемещений пузырьков используем параметр $\tilde{d}_{kc}(t)$, представляющий собой изменение расстояния между центром k -го пузырька и центром воздействия кластера на стенке. Он определяется выражением

$$\tilde{d}_{kc}(t) = d_{kc}(0) - d_{kc}(t),$$

где $d_{kc}(t)$ – текущее расстояние между центром k -го пузырька и центром воздействия кластера на стенке. Для оценки текущих деформаций пузырьков применим параметр

$$\varepsilon_{k \max}(t) = \max_{\theta_k, \varphi_k} \left| \sum_{n=2}^N e_{nk}(t) Y_n(\theta_k, \varphi_k) \right|,$$

характеризующий максимальное отклонение формы k -го пузырька от сферической.

Как отмечено выше, в силу ограниченности используемой модели исследование проводим лишь до тех пор, пока какие-либо пузырьки кластера не разрушатся в силу больших несферических деформаций. В качестве критерия разрушения k -го пузырька примем следующее неравенство:

$$\varepsilon_{k \max}(t) \geq 1. \quad (5)$$

Рис. 2 иллюстрирует динамику пузырьков регулярного кластера (рис. 1) под воздействием возбуждения (1). Видно, что при относительно небольшой амплитуде возбуждения ($p_a = 1.17$ бар) пузырьки сначала расширяются, затем коллапсируют, после чего совершают высокочастотные колебания, которые довольно быстро затухают. В отличие от одиночных пузырьков [23, 24], затухание происходит в немонотонном режиме. В конце периода колебаний давления жидкости радиусы пузырьков принимают значения, близкие к начальному R_0 , несферические деформации практически исчезают, смещения пузырьков имеют порядок их начального радиуса. Наиболее сильное сжатие испытывают центральные пузырьки. Они также больше перемещаются и деформируются. По этим показателям далее следуют боковые пузырьки, а за ними – угловые. В результате наибольшее давление достигается в центральных пузырьках, и происходит это в конце их второго сжатия. При этом величина максимального давления в центральных пузырьках примерно в восемнадцать раз превышает их начальное значение.

По мере увеличения интенсивности возбуждения амплитуда радиальных колебаний пузырьков увеличивается. При этом возрастает и максимальная несферичность пузырьков. Начиная с некоторого значения p_a , некоторые из пузырьков разрушаются (согласно критерию (5)). После момента разрушения рассмотрение прекращается. На рис. 2 (b), (c) видно, что с ростом p_a момент разрушения наступает раньше.

Рис. 3 характеризует воздействие пузырьков кластера на стенку. Представлен вариант, приведенный на рис. 2 (c). Момент времени 7 соответствует экстремальному воздействию пузырьков на стенку, вскоре после чего центральные пузырьки кластера разрушаются. Видно, что в первый из представленных моментов времени, когда радиусы пузырьков кластера еще превышают их начальное значение, на стенке под кластером имеет место область пониженного давления, по форме и размерам близкая к форме и размерам кластера. Затем эта область уменьшается за счет повышения давления в угловых пузырьках. После этого в результате достижения в угловых пузырьках максимального давления на стенке под ними формируются небольшие локальные зоны с повышенным давлением. Далее угловые пузырьки начинают расширяться, а боковые и центральные продолжают сжиматься. В результате область повышенного давления на стенке принимает форму полого квадрата за счет более высокого давления в угловых и боковых пузырьках по сравнению с центральными. В момент экстремального сжатия боковых пузырьков (момент 5) область с повышенным давлением принимает форму полого восьмиугольника, поскольку давление в боковых пузырьках заметно превышает давление как в угловых, так и центральных пузырьках. Дальнейшая эволюция давления на стенке определяется повышением давления в центральных пузырьках и понижением в остальных. В результате область со значительно более высоким давлением локализуется в малой окрестности центра воздействия кластера.

Таким образом, можно заключить, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется неравномерной динамикой пузырьков в кластере. Давление на стенке повышается под теми пузырьками, в которых оно выше. В варианте,

приведенном на рис. 3, пузырьки последовательно и все более сильно сжимаются в направлении от периферии кластера к его центру (кумулятивный эффект). В результате область повышенного давления на стенке локализуется сначала под угловыми пузырьками, затем под боковыми и, наконец, под центральными.

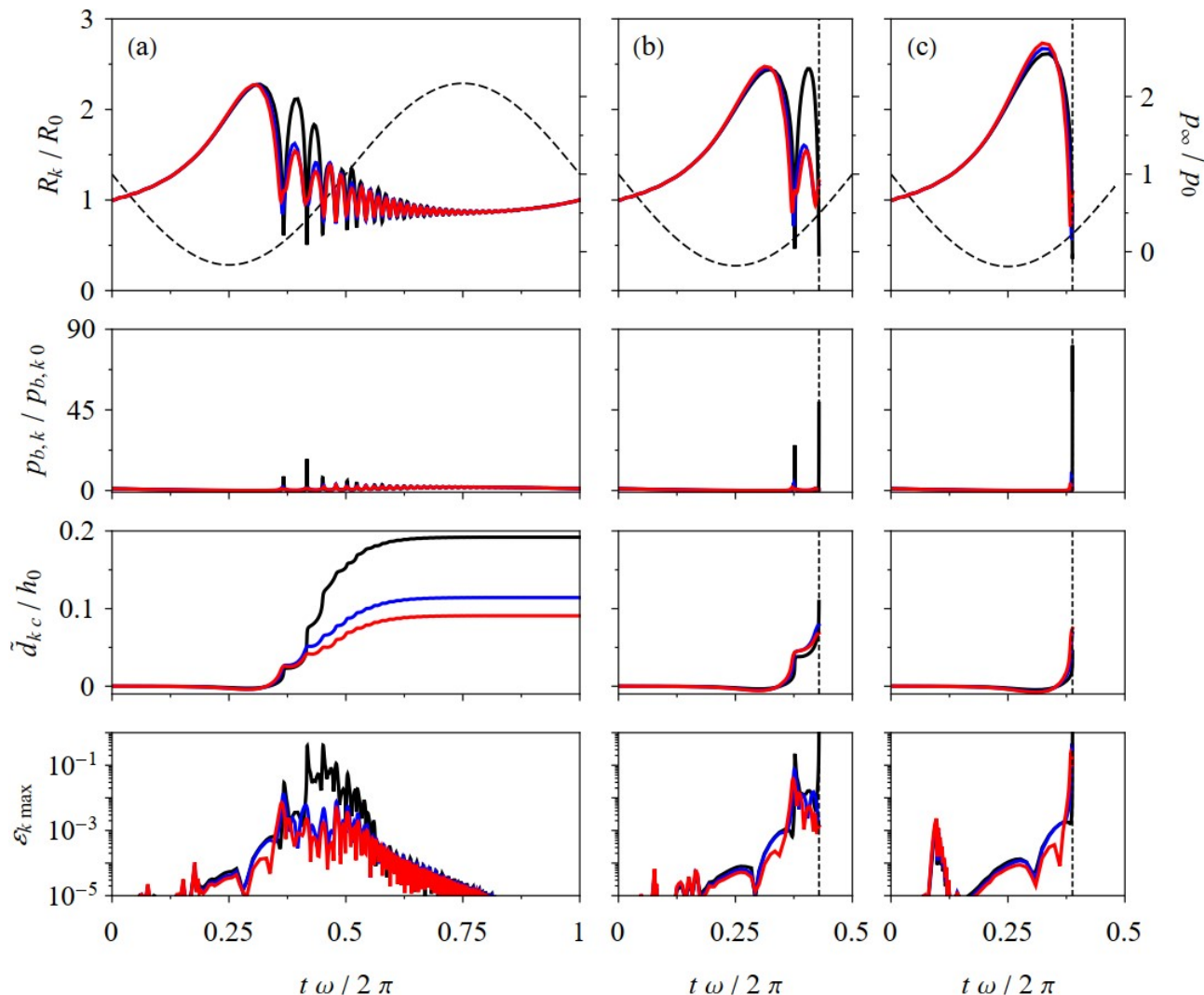


Рис. 2. Временные зависимости радиусов пузырьков и давления жидкости (штриховые линии) (первый ряд), давления в пузырьках (второй ряд), расстояния между центрами пузырьков кластера и центром их воздействия на стенку (третий ряд) и максимального отклонения формы пузырьков от сферической (четвертый ряд) для трех амплитуд возбуждения: (a) $p_a = 1.17$ бар, (b) $p_a = 1.18$ бар, (c) $p_a = 1.19$ бар при $h_0 = 30$ мкм и $d_0 = 60$ мкм. Черные линии соответствуют центральным пузырькам кластера, синие – боковым, красные – угловым. Вертикальные пунктирные линии указывают момент разрушения пузырьков

Fig. 2. Time histories of the radii of the bubbles and the liquid pressure (dashed lines) (first row), the pressure in the bubbles (second row), the distance between the centers of the bubbles and the center of their action on the wall (third row), and the maximum deflection of the shape of the bubbles from the spherical one (fourth row) for three excitation amplitudes: (a) $p_a = 1.17$ bar, (b) $p_a = 1.18$ bar, and (c) $p_a = 1.19$ bar at $h_0 = 30 \mu\text{m}$ and $d_0 = 60 \mu\text{m}$. Black lines show the central bubbles of the cluster, blue lines correspond to the lateral bubbles, and red lines indicate the corner bubbles. Vertical dotted lines mark the moment of destruction of some bubbles

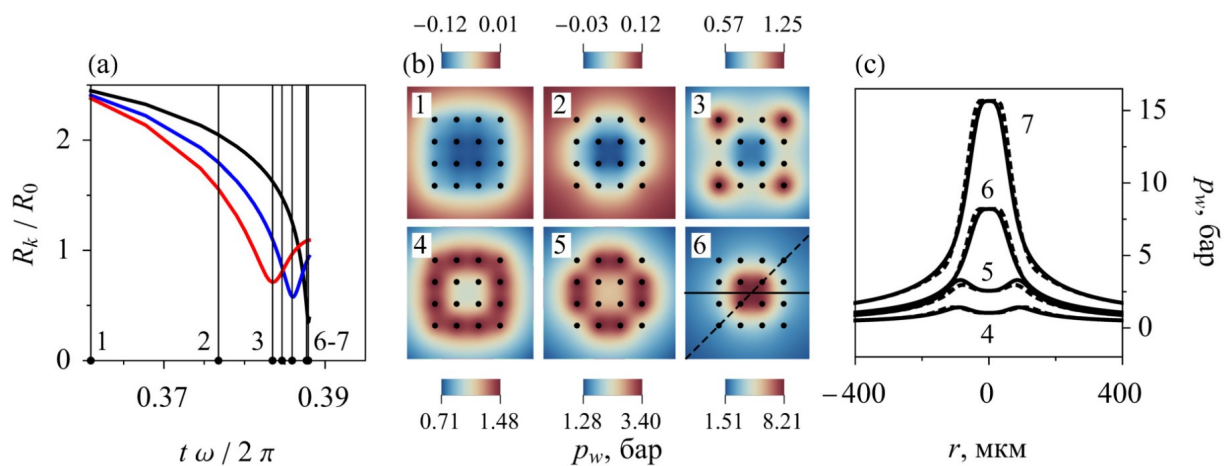


Рис. 3. (а) Изменение радиусов центрального (черная кривая), боковых (синяя кривая) и угловых (красная кривая) пузырьков кластера в окрестности моментов их экстремального сжатия (точками и вертикальными линиями указаны 7 характерных моментов времени), (б) поля давления на стенке в 6 моментов времени (точками указаны нормальные проекции центров пузырьков, сплошной и штриховой линиями показаны направления, к которым относятся кривые на (с)), (с) распределения давления на стенке вдоль линий, указанных на (б) (сплошные кривые соответствуют сплошной линии, штриховые – штриховой), в 4 момента времени

Fig. 3. (a) Change of the radii of the central (black curve), lateral (blue curve), and corner (red curve) bubbles of the cluster at the time moments of their maximum compression (dots and vertical lines mark seven characteristic time moments), (b) the pressure fields on the wall at six time moments (dots indicate the normal projections of the centers of bubbles, solid and dashed lines show the directions corresponding to the curves in (c)), and (c) the distributions of the pressure on the wall along the lines in (b) (solid and dashed curves correspond to the solid and dashed lines, respectively) at four time moments

4. Воздействие на стенку в зависимости от амплитуды возбуждения, расстояния между пузырьками и их удаленности от стенки

Воздействие кластера на стенку в зависимости от амплитуды возбуждения, расстояния между пузырьками и их удаленности от стенки демонстрирует рис. 4. Представлены зависимости максимального давления на стенке $p_{w \max}$ (в интервале до момента разрушения какого-либо из пузырьков) от амплитуды возбуждения p_a для трех значений расстояния h_0 между кластером и стенкой при фиксированном расстоянии между пузырьками d_0 и для трех значений расстояния между пузырьками d_0 при фиксированном расстоянии h_0 между кластером и стенкой.

Видно, что во всех представленных вариантах увеличение p_a приводит к монотонному росту максимального давления на стенке. При этом скорость роста не всегда повышается монотонно. Так, при $d_0 = 60$ мкм и $h_0 = 60$ мкм максимальное давление в интервале $1.17 \text{ бар} \leq p_a \leq 1.18 \text{ бар}$ растет быстрее, чем в предыдущем интервале, но медленнее, чем в последующем. Это обусловлено тем, что максимальное давление в первых двух интервалах достигается в конце второго коллапса центральных пузырьков, а при $p_a = 1.19 \text{ бар}$ уже в конце первого (вскоре после чего они разрушаются). Если бы рассмотрение было ограничено завершением первого коллапса центральных пузырьков, то скорость роста максимального давления на стенке по мере увеличения p_a была бы монотонной (серые

штриховые линии). Аналогичные закономерности имеют место с ростом максимального давления на стенке по мере увеличения h_0 при фиксированных значениях p_a , d_0 и по мере увеличения d_0 при фиксированных значениях p_a , h_0 . Более того, по той же причине при уменьшении d_0 от 120 мкм до 90 мкм при $p_a = 1.19$ бар и $h_0 = 30$ мкм максимальное давление на стенке не растет, а уменьшается.

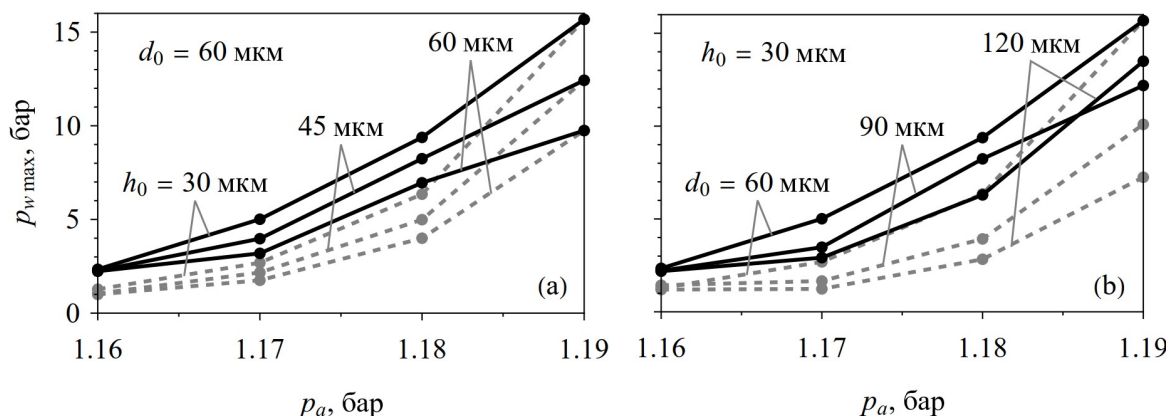


Рис. 4. Зависимости максимального давления на стенке от амплитуды возбуждения (а) для трех расстояний между кластером и стенкой при фиксированном расстоянии между пузырьками и (б) для трех расстояний между пузырьками при фиксированном расстоянии между кластером и стенкой. Сплошные линии соответствуют промежутку времени до разрушения некоторых пузырьков, а пунктирные – до первого экстремального сжатия пузырьков

Fig. 4. Dependences of the maximum pressure on the wall on the amplitude of excitation (a) for three distances between the cluster and the wall at a fixed spacing of the bubbles and (b) for three distances between the bubbles at a fixed distance between the cluster and the wall. Solid curves correspond to the time interval up to the destruction of some bubbles, dotted curves show the time interval up to the first extreme compression of the bubbles

5. Влияние стохастичности в начальных радиусах пузырьков

Рис. 5 характеризует влияние стохастичности в начальных радиусах пузырьков на воздействие кластера на стенку. Рис. 5 (а) демонстрирует зависимость максимальных давлений на стенке в десяти вариантах случайных отклонений начальных радиусов пузырьков от их величины в регулярном кластере для двух диапазонов отклонения δ_R . Видно, что случайные отклонения приводят к занижению максимальных давлений на стенке в пределах некоторого интервала и что по мере увеличения диапазона случайных отклонений ширина этого интервала возрастает.

Рис. 5 (б) демонстрирует влияние диапазона случайных отклонений на величину максимальных давлений на стенке, усредненных по числу вариантов начальных случайных отклонений, и на соответствующие поля давления на стенке в момент достижения на ней максимального давления. Видно, что по мере увеличения δ_R усредненное максимальное давление на стенке уменьшается, а поле давления на ней все более уклоняется от того, что соответствует регулярному кластеру ($\delta_R = 0$).

6. Влияние стохастичности в начальных положениях пузырьков

Рис. 6 характеризует влияние стохастичности в начальных положениях пузырьков на воздействие кластера на стенку. Рис. 6 (а) демонстрирует зависимость максимальных давлений на стенке в десяти вариантах случайных отклонений начальных радиусов пузырьков от их величины в регулярном кластере для двух диапазонов отклонения δ_r . Видно, что, как и в случае случайных отклонений начальных размеров пузырьков, случайные отклонения их начального положения приводят к занижению максимальных давлений на стенке в пределах некоторого интервала и что по мере увеличения диапазона случайных отклонений ширина этого интервала возрастает.

Рис. 6 (b) демонстрирует влияние диапазона случайных отклонений на величину максимальных давлений на стенке, усредненных по числу вариантов начальных случайных отклонений, и на соответствующие поля давления на стенке в момент достижения на ней максимального давления. Видно, что и здесь, как и в случае случайных отклонений начальных размеров пузырьков, по мере увеличения диапазона случайных отклонений δ_r усредненное максимальное давление на стенке уменьшается, а поле давления на ней все более уклоняется от того, что соответствует регулярному кластеру ($\delta_r = 0$).

Заключение

Проведено исследование динамики пузырьков в плоских кластерах квадратной структуры (пузырьки расположены в узлах квадратной сетки) около плоской твердой поверхности (плоскость кластера параллельна твердой поверхности) и силового воздействия пузырьков на эту поверхность. Рассмотрен случай, когда жидкостью является вода, а пузырьки изначально сферические, одинаковые по размеру (с равновесным радиусом $R_0 = 3$ мкм). Условия комнатные, давление жидкости изменяется по гармоническому закону с ультразвуковой частотой. Использована дискретная модель, в которой пузырьки могут деформироваться, но не могут разрушаться, поэтому исследование проводится лишь до момента разрушения одного из пузырьков. Исследовано влияние амплитуды возбуждения $p_a \leq 1.19$ бар, начального расстояния между пузырьками $d_0 \geq 60$ мкм и удаленности кластера от стенки $h_0 \geq 30$ мкм.

Показано, что изменение величины и конфигурации поля давления на стенке во многом определяется неравномерной динамикой пузырьков в кластере. Давление на стенке повышается под теми пузырьками, в которых оно выше. Наибольшее давление на стенке порядка 16 бар достигается при $p_a = 1.19$ бар, $d_0 = 60$ мкм и $h_0 = 30$ мкм. В этом случае пузырьки последовательно и все более сильно сжимаются в направлении от периферии кластера к его центру. В результате область повышенного давления на стенке локализуется сначала под угловыми пузырьками, затем под боковыми и, наконец, под центральными. При уменьшении p_a , увеличении как d_0 , так и h_0 максимум давления на стенке монотонно понижается. При этом скорость понижения может изменяться немонотонно, что обусловлено изменением числа радиальных пульсаций пузырьков до их разрушения.

Продемонстрировано влияние случайных отклонений начальных размеров и положений пузырьков по отношению к тем, которые соответствуют рассмотренному выше кластеру квадратной структуры. Показано, что случайные отклонения начальных радиусов пузырьков в пределах $0.005R_0$ и случайные отклонения начальных положений центров пузырьков в пределах $4.5R_0$ могут привести к снижению усредненного (по числу вариантов случайных отклонений) максимального давления на стенке до 1.6 раза. В обоих случаях

по мере сужения диапазона случайных отклонений снижение усредненного максимального давления на стенке монотонно уменьшается.

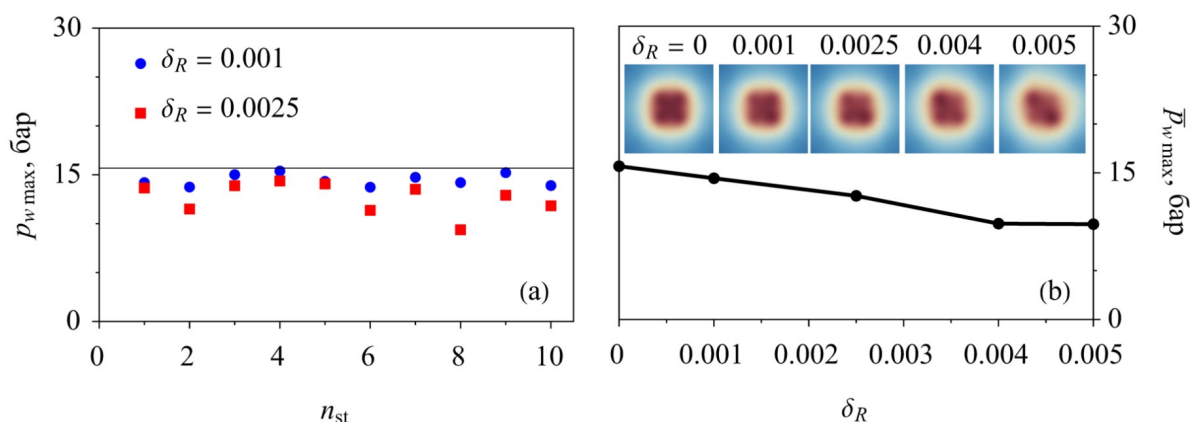


Рис. 5. (а) Зависимости максимального давления на стенке, реализующегося до разрушения некоторых из пузырьков, от номера варианта случайных отклонений их начальных радиусов от $R_0 = 3$ мкм для двух диапазонов отклонений (горизонтальная линия соответствует варианту без случайных отклонений). (б) Зависимости максимального давления на стенке, усредненного по вариантам случайных отклонений начальных радиусов, от диапазона этих случайных отклонений; сверху даны аналогичным образом усредненные поля давлений на стенке для рассчитанных диапазонов отклонения

Fig. 5. (a) Dependences of the maximum pressure on the wall realized up to the destruction of some bubbles on the number of the variant of random deflections of their initial radii from $R_0 = 3 \mu\text{m}$ for two deflection ranges (horizontal line corresponds to the variant without random deflections). (b) Dependences of the maximum pressure on the wall averaged over the variants of random deflections of the initial radii on the range of these random deflections; the upper part shows the correspondingly averaged fields of the pressure on the wall for the computed deflection ranges

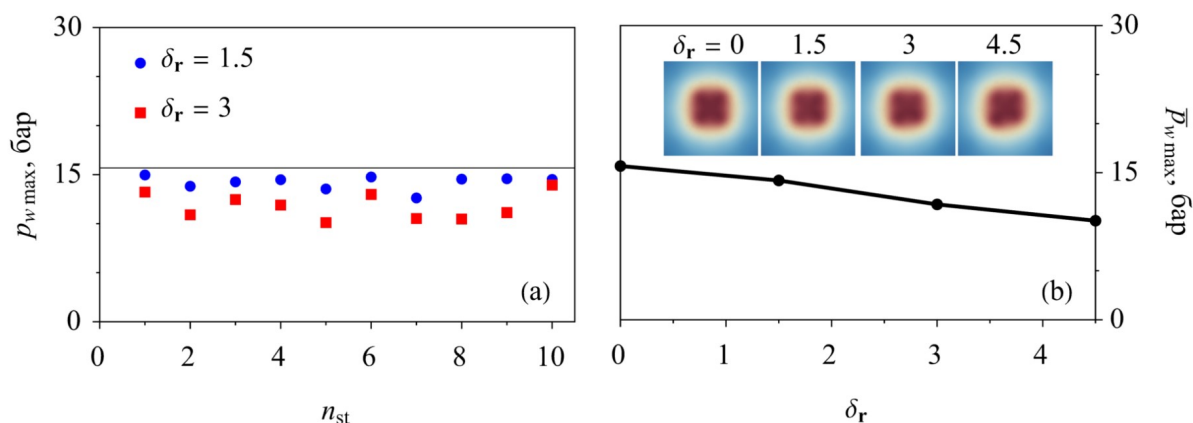


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, но для случайных отклонений начальных положений пузырьков

Fig. 6. Same as in Fig. 5, but for the random deflections of the initial positions of the bubbles

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflicts of Interest. The authors declare no conflicts of interest.

Литература

1. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 1. С. 63–66.
2. *Аганин А.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Численное моделирование эволюции пузырька газа в жидкости вблизи стенки // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 7. С. 15–28.
3. *Sarkar P., Ghigliotti G., Fivel M., Franc J.-P.* Numerical investigation of the dynamics of pressure loading on a solid boundary from a collapsing cavitation bubble // Proc. 10th Int. Symp. on Cavitation (CAV2018). Katz J. (Ed.). ASME Press, 2018. P. 765–770.
https://doi.org/10.1115/1.861851_ch146.
4. *Lechner C., Lauterborn W., Koch M., Mettin R.* Jet formation from bubbles near a solid boundary in a compressible liquid: Numerical study of distance dependence // Phys. Rev. Fluids. 2020. V. 5, No 9. Art. 093604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.093604>.
5. *Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Numerical study of the dynamics of a gas bubble near a wall under ultrasound excitation // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, No 1. P. 24–29.
<https://doi.org/10.1134/S1995080221010042>.
6. *Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y.* Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1993. V. 255. P. 707–721.
<https://doi.org/10.1017/S0022112093002654>.
7. *Shervani-Tabar M.T., Maghsoudi K.* Numerical study on the splitting of a vapour bubble in the process of EDM // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2008. V. 38, No 7. P. 657–673.
<https://doi.org/10.1007/s00170-007-1123-8>.
8. *Aganin A.A., Guseva T.S., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Dynamics of an acoustically excited gas cavity attached to a rigid surface // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40, No 11. P. 1897–1903.
<https://doi.org/10.1134/S1995080219110040>.
9. *Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Influence of the initial shape of a gas bubble on its dynamics near a wall under acoustic excitation // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, No 7. P. 1235–1241.
<https://doi.org/10.1134/S1995080220070227>.
10. *Ma C., Shi D., Li C., Wang M., He D.* Experimental research on the electric spark bubble load characteristics under the oblique 45 degree curved surface boundary // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9, No 1. Art. 32. <https://doi.org/10.3390/jmse9010032>.
11. *Ma C., Shi D., Li C., He D., Li G., Lu K.* Numerical study of the pulsation process of spark bubbles under three boundary conditions // J. Mar. Sci. Eng. 2021. V. 9, No 6. Art. 619.
<https://doi.org/10.3390/jmse9060619>.
12. *Cui R.-N., Li S., Wang S.-P., Zhang A.-M.* Pulsating bubbles dynamics near a concave surface // Ocean Eng. 2022. V. 250. Art. 110989. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110989>.
13. *Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Bubble dynamics near a locally curved region of a plane rigid wall // Phys. Fluids. 2022. V. 34, No 9. Art. 097105.
<https://doi.org/10.1063/5.0105955>.
14. *Rossinelli D., Hejazialhosseini B., Hadjidoukas P., Bekas C., Curioni A., Bertsch A., Futral S., Schmidt S.J., Adams N.A., Koumoutsakos P.* 11 PFLOP/s simulations of cloud cavitation collapse // SC'13: Proc. Int. Conf. on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. Denver, CO: IEEE, 2013. P. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2503210.2504565>.

15. *Tiwari A., Pantano C., Freund J.B.* Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters near a wall // *J. Fluid Mech.* 2015. V. 775. P. 1–23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.287>.
16. *Zhang L., Zhang J., Deng J.* Numerical investigation on the collapse of a bubble cluster near a solid wall // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 99. Art. 043108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043108>.
17. *Ogloblina D., Schmidt S.J., Adams N.A.* Simulation and analysis of collapsing vapor-bubble clusters with special emphasis on potentially erosive impact loads at walls // *EPJ Web Conf.* 2018. V. 180. Art. 02079. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818002079>.
18. *Zhang J., Zhang L., Deng J.* Numerical study of the collapse of multiple bubbles and the energy conversion during bubble collapse // *Water.* 2019. V. 11, No 2. Art. 247. <https://doi.org/10.3390/w11020247>.
19. *Ye J., Zhang J., Huang T.* Direct numerical simulation of bubble cluster collapse: Shape evolution and energy transfer mechanisms // *Processes.* 2023. V. 11, No 7. Art. 2191. <https://doi.org/10.3390/pr11072191>.
20. *Ma J., Hsiao C.-T., Chahine G.L.* Numerical study of acoustically driven bubble cloud dynamics near a rigid wall // *Ultrason. Sonochem.* 2018. V. 40, Pt. A. P. 944–954. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.08.033>.
21. *Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L.* A unified theory for bubble dynamics // *Phys. Fluids.* 2023. V. 35, No 3. Art. 033323. <https://doi.org/10.1063/5.0145415>.
22. *Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L.* Theoretical study on bubble dynamics under hybrid-boundary and multi-bubble conditions using the unified equation // *Sci. China: Phys., Mech. Astron.* 2023. V. 66, No 12. Art. 124711. <https://doi.org/10.1007/s11433-023-2204-x>.
23. *Aganin A.A., Davletshin A.I.* A particle model of interaction between slightly non-spherical bubbles // *Appl. Math. Model.* 2024. V. 126. P. 185–205. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.10.031>.
24. *Davletshin A.I.* Interaction of bubbles in liquid near a flat rigid wall // *Lobachevskii J. Math.* 2025. V. 46, No 5. P. 2005–2015. <https://doi.org/10.1134/S1995080225607040>.

References

1. *Voinov O.V., Voinov V.V.* On the process of collapse of a cavitation bubble near a wall and the formation of a cumulative jet. *Sov. Phys. Dokl.*, 1976, vol. 21, pp. 133–135.
2. *Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G.* Numerical simulation of the evolution of a gas bubble in a liquid near a wall. *Math. Models Comput. Simul.*, 2018, vol. 10, no. 1, pp. 89–98. <https://doi.org/10.1134/S2070048218010027>.
3. *Sarkar P., Ghigliotti G., Fivel M., Franc J.-P.* Numerical investigation of the dynamics of pressure loading on a solid boundary from a collapsing cavitation bubble. *Proc. 10th Int. Symp. on Cavitation (CAV2018)*. Katz J. (Ed.). ASME Press, 2018, pp. 765–770. https://doi.org/10.1115/1.861851_ch146.
4. *Lechner C., Lauterborn W., Koch M., Mettin R.* Jet formation from bubbles near a solid boundary in a compressible liquid: Numerical study of distance dependence. *Phys. Rev. Fluids*, 2020, vol. 5, no. 9, art. 093604. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.093604>.

5. Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Numerical study of the dynamics of a gas bubble near a wall under ultrasound excitation. *Lobachevskii J. Math.*, 2021, vol. 42, no. 1, pp. 24–29. <https://doi.org/10.1134/S1995080221010042>.
6. Blake J.R., Robinson P.B., Shima A., Tomita Y. Interaction of two cavitation bubbles with a rigid boundary. *J. Fluid Mech.*, 1993, vol. 255, pp. 707–721. <https://doi.org/10.1017/S0022112093002654>.
7. Shervani-Tabar M.T., Maghsoudi K. Numerical study on the splitting of a vapour bubble in the process of EDM. *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, 2008, vol. 38, no. 7, pp. 657–673. <https://doi.org/10.1007/s00170-007-1123-8>.
8. Aganin A.A., Guseva T.S., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Dynamics of an acoustically excited gas cavity attached to a rigid surface. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 11, pp. 1897–1903. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110040>.
9. Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Influence of the initial shape of a gas bubble on its dynamics near a wall under acoustic excitation. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 7, pp. 1235–1241. <https://doi.org/10.1134/S1995080220070227>.
10. Ma C., Shi D., Li C., Wang M., He D. Experimental research on the electric spark bubble load characteristics under the oblique 45 degree curved surface boundary. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2021, vol. 9, no. 1, art. 32. <https://doi.org/10.3390/jmse9010032>.
11. Ma C., Shi D., Li C., He D., Li G., Lu K. Numerical study of the pulsation process of spark bubbles under three boundary conditions. *J. Mar. Sci. Eng.*, 2021, vol. 9, no. 6, art. 619. <https://doi.org/10.3390/jmse9060619>.
12. Cui R.-N., Li S., Wang S.-P., Zhang A.-M. Pulsating bubbles dynamics near a concave surface. *Ocean Eng.*, 2022, vol. 250, art. 110989. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.110989>.
13. Aganin A.A., Kosolapova L.A., Malakhov V.G. Bubble dynamics near a locally curved region of a plane rigid wall. *Phys. Fluids*, 2022, vol. 34, no. 9, art. 097105. <https://doi.org/10.1063/5.0105955>.
14. Rossinelli D., Hejazialhosseini B., Hadjidoukas P., Bekas C., Curioni A., Bertsch A., Futral S., Schmidt S.J., Adams N.A., Koumoutsakos P. 11 PFLOP/s simulations of cloud cavitation collapse. *SC'13: Proc. Int. Conf. on High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*. Denver, CO, IEEE, 2013, pp. 1–13. <https://doi.org/10.1145/2503210.2504565>.
15. Tiwari A., Pantano C., Freund J.B. Growth-and-collapse dynamics of small bubble clusters near a wall. *J. Fluid Mech.*, 2015, vol. 775, pp. 1–23. <https://doi.org/10.1017/jfm.2015.287>.
16. Zhang L., Zhang J., Deng J. Numerical investigation on the collapse of a bubble cluster near a solid wall. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, art. 043108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.043108>.
17. Ogloblina D., Schmidt S.J., Adams N.A. Simulation and analysis of collapsing vapor-bubble clusters with special emphasis on potentially erosive impact loads at walls. *EPJ Web Conf.*, 2018, vol. 180, art. 02079. <https://doi.org/10.1051/epjconf/201818002079>.
18. Zhang J., Zhang L., Deng J. Numerical study of the collapse of multiple bubbles and the energy conversion during bubble collapse. *Water*, 2019, vol. 11, no. 2, art. 247. <https://doi.org/10.3390/w11020247>.

19. Ye J., Zhang J., Huang T. Direct numerical simulation of bubble cluster collapse: Shape evolution and energy transfer mechanisms. *Processes*, 2023, vol. 11, no. 7, art. 2191. <https://doi.org/10.3390/pr11072191>.
20. Ma J., Hsiao C.-T., Chahine G.L. Numerical study of acoustically driven bubble cloud dynamics near a rigid wall. *Ultrason. Sonochem.*, 2018, vol. 40, pt. A, pp. 944–954. <https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2017.08.033>.
21. Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L. A unified theory for bubble dynamics. *Phys. Fluids*, 2023, vol. 35, no. 3, art. 033323. <https://doi.org/10.1063/5.0145415>.
22. Zhang A.-M., Li S.-M., Cui P., Li S., Liu Y.-L. Theoretical study on bubble dynamics under hybrid-boundary and multi-bubble conditions using the unified equation. *Sci. China: Phys., Mech. Astron.*, 2023, vol. 66, no. 12, art. 124711. <https://doi.org/10.1007/s11433-023-2204-x>.
23. Aganin A.A., Davletshin A.I. A particle model of interaction between slightly non-spherical bubbles. *Appl. Math. Model.*, 2024, vol. 126, pp. 185–205. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.10.031>.
24. Davletshin A.I. Interaction of bubbles in liquid near a flat rigid wall. *Lobachevskii J. Math.*, 2025, vol. 46, no. 5, pp. 2005–2015. <https://doi.org/10.1134/S1995080225607040>.

Информация об авторах

Анас Ильгизович Давлетшин, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5974-881X>

Александр Алексеевич Аганин, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт механики и машиностроения Федерального исследовательского центра «Казанский научный центр Российской академии наук»

E-mail: aganin54@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7714-713X>

Author Information

Anas I. Davletshin, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5974-881X>

Alexander A. Aganin, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Chief Researcher, Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center, Russian Academy of Sciences

E-mail: aganin54@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7714-713X>

Поступила в редакцию 19.08.2025

Принята к публикации 28.08.2025

Received August 19, 2025

Accepted August 28, 2025