УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2023, Т. 165, кн. 2
С. 143–152

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.853

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.143-152

РЕЛАКСАЦИОННЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ОТСЕЧЕНИЙ С АППРОКСИМАЦИЕЙ ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕНИЙ

И. Я. Заботин, О. Н. Шульгина, Р. С. Яруллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Предложен метод решения задачи выпуклого программирования. Он относится к группе методов отсечений, в которых для построения итерационных точек используется операция погружения области ограничений задачи в некоторые многогранные множества. Предлагаемый метод характерен следующим. Последовательность приближений строится в нем принадлежащей допустимому множеству, причем с условием релаксационности, и через конечное число шагов фиксируется ε-решение исходной задачи. Кроме того, метод позволяет получать на его основе смешанные сходящиеся алгоритмы, привлекая при желании к построению основных итерационных точек любые известные или новые релаксационные алгоритмы.

Ключевые слова: выпуклое программирование, последовательность приближений, релаксационность, сходимость, аппроксимация, обобщенно-опорный вектор, субдифференциал, отсекающая плоскость

Введение

Класс методов отсечений для решения задач выпуклого программирования хорошо известен и довольно широк (например, [1–7]). В отдельную группу можно выделить те из них, где для построения приближений используется аппроксимация многогранными множествами области ограничений исходной задачи (например, [1, 4]). Такие методы применяются обычно, если целевая функция является линейной или выпуклой квадратичной, поскольку в таком случае вспомогательные задачи отыскания итерационных точек представляют собой задачи линейного или, соответственно, квадратичного программирования.

В методах названной группы итерационные точки строятся не принадлежащими допустимому множеству. Для практических задач такие процессы приближения к решению, идущие вне области ограничений, не всегда приемлемы. Так, например, для многих многокритериальных оптимизационных задач необходимо, чтобы их решение, полученное любым подходящим методом, было допустимой точкой множества ограничений (например, [8]). Вообще непринадлежность итерационных точек, а значит, и решения исходной задачи, допустимому множеству зачастую относят к недостаткам соответствующего метода математического программирования (например, [9], с. 256).

Предлагаемый здесь метод относится к упомянутой выше группе методов отсечений, т. е. использует аппроксимацию области ограничений, но отличается тем, что все основные итерационные точки строятся в нем принадлежащими допустимому множеству. Кроме того, подчеркнем, что процесс построения приближений в настоящем методе является релаксационным, и это обеспечивает сходимость к множеству решений всей последовательности приближений в отличие от известных методов отсечений, где сходимость гарантируется лишь по подпоследовательности. Отметим, что при этом наличие релаксационности не увеличивает трудоемкость метода по сравнению с трудоемкостью, например, классического метода отсечений [1], если условие (4) выбора итерационной точки в предлагаемом методе реализовать в виде строгого равенства.

Отметим еще одну особенность метода. Условие выбора итерационной точки основной последовательности допускает привлечение к ее отысканию любых известных или новых (в том числе эвристических) релаксационных алгоритмов. Тем самым имеется возможность построения на основе метода различных смешанных релаксационных алгоритмов. При этом сходимость таких новых алгоритмов уже не придется доказывать – она будет следовать из обоснованной сходимости предлагаемого метода.

Ниже обсуждены некоторые реализации предложенного метода. Приведены оценки близости текущих значений целевой функции к ее оптимальному значению, а при дополнительных условиях на исходную задачу – оценки близости итерационных точек к ее решению. Представлены результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи

Пусть $f(x)$ – выпуклая в n-мерном евклидовом пространстве $\mathrm{R_n}$ функция, принимающая в каждой точке пространства конечное значение, $D \subset \mathrm{R_n}$ – выпуклое, замкнутое и имеющее непустую внутренность $\operatorname{int} D$ множество. Решается задача

$$\min\{f(x) : x \in D\}. \tag{1}$$

Пусть $f^* = \min\{f(x) : x \in D\} > -\infty$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $x^* \in X^*$, $E^* = \{x \in \mathrm{R_n} : f(x) \le f^*\}$, $A(y) = \{a \in \mathrm{R_n} : \|a\| = 1, \langle a, x - y\rangle \le 0 \ \forall x \in D\}$ – множество векторов, нормированных и обобщенно-опорных к множеству D в точке $y \in \mathrm{R_n}$, $K = \{0, 1, \ldots\}$.

2. Метод решения задачи

Предложенный релаксационный метод отсечений для решения задачи (1) вырабатывает последовательность приближений $\{x_k\}$, $k \in K$, следующим образом.

Построим выпуклое ограниченное замкнутое множество $M_0 \subset \mathrm{R_n}$ такое, что $x^* \in M_0$. Зададим числа $q \ge 1, \varepsilon > 0$, выберем точку $v \in \operatorname{int} D$, положив $x_{-1} = v, k = 0$.

1. Найдем точку
$$y_k \in M_k \bigcap E^*. \tag{2}$$
Если $y_k \in D$, то y_k – решение задачи (1), и процесс прекращается.

2. Положим
$$z_k = \lambda_k v + (1 - \lambda_k) y_k, \quad \tilde{y}_k = y_k + q_k (z_k - y_k),$$
где числа λ_k, q_k выбраны с условием, что $\lambda_k \in (0, 1)$, $q_k \in [1, q]$, и
$$z_k \notin \operatorname{int} D, \quad \tilde{y}_k \in D.$$

Если выполняется неравенство

$$f(\tilde{y}_k) - f(y_k) \le \varepsilon, \tag{3}$$

то $\tilde{y}_k$ – ε-решение задачи (1).

3. Выберем такую точку $x_k \in D$, что

$$f(x_k) \le \min\{f(\tilde{y}_k), f(x_{k-1})\}. \tag{4}$$

Если при этом

$$f(x_k) - f(y_k) \le \varepsilon, \tag{5}$$

то x_k – ε-решение задачи (1).

4. Выберем конечное множество $A_k \subset A(z_k)$ и положим

$$M_{k+1} = M_k \bigcap P_k, \tag{6}$$

где $P_k = \{x \in \mathrm{R_n} : \langle a, x - z_k \rangle \le 0 \ \forall a \in A_k\}$.

5. Значение k увеличим на единицу и осуществим переход к п. 1.

3. Обсуждение метода

Приведем некоторые замечания, касающиеся предложенного метода и его реализаций.

С учетом задания M_0 и способа (6) построения множеств M_k легко доказать, что $x^* \in M_k$, $k \in K$. Поэтому $M_k \bigcap E^* \ne \emptyset$, и выбор точек y_k из условия (2) возможен для всех $k \in K$. В частности, точку y_k можно найти согласно следующему условию:

$$f(y_k) = \min\{f(x) : x \in M_k\}. \tag{7}$$

Если функция $f(x)$ является линейной или выпуклой квадратичной, а множество M_0 выбрано в виде многогранника, то с учетом (6) построение вспомогательных точек y_k, $k \in K$, из условия (7) приведет к решению задач линейного или, соответственно, квадратичного программирования.

Заметим, что в связи с включением $y_k \in E^*$, $k \in K$, критерий оптимальности, заложенный в п. 1 метода, очевиден.

Если при построении точек z_k, $\tilde{y}_k$ в п. 2 метода положить $q_k = 1$, то z_k будет точкой пересечения отрезка $[v, y_k]$ с границей множества D. Фактически при $q > 1$ условие выбора чисел $q_k \in [1, q]$ позволяет найти упомянутую точку пересечения приближенно.

Как уже сказано во введении, основная последовательность приближений x_k строится в методе с условием релаксационности. Обсудим возможности, которые предоставляет неравенство (4) для выбора точек x_k. Например, допустимо при каждом $k \in K$ положить $x_k = \tilde{y}_k$, если

$$f(\tilde{y}_k) \le f(x_{k-1}), \tag{8}$$

или $x_k = x_{k-1}$, если

$$f(x_{k-1}) \le f(\tilde{y}_k). \tag{9}$$

Задание точки x_{-1} на предварительном шаге метода можно опустить и при $k = 0$ положить

$$x_0 = \tilde{y}_0,$$

считая при этом, что в (4) $x_{-1} = \tilde{y}_0$.

Неравенство (4) может выполняться при всех $k \in K$ и как строгое. Для построения точки x_k из условия

$$f(x_k) < \min\{f(\tilde{y}_k), f(x_{k-1})\} \tag{10}$$

можно привлекать любые подходящие процедуры, в том числе известные или новые релаксационные алгоритмы, пригодные для решения задачи (1). Пусть для этой цели выбран некоторый подходящий алгоритм. В зависимости от выполнения неравенства (8) или (9) из точки $\tilde{y}_k$ или, соответственно, точки x_{k-1} этим алгоритмом можно сделать один или несколько шагов и полученное в результате приближение принять за x_k.

Такой способ нахождения точки x_k из условия (10) говорит о возможности построения на основе предложенного здесь метода новых, так называемых смешанных, релаксационных алгоритмов решения задачи (1). При этом сходимость таких смешанных алгоритмов будет гарантироваться доказанной ниже теоремой 1 сходимости предложенного метода.

Сделаем еще одно замечание, касающееся критериев ε-оптимальности точки, заложенных в пп. 2, 3 метода. Согласно (2)

$$f(y_k) \le f^*, \quad k \in K,$$

и в силу включений $\tilde{y}_k \in D$, $x_k \in D$ имеют место неравенства

$$f(\tilde{y}_k) \ge f^*, \quad f(x_k) \ge f^*, \quad k \in K.$$

В связи с этим для каждого $k \in K$ можно оценить близость текущих значений целевой функции в точках $\tilde{y}_k$, x_k к ее оптимальному значению. Поэтому при выполнении неравенств (3), (5) фиксируется ε-решение исходной задачи, и процесс построения приближений при желании можно завершить.

4. Сходимость метода

Перейдем к обоснованию сходимости построенного метода. Сразу отметим, что ввиду ограниченности множества M_0 вместе с последовательностью $\{y_k\}$, $k \in K$, будут ограниченными и последовательности $\{z_k\}$, $\{\tilde{y}_k\}$, $\{x_k\}$, $k \in K$.

Лемма 1. *Существует такое $\beta > 0$, что для всех $z \in M_0 \setminus \operatorname{int} D$ и всех $a \in A(z)$ справедливо неравенство $\langle a, z - v\rangle \ge \beta$.*

Доказательство утверждения приведено в [10].

Лемма 2. *Пусть последовательности $\{y_k\}$, $\{z_k\}$, $k \in K$, построены согласно предложенному методу. Если $\{y_k\}$, $k \in K_1 \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_k\}$, $k \in K$, то $\lim\limits_{k \in K_1} \|z_k - y_k\| = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем номера l, $p_l \in K_1$ так, что $p_l > l$. В силу (6) $M_{p_l} \subset M_l$. Кроме того, $y_{p_l} \in M_{p_l}$ согласно (2), и любой вектор $a \in A_l$ является обобщенно-опорным в точке z_l к множеству M_{p_l}. Поэтому $\langle a, y_{p_l} - z_l\rangle \le 0$ для всех $a \in A_l$. Но

$$z_k = y_k + \lambda_k(v - y_k), \quad k \in K. \tag{11}$$

Значит, $\langle a, y_l - y_{p_l}\rangle \ge \lambda_l \langle a, y_l - v\rangle$ для всех $a \in A_l$. По лемме 1 существует такое $\beta > 0$, что $\langle a, y_k - v\rangle \ge \beta$, $k \in K_1$, $a \in A_k$. Следовательно, $\langle a, y_l - y_{p_l}\rangle \ge \beta\lambda_l$ для всех $a \in A_l$. Отсюда получим $\|y_{p_l} - y_l\| \ge \beta\lambda_l$. Из этого неравенства и сходимости последовательности $\{y_k\}$, $k \in K_1$, вытекает предельное соотношение $\lambda_k \to 0$, $k \in K_1$. Тогда из (11) с учетом ограниченности $\{\|v - y_k\|\}$, $k \in K_1$, следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, *– сходящаяся подпоследовательность последовательности* $\{x_k\}$, $k \in K$, *построенной согласно предложенному методу, а* $\bar{x}$ *– предельная точка этой подпоследовательности. Тогда*

$$\bar{x} \in X^*. \tag{12}$$

Доказательство. Так как по построению $x_k \in D$, $k \in K'$, то ввиду замкнутости множества D выполняется включение $\bar{x} \in D$. Следовательно,

$$f(\bar{x}) \geq f^*. \tag{13}$$

Далее, поскольку $\tilde{y}_k = y_k + q_k(z_k - y_k)$, $k \in K'$, то согласно (4)

$$f(x_k) \leq f(y_k + q_k(z_k - y_k)), \quad k \in K'. \tag{14}$$

Выделим из последовательности $\{y_k\}$, $k \in K'$, сходящуюся подпоследовательность $\{y_k\}$, $k \in K'' \subset K'$, и пусть $\bar{y}$ – ее предельная точка. Отметим, что последовательность $\{q_k\}$, $k \in K''$, ограничена, а по лемме 2 $\|z_k - y_k\| \to 0$, $k \to \infty$, $k \in K''$. Тогда из (14) следует неравенство

$$f(\bar{x}) \leq f(\bar{y}). \tag{15}$$

В силу (2) $f(y_k) \leq f^*$, $k \in K''$. Значит, $f(\bar{y}) \leq f^*$, и в силу (15) имеем $f(\bar{x}) \leq f^*$. Отсюда и из (13) следует включение (12). Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{x_k\}$, $k \in K$, *построена согласно предложенному методу. Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f^*$.

Доказательство. По построению последовательность $\{f(x_k)\}$ является монотонно убывающей. Кроме того, в силу условий задачи (1) она ограничена. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = \gamma$. Покажем, что $\gamma = f^*$. Действительно, пусть $\{x_k\}$, $k \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, $k \in K$, и $\bar{x}$ – ее предельная точка. Тогда с учетом непрерывности $f(x)$ и леммы 3 имеем

$$\lim_{k\in K} f(x_k) = \gamma = \lim_{k\in K'} f(x_k) = f(\bar{x}) = f^*.$$

Теорема доказана. □

Из теоремы 1 и известной теоремы (например, [11, с. 62]) вытекает

Следствие 1. *Последовательность* $\{x_k\}$, $k \in K$, *построенная согласно предложенному методу, сходится к множеству* X^*.

Выше при обсуждении метода было отмечено, что на каждой итерации можно оценить близость текущего значения целевой функции к оптимальному значению, поскольку $f(x_k) \geq f^* \geq f(y_k)$, $k \in K$. Покажем теперь, что при некоторых дополнительных требованиях к задаче (1) и выборе точек x_k с дополнительным условием $x_k \in \operatorname{int} D$ можно оценить близость не только значений $f(x_k)$ к f^*, но и самих приближений x_k к решению.

Пусть допустимое множество исходной задачи имеет вид

$$D = \{x \in \mathrm{R_n} : F(x) \leq 0\},$$

где $F(x) = \max\limits_{j\in J} f_j(x)$, а функции $f_j(x)$ являются сильно выпуклыми в $\mathrm{R_n}$ с константами сильной выпуклости μ_j соответственно. Кроме того, будем считать далее, что множество D удовлетворяет условию Слейтера, и любая точка абсолютного минимума функции $f(x)$, при наличии таковой, не принадлежит $\operatorname{int} D$, т. е. решение задачи достигается на границе множества D.

Использовав определение сильной выпуклости функций $f_j(x)$, $j \in J$, легко доказать, что функция $F(x)$ также является сильно выпуклой с константой сильной выпуклости $\mu = \min\limits_{j \in J} \mu_j$.

Покажем, что при сделанных дополнительных предположениях решение задачи (1) единственно. Допустим противное, т. е. существуют хотя бы две отличные друг от друга точки x_1^*, $x_2^* \in X^*$. Положим $z = \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*$, где $\alpha \in (0,1)$. Тогда с учетом строгой выпуклости функции $F(x)$ и равенств $F(x_1^*) = 0$, $F(x_2^*) = 0$ имеем $F(z) < \alpha F(x_1^*) + (1-\alpha)F(x_2^*) = 0$, и значит, $f(z) > f^*$. С другой стороны, $f(z) \le \alpha f(x_1^*) + (1-\alpha) f(x_2^*) = f^*$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение. В связи с доказанным будем считать, что $X^* = \{x^*\}$.

Положим $D_\gamma = \{x \in \mathrm{R_n} : -\gamma \le F(x) \le 0\}$, где $\gamma > 0$. С использованием методики [12] покажем, что если $y \in D_\gamma$, $F(y) < 0$ и для точек $z = \alpha x^* + (1-\alpha)y$ при всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$F(z) > F(y), \tag{16}$$

то

$$\|x^* - y\| \le \sqrt{\gamma/\mu}. \tag{17}$$

Действительно, так как $y \ne x^*$ и согласно (16)

$$\frac{F(y + \alpha(x^* - y)) - F(y)}{\alpha} > 0$$

для всех $\alpha \in (0,1)$, то, перейдя в последнем неравенстве к пределу по $\alpha \to 0+$, получим для производной $F'(y, x^* - y)$ функции $F(x)$ в точке y по направлению $x^* - y$ следующее неравенство:

$$F'(y, x^* - y) \ge 0. \tag{18}$$

Известно (например, [13, с. 74]), что

$$F'(y, x^* - y) = \max\{\langle c(y), x^* - y\rangle : c(y) \in \partial F(y)\},$$

где $\partial F(y)$ – субдифференциал функции $F(x)$ в точке y. Отсюда и из (18) следует существование такого $c \in \partial F(y)$, что

$$\langle c, x^* - y\rangle \ge 0. \tag{19}$$

Поскольку функция $F(x)$ сильно выпукла, то (см., например, [11, с. 243])

$$F(x^*) \ge F(y) + \langle c, x^* - y\rangle + \mu\|x^* - y\|^2.$$

Из этого неравенства с учетом (19) и равенства $F(x^*) = 0$ следует, что $-F(y) \ge \mu\|x^* - y\|^2$. Но по условию $y \in D_\gamma$, т. е. $F(y) \ge -\gamma$, и значит, оценка (17) доказана.

Согласно следствию 1 при фиксированном $\gamma > 0$, начиная с некоторого номера $k \in K$, выполняются включения $x_k \in D_\gamma$. Если при этом $x_k \in \operatorname{int} D$ и выполняется условие (16), где $y = x_k$, то имеет место оценка $\|x_k - x^*\| \le \sqrt{\gamma/\mu}$.

5. Вычислительные эксперименты

Были проведены вычислительные эксперименты на следующей тестовой задаче:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i \to \min, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq 4, \tag{21}$$

где $c = (c_1, \ldots, c_n) = (-1, \ldots, -1)$. В экспериментах сравнивались метод [1] и предложенный метод отсечений со следующими параметрами:

1) $M_0 = \{x \in R_n : -100 \leq x_i \leq 100, 1 \leq i \leq n\}$;

2) $v = (0, \ldots, 0)$;

3) в качестве x_k была выбрана рекордная из точек x_{k-1}, $\tilde{y}_k$.

В сравниваемых методах итерационный процесс останавливался в случае, когда расстояние между соседними приближениями не превосходило заранее фиксированной величины $\varepsilon > 0$. Кроме того, при выполнении вычислительных экспериментов в предложенном методе отслеживалось условие (3). Ниже в таблице приведены результаты экспериментов.

Табл. 1

Результаты вычислительных экспериментов

Метод	n	ε	Количество итераций	Время (сек)	Приближенное значение
1	5	0.000000001	95	0.362	-4.47214
2	5	0.000000001	66	0.17	-4.47213
1	10	0.0001	474	10.833	-6.32456
2	10	0.0001	255	2.603	-6.32455
1	20	0.0001	976	139.425	-8.94427
2	20	0.0001	634	28.305	-8.94417
1	30	0.0001	2278	593.461	-10.9545
2	30	0.0001	1303	158.162	-10.9544
1	40	0.0001	-	-	-
2	40	0.0001	2162	1615.97	-12.649

Прокомментируем результаты вычислительных экспериментов, представленных в таблице 1. В первом столбце перечислены исследуемые методы, а именно, 1 — метод отсечений [1], 2 — предложенный метод. Во втором столбце — размерности тестовой задачи (20), (21). В третьем столбце указаны значения параметра, учитываемого в критериях остановки. В вычислительных экспериментах произведен подсчет количества итераций (четвертый столбец) и времени в секундах (пятый столбец), затраченных исследуемыми методами для отыскания приближений, удовлетворяющих вышеупомянутым критериям остановки, и полученные рекордные значения целевой функции представлены в последнем столбце таблицы 1.

Результаты экспериментов показали следующее. Предложенный метод обеспечивал заданную точность решения всех примеров за меньшее число итераций и меньшее время по сравнению с методом [1].

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Литература

1. *Булатов В.П.* Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск: Наука, 1977. 158 с.
2. *Булатов В.П., Хамисов О.В.* Метод отсечения в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, № 11. С. 1830–1842.
3. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
4. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Об одном подходе к построению алгоритмов отсечений с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Изв. вузов. Матем. 2013. № 3. С. 74–79.
5. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Метод отсечений на основе аппроксимации надграфика с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Автомат. и телемех. 2015. № 11. С. 76–88.
6. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 278 с.
7. *Нурминский Е.А.* Метод отделяющих плоскостей с ограниченной памятью для решения задач выпуклой негладкой оптимизации // Выч. мет. программирование. 2006. Т. 7, № 1. С. 133–137.
8. *Волконский В.А., Еганян Г.К., Поманский А.Б.* О множестве эффективных точек в линейных многокритериальных задачах // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24, № 2. С. 9–17.
9. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
10. *Заботин И.Я.* О некоторых алгоритмах погружений-отсечений для задачи математического программирования // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2011. Т. 4, № 2. С. 91–101.
11. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Кн. 1. М.: МЦНМО, 2011. 624 с.
12. *Заботин Я.И., Фукин И.А.* Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования // Изв. вузов. Матем. 2000. № 12. С. 49–54.
13. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Поступила в редакцию 7.08.2023
Принята к публикации 15.09.2023

Заботин Игорь Ярославич, доктор физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *iyazabotin@mail.ru*

Шульгина Оксана Николаевна, кандидат физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *onshul@mail.ru*

Яруллин Рашид Саматович, кандидат физико-математических наук, кафедра анализа данных и технологий программирования Института вычислительной математики и информационных технологий

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *yarullinrs@gmail.com*

ISSN 2541–7746 (Print)
ISSN 2500–2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2023, vol. 165, no. 2, pp. 143–152

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2023.2.143-152

A Relaxed Version of the Cutting Method with Approximation of the Constraint Region

*I.Ya. Zabotin**, *O.N. Shulgina***, *R.S. Yarullin****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **iyazabotin@mail.ru*, ***onshul@mail.ru*, ****yarullinrs@gmail.com*

Received August 7, 2023; Accepted September 15, 2023

Abstract

A cutting method was proposed for solving the convex programming problem. The method assumes that the constraint region of the problem is embedded into some polyhedral sets for constructing iteration points. It involves the construction of a sequence of approximations that belongs to the admissible set and is relaxed, as well as implies that the ε-solution of the initial problem is fixed after a finite number of steps. The method also allows to obtain mixed convergent algorithms by using, if desired, any known or new relaxation algorithms for constructing the main iteration points.

Keywords: convex programming, sequence of approximation, relaxation, convergence, approximation, generalized support vector, subdifferential, cutting plane

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (PRIORITY-2030).

References

1. Bulatov V.P. *Metody pogruzheniya v zadachakh optimizatsii* [Imbedding Methods in Optimization Problems]. Novosibirsk, Nauka, 1977. 158 p. (In Russian)
2. Bulatov V.P., Khamisov O.V. Cutting methods in E^{n+1} for global optimization of a class of functions. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 11, pp. 1756–1767. URL: https://doi.org/10.1134/S0965542507110036.
3. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable Optimization]. Moscow, Nauka, 1981. 384 p. (In Russian)
4. Zabotin I.Ya., Yarullin R.S. One approach to constructing cutting algorithms with dropping of cutting planes. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 3, pp. 60–64. URL: https://doi.org/10.3103/S1066369X13030092.
5. Zabotin I.Ya., Yarullin R.S. Cutting-plane method based on epigraph approximation with discarding the cutting planes. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 11, pp. 1966–1975. URL: https://doi.org/10.1134/S0005117915110065.
6. Nesterov Yu.E. *Vvedenie v vypukluyu optimizatsiyu* [Introduction to Convex Optimization]. Moscow, MTsNMO, 2010. 278 p. (In Russian)
7. Nurminskii E.A. The separating planes method with bounded memory for convex nonsmooth optimization problems. *Vychisl. Metody Program.*, 2006, vol. 7, no. 1, pp. 133–137. (In Russian)

8. Volkonskii V.A., Eganyan G.K., Pomanskii A.B. Set of efficient points in linear multicriteria problems. *Sib. Math. J.*, 1983, vol. 24, no. 2, pp. 159–167. URL: https://doi.org/10.1007/BF00968733.
9. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu* [Introduction to Optimization]. Moscow, Nauka, 1983. 384 p. (In Russian)
10. Zabotin I.Ya. Some embedding-cutting algorithms for mathematical programming problems. *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.*, 2011, vol. 4, no. 2, pp. 91–101. (In Russian)
11. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Book 1. Moscow, MTsNMO, 2011. 624 p. (In Russian)
12. Zabotin Ya.I., Fukin I.A. One modification of the penalty shifting method for problems of nonlinear programming. *Russ. Math. (Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved.)*, 2000, vol. 44, no. 12, pp. 47–52.
13. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex Analysis and Extremal Problems]. Moscow, Nauka, 1980. 320 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Заботин И.Я., Шульгина О.Н., Яруллин Р.С.* Релаксационный вариант метода отсечений с аппроксимацией области ограничений // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 143–152. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.143-152. ⟩

⟨ ***For citation*:** Zabotin I.Ya., Shulgina O.N., Yarullin R.S. A relaxed version of the cutting method with approximation of the constraint region. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2023, vol. 165, no. 2, pp. 143–152. URL: https//doi.org/10.26907/2541-7746.2023.2.143-152. (In Russian) ⟩